Таврійський державний агротехнологічний університет
імені Дмитра Моторного
Міністерство освіти і науки України

Київський національний університет будівництва і архітектури
Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна робота на
правах рукопису

Гавриленко Євген Андрійович

УДК 514.18

ДИСЕРТАЦІЯ

Моделювання обводів у просторі можливого розташування монотонних кривих

05.01.01. – Прикладна геометрія, інженерна графіка

Технічні науки

Подається на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук.
Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів містять посилання на відповідне джерело.

_____ Є.А. Гавриленко

Науковий консультант: Найдиш Андрій Володимирович, д.т.н., професор

Київ – 2020

АНОТАЦІЯ

Гавриленко Є.А. Моделювання обводів у просторі можливого розташування монотонних кривих. – Кваліфікаційна наукова робота на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 05.01.01 – Прикладна геометрія, інженерна графіка – Київський національний університет будівництва і архітектури.

Захист відбудеться в Київському національному університеті будівництва і архітектури, Київ, 2020 р.

У дисертації розв'язується наукова проблема моделювання обводів точкових рядів довільної конфігурації, які із заданою точністю представляють криві лінії з відомими геометричними властивостями.

Для розв'язування поставленого завдання необхідно розробити метод інтерполяції, який забезпечує контроль динаміки зміни уздовж кривої, яка моделюється значень її характеристик, можливість глобального та локального коригування розв'язку, запобігання неконтрольованого виникнення особливих точок. Як показав проведений аналіз, жоден з існуючих методів геометричного моделювання не задовольняє повною мірою висунутим вимогам.

З існуючих напрямків геометричного моделювання завданням даного дисертаційного дослідження найбільшою мірою відповідає варіативне дискретне геометричне моделювання (ВДГМ). Особливістю цього напряму є визначення можливої, за умовами завдання, області розташування кривої, що формується і вибір оптимального, виходячи із заданих критеріїв, варіанту розв'язку.

На даний момент потенціал ВДГМ в розв'язуванні задач інтерполяції точкових рядів складної конфігурації в значній мірі не реалізований через відсутність ефективних механізмів контролю геометричних властивостей кривої лінії, що формується у вигляді точкового ряду, який їй належить, і оцінки точності дискретної інтерполяції. З цього випливає актуальність розробки методу ВДГМ дискретно представлених кривих (ДПК) на основі області можливого розташування їх частин, уздовж яких значення характеристик кривої змінюються монотонно.

Поділ ДПК на частини з монотонною зміною характеристик засновано на запропонованій в роботі класифікації монотонних кривих ліній – кривих постійного ходу, вздовж яких значення радіусів стичних кіл і сфер монотонно зростають або зменшуються. Можливі вісім варіантів поєднання зазначених характеристик кривої, які визначають її монотонність, що дозволяє розглядати і формувати будь-яку криву лінію, як таку, що складається з монотонних частин зістикованих в особливих точках.

Теоретичну основу розроблених в дисертації способів моделювання ДПК склали результати дослідження характеристик полярних торсів та їх ребер звороту, які відповідають кожному типу монотонної кривої, а також умови стикування полярних торсів, які забезпечують регулярність

характеристик кривої в особливих точках. В результаті визначено та класифіковано можливі варіанти конфігурації ребер звороту, що складаються з частин постійного ходу зістикованих в точках перегину або звороту, які задають полярні торси кривих ліній з відомим поєднанням характеристик. Це можуть бути ребра звороту полярних торсів, які задають криві, що складаються з будь-якого поєднання монотонних частин і містять будь-який набір особливих точок – точок перегину, зміни ходу, зміни напряму зростання вздовж кривої радіусів стичних кіл і сфер. Встановлені взаємозв'язки відкривають можливість моделювання ДПК виходячи з характеристик її полярного торса без використання функцій, які задають ділянки кривої.

Необхідною умовою моделювання ДПК з мінімальною, виходячи з вихідних умов, кількістю особливих точок є попередній аналіз вихідного точкового ряду з метою визначення його частин, які можливо інтерполювати монотонної кривою лінією. Запропонований в роботі спосіб аналізу точкового ряду заснований на використанні дискретних характеристик, які є аналогами геометричних характеристик кривої лінії і визначаються положенням послідовних точок, які задають ДПК.

Дискретна характеристика стичної площині – прилегла площина, що проходить через три послідовні точки точкового ряду. В якості дискретного скруту використовується величина відносини кута між суміжними прилеглими площинами до довжини відповідної хорди супровідної ламаної лінії. Радіус кривини в точці ДПК оцінюється радіусом прилеглого кола, яке визначається цією точкою, попередньою та наступною точками ряду. Дискретний аналог стичної сфери – прилегла сфера, яка перетинає криву в чотирьох послідовних вихідних точках. Пряма, яка проходить через центр i-го прилеглого кола та i-ої прилеглої сфери, використовується в якості аналога відповідної осі кривини. Встановлено, що закономірність зміни значень дискретних характеристик уздовж точкового ряду визначається закономірністю зміни відповідних геометричних характеристик уздовж монотонної кривої лінії, якої цей точковий ряд належить. Зазначені закономірності дають можливість визначати діапазони можливих значень геометричних характеристик ДПК за допомогою їх дискретних аналогів.

Запропонований спосіб аналізу розташування монотонної кривої щодо геометричних образів, заданих точками які їй належать, дозволив визначати область можливого розташування ДПК. Доведено, що ділянки кривої постійного ходу розташовані в межах прилеглих тетраедрів, обмежених чотирма послідовними прилеглими площинами. Монотонна ДПК розташовується в межах ланцюжка сферичних тригранників, кожен з яких обмежений ділянками трьох послідовних прилеглих сфер. Область можливого розташування є необхідною характеристикою монотонної ДПК. Конфігурація її меж дозволяє визначити тип монотонної кривої, якою можливо інтерполювати точковий ряд.

Точність оцінки значень характеристик ДПК підвищується при використанні в якості їх дискретних аналогів площин, кіл та сфер, які проходять через точки ДПК та мають з нею спільну дотичну пряму.

Доведено, що обмежені дотичними площинами тетраедри та обмежені дотичними сферами тригранники уточнюють область можливого розташування монотонної ДПК. Їх розташування всередині відповідних прилеглих тетраедрів і сферичних тригранників є критерієм коректного призначення прямих, дотичних до монотонної ДПК в точках, що її задають.

У роботі встановлено, що найбільш повну комплексну оцінку властивостей ДПК дає аналіз гранної полярної поверхні, яка є аналогом полярного торса кривої лінії. Розташування і конфігурація її граней, які належать до площин, які проходять через центри послідовних прилеглих або дотичних сфер, визначають усі дискретні характеристики, тип і область можливого розташування монотонних частин ДПК.

Запропонована схема згущен3ня точкового ряду заснована на призначенні точки згущення в межах контуру, одержуваного в перетині області можливого розташування ділянки монотонної кривої лінії площиною. Такий підхід дозволив звести формування просторової ДПК до розв’язання позиційних задач на площині.

Точки згущення ДПК постійного ходу призначаються в межах багатокутників, які є перетином прилеглих тетраедрів. Область можливого розташування точки згущення монотонної ДПК обмежена дугами кіл, які належать п'яти послідовним прилеглим сферам і визначається, таким чином, конфігурацією вихідного точкового ряду, що складається з восьми точок. Призначення точок згущення в межах зазначених багатокутників призводить до локалізації вихідної області розташування частини ДПК. Для ДПК постійного ходу ця частина спочатку обмежена трьома прилеглими тетраедрами, а для монотонної ДПК – сімома тригранниками прилеглих сфер .

Схема визначення положення точки згущення дозволяє враховувати всю область можливого розв’язку і контролювати локалізацію цій області при накладенні на сформовану ДПК додаткових умов.

Розроблені в дисертаційному дослідженні способи згущення точкового ряду засновані на формуванні ламаної звороту гранної полярної поверхні – просторової ламаної лінії, ланки якої обмежені центрами послідовних прилеглих сфер. Призначенню кожної точки згущення відповідає заміна чотирьох вихідних ланок ламаної звороту на п'ять нових, меншого розміру. Положення точки згущення однозначно визначає конфігурацію відповідної частини ламаної звороту і навпаки. Контроль конфігурації ламаної звороту, яка формується в процесі згущення точкового ряду, забезпечує призначення точок згущення в межах області розташування монотонної ДПК, яка послідовно локалізується. При цьому поєднання дискретних характеристик отриманого точкового ряду відповідає тому же типу монотонної ДПК, що і характеристики вихідного точкового ряду. Запропоновані способи згущення точкового ряду дозволяють відмовитися від аналітичного подання інтерполюючої кривої і контролювати її властивості через характеристики прилеглих тетраедрів, тригранників прилеглих сфер, гранної полярної поверхні.

Формування ДПК у вигляді точкового ряду означає, що крива не визначена однозначно на всіх етапах моделювання. Необхідною умовою формування ДПК є наявність області її розташування, яка послідовно локалізується в процесі згущення. Кожній умові, що накладається на ДПК, відповідають окремі обмеження на цю область. Задача формування ДПК, що задовольняє сукупності різних вимог, зводиться до визначення геометричних образів, які є перетином відповідних областей простору.

Контроль локалізації області розташування монотонної кривої покладено в основу запропонованих в роботі способів формування ДПК, в точках якої призначаються дотичні прямі, основні тригранники, стичні кола і сфери. Це способи згущення точкового ряду на основі дотичних тетраедрів, тригранників дотичних сфер і відповідної їм гранної полярної поверхні. Фіксація кожної з перерахованих характеристик ДПК уточнює область її можливого розташування. У свою чергу, конфігурація дотичних тетраедрів і сферичних тригранників однозначно визначає можливість формування, на їх основі, кривих постійного ходу і монотонних кривих відповідно.

Доведено, що геометричні характеристики, призначені в вузлах ДПК, дозволяють підвищити локальність її формоутворення. При формуванні монотонної ДПК, в точках якої визначені положення дотичних прямих, призначення кожної точки згущення призводить до локалізації області розташування частини кривої, яка обмежена трьома послідовними вихідними тригранниками дотичних сфер. При формуванні ДПК в межах області, межі якої визначено з урахуванням заданих у вихідних точках основних тригранників і стичних кіл, призначення точки згущення призводить до локалізації уточненої області розташування тільки однієї вихідної ділянки кривої. Підвищення локалізації формоутворення дозволяє моделювати ДПК по окремих ділянках, призначаючи на них будь-яку кількість точок згущення.

Проведені дослідження областей можливого розташування точок згущення і діапазонів можливих значень дискретних характеристик дозволило визначити необхідні і достатні умови формування монотонної ДПК. Монотонну ДПК можливо формувати на основі будь-якого точкового ряду, у якого прилеглі сфери обмежують тригранники, відповідні одному типу монотонної кривої. Щоб отримати згущений точковий ряд, що належить монотонної кривої, досить забезпечити відповідність характеристик сферичних тригранників, які формуються в процесі згущення, характеристикам вихідних тригранників прилеглих сфер.

Розроблені способи формування ДПК дозволяють враховувати при формуванні кривої як кутові, так і метричні дискретні характеристики. Спосіб заснований на використанні ламаної звороту гранної полярної поверхні найбільш універсальний. Він поєднує можливості способів, заснованих на використанні дотичних тетраедрів та тригранників дотичних сфер, і дозволяє контролювати динаміку зміни уздовж кривої, що формується , значень скруту, радіусів стичних кіл та сфер.

Запропонований в роботі єдиний підхід до згущення ДПК в околі особливих точок, заснований на контролі меж областей можливого

розташування її особливих ділянок. Це можуть бути точки перегину, зміни ходу, зміни напряму зростання вздовж кривої значень радіусів стичних кіл і сфер.

Універсальним критерієм наявності особливої точки на ділянці ДПК є поділ області її можливого розташування на дві області, які мають спільну межу. Характеристики кожної з цих областей відповідають властивостям однієї з двох монотонних кривих ліній, які стикуються в особливій точці. Використання критерію дозволило визначати ділянки, на яких ДПК обов'язково містить особливу точку, класифікувати цю точку і згущувати точковий ряд виходячи з характеристик кривої в околі особливої ділянки.

Встановлені залежності між характеристиками ДПК і межами області стикування її монотонних частин дозволили формувати ділянки, в межах яких в різних поєднаннях відбувається перегин, зміна ходу і зростання вздовж кривої радіусів стичних кіл і сфер. Запропонована схема згущення особливих ділянок в межах прилеглих тетраедрів дозволяє контролювати локалізацію області розташування ДПК в околі точок перегину і зміни ходу кривої. Призначення точок згущення в межах сферичних тригранників гарантує контроль області розташування ДПК в околі точок зміни напряму зростання вздовж кривої радіусів стичних кіл і сфер. Область розташування особливого ділянки отримуємо в перетині тетраедрів, обмежених прилеглими площинами і сферичних тригранників, які обмежені прилеглими сферами. Контроль локалізації області перетину тетраедрів і тригранників запобігає виникненню додаткових монотонних ділянок ДПК і забезпечує концентрацію зміни закономірності збільшення або зменшення значень різних характеристик кривої в одній особливій точці. Схема згущення особливої ділянки ДПК забезпечує контроль її послідовної локалізації. Точка згущення заміщає одну з вихідних точок – меж особливої ділянки, і для подальшого згущення стає її новою межею. Напрям локалізації уздовж ДПК особливої ділянки визначається вибором половини області її можливого розташування, в межах якої призначається точка згущення. Особливі ділянки , зменшуючись в розмірах, зміщується в бік однієї з монотонних частин ДПК в межі вироджуючись в особливу точку.

Встановлено, що кожній особливій ділянці ДПК відповідає особлива ділянка ламаної звороту. Конфігурація ламаної звороту дозволяє визначати ділянку ДПК, яка містить особливу точку, наявність або відсутність перегину та зміни ходу ДПК в особливій точці, тип монотонних частин ДПК, які стикуються в особливій точці.

Запропоновані способи згущення особливих ділянок дають можливість моделювати на основі точкового ряду довільної конфігурації ДПК, що складається з зістикованих в особливих точках монотонних частин. Контроль незапланованого виникнення особливих ділянок забезпечує формування ДПК, у якій число монотонних частин мінімально виходячи з конфігурації вихідного точкового ряду.

Розроблений в дисертації метод моделювання плоскої ДПК довільної конфігурації заснований на контролі властивостей її еволюти. Формування

ДПК здійснюється по частинах, уздовж яких можливо забезпечити монотонне зміна кривини. Монотонні частини стикуються в особливих точках – точках перегину і точках, в яких значення кривини досягає екстремуму. Положення нормалей і центрів кривини в точках монотонної ДПК призначається виходячи з умови рівності довжини еволюти і різниці значень радіусів кривини, відповідних її граничним точкам. Нормалі, призначені у вихідних точках, і відрізки, що з'єднують центри кривини, призначені на нормалях, обмежують послідовність базисних трикутників, яка є областю можливого розташування еволюти ДПК. Можливість формування монотонної ДПК на кожній з її ділянок контролюється співвідношенням довжин сторін базисного трикутника, при якому може бути забезпечена задана довжина ділянки еволюти. Згущення ДПК в околі точок перегину і точок зміни напряму зростання вздовж кривої значень кривини контролюється розташуванням двох ланцюжків базисних трикутників, кожний з яких задає еволюту однієї з монотонних частин ДПК.

На кожному кроці згущення послідовно призначається положення нормалі, що відповідає точці згущення, центру кривини, що належить цій нормалі, а потім і самої точки згущення. Кожен із зазначених елементів призначається в межах відповідного діапазону, який забезпечує задане співвідношення довжин сторін базисних трикутників, які отримуються в результаті згущення. Область можливого розташування плоскої монотонної ДПК визначається характеристиками, які задані в її точках. Межі розташування кожної ділянки складають дуги прилеглих, дотичних або с тичних кіл, які відповідають граничним точкам ділянки. Призначення в точках ДПК кожної з характеристик призводить до локалізації області її можливого розташування. Контроль розмірів області розташування ДПК дозволяє визначити кількість кроків згущення, яке необхідно для забезпечення заданої точності інтерполяції. Запропоновані алгоритми дозволяють згущувати ділянки плоскої ДПК локально, в довільній послідовності і з призначенням в межах кожної вихідної ділянки точок згущення, кількість яких забезпечує задану точність інтерполяції.

Визначення меж області можливого розташування просторових і плоских ДПК дозволило контролювати точність, з якою точковий ряд представляє криву лінію з заданими геометричними властивостями. Абсолютна похибка дискретної інтерполяції оцінюється на кожній дільниці ДПК як максимально можлива відстань між монотонними кривими лініями, якими можливо інтерполювати точковий ряд. Оцінка абсолютної похибки дозволяє визначити мінімальну кількість необхідних кроків згущення ДПК на кожній з її вихідних ділянок, після чого сформований точковий ряд може бути інтерпольовано безперервним обводом.

У роботі розроблені способи сформування обводів в межах області можливого розташування ДПК. Таке розташування гарантує заміну монотонної кривої лінії обводом з похибкою, яка не перевищує похибку формування монотонних частин ДПК. Обвід може бути отриманий в результаті інтерполяції точкового ряду супровідною ламаною лінією,

коробовою лінією кіл, кубічним неперіодичним B-сплайном. Інтерполяція ділянками кривих ліній, формування яких забезпечують бібліотеки CAD - систем, дозволяє створювати на основі алгоритмів згущення ДПК комп' ютерні моделі кривих ліній.

На основі розроблених способів інтерполяції точкових рядів запропонована методика проектування поверхонь з підвищеними динамічними характеристиками. Поверхні моделюються на основі каркаса, лінійні елементи якого задають згущені ДПК, які інтерполюють точкові ряди виділені з масиву точок, що належать поверхні. Функціональні якості поверхні забезпечуються заданими геометричними характеристиками ДПК – постійний хід, монотонна зміна вздовж кривої значень кривини і радіусів стичних сфер.

Розроблені в рамках дисертаційного дослідження алгоритми реалізовані в комп'ютерній програмі, яка впроваджена у виробничий процес як інструмент з формування лінійних елементів каркасів поверхонь.

За результатами дисертаційного дослідження можна зробити висновок про перспективність подальших досліджень в області ВДГМ кривих ліній і поверхонь в просторі можливого розташування геометричних образів із заданим поєднанням характеристик.

Наукова новизна отриманих в дослідженні результатів полягає в розробці теоретичних і методологічних основ моделювання обводів точкових рядів довільної конфігурації в просторі можливого розташування кривих ліній із заданим поєднанням геометричних характеристик, що є подальшим розвитком варіативного дискретного геометричного моделювання геометричних образів за заданими умовами.

У роботі вперше:

- запропоновано і теоретично обґрунтовано напрям наукових досліджень по варіативному дискретному геометричному моделюванню кривих ліній за заданими умовами, яке засноване на формуванні точкових рядів, що належать області можливого розташування кривих з заданими геометричними властивостями;

- розроблена методика аналізу точкового ряду довільної конфігурації, що дозволяє визначати його частини, які можливо інтерполювати кривою лінією постійного ходу з монотонною зміною радіусів стичних кіл і сфер, а також визначати ділянки, на яких інтерполююча крива обов'язково містить особливі точки. Аналіз встановлює можливість інтерполяції точкового ряду монотонною кривою, її характеристики і область розташування;

- запропонована загальна схема моделювання просторових і плоских ДПК по частинах, уздовж яких значення характеристик кривої монотонно зростають або зменшуються. Алгоритмічна реалізація схеми забезпечила формування точкових рядів, що складаються з як завгодно великої кількості точок, які належать кривій лінії з призначеними на підставі аналізу вихідного точкового ряду характеристиками;

- встановлені залежності між характеристиками кривої лінії, яка інтерполює точковий ряд, і областю її можливого розташування в просторі,

що дозволило формувати ДПК у вигляді послідовності замкнутих геометричних образів, які обмежені дискретно заданими аналогами стичних площин або сфер;

- розроблені алгоритми визначення положень проміжних точок інтерполюючої кривої лінії, виходячи з умови монотонного зростання (зменшення) уздовж неї значень її характеристик, які дозволяють згущувати точкові ряди, розташовані на кривих постійного ходу, кривих з монотонним зміною кривини, скруту, радіусів стичних сфер;

- розроблено метод моделювання просторової ДПК на основі формування її полярного торса. Використання дискретного аналога полярного торса дозволило здійснювати комплексний контроль дискретних характеристик точкового ряду, що формується, і області можливого розташування кривої, яка його інтерполює, призначати у вихідних точках фіксовані значення кривини, скруту, радіусів стичних сфер, при яких задача моделювання ДПК по частинах з монотонною зміною значень її характеристик має розв’язок;

- розроблено спосіб моделювання плоскої ДПК на основі формування дискретного аналога її еволюти по частинах, уздовж яких значення кривини монотонно зростають або зменшуються. Контроль конфігурації дискретного аналога еволюти дозволяє визначати область можливого розташування монотонних частин ДПК, формувати в їх межах точковий ряд, призначати положення особливих точок;

- запропоновані способи формування ДПК на ділянках, які містять особливі точки: точки перегину, зміни ходу, зміни зростання - убування кривини, скруту, радіусів стичних сфер, що дозволило моделювати ДПК на основі точкового ряду довільної конфігурації по частинах, уздовж яких значення її характеристик змінюються монотонно.

- розроблені способи формування обводів точкових рядів в межах області можливого розташування монотонних частин ДПК. Способи дозволяють створювати безперервні геометричні образи і їх комп'ютерні моделі, які з похибкою, що не перевищує задану величину, замінюють ДПК довільної конфігурації.

Удосконалено методику оцінки абсолютної похибки, з якою точковий ряд представляє криву лінію, яка заснована на визначенні максимально можливої відстані між кривими лініями із заданими характеристиками, що интерполюють сформований точковий ряд. Визначення похибки дискретної інтерполяції дозволяє встановити необхідну кількість проміжних точок, призначення яких забезпечує задану точність формування ДПК на кожній з вихідних ділянок.

Отримало подальший розвиток методологія оцінки геометричних характеристик кривої за допомогою дискретних характеристик точкового ряду, який їй належить. При цьому запропоновані дискретні аналоги стичних сфер і значень скруту використовуються вперше. Дискретні характеристики є вихідними даними для визначення частин ДПК з монотонною зміною геометричних характеристик і простору їх можливого розташування.

Практичне значення отриманих результатів полягає в наданні конструктору ефективного інструменту формування кривих ліній із заданою закономірністю зміни диференціально-геометричних характеристик і моделювання на їх основі каркасів поверхонь з заданими функціональними властивостями. Розроблене алгоритмічне і програмне забезпечення дозволяє підвищити якість моделювання складних поверхонь, що обмежують промислові вироби, і скоротити витрати часу на створення програм для їх обробки на верстатах з ЧПУ.

Впровадження отриманих результатів.

Розроблені на підставі проведених в дисертації досліджень алгоритми, методичні рекомендації та програмне забезпечення прийняті до впровадження:

- на ливарній компанії «Мелт» (акт впровадження від 21. 11. 2013 р.), ТОВ «Мелітопольський завод турбокомпресорів» (акт впровадження від 23. 10. 2013 р.), приватному підприємстві «Таврія Турбо Плюс» (акт впровадження від 10. 12. 2013 р.) для проектування поверхонь робочих коліс турбокомпресора;

- на науково-виробничій комерційній фірмі «Спеціальні гідравлічні машини» (акт впровадження від 14. 01. 2014 р.) для проектування функціональних поверхонь робочого колеса відцентрового одноступінчатого насоса СЦН 75/70;

- на науково-виробничій компанії «РОСТА» (акт впровадження від 17. 12. 2014 р.) для проектування функціональної поверхні ножа для розпушування ґрунту в пристовбурних смугах саду;

- на науково-виробничому підприємстві «Центр САПР» (акт впровадження від 15. 05. 2014 р.) для створення програмних модулів по моделюванню поверхонь, заданих каркасом, для пакетів твердотільного параметричного моделювання.

Робочий орган для розпушування ґрунту, виготовлений науково-виробничою компанією «РОСТА», пройшов польові випробування на базі ТОВ «ЛАНА». Випробування показали, що застосування робочого органу, виготовленого з використанням розробленого методу, призводить до поліпшення показників структури ґрунту, отриманої в результаті обробки, а також зменшення витрат палива на обробку еталонного ділянки.

Ключові слова: варіативне дискретне геометричне моделювання, монотонна дискретно представлена крива, особливі точки, дискретні характеристики, простір можливого розташування кривої, точність дискретної інтерполяції.

СПИСОК НАУКОВИХ ПРАЦЬ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

у яких опубліковано основні наукові результати дисертації

Статті у виданнях, які включено до наукометричних баз

1. Gavrilenko E. A. Discretely geometrical modelling of one-dimensional contours with a regular change of differential – geometric characteristics [Електронний ресурс] / E. A. Gavrilenko, Yu. V. Kholodnyak // Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines (Dynamics). – 2014. – P. 1-5. Режим доступу: http://ieeexplore.ieee.org/xpl/articleDetails.jsp?arnumber=7005654. Особистий внесок здобувача: розроблено спосіб моделювання одновимірних обводів с закономірною зміною диференціально-геометричних характеристик.

2. Havrylenko Y. Development of the method for the formation of one-dimensional contours by the assigned interpolation accuracy / Y. Havrylenko, Y. Kholodniak, O. Vershkov, A. Naidysh // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2018. – Vol. 1, Iss. 4(91). – P. 76-82. Режим доступу: https://doi.org/10.15587/1729-4061.2018.123921. Особистий внесок здобувача: запропоновано спосіб оцінки точності дискретної інтерполяції.

3. Гавриленко Є. А. Визначення області розташування точки перегину при моделюванні обводу другого порядку гладкості / Є. А. Гавриленко, Ю. В. Холодняк, В. І. Межуєв // Вісник Херсонського національного технічного університету / ХНТУ. – Херсон, 2014. – Вип. 3 (50). – С. 16-20. (*Збірник включено до наукометричних баз: National Library of Ukraine (Vernadsky), Google Scholar, РІНЦ*). Режим доступу: https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru. Особистий внесок здобувача: запропоновано спосіб визначення області розташування точки перегину кривої.

4. Гавриленко Е. А. Вариативное дискретное геометрическое моделирование одномерных обводов с заданными дифференциально геометрическими свойствами / Е. А. Гавриленко // Вісник Херсонського національного технічного університету / ХНТУ. – Херсон, 2015. – Вип. 3 (54). – С. 555-559. (*Збірник включено до наукометричних баз: National Library of Ukraine (Vernadsky), Google Scholar, РІНЦ*). Режим доступу: https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru.

5. Гавриленко Е. А. Формирование геометрических характеристик монотонной кривой линии / Е. А. Гавриленко, Ю. В. Холодняк, В. А. Пахаренко // Вісник Херсонського національного технічного університету: наук. журнал / ХДТУ. – Херсон, 2016. – № 3(58). – С. 492-496. (*Збірник включено до наукометричних баз: National Library of Ukraine (Vernadsky), Google Scholar, РІНЦ*). Режим доступу: https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru. Особистий внесок здобувача: запропоновано спосіб визначення діапазонів положень нормалей дискретно представленої кривої виходячи із умови монотонної зміни значень її характеристик.

6. Гавриленко Е. А. Дискретное моделирование одномерного пространственного обвода на основе области возможного расположения кривых с заданными геометрическими характеристиками / Е. А. Гавриленко , Ю. В. Холодняк, А. В. Найдыш // Вісник Херсонського національного

технічного університету / ХНТУ. – Херсон, 2017. – № 3(62), т. 2. – С. 264-268. (*Збірник включено до науко метричних баз: National Library of Ukraine (Vernadsky), Google Scholar, РІНЦ*). Режим доступу: HYPERLINK "https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru" https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru. Особистий внесок здобувача: запропоновано спосіб визначення області розташування монотонної кривої лінії.

Статті у наукових фахових виданнях

7. Гавриленко Е. А. Визначення положення центрів кривини дискретно представленої кривої / Е. А. Гавриленко // Системні технології: регіон. межвуз. зб. наук. пр. / НМетАУ. Дніпропетровськ, 2011. – Вип. 5 (76). – С. 145-151. Режим доступу: HYPERLINK "https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru" https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru.

8. Гавриленко Є. А. Умови розташування стичних кіл при формуванні обводу з монотонною зміною кривини / Є. А. Гавриленко // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету: наук. фах. видання / ТДАТУ. – Мелітополь, 2011. – Вип. 4: Прикладна геометрія та інженерна графіка, т. 50. – С. 146-150. Режим доступу: https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru.

9. Гавриленко Є. А. Визначення діапазонів положення нормалей у вузлах ДПК з монотонною зміною кривини / Є. А. Гавриленко, В. В. Гнатушенко, В. М. Щербина // Системні технології: регіон. межвуз. зб. наук. пр. / НМетАУ. – Дніпропетровськ, 2012. – Вип. 5(82). – С. 43-47. Режим доступу: https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru. Особистий внесок здобувача: запропоновано спосіб визначення діапазонів можливих, за умовами задачі, характеристик при моделюванні монотонної кривої на ділянці, що обмежена сусідніми точками.

10. Гавриленко Е.А. Формирование плоских обводов заданного порядка гладкости / Є.А. Гавриленко // Прикладна геометрія та інженерна графіка: міжвід. наук.-техн. збірник / КНУБА. – Київ, 2012. – Вип. 90. – С. 74-78. Режим доступу: HYPERLINK "https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru" https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru.

11. Гавриленко Є. А. Визначення границь діапазонів положення центрів кривини плоского обводу / Є. А. Гавриленко // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету: наук. фах. видання / ТДАТУ. – Мелітополь, 2012. – Вип. 4: Прикладна геометрія та інженерна графіка, т. 52. – С. 103-106. Режим доступу: HYPERLINK "https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru" https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru.

12. Гавриленко Є. А. Визначення положення точки згущення при моделюванні монотонної дискретно представленої кривої / Є. А. Гавриленко // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету: наук.

фах. видання / ТДАТУ. – Мелітополь, 2012. – Вип. 4: Прикладна геометрія та інженерна графіка, т. 53. – С. 29-33. Режим доступу: https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru.

13. Гавриленко Є. А. Визначення діапазонів геометричних характеристик монотонної дискретно представленої кривої / Є. А. Гавриленко, Ю. В. Холодняк // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету: наук. фах. видання / ТДАТУ. – Мелітополь , 2012. – Вип. 4: Прикладна геометрія та інженерна графіка, т. 54. – С. 38-42. Режим доступу: https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru. Особистий внесок здобувача: запропоновано спосіб визначення та алгоритм розрахунку діапазонів можливих значень диференціально-геометричних характеристик у точках кривої виходячи із умови монотонної зміни кривини.

14. Гавриленко Є. А. Задача формування локальних геометричних характеристик у вузлах дискретно представленої поверхні / Є. А. Гавриленко, В. А. Дідур // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету: наук. фах. видання / ТДАТУ. – Мелітополь, 2012. – Вип. 4: Прикладна геометрія та інженерна графіка, т. 55. – С. 56-61. Режим доступу: https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru. Особистий внесок здобувача: запропоновано спосіб моделювання дискретно представленої поверхні із забезпеченням заданих диференціально-геометричних характеристик.

15. Гавриленко Є. А. Розрахунок граничних значень геометричних характеристик при дискретному геометричному моделюванні монотонної кривої / А. В Найдиш, Є. А. Гавриленко, В. Ф. Ялпачик // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету: наук. фах. видання / ТДАТУ. – Мелітополь: ТДАТУ, 2012. – Вип. 12, т. 5. – С. 192-196. Режим доступу: https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru. Особистий внесок здобувача: запропоновано геометрична схема та розроблено алгоритм моделювання дискретно представленої кривої другого порядку гладкості на основі просторових кутових параметрів, виконано перевірку алгоритму на контрольних прикладах.

16. Гавриленко Є. А. Програмна реалізація алгоритму моделювання одновимірних обводів по заданим геометричним умовам / Є. А. Гавриленко, Ю. В. Холодняк // Комп'ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво: наук. журн. / Луцький НТУ. – Вип. 13. – Луцьк, 2013. – С.4-9. Режим доступу: HYPERLINK "https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru" https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru. Особистий внесок здобувача: визначено систему обмежень на розташування кривої відповідно до умов задачі.

17. Гавриленко Є. А. Дискретне моделювання одновимірних просторових обводів першого порядку гладкості / Є. А. Гавриленко // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету: наук. фах. видання / ТДАТУ. – Мелітополь, 2013. – Вип. 4: Прикладна геометрія та

інженерна графіка, т. 56. – С. 28-32. Режим доступу: https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru.

18. Gavrilenko E. A. Determine of geometrical characteristics ranges of the discretely presented curve with law of curvature change / E. A. Gavrilenko, V. V. Gnatushenko, Yu. V. Kholodnyak // Системні технології: регіон. межвуз. зб. наук. пр. / НМетАУ. – Дніпропетровськ, 2013. – Вип. 1(84). - С.156-161. Режим доступу: HYPERLINK "https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru" https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru. Особистий внесок здобувача: розроблено спосіб визначення та уточнення області можливого розташування точки перегину та нормалі, яка проходить через цю точку, виходячи із умови монотонної зміни диференціально-геометричних характеристик уздовж кривої.

19. Гавриленко Е. А. Вариативное дискретное геометрическое моделирование на основе пространственных угловых параметров дискретно представленной кривой второго порядка гладкости / Е. А. Гавриленко, А.В. Найдыш // Прикладна геометрія та інженерна графіка: міжвід. наук.-техн. збірник / КНУБА. – Київ, 2013. – Вип. 91. – С. 69-75. Режим доступу: https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru. Особистий внесок здобувача: розроблено спосіб визначення діапазонів положень нормалей та значень радіусів кривини у вихідних точках при моделюванні монотонної кривої.

20. Гавриленко Е. А. Точность дискретной интерполяции плоских дискретно представленных кривых / Е. А. Гавриленко, Ю. В. Холодняк // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету: наук. фах. видання / ТДАТУ. – Мелітополь, 2014. – Вип. 4: Прикладна геометрія та інженерна графіка, т. 58. – С. 23-28. Режим доступу: https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru. Особистий внесок здобувача: розроблено спосіб визначення максимальної абсолютної похибки дискретної інтерполяції.

21. Гавриленко Е. А. Формирование геометрической модели рабочего колеса турбокомпрессора / Е. А. Гавриленко, Ю. В. Холодняк // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету: наук. фах. видання / ТДАТУ. – Вип. 14, т. 2. – Мелітополь, 2014. – С. 48-53. Режим доступу: https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru. Особистий внесок здобувача: запропоновано спосіб формування міжлопаткового каналу робочого колеса та розроблено геометричну схему моделювання дискретного каркасу робочої поверхні лопатки.

22. Гавриленко Е. А. Разработка технологии формообразования и обработки динамических поверхностей / Е. А. Гавриленко, Ю. В. Холодняк, В. В. Кучеренко, А. А. Бездитный // Наукові нотатки: міжвузівський збірник / Луцький НТУ. – Луцьк, 2015. - С. 54-58. Режим доступу: https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru. Особистий внесок здобувача: запропоновано схему формування дискретних каркасів поверхонь на основі дискретно представлених кривих із заданими

диференціально-геометричними характеристиками.

23. Гавриленко Е. А. Использование барицентрических координат при конструировании пространственной дискретно представленной кривой / Є. А. Гавриленко // Сучасні проблеми моделювання: наук. фах. видання / Мелітоп. держ. пед. ун-т ім. Б. Хмельницького. – Мелітополь, 2016. – Вип. 6. – С. 38-42. Режим доступу: HYPERLINK "https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru" https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru.

24. Гавриленко Е. А. Технология компьютерного проектирования функциональных поверхностей технических изделий на основе массива точек / Е. А. Гавриленко, А. В. Найдыш, Ю. В. Холодняк // Строительство. Материаловедение. Машиностроение: сб. науч. трудов / Приднепров. гос. акад. стр-ва и архитектуры. – Днепр, 2016. – Вып. 94. – С. 24-29. – (Компьютерные системы и информационные технологии в образовании, науке и управлении). Режим доступу: https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru. Особистий внесок здобувача: запропоновано спосіб формування лінійчатого каркасу поверхні на основі вихідного масиву точок.

25. Гавриленко Е. А. Вариативное моделирование кривых с закономерным изменением дифференциально-геометрических характеристик / Е. А. Гавриленко, Ю. В. Холодняк // Науковий вісник Таврійського державного агротехнологічного університету: електрон. наук. фах. видання / ТДАТУ. – Мелітополь, 2016. – Вип. 6, т. 1. – С. 230-235. Режим доступу: https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru. Особистий внесок здобувача: запропоновано спосіб визначення геометричних характеристик монотонної кривої лінії.

26. Гавриленко Е. А. Информационная технология проектирования и изготовления рабочих колес турбокомпрессора / Е. А. Гавриленко, Ю. В. Холодняк, Ю. А. Дмитриев // Науковий вісник Таврійського державного агротехнологічного університету: електрон. наук. фах. видання / ТДАТУ. – Мелітополь, 2016. – Вип. 6, т. 2. – С. 52-62. Режим доступу: https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru. Особистий внесок здобувача: запропоновано спосіб формування міжлопаткового каналу робочого колеса та розроблено геометричну схему моделювання дискретного каркасу робочої поверхні лопатки.

27. Гавриленко Е. А. Область возможного расположения пространственного одномерного обвода / Е. А. Гавриленко, Ю. В. Холодняк // Сучасні проблеми моделювання: наук. фах. видання / Мелітоп. держ. пед. ун-т ім. Б. Хмельницького. – Мелітополь, 2017. – Вип. 8. – С. 60-64. Режим доступу: https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru. Особистий внесок здобувача: запропоновано спосіб визначення простору можливого розташування кривих із визначеними геометричними властивостями.

28. Холодняк Ю. В. Моделирование одномерных обводов по заданным условиям / Ю. В. Холодняк, Е. А. Гавриленко, А. В. Дубинина // Сучасні проблеми моделювання: наук. фах. видання / Мелітоп. держ. пед. ун-т ім. Б. Хмельницького. – Мелітополь, 2017. – Вип. 9. – С. 162-166. Режим доступу: HYPERLINK "https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru" https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru. Особистий внесок здобувача: запропоновано спосіб визначення ділянок вихідного точкового ряду, який можливо інтерполювати кривою з монотонною зміною кривини.

29. Гавриленко Е. А. Определение абсолютной погрешности интерполяции кривой с заданными геометрическими свойствами / Е. А. Гавриленко, А. В. Найдыш, Ю. В. Холодняк // Строительство. Материаловедение. Машиностроение: сб. науч. трудов / Приднепров. гос. акад. стр-ва и архитектуры. – Днепр, 2017. – Вып. 101. – С. 72-79. – (Компьютерные системы и информационные технологии в образовании, науке и управлении). Режим доступу: HYPERLINK "https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru" https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru. Особистий внесок здобувача: запропоновано спосіб визначення абсолютної похибки інтерполяції кривою з заданими геометричними властивостями.

30. Холодняк Ю. В. Формирование обводов с заданными геометрическими свойствами / Ю. В. Холодняк, Е. А. Гавриленко, А. В. Дубинина // Сучасні проблеми моделювання: наук. фах. видання / Мелітоп. держ. пед. ун-т ім. Б. Хмельницького. – Мелітополь, 2018. – Вип. 11. – С. 165-169. Режим доступу: HYPERLINK "https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru" https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru. Особистий внесок здобувача: запропоновано спосіб формування одновимірних обводів із закономірною зміною кривини виходячи з конфігурації вихідного точкового ряду.

31. Гавриленко Е. А. Формирование ДПК на участках, содержащих особые точки / Е. А. Гавриленко, Ю. В. Холодняк // Сучасні проблеми моделювання: наук. фах. видання / Мелітоп. держ. пед. ун-т ім. Б. Хмельницького. – Мелітополь, 2018. – Вип. 12. – С. 53-57. Режим доступу: https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru. Особистий внесок здобувача: запропоновано спосіб визначення ділянок, що містять особливі точки, та формування дискретно представленої кривої на цих ділянках.

Додаткові публікації

32. Гавриленко Е. А. Дискретное геометрическое моделирование пространственных одномерных обводов по заданным условиям // Е. А. Гавриленко, Ю. А. Дмитриев // Динамика систем, механизмов и машин / Омский ГТУ. – № 1. – Омск, 2014. – С. 150-152. Режим доступу:

https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru. Особистий внесок здобувача: запропоновано геометричну схему та розроблено алгоритм моделювання просторових обводів за заданими умовами, виконано перевірку методу на контрольних прикладах.

33. Гавриленко Є. А. Формування просторової ДПК на основі прилягаючих кіл / Є. А. Гавриленко // Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. праць / МДПУ ім. Б.Хмельницького. – Мелітополь, 2014. – Вип. 3. – С. 39-42. Режим доступу: HYPERLINK "https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru" https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru.

34. Гавриленко Е. А. Моделирование кривой постоянного хода с монотонным изменением радиусов соприкасающихся окружностей и сфер / Е. А. Гавриленко, А. В. Найдыш, Ю. В. Холодняк, Ю. А. Дмитриев // Динамика систем, механизмов и машин / Омский ГТУ. – Омск, 2016. – № 1, Т. 4. – С. 135-138. Режим доступу: HYPERLINK "https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru" https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru. Особистий внесок здобувача: запропоновано спосіб формування кривої виходячи з динаміки зміни уздовж неї радіусів стичних сфер.

Патент на корисну модель

35. Патент на корисну модель 91024 Україна, МПК (2014.01) F16S 5/00. Спосіб моделювання лінійних елементів каркаса складних поверхонь, які обмежують технічні вироби, що взаємодіють із середовищем / Гавриленко Є. А., Холодняк Ю. В.; заявник і патентовласник Таврійський державний агротехнологічний університет. – № u201311250; заявл. 23.09.2013; опубл. 25 .06.2014, Бюл. № 12. Режим доступу: https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru. Особистий внесок здобувача: розроблено алгоритм моделювання кривої з монотонною зміною кривини по заданим умовам: фіксовані положення нормалей та значень радіусів кривини у вихідних точках.

Матеріали конференцій

36. Гавриленко Е. А. Вариативное дискретное геометрическое моделирование одномерных обводов на основе пространственных угловых параметров / Е. А. Гавриленко, А. В. Найдиш // Технические науки – от теории к практике: сб. статей ... науч.-практ. конф. (октябрь, 2013 г., Новосибирск) / НП «СибАК». – Новосибирск, 2013, № 26. – С.8-13. Режим доступу: https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru. Особистий внесок здобувача: розроблено алгоритм моделювання одновимірних обводів на основі просторових кутових параметрів, виконано перевірку методу на контрольних прикладах, зроблено висновки.

37. Гавриленко Е. А. Расчет и моделирование сложных геометрических поверхностей / Ю. В. Холодняк, Е. А. Гавриленко, Ю. А. Дмитриев // Молодежь и Наука: модернизация и инновационное развитие

страны: матер. III Междунар. науч.-практ. конф. (5-8 июня 2013 г., Пенза) / ПенГТУ. – Пенза, 2013. – С. 37-39. Режим доступу: https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru. Особистий внесок здобувача: запропоновано схему формування лінійчатого каркасу, що задає поверхню, та спосіб визначення можливих значень її характеристик.

38. Гавриленко Е. А. Формирование плоских дискретно представленных кривых по заданным условиям / Е. А. Гавриленко, А. В. Найдыш, Ю. В. Холодняк // Научные итоги: достижения, проекты, гипотезы: матер. XVIII-ой Междунар. науч.-практ. конф. (28 ноября, 2013 г., Минеральные Воды) / СКФ БГТУ им. В.Г. Шухова. – Минеральные Воды, 2013. – № 18. – С. 139-142. Режим доступу: https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru. Особистий внесок здобувача: запропоновано геометричну схему та розроблено алгоритм моделювання кривих із закономірною зміною диференціально-геометричних характеристик, виконано перевірку схеми на контрольних прикладах.

39. Гавриленко Е. А. Вариативное дискретное геометрическое моделирование дискретно представленной кривой с закономерным изменением кручения / Е. А. Гавриленко // Научные итоги: достижения, проекты, гипотезы: матер. XIX -ой Междунар. науч.-практ. конф. (27 марта, 2014 г., Минеральные Воды) / СКФ БГТУ им. В.Г. Шухова. – Минеральные Воды, 2014. – № 19. – С. 155-157. Режим доступу: https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru.

40. Gavrilenko E. A. Variative modelling of one-dimensional contours according to the given conditions / E. A. Gavrilenko, Y. V. Kholodnyak // Knowledge is power, power is knowledge : the international multidisciplinary congress (Vienna, Austria, 27 июля 2015 г.) / International Scientific Association "Science & Genesis". – Prague, 2015. – С. 267-270. Режим доступу: https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru. Особистий внесок здобувача: запропоновано спосіб формування одновимірних обводів із забезпеченням контролю виникнення осциляції.

41. Гавриленко Е. А. Формирование дискретного сетчатого каркаса динамических поверхностей / Е. А. Гавриленко, Ю. В. Холодняк, А. В. Дубинина, С. О. Барышевский // Сучасні проблеми геометричного моделювання: збірник праць XVII Міжнародної науково-практичної конференції (02-05.06.2015р.) / Мелітоп. держ. пед. ун-т ім. Б. Хмельницького. – Мелітополь, 2015. – С. 44-48. Режим доступу: https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru. Особистий внесок здобувача: запропоновано спосіб формування лінійчатого каркасу, що задає поверхню, функціональне призначення якої – взаємодія з середовищем.

42. Гавриленко Є. А. Дискретное геометрическое моделирование методом пространственных угловых параметров / Є. А. Гавриленко // Збірник тез доповідей XI Міжнародної науково-практичної конференції «Обухівські читання» (1-го березня 2016 року) / Національний університет біоресурсів і природокористування України. – Київ, 2016. – С. 20-21. Режим доступу: https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru.

ABSTRACT

Havrylenko Ye. A. Contour modeling in the possible arrangement space of monotonic curves. Qualification scientific work as a manuscript.

Dissertation for the degree of Doctor of Technical Sciences, speciality 05.01 .01 Applied Geometry, Engineering Graphics Kyiv National University of Construction and Architecture.

The dissertation defence will take place at Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv, 2020.

The dissertation solves the scientific problem of contour modeling of point rows of random configuration, which with a given accuracy represents curves with known geometric properties.

To solve this problem, it is necessary to develop an interpolation method that provides control of dynamic changing along the modeled curve of its characteristics values, the possibility of global and local adjustment of the formed solution, and the prevention of uncontrolled occurrence of singular points. As the analysis has showed, none of the existing methods of geometric modeling fully meets the given requirements.

Variable discrete geometric modeling (VDGM) is most responded to the objectives of this dissertation research of the existing directions of geometric modeling. This direction feature is the determination of the possible location of the formed curve and the selection of the optimal solution according to the conditions of the problem based on the given criteria.

At the moment, the VDGM potential in solving problems of interpolating of complicated configuration point rows is not realized largely due to the lack of effective control mechanisms for the geometric properties of the formed curve through the characteristics of the point series belonging to it and evaluating the accuracy of discrete interpolation. This implies the relevance of the VDGM method development of discretely presented curves (DPC) based on the area of their parts possible arrangement along which the values of the curve characteristics vary monotonically.

The DPC separation into parts with a monotonic characteristics change is based on the of monotonic curve classification proposed in this work constant-path curves along which the radii values of the osculating circles and spheres increase or decrease monotonically. There are eight possible characteristics combinations of the curve that determine its monotonicity. The classification makes it possible to consider and form any curved line, as consisting of monotonic parts docked at special points.

The theoretical basis of the DPC modeling methods developed in the thesis has been made up of the research results the polar torso characteristics and their ribs return corresponding to each type of the monotonic curve, as well as the conditions for joining the polar torsos, which ensure the regularity of the curve characteristics at special points. As a result, possible configurations of return ribs consisting of constant-motion parts joined at the inflection or return points that define the polar torsos of the curves with a known characteristics combination are

identified and classified. These can be curves consisting of any combination of monotonic parts and containing any set of singular points namely: inflection points , course changes, changes in the direction of increase along the radii curve of osculating circles and spheres. The established relationships provide a possibility of DPC modeling based on its polar torso characteristics without using functions that specify curve sections.

According to planning requirements a prerequisite for DPC modeling with a minimum number of singular points is a preliminary analysis of the initial point rows in order to determine its parts that can be interpolated by a monotonic curve. The proposed method for point row analysing is based on the discrete characteristics use, which are analogues of the curve geometric characteristics and are determined by the position of successive points defining the DPC.

A discrete characteristic of a contacting plane is an adjoining plane passing through three consecutive points of a point row. As a discrete torsion, the ratio of the angle between adjoining planes to the length of the corresponding chord of the accompanying curve is used. The curvature radius at the DPC point is estimated by the adjoining circle radius defined by this point, the previous and next points of the series. A discrete analogue of an osculating sphere is an adjoining sphere intersecting a curve at four consecutive starting points. A straight line passing through the center of the adjoining *I*-circle and the adjoining *I*-sphere is used as an analogue of the corresponding axis of curvature.

It is established that the pattern of change of discrete characteristics values along a point row is determined by the pattern of change in the corresponding geometric characteristics along the monotonic curve to which this point row belongs. These patterns allow to determine the ranges of possible values of the DPC geometric characteristics using their discrete analogues.

An analysis of the monotonic curve position relative to geometric formations, given by its belonging points has allowed to determine the area of the possible DPC location. It is proved that sections of the constant-travel curve are located within adjoining tetrahedron bounded by four successive adjoining planes. A monotonic DPC is located within a chain of spherical trihedral, each of which is bounded by sections of three consecutive adjoining spheres. The possible location area is a necessary characteristic of a monotonic DPC. The boundaries configuration allows to determine the type of monotonic curve with which it is possible to interpolate a point row.

The estimation accuracy of the DPC characteristics values increases when using as their discrete analogues planes, circles and spheres passing through the DPC points having a common tangent line with it. It is proved that the tetrahedron bounded by the tangent planes and the trihedra bounded by the tangent spheres specify the area of the possible location of the monotonic DPC. Their location inside the corresponding adjoining tetrahedra and spherical trihedra is a criterion for the correct assignment of lines tangent to a monotonic DPC at the points defining it.

The most complete comprehensive assessment of the DPC features is given by the analysis of the hedral polar surface, which is an analogue of the curve polar

torso. The location and configuration of its faces, which belong to the planes passing through the centres of successive adjoining or tangent spheres, determine all the discrete characteristics, types and areas of the possible location of the DPC monotonic parts.

The proposed scheme of accumulation a point row is based on the designation of a accumulation point within the contour obtained at the intersection of the possible location area of a monotonic curve section by a plane. This approach has allowed to reduce the formation of spatial DPC to solve positional problems on the plane.

The DPC accumulation points of the constant motion are assigned within the polygons, which are the cross sections of adjoining tetrahedrons. The possible location area of the monotonic DPC accumulation point is bounded by circle arcs that belong to five consecutive adjoining spheres and is determined by the configuration of the initial point row consisting of twelve points. The accumulation point assignment within the indicated polygons leads to localization of the initial area of the DPC part location. For DPC constant-motion, this part is initially bounded by three adjoining tetrahedra, and for a DPC monotonic by seven trihedra of adjoining spheres.

The scheme for determining the accumulation point position allows to take into account the entire area of a possible solution and to control this area localization when additional conditions are given on the formed DPC.

The developed methods for point row accumulation are based on the broken line formation of the face polar surface return a spatial broken line, the links of which are limited by the centers of consecutive adjoining spheres. The purpose of each accumulation point is the replacement of the four original links of the return broken line with five new smaller ones. The position of the accumulation point uniquely determines the corresponding part configuration of the return broken line and vice versa. The configuration control of the return broken line formed during the point row accumulation ensures the assignment of accumulation points within the area of the monotonic DPC location that is sequentially localized. Moreover, the combination of discrete characteristics of the obtained point row corresponds to the same type of monotonic DPC as the characteristics of the initial point row.

The proposed methods for point row accumulation make it possible to abandon the analytical representation of the interpolating curve and control its properties through the adjoining tetrahedra characteristics, trihedra of adjoining spheres, and a face polar surface.

The DPC formation in the form of a point row means that the curve is not uniquely determined at all stages of modeling. A necessary condition for the DPC formation is the presence of its location area that is sequentially localized in the accumulation process. Each condition imposed on the DPC has its own restrictions on this area. The task of the DPC formation satisfying a set of different requirements is reduced to determining geometric images that are the intersection of the corresponding space areas.

The localization control of the monotonic curve location area is the basis for the DPC formation, at the points of which tangent lines, main trihedra, osculating

circles and spheres are assigned. These are methods for point row accumulation based on tangent tetrahedra, trihedra of tangent spheres and the corresponding faceted polar surface. Fixation of each listed DPC characteristics determines the area of its possible location. In turn, the configuration of tangent tetrahedra and spherical trihedra uniquely determines the possibility of forming, on their basis, constant-motion curves and monotonic curves, respectively.

It is proved that the geometric characteristics, assigned to the DPC nodes, can increase the locality of its formation. In a monotonic DPC formation, at the points of which the tangent lines positions are determined, the purpose of each accumulation point leads to the localization of the location area of the curve part, which is limited by three consecutive initial trihedra of tangent spheres. When DPC forming within an area which boundaries are determined taking into account the main trihedra and osculating circles defined at the starting points, the purpose of the accumulation point leads to the refined area localization where only one source curve section is located. Increasing the shaping localization makes it possible to simulate DPC in individual destination sections by assigning any number of accumulation points to them.

The study of the possible location areas of the accumulation points and the possible values ranges of discrete characteristics has allowed to determine the necessary and sufficient conditions for the monotonic DPC formation. A monotonic DPC can be formed on the basis of any point row in which the adjoining spheres are limited by trihedra corresponding to one type of monotonic curve. To obtain a condensed point row belonging to a monotonic curve, it is sufficient to ensure that the characteristics of the spherical trihedra formed during the condensation are consistent with the characteristics of the initial trihedra of adjoining spheres.

The developed methods for the DPC formation complement each other. Their combined application is possible, which makes it possible to take into account both angular and metric discrete characteristics during curve forming. The method based on the use of a return broken line of a faceted polar surface is the most universal. It combines the capabilities of methods based on the use of tangent tetrahedra and trihedra of tangent spheres, and provides a means to control the dynamics of changes along the generated curve of torsion values, radii of osculating spheres and circles.

A unified approach to the DPC accumulation in the vicinity of singular points is proposed, based on the control of the possible location area boundaries of its special sections. These can be inflection points, course changes, changes in the direction of the increase along the curve of the radii values of osculating circles and spheres.

The universal criterion for the singular point presence in the DPC section is the area separation of its possible location into two parts having a common border. The characteristics of each of these areas correspond to the features of one of two monotonic curves that are connected at a singular point. The criterion makes it possible to determine the areas in which the DPC necessarily contains a singular point, classify this point and accumulate the point row based on the curve

characteristics in the vicinity of the particular site.

The point row accumulation within the adjoining tetrahedra provides a means to control the formation of inflection points and changes in the course of the curve. The assignment of accumulation points within spherical trihedra guarantees the monotonicity of the change in the radii of the osculating circles and spheres along the DPC parts docked at a singular point.

The established dependences between the DPC characteristics and the docking area boundaries of its monotonic parts made it possible to form sections within which, in various combinations discontinuity, change of course and increase along the curve of osculating circles radii and spheres occur. The location area of the special section is obtained at the tetrahedra intersection of limited by adjoining planes and spherical trihedra limiting by adjoining spheres. Localization control of the tetrahedra and trihedra intersection prevents the emergence of additional monotonic DPC sections and provides a concentration of changing patterns of change in various characteristics at one particular point.

The accumulation scheme of a special DPC section provides control of its sequential localization. The accumulation point replaces one of the starting points of the special section boundaries, and for the subsequent accumulation becomes its new border. The direction of localization along the DPC of a particular section is determined by the choice of half of its possible location area, within which a condensation point is assigned. A special section, decreasing in size, shifts toward one of the monotonic DPC parts in the limit transforming to a singular point.

Each special DPC section corresponds to a special section of the return broken line. The configuration of the broken return line makes it possible to determine the DPC section, which contains a special point, the presence or absence of an inflection and course change of the DPC at a special point, the type of monotonic DPC parts that are joined at a special point.

The proposed methods for accumulation special sections make it possible to model the DPC based on a point row of an arbitrary configuration, consisting of monotonic parts docked at special points. Control of the unplanned special sections occurrence ensures the DPC formation, in which the number of monotonic parts is minimal based on the configuration of the initial point row.

Modeling a flat DPC of arbitrary configuration is carried out in parts along which it is possible to provide a monotonic curve change. The monotonic parts are joined at special points inflection points and points at which the curvature reaches an extremum.

The position of the normals and the curvature centres at the points of the monotonic DPC is determined on the basis of the condition of equality of the evolute length and the difference between the radii values of curvature corresponding to its boundary points. The normals assigned at the starting points and the segments connecting the curvature centres assigned on the normals limit the trihedra basic sequence, which is the possible location area of the DPC evolute. The possibility of monotonic DPC forming in each of its sections is controlled by the ratio of the lengths of the sides of the base trihedral, at which a given length of the evolution section can be provided.

The point row accumulation algorithm is based on controlling the properties of the formed DPC evolute. At each accumulation step, consequently the position of the normal corresponding to the accumulation point, the center of curvature belonging to this normal, and then the accumulation point itself is sequentially assigned. Each of these elements is assigned within the corresponding range, which provides a given ratio of the sides lengths of the base trihedra resulting from the accumulation.

The possible location area of a flat monotonic DPC is determined by the characteristics that are specified at its points. The location boundaries of each section are arcs of adjoining, tangent, or osculating circles that correspond to the boundary area points. Each characteristics appointment at the DPC points leads to the area localization of its possible location. Size control of the DPC location area makes it possible to determine the number of accumulation steps, which is necessary to ensure the specified interpolation accuracy.

The DPC accumulation in the vicinity of inflection points and points of increase change along the curvature values curve is controlled by the location of two chains of basic trihedra, each of which defines the evolute of one of the monotonic DPC parts.

The proposed algorithms allow to accumulate sections of a flat DPC locally, in an arbitrary sequence and with the appointment within each initial section of accumulation points, the number of which ensures a given interpolation accuracy.

The boundary determination of the possible location area of spatial and flat DPCs provided a means to control the accuracy with which the point row represents a curve with specified geometric features. The absolute error of discrete interpolation is estimated at each DPC section as the maximum possible distance between monotonic curves with which it is possible to interpolate a point row. The absolute error evaluation makes it possible to determine the minimum number of necessary steps for DPC accumulation in each of its initial sections, after which the formed point row can be interpolated by a continuous contour.

Methods have been developed that allow to form a contour within the possible DPC location area. This arrangement guarantees the monotonic curve replacement by a contour with an error that does not exceed the formation error of the monotonic DPC parts. The contour can be obtained by interpolating a point row with an accompanying broken line, a turtle back circle line, a cubic non-periodic B-spline. Interpolation by sections of curves, the formation of which is provided by the CAD systems library, makes it possible to create computer models of curves based on algorithms of DPC accumulation.

Based on the developed methods for interpolating point rows, the method for designing surfaces with enhanced dynamic characteristics is proposed. Surfaces are modeled on the basis of a skeleton, the linear elements of which define condensed DPC interpolating point rows selected from an array of points belonging to the surface. The functional surface qualities are ensured by the given DPC geometric characteristics a constant stroke, a monotonic change along the curve of the curvature values and the radii of the contacting spheres.

The algorithms developed as part of the dissertation research are implemented in a computer program, which is introduced into the production process as a tool for forming linear elements of surface frames.

Based on the results of the dissertation research, it can be concluded that there is a prospect of further research in the field of VDGM curves and surfaces in the possible location area of geometric images with a given combination of characteristics.

The scientific novelty of the results obtained in the study lies in the development of theoretical and methodological foundations for modeling the point rows contours of an arbitrary configuration in the possible location space of curves with a given combination of geometric characteristics, which is a further development of a varied discrete geometric modeling of geometric images under given conditions.

In the work for the first time:

- the method has been developed for analyzing a point series of an arbitrary configuration, which provides a means to determine its parts that can be interpolated by a constant-running line with a monotonic change in the radii of osculating circles and spheres, as well as to determine the areas in which the interpolating curve necessarily contains singular points. The analysis establishes the interpolating possibility of a monotonic curve point row, its characteristics and its possible location;

- the general approach to modeling spatial and flat DPC has been proposed and theoretically justified in the form of a sequence of closed geometric images that limit the possible location area of curve parts along which the values of its characteristics monotonically increase or decrease;

- the unified methodology for determining the locations of the intermediate DPC points in the sections that make up its monotonic parts is proposed. The algorithmic implementation of the methodology ensured the point row formation, consisting of an variably large number of points that belong to a curve with the characteristics assigned based on the analysis of the initial point row;

- the methods for spatial DPC modeling based on its polar torso formation and flat DPC based on its evolute formation are developed. The discrete analogues use of the polar torso and evolute has made it possible to carry out comprehensive control of the discrete characteristics of the formed point row and the possible location area of the curve interpolating it, to assign fixed curvature values, torsion, and radii of contacting spheres at the starting points;

- the methods for the DPC formation in areas containing singular points are proposed: inflection points, change of course, change of increase-decrease in curvature, torsion, radii of contacting spheres, which allowed to simulate the DPC on the basis of a point row of an arbitrary configuration in parts along which its characteristics values change monotonically;

- the method has been proposed and theoretically justified for determining the absolute error of discrete interpolation as the maximum possible distance between curves with given characteristics that interpolate the formed point row. Determining the error of discrete interpolation provides a means to set the required

number of intermediate points, the purpose of which provides a given accuracy of the DPC formation in each of the source sections;

- the methods of forming contours of point rows within the possible location area of the DPC monotonous parts are developed. The methods make it possible to create continuous geometric images and their computer models, which with an error not exceeding a given value, replace the DPC of an arbitrary configuration.

In the work the estimating methodology of the curve geometric characteristics using the discrete characteristics of its point row **has been further developed**. At the same time, discrete analogues of contacting spheres and torsion values are used for the first time. Discrete characteristics are the initial data for determining the parts of the duodenum with a monotonic change in the geometric characteristics and the space of their possible location;

The practical significance of the results is to provide the designer an effective tool for forming curves with a given pattern of differential-geometric characteristics change and modeling, based on them, of skeleton surfaces with specified functional features. The developed knoware and software allows to improve the quality of simulated complicated surfaces, limited industrial products, as well as to decrease the time consumption of programs creating for their CNC machine processing.

Implementation of the results.

Based on the research carried out in the dissertation, the algorithms, guidelines and software developed for implementation has been adopted:

- at MELT foundry company, Melitopol Turbocompressor Plant LLC, Tavria Turbo Plus private enterprise when designing surfaces of turbocompressor impellers;

- at NPKF Special Hydraulic Machines LLC when designing impeller functional surfaces of the STsN 75/70 centrifugal single-stage pump;

- at ROSTA research and production company when designing the blade functional surface for soil loosening in the garden near-tree strips;

- at CAD Center NPP when creating software modules for modeling surfaces defined by a skeleton for solid-state parametric modeling packages.

The working body for soil loosening, manufactured by ROSTA research and production company, has passed field tests on the basis of LANA LLC. Tests have shown that the use of a working body made using the developed method has led to the improvement in the soil structure obtained as a result of processing, as well as the reduction in fuel costs for processing the reference area.

Keywords: optional discrete geometric modeling, monotonic curve, discrete submitted curve, discrete characteristics, possible location area of monotonic curve , special section, discrete interpolation accuracy.

LIST OF THE PUBLISHED WORKS ON THE TOPIC OF DISSERTATION

in which published basic scientific results of dissertation

Articles in editions, that is included to the scientific databases

1. Gavrilenko E. A. Discretely geometrical modelling of one-dimensional contours with a regular change of differential-geometric characteristics [Electronic resource] / E. A. Gavrilenko, Yu. V. Kholodnyak // Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines (Dynamics). 2014. P. 1-5. Access mode: http://ieeexplore.ieee.org/xpl/articleDetails.jsp?arnumber=7005654. (*The magazine included in the science-metric databases: Scopus, Google Scholar, RINTS*). Personal contribution of the applicant: a method has been developed for modeling one-dimensional contours with a regular change in the differential geometric characteristics.
2. Havrylenko Y. Development of the method for the formation of one-dimensional contours by the assigned interpolation accuracy / Y. Havrylenko, Y. Kholodniak, O. Vershkov, A. Naidysh // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2018. Vol. 1, Iss. 4(91). P. 76-82. (*The magazine included in the science-metric databases: Scopus, CrossRef, American Chemical Society, Index Copernicus, EBSCO, Google Scholar, РІНЦ, ResearchBib, Open Academic Journals Index, Ulrich's Periodicals Directory*). Access mode: https://doi.org/10.15587/1729-4061.2018.123921. Personal contribution of the applicant: a method for assessing the accuracy of discrete interpolation is proposed.
3. Havrylenko Ye. A. Vyznachennia oblasti roztashuvannia tochky perehynu pry modeliuvanni obvodu druhoho poriadku hladkosti / Ye. A. Havrylenko, Yu. V. Kholodniak, V. I. Mezhuiev // Visnyk Khersonskoho natsionalnoho tekhnichnoho universytetu / KhNTU. Kherson, 2014. Vyp. 3 (50). S. 16-20. (*The magazine included in the science-metric databases: National Library of Ukraine (Vernadsky), Google Scholar, RINTS*). Access mode: https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru/. Personal contribution of the applicant: proposed a method for determining the area of the inflection point of the curve.
4. Gavrilenko E. A. Variativnoye diskretnoye geometricheskoye modelirovaniye odnomernykh obvodov s zadannymi differentsialno geometricheskimi svoystvami / E. A. Gavrilenko // Visnyk Khersonskoho natsionalnoho tekhnichnoho universytetu / KhNTU. Kherson, 2015. Vyp. 3 (54). S. 555-559. (*The magazine included in the science-metric databases: National Library of Ukraine (Vernadsky), Google Scholar, RINTS*). Access mode: https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru.
5. Gavrilenko E. A. Formirovaniye geometricheskikh kharakteristik monotonnoy krivoy linii / E. A. Gavrilenko, Yu. V. Kholodnyak, V. A. Pakharenko // Visnyk Khersonskoho natsionalnoho tekhnichnoho universytetu: nauk. zhurnal / KhDTU. – Kherson, 2016. – № 3(58). – S. 492-496. (*The magazine included in the science-metric databases: National Library of Ukraine (Vernadsky), Google Scholar, RINTS*). Access mode: https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru. Personal contribution of the applicant: a method is proposed for determining the ranges of the positions of the normals of

a discretely presented curve based on the condition of monotonic change in the values of its characteristics.

6. Gavrilenko E. A. Diskretnoye modelirovaniye odnomernogo prostranstvennogo obvoda na osnove oblasti vozmozhnogo raspolozheniya krivykh s zadannymi geometricheskimi kharakteristikami / E. A. Gavrilenko, Yu. V. Kholodnyak. A. V. Naydysh // Visnyk Khersonskoho natsionalnoho tekhnichnoho universytetu / KhNTU. – Kherson, 2017. – № 3(62), t. 2. – S. 264-268. (*The magazine included in the science-metric databases: National Library of Ukraine (Vernadsky), Google Scholar, RINTS*). Access mode: https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru. Personal contribution of the applicant: a method for determining the area of location of a monotone curved line is proposed.

The articles are in scientific professional editions

7. Havrylenko E. A. Vyznachennia polozhennia tsentriv kryvyny dyskretno predstavlenoi kryvoi / E. A. Havrylenko // Systemni tekhnolohii: rehion. mezhvuz. zb. nauk. pr. / NMetAU. Dnipropetrovsk, 2011. Vyp. 5 (76). S. 145-151. Access mode:
HYPERLINK "https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru" https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru.

8. Havrylenko Ye. A. Umovy roztashuvannia stychnykh kil pry formuvanni obvodu z monotonnoiu zminoiu kryvyny / Ye. A. Havrylenko // Pratsi Tavriiskoho derzhavnoho ahrotekhnolohichnoho universytetu: nauk. fakh. vydannia / TDATU. Melitopol, 2011. Vyp. 4: Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika, t. 50. S. 146-150. Access mode:
HYPERLINK "https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru" https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru.

9. Havrylenko Ye. A. Vyznachennia diapazoniv polozhennia normalei u vuzlakh DPK z monotonnoiu zminoiu kryvyny / Ye. A. Havrylenko, V. V. Hnatushenko, V. M. Shcherbyna // Systemni tekhnolohii: rehion. mezhvuz. zb. nauk. pr. / NMetAU. Dnipropetrovsk, 2012. Vyp. 5(82). S. 43-47. Access mode: https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru. Personal contribution of the applicant: a method is proposed for determining the ranges of possible, according to the conditions of the problem, characteristics when modeling a monotonic curve in an area bounded by neighboring points.

10. Gavrilenko E. A. Formirovaniye ploskikh obvodov zadannogo poryadka gladkosti / Є. A. Gavrilenko // Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika: mizhvid. nauk.-tekhn. zbirnyk / KNUBA. – Kyiv, 2012. – Vyp. 90. – S. 74-78. Access mode:
HYPERLINK "https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru" https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru.

11. Havrylenko Ye. A. Vyznachennia hranyts diapazoniv polozhennia tsentriv kryvyny ploskoho obvodu / Ye. A. Havrylenko // Pratsi Tavriiskoho derzhavnoho ahrotekhnolohichnoho universytetu: nauk. fakh. vydannia / TDATU. Melitopol, 2012. Vyp. 4: Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika, t. 52. S. 103-106. Access mode:

HYPERLINK "https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru" https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru.

12. Havrylenko Ye. A. Vyznachennia polozhennia tochky zghushchennia pry modeliuvanni monotonnoi dyskretno predstavlenoi kryvoi / Ye. A. Havrylenko // Pratsi Tavriiskoho derzhavnoho ahrotekhnolohichnoho universytetu: nauk. fakh. vydannia / TDATU. Melitopol, 2012. Vyp. 4: Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika, t. 53. S. 29-33. Access mode: https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru.

13. Havrylenko Ye. A. Vyznachennia diapazoniv heometrychnykh kharakterystyk monotonnoi dyskretno predstavlenoi kryvoi / Ye. A. Havrylenko, Yu. V. Kholodniak // Pratsi Tavriiskoho derzhavnoho ahrotekhnolohichnoho universytetu: nauk. fakh. vydannia / TDATU. Melitopol, 2012. Vyp. 4: Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika, t. 54. S. 38-42. Access mode: https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru. Personal contribution of the applicant: a method for determining and an algorithm for calculating the ranges of possible values of differential-geometric characteristics at the points of the curve based on the condition of monotonic change in curvature is proposed.

14. Havrylenko Ye. A. Zadacha formuvannia lokalnykh heometrychnykh kharakterystyk u vuzlakh dyskretno predstavlenoi poverkhni / Ye. A. Havrylenko, V. A. Didur // Pratsi Tavriiskoho derzhavnoho ahrotekhnolohichnoho universytetu: nauk. fakh. vydannia / TDATU. Melitopol, 2012. Vyp. 4: Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika, t. 55. S. 56-61. Access mode: https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru. Personal contribution of the applicant: a method is proposed for modeling a discretely presented surface with the provision of specified differential-geometric characteristics.

15. Havrylenko Ye. A. Rozrakhunok hranychnykh znachen heometrychnykh kharakterystyk pry dyskretnomu heometrychnomu modeliuvanni monotonnoi kryvoi / A. V. Naidysh, Ye. A. Havrylenko, V. F. Yalpachyk // Pratsi Tavriiskoho derzhavnoho ahrotekhnolohichnoho universytetu: nauk. fakh. vydannia / TDATU. Melitopol: TDATU, 2012. Vyp. 12, t. 5. S. 192-196. Access mode: https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru. Personal contribution of the applicant: a geometric scheme is proposed and an algorithm for modeling a discretely presented curve of the second order of smoothness based on spatial angular parameters is developed, the algorithm is verified on test cases.

16. Havrylenko Ye. A. Prohramna realizatsiia alhorytmu modeliuvannia odnovymirnykh obvodiv po zadanym heometrychnym umovam / Ye. A. Havrylenko, Yu. V. Kholodniak // Kompiuterno-intehrovani tekhnolohii: osvita, nauka, vyrobnytstvo: nauk. zhurn. / Lutskyi NTU. Vyp. 13. Lutsk, 2013. S.4-9. Access mode:
HYPERLINK "https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru" https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru. Personal contribution of the applicant: a system of restrictions on the location of the curve in accordance with the conditions of the problem has been determined.

17. Havrylenko Ye. A. Dyskretne modeliuvannia odnovymirnykh prostorovykh obvodiv pershoho poriadku hladkosti / Ye. A. Havrylenko // Pratsi

Tavriiskoho derzhavnoho ahrotekhnolohichnoho universytetu: nauk. fakh. vydannia / TDATU. Melitopol, 2013. Vyp. 4: Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika, t. 56. S. 28-32. Access mode: https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru.

18. Gavrilenko E. A. Determine of geometrical characteristics ranges of the discretely presented curve with law of curvature change / E. A. Gavrilenko, V. V. Gnatushenko, Yu. V. Kholodnyak // Systemni tekhnolohii: rehion. mezhvuz. zb. nauk. pr. / NMetAU. Dnipropetrovsk, 2013. Vyp. 1(84). - S.156-161. Access mode:
HYPERLINK "https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru" https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru.
Personal contribution of the applicant: a method has been developed for determining and clarifying the area of possible location of the inflection point and the normal passing through this point, based on the condition of monotonic change in differential-geometric characteristics along the curve.

19. Gavrilenko E. A. Variativnoye diskretnoye geometricheskoye modelirovaniye na osnove prostranstvennykh uglovykh parametrov diskretno predstavlennoy krivoy vtorogo poryadka gladkosti / E. A. Gavrilenko, A. V. Naydysh // Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika: mizhvid. nauk.-tekhn. zbirnyk / KNUBA. Kyiv, 2013. Vyp. 91. S. 69-75. Access mode: https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru. Personal contribution of the applicant: a method has been developed for determining the ranges of the positions of the normals and the values of the radii of curvature at the initial points when modeling a monotonic curve.

20. Gavrilenko E. A. Tochnost diskretnoy interpolyatsii ploskikh diskretno predstavlennykh krivykh / E. A. Gavrilenko, Yu. V. Kholodnyak // Pratsi Tavriiskoho derzhavnoho ahrotekhnolohichnoho universytetu: nauk. fakh. vydannia / TDATU. Melitopol, 2014. Vyp. 4: Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika, t. 58. S. 23-28. Access mode: https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru. Personal contribution of the applicant: a method for determining the maximum absolute error of discrete interpolation has been developed.

21. Gavrilenko E. A. Formirovaniye geometricheskoy modeli rabochego kolesa turbokompressora / E. A. Gavrilenko, Yu. V. Kholodnyak // Pratsi Tavriiskoho derzhavnoho ahrotekhnolohichnoho universytetu: nauk. fakh. vydannia / TDATU. Vyp. 14, t. 2. Melitopol, 2014. S. 48-53. Access mode: https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru. Personal contribution of the applicant: a method for forming the interscapular channel of the impeller is proposed and a geometric scheme for modeling the discrete frame of the working surface of the blade is developed.

22. Gavrilenko E. A. Razrabotka tekhnologii formoobrazovaniya i obrabotki dinamicheskikh poverkhnostey / E. A. Gavrilenko, Yu. V. Kholodnyak, V. V. Kucherenko, A. A. Bezditniy // Naukovi notatky: mizhvuzivskyi zbirnyk / Lutskyi NTU. Lutsk, 2015. - S. 54-58. Access mode: https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru. Personal contribution of the applicant:

a scheme for the formation of discrete frameworks of surfaces based on discretely presented curves with given differential-geometric characteristics is proposed.

23. Gavrilenko E. A. Ispolzovaniye baritsentricheskikh koordinat pri konstruirovanii prostranstvennoy diskretno predstavlennoy krivoy / E. A. Gavrilenko // Suchasni problemy modeliuvannia: nauk. fakh. vydannia / Melitop. derzh. ped. un-t im. B. Khmelnytskoho. – Melitopol, 2016. Vyp. 6. S. 38-42. Access mode: https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru.

24. Gavrilenko E. A. Tekhnologiya kompyuternogo proyektirovaniya funktsionalnykh poverkhnostey tekhnicheskikh izdeliy na osnove massiva tochek / E. A. Gavrilenko, A. V. Naydysh, Yu. V. Kholodnyak // Stroitelstvo. Materialovedeniye. Mashinostroyeniye: sb. nauch. trudov / Pridneprov. gos. akad. str-va i arkhitektury. Dnepr. 2016. Vyp. 94. S. 24-29. (Kompyuternyye sistemy i informatsionnyye tekhnologii v obrazovanii. nauke i upravlenii). Access mode: https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru. Personal contribution of the applicant: a method of forming a ruled surface frame based on an initial array of points is proposed.

25. Gavrilenko E. A. Variativnoye modelirovaniye krivykh s zakonomernym izmeneniyem differentsialno-geometricheskikh kharakteristik / E. A. Gavrilenko, Yu. V. Kholodnyak // Naukovyi visnyk Tavriiskoho derzhavnoho ahrotekhnolohichnoho universytetu: elektron. nauk. fakh. vydannia / TDATU. Melitopol, 2016. Vyp. 6, t. 1. S. 230-235. Access mode: https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru. Personal contribution of the applicant: a method for determining the geometric characteristics of a monotone curved line is proposed.

26. Gavrilenko E. A. Informatsionnaya tekhnologiya proyektirovaniya i izgotovleniya rabochikh koles turbokompressora / E. A. Gavrilenko, Yu. V. Kholodnyak, Yu. A. Dmitriyev // Naukovyi visnyk Tavriiskoho derzhavnoho ahrotekhnolohichnoho universytetu: elektron. nauk. fakh. vydannia / TDATU. Melitopol, 2016. Vyp. 6, t. 2. S. 52-62. Access mode: https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru. Personal contribution of the applicant: a method for forming the interscapular channel of the impeller is proposed and a geometric scheme for modeling the discrete frame of the working surface of the blade is developed.

27. Gavrilenko E. A. Oblast vozmozhnogo raspolozheniya prostranstvennogo odnovremennogo obvoda / E. A. Gavrilenko, Yu. V. Kholodnyak // Suchasni problemy modeliuvannia: nauk. fakh. vydannia / Melitop. derzh. ped. un-t im. B. Khmelnytskoho. Melitopol, 2017. Vyp. 8. S. 60-64. Access mode: https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru. Personal contribution of the applicant: a method is proposed for determining the space of the possible location of curves with certain geometric properties.

28. Kholodnyak Yu. V. Modelirovaniye odnomernykh obvodov po zadannym usloviyam / Yu. V. Kholodnyak, E. A. Gavrilenko, A. V. Dubinina //

Suchasni problemy modeliuvannia: nauk. fakh. vydannia / Melitop. derzh. ped. un-t im. B. Khmelnytskoho. Melitopol, 2017. Vyp. 9. S. 162-166. Access mode: https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru. Personal contribution of the applicant: a method is proposed for determining the sections of the original point series, which can interpolate with a curve with a monotonic change in curvature.

29. Gavrilenko E. A. Opredeleniye absolyutnoy pogreshnosti interpolyatsii krivoy s zadannymi geometricheskimi svoystvami / E. A. Gavrilenko, A. V. Naydysh, Yu. V. Kholodnyak // Stroitelstvo. Materialovedeniye. Mashinostroyeniye: sb. nauch. trudov / Pridneprov. gos. akad. str-va i arkhitektury. Dnepr. 2017. Vyp. 101. S. 72-79. (Kompyuternyye sistemy i informatsionnyye tekhnologii v obrazovanii. nauke i upravlenii). Access mode: https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru. Personal contribution of the applicant: a method is proposed for determining the absolute error of interpolation of a curve with specified geometric properties.

30. Kholodnyak Yu. V. Formirovaniye obvodov s zadannymi geometricheskimi svoystvami / Yu. V. Kholodnyak, E. A. Gavrilenko, A. V. Dubinina // Suchasni problemy modeliuvannia: nauk. fakh. vydannia / Melitop. derzh. ped. un-t im. B. Khmelnytskoho. Melitopol, 2018. Vyp. 11. S. 165-169. Access mode: HYPERLINK "https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru" https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru. Personal contribution of the applicant: a method is proposed for the formation of one-dimensional contours with a regular change in curvature based on the configuration of the initial point row.

31. Gavrilenko E. A. Formirovaniye DPK na uchastkakh. soderzhashchikh osobyye tochki / E. A. Gavrilenko, Yu. V. Kholodnyak // Suchasni problemy modeliuvannia: nauk. fakh. vydannia / Melitop. derzh. ped. un-t im. B. Khmelnytskoho. Melitopol, 2018. Vyp. 12. S. 53-57. Access mode: https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru. Personal contribution of the applicant: a method is proposed for identifying areas containing singular points and forming a discretely presented curve on these areas.

Additional publications

32. Gavrilenko E. A. Diskretnoye geometricheskoye modelirovaniye prostranstvennykh odnomernykh obvodov po zadannym usloviyam // E. A. Gavrilenko, Yu. A. Dmitriyev // Dinamika sistem. mekhanizmov i mashin / Omskiy GTU. – № 1. – Omsk. 2014. – S. 150-152. Access mode: https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru. Personal contribution of the applicant: a geometric scheme is proposed and an algorithm for modeling spatial contours according to specified conditions is developed, the method is verified on test examples.

33. Havrylenko Ye. A. Formuvannia prostorovoi DPK na osnovi pryliahaiuchykh kil / Ye. A. Havrylenko // Suchasni problemy modeliuvannia: zb. nauk. prats / MDPU im. B. Khmelnytskoho. Melitopol, 2014. Vyp. 3. S. 39-42. Access mode:

https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru.

34. Gavrilenko E. A. Modelirovaniye krivoy postoyannogo khoda s monotonnym izmeneniyem radiusov soprikasayushchikhsya okruzhnostey i sfer / E. A. Gavrilenko, A. V. Naydysh, Yu. V. Kholodnyak, Yu. A. Dmitriyev // Dinamika sistem. mekhanizmov i mashin / Omskiy GTU. – Omsk. 2016. – № 1. T. 4. – S. 135-138. Access mode: https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru. Personal contribution of the applicant: a method is proposed for forming a curve based on the dynamics of changes along it in the radii of the contiguous spheres.

Patent

35. Patent na korysnu model 91024 Ukraina, MPK (2014.01) F16S 5/00. Sposib modeliuvannia liniinykh elementiv karkasa skladnykh poverkhon, yaki obmezhuiut tekhnichni vyroby, shcho vzaiemodiiut iz seredovyshchem / Havrylenko Ye. A., Kholodniak Yu. V.; zaiavnyk i patentovlasnyk Tavriiskyi derzhavnyi ahrotekhnolohichnyi universytet. № u201311250; zaiavl. 23.09.2013; opubl. 25.06.2014, Biul. № 12. Access mode: https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru. Personal contribution of the applicant: an algorithm has been developed for modeling a curve with a monotonic change in curvature according to specified conditions: fixed positions of normals and values of radii of curvature at the initial points.

Materials of conferences

36. Gavrilenko E. A. Variativnoye diskretnoye geometricheskoye modelirovaniye odnomernykh obvodov na osnove prostranstvennykh uglovykh parametrov / E. A. Gavrilenko, A. V. Naydish // Tekhnicheskiye nauki ot teorii k praktike: sb. statey ... nauch.-prakt. konf. (oktyabr. 2013 g.. Novosibirsk) / NP «SibAK». – Novosibirsk. 2013. № 26. – S.8-13. Access mode: https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru. Personal contribution of the applicant: an algorithm for modeling one-dimensional contours based on spatial angular parameters was developed, the method was tested on test examples, and conclusions were drawn.

37. Gavrilenko E. A. Raschet i modelirovaniye slozhnykh geometricheskikh poverkhnostey / Yu. V. Kholodnyak, E. A. Gavrilenko, Yu. A. Dmitriyev // Molodezh i Nauka: modernizatsiya i innovatsionnoye razvitiye strany: mater. III Mezhdunar. nauch.-prakt. konf. (5-8 iyunya 2013 g.. Penza) / PenGTU. Penza. 2013. S. 37-39. Access mode: https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru. Personal contribution of the applicant: a scheme for the formation of a ruled frame is proposed, it sets the surface, and a method for determining the possible values of its characteristics.

38. Gavrilenko E. A. Formirovaniye ploskikh diskretno predstavlennykh krivykh po zadannym usloviyam / E. A. Gavrilenko, A. V. Naydysh, Yu. V. Kholodnyak // Nauchnyye itogi: dostizheniya. proyekty. gipotezy: mater. XVIII-oy Mezhdunar. nauch.-prakt. konf. (28 noyabrya. 2013 g.. Mineralnyye Vody) / SKF BGTU im. V.G. Shukhova. – Mineralnyye Vody. 2013. – № 18. – S. 139-142 . Access mode:

https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru. Personal contribution of the applicant: a geometric scheme was proposed and an algorithm for modeling curves with a regular change in differential-geometric characteristics was developed, the scheme was checked using test examples.

39. Gavrilenko E. A. Variativnoye diskretnoye geometricheskoye modelirovaniye diskretno predstavlennoy krivoy s zakonomernym izmeneniyem krucheniya / E. A. Gavrilenko // Nauchnyye itogi: dostizheniya. proyekty. gipotezy: mater. XIX-oy Mezhdunar. nauch.-prakt. konf. (27 marta. 2014 g.. Mineralnyye Vody) / SKF BGTU im. V.G. Shukhova. – Mineralnyye Vody. 2014. – № 19. – S. 155-157. Access mode: https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru.

40. Gavrilenko E. A. Variative modelling of one-dimensional contours according to the given conditions / E. A. Gavrilenko, Y. V. Kholodnyak // Knowledge is power, power is knowledge : the international multidisciplinary congress (Vienna, Austria, 27 iyuliya 2015 г.) / International Scientific Association "Science & Genesis". – Prague, 2015. – С. 267-270. Access mode: https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru. Personal contribution of the applicant: a method for the formation of one-dimensional contours with the provision of control over the occurrence of oscillations is proposed.

41. Gavrilenko E. A. Formirovaniye diskretnogo setchatogo karkasa dinamicheskikh poverkhnostey / E. A. Gavrilenko, Yu. V. Kholodnyak, A. V. Dubinina, S. O. Baryshevskiy // Suchasni problemy heometrychnoho modeliuvannia: zbirnyk prats XVII Mizhnarodnoi naukovo-praktychnoi konferentsii (02-05.06.2015r.) / Melitop. derzh. ped. un-t im. B. Khmelnytskoho. Melitopol, 2015. S. 44-48. Access mode: https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru. Personal contribution of the applicant: a method of forming a ruled frame is proposed, it sets a surface, the functional purpose of which is interaction with the environment.

42. Gavrilenko E. A. Diskretnoye geometricheskoye modelirovaniye metodom prostranstvennykh uglovykh parametrov / E. A. Gavrilenko // Zbirnyk tez dopovidei XI Mizhnarodnoi naukovo-praktychnoi konferentsii «Obukhivski chytannia» (1-ho bereznia 2016 roku) / Natsionalnyi universytet bioresursiv i pryrodokorystuvannia Ukrainy. Kyiv, 2016. S. 20-21. Access mode: https://scholar.google.com.ua/citations?user=VjnUj6sAAAAJ&hl=ru.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ 49
ВСТУП 50
РОЗДІЛ 1 АНАЛІЗ ІСНУЮЧИХ МЕТОДІВ МОДЕЛЮВАННЯ ОБВОДІВ ЗА ЗАДАНИМИ УМОВАМИ 63
1.1 Інтерполяція точкових рядів методами неперервного геометричного моделювання (НГМ) 65
1.2 Інтерполяція точкових рядів методами дискретного геометричного моделювання (ДГМ) 73
1.3 Інтерполяція точкових рядів методами варіативного дискретного геометричного моделювання (ВДГМ) 78
1.3.1 Формування гладких ДПК із забезпеченням контролю за виникненням точок перегину 79
1.3.2 Моделювання ДПК з регулярною монотонною зміною кривини 83
1.3.3 Лінійна інтерполяція просторових точкових рядів 90
1.4 Задачі дисертаційного дослідження 95
Висновки по першому розділу 97
РОЗДІЛ 2 АНАЛІЗ ГЕОМЕТРИЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ДПК НА ОСНОВІ ХАРАКТЕРИСТИК ВИХІДНОГО ТОЧКОВОГО РЯДУ 99
2.1 Диференційно-геометричні властивості просторових кривих ліній 100
2.1.1 Формування монотонних кривих ліній 101
2.1.2 Особливі точки просторової кривої лінії 107
2.2 Дискретні характеристики ДПК 118
2.2.1 Прилеглі і дотичні площини 119
2.2.2 Хід і дискретний скрут ДПК 124
2.2.3 Прилеглі і дотичні кола просторової кривої лінії 128
2.2.4 Стичні, дотичні та прилеглі сфери 131
2.2.5 Гранні полярні поверхні 134
2.3 Область розташування ДПК 136
2.3.1 Тетраедри розташування ДПК 136
2.3.2 Сферичні тригранники 139
2.4 Визначення геометричних характеристик ДПК 146
2.4.1 Вихідні характеристики заданого точкового ряду 146
2.4.2 Локальні системи координат 147
2.4.3 Хід і напрями зростання скруту вздовж ДПК 148
2.4.4 Ділянка перегину просторової ДПК 149
2.4.5 Визначення монотонних ділянок ДПК 151
2.4.6 Загальний алгоритм аналізу характеристик ДПК 151
Висновки по другому розділу 153
РОЗДІЛ 3 ФОРМУВАННЯ МОНОТОННОЇ ДПК НУЛЬОВОГО ПОРЯДКУ ФІКСАЦІЇ 156
3.1 Загальна схема згущення монотонної ДПК 156
3.2 Згущення ДПК на основі прилеглих тетраедрів (ПТ) 157
3.2.1 Вихідна область розташування точки згущення 157

3.2.2 Призначення точки згущення ДПК постійного ходу 159
3.2.3 Призначення точки згущення ДПК з монотонною зміною скруту 161
3.3 Згущення ДПК на основі тригранників прилеглих сфер (ТПСф) 165
3.3.1 Вихідна область розташування точки згущення 166
3.3.2 Область розташування згущеної ДПК 169
3.3.3 Визначення меж області розташування точки згущення і оцінка її розмірів 174
3.3.4 Згущення монотонної ДПК 176
3.4 Згущення ДПК на основі гранної полярної поверхні перпендикулярних площин ($ГПП^P$) 178
3.4.1 Схема згущення ділянки ДПК на основі $ГПП^P$ 180
3.4.2 Взаємозв'язок характеристик $ГПП^P$ і меж області розташування ДПК 183
3.4.3 Формування ламаної звороту гранної полярної поверхні згущеної ДПК 187
3.4.4 Алгоритм згущення монотонної ДПК на основі гранної полярної поверхні 192
3.5 Діапазони можливих значень геометричних характеристик ДПК 194
Висновки по третьому розділу 197
РОЗДІЛ 4 ФОРМУВАННЯ ДПК ВИЩИХ ПОРЯДКІВ ФІКСАЦІЇ 201
4.1 Згущення ДПК на основі дотичних тетраедрів 201
4.1.1 Призначення дотичних прямих в точках ДПК 201
4.1.2 Призначення положень стичних площин (СП) в точках ДПК 205
4.1.3 Згущення точкового ряду на основі стичних тетраедрів 210
4.2 Згущення ДПК на основі тригранників дотичних сфер (ТДСф) 213
4.2.1 Призначення дотичної прямої у вихідній точці ДПК 214
4.2.2 Формування тригранників дотичних сфер 217
4.2.3 Призначення точки згущення в межах $ТДСф_i$ 218
4.3 Згущення ДПК на основі гранної полярної поверхні нормальних площин ($ГПП^N$) 220
4.3.1 Призначення нормальної площини в i-й точці вихідної ДПК 221
4.3.2 Формування вихідної $ГПП^N$ 223
4.3.3 Контроль характеристик ДПК через характеристики $ЛВ^N$ 225
4.3.4 Згущення ламаної звороту гранної поверхні нормальних площин 228
4.3.5 Формування ламаної звороту з використанням осей кривини 235
Висновки по четвертому розділу 240
РОЗДІЛ 5 ФОРМУВАННЯ ДПК НА ДІЛЯНКАХ, ЩО МІСТЯТЬ ОСОБЛИВІ ТОЧКИ 243
5.1 Формування ділянок, що містять точки зміни напряму зростання вздовж ДПК радіусів стичних кіл і сфер 243
5.2 Формування ділянки ДПК, що містить точку зміни ходу кривої 248
5.2.1 Згущення ділянки зміни ходу ДПК на основі прилеглих тетраедрів 248
5.2.2 Згущення ділянок зміни ходу ДПК на основі ГПП 253
5.3 Формування ділянки ДПК, що містить точку перегину 265
5.3.1 Формування ДПК постійного ходу в околі точки перегину 266

5.3.2 Формування ДПК в околі точки перегину та зміни ходу 270
5.4 Алгоритм згущення особливої ділянки ДПК 272
5.5 Формування особливих ділянок ДПК, у вузлах якої призначено положення дотичних прямих 273
Висновки по п'ятому розділу 276
РОЗДІЛ 6 МОДЕЛЮВАННЯ ПЛОСКОЇ ДПК ІЗ ЗАКОНОМІРНОЮ ЗМІНОЮ КРИВИНИ 280
6.1 Область можливого розташування монотонної ДПК 280
6.2 Призначення геометричних характеристик в точках вихідної ДПК 285
6.2.1 Призначення положення нормалей 287
6.2.2 Призначення центрів кривини 288
6.3 Згущення монотонної ДПК 294
6.3.1 Визначення положення нормалі ДПК в точці згущення 294
6.3.2 Призначення положення центру кривини ДПК, який відповідає точці згущення 296
6.3.3 Визначення положення точки згущення 297
6.4 Алгоритм згущення монотонної ДПК 299
6.5 Формування ділянок ДПК, що містять особливі точки 303
6.5.1 Згущення ДПК в околі точки перегину 303
6.5.2 Згущення ДПК в околі точки зміни напряму зростання вздовж кривої значень кривини 307
Висновки по шостому розділу 310
РОЗДІЛ 7 РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ З ВИКОРИСТАННЯМ МЕТОДУ МОДЕЛЮВАННЯ ОБВОДІВ В ПРОСТОРІ МОЖЛИВОГО РОЗТАШУВАННЯ МОНОТОННИХ КРИВИХ 312
7.1 Забезпечення заданої точності формування обводів 313
7.1.1 Похибка дискретної інтерполяції 313
7.1.2 Формування обводів з негладким стикуванням ланок 319
7.1.3 Формування обводів з гладким стикуванням ланок 320
7.2 Коректність, стійкість і збіжність методу інтерполяції на основі області можливого розташування монотонної кривої 327
7.3 Формування дискретних сітчастих каркасів динамічних поверхонь на основі ДПК 330
7.3.1 Згущення точкового каркасу 330
7.3.2 Формування геометричних характеристик у вузлах дискретно представленої поверхні 333
7.4 Моделювання поверхонь з підвищеними динамічними характеристиками 336
Висновки по сьомому розділу 350
ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ 353
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 360
ДОДАТОК А 404
ДОДАТОК Б 408
ДОДАТОК В 414

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

БТ – базисний трикутник.
ГПП – гранна полярна поверхня.
ДПК – дискретно представлена крива.
ДО – дотичне коло.
ДСф – дотична сфера.
ЛЗ – ламана звороту.
ПК – прилегле коло.
ПСф – прилегла сфера.
ПТ – прилеглий тетраедр.
СЛЛ – супровідна ламана лінія.
СК – стичне коло.
ССф – стична сфера.
СТ – стичний тетраедр.
ТДСф – тригранник дотичних сфер.
ТПСф – тригранник прилеглих сфер.
R_i – радіус стичного кола.

– величина області можливого розташування монотонної кривої лінії.

ВСТУП

Системи автоматизованого проектування (САПР) є важливою складовою сучасного виробництва. Їх застосування в значній мірі забезпечує підвищення якості виготовлення виробів при більш низькій вартості і за менший час. Поряд зі збільшенням обчислювальних потужностей комп' ютерів фундаментальним завданням ефективного застосування САПР є розробка більш досконалого математичного забезпечення CAD / CAM / CAE систем.

Геометричне моделювання об'єкта часто є визначальним для забезпечення його функціональних властивостей. До таких об'єктів, перш за все, відносяться вироби з динамічними обводами в авіабудуванні, автомобілебудуванні, суднобудуванні, енергетичному та хімічному машинобудуванні. Складні поверхні, як правило, моделюються на основі лінійчатих каркасів, елементи яких формуються в результаті інтерполяції точкових рядів. При цьому геометричні характеристики кривої, яка інтерполює точковий ряд, забезпечують експлуатаційні якості виробу.

Таким чином, методи геометричного моделювання кривих ліній із заданим поєднанням характеристик, які інтерполюють точкові ряди складної конфігурації, є основою для розробки САПР виробів, обмежених функціональними поверхнями.

Залежно від способу подання інформації методи інтерполяції можна розділити на дві групи:

- методи неперервного геометричного моделювання, коли результатом є модель, представлена функцією або сукупністю функцій;

- дискретне геометричне моделювання, яке передбачає розв’язок у вигляді впорядкованої множини точок.

Збільшення числа умов, які накладаються на геометричний образ, що формується методами неперервного геометричного моделювання, вимагає збільшення параметричного числа кривих ліній, які складають його визначник. Це призводить до неконтрольованого виникнення у кривих особливих точок, що знижує загальну якість одержуваного розв’язку. На даний момент зазначена проблема не має кардинального розв’язання.

Дискретний підхід відкриває можливість контролю характеристик інтерполюючої кривої за рахунок відмови від її аналітичного подання і використання в якості інструменту формоутворення алгоритмів, що визначають положення проміжних точок кривої. Однак, до теперішнього часу ця потенційна можливість дискретного геометричного моделювання в значній мірі не реалізована. Основними завданнями, розв’язання яких дозволить підвищити ефективність дискретного геометричного моделювання , є контроль геометричних властивостей кривої лінії через характеристики точкового ряду, який їй належить, та оцінка точності дискретної інтерполяції.

Актуальність теми дисертаційного дослідження обумовлена існуючою потребою розвитку теорії моделювання за заданими умовами дискретно представлених геометричних образів і розробки на її основі алгоритмів для створення математичного забезпечення САПР кривих ліній і поверхонь

складної конфігурації.

Мета дослідження полягає в розробці теоретичних основ нового методу варіативного дискретного геометричного моделювання обводів на основі області можливого розташування кривих з відомими геометричними властивостями.

Для досягнення мети дослідження поставлені такі завдання:

1. визначити напрям наукових досліджень щодо розвитку теорії варіативного дискретного геометричного моделювання кривих ліній із заданими геометричними властивостями;
2. запропонувати систему дискретно представлених аналогів геометричних характеристик кривої і розробити на її основі методику аналізу точкового ряду на можливість його інтерполяції кривою лінією із заданими характеристиками;
3. запропонувати загальну схему моделювання просторових і плоских дискретно представлених кривих (ДПК) по частинах, уздовж яких значення характеристик кривої змінюються монотонно;
4. встановити залежності між характеристиками кривої лінії, яка інтерполює точковий ряд, і областю її можливого розташування в просторі;
5. розробити алгоритми призначення положень проміжних точок інтерполюючої кривої лінії, виходячи з умови монотонного збільшення (зменшення) уздовж неї значень її характеристик;
6. дослідити конфігурацію полярних торсів просторових кривих ліній і розробити спосіб формування ДПК на основі їх дискретних аналогів.
7. розробити метод моделювання плоскої ДПК на основі формування дискретного аналога її еволюти по частинах, уздовж яких значення кривини монотонно зростають або зменшуються;
8. запропонувати способи визначення, класифікації та згущення ділянок ДПК, які містять особливі точки;
9. запропонувати методику оцінки похибки, з якою точковий ряд представляє криву лінію з заданими геометричними властивостями;
10. розробити способи формування безперервних обводів в межах області можливого розташування монотонних частин ДПК;
11. дослідити можливості практичного застосування розробленого методу при розв’язанні прикладних задач і впровадити отримані результати в виробничий процес.

Методи дослідження. Розв’язок поставлених в роботі завдань здійснювався з використанням наступних наукових методів:

- методика аналізу точкового ряду на можливість його інтерполяції кривою лінією із заданими характеристиками, а також загальна схема моделювання просторових і плоских ДПК по частинах, уздовж яких значення характеристик кривої змінюються монотонно розроблені на основі теорії диференціальної геометрії кривих ліній з використанням методу нарисної геометрії;
- алгоритми визначення положень проміжних точок інтерполюючої кривої лінії, що належать її монотонним частинам і ділянкам, які містять особливі точки, способи формування безперервних обводів в межах області можливого розташування монотонних частин ДПК розроблені з використанням методів нарисної, аналітичної та обчислювальної геометрії;

- дослідження розробленого методу на збіжність, стійкість до зміни вихідних умов, можливість забезпечення заданої точності інтерполяції проведено з використанням методів нарисної та аналітичної геометрії;

- програмна реалізація розроблених в роботі алгоритмів здійснена на основі обчислювальної геометрії і методів комп'ютерного моделювання;

- моделювання виробів, обмежених складними функціональними поверхнями, з метою впровадження отриманих результатів у виробничий процес здійснено на основі теорії кривих ліній і поверхонь, теорії моделювання інженерних об'єктів і процесів з застосуванням методів комп' ютерного моделювання.

Напрямки досліджень дисертації відповідають наступним пунктам паспорта спеціальності 05.01.01 - прикладна геометрія, інженерна графіка:

- теорія і практика дискретного геометричного моделювання;
- конструювання кривих ліній і поверхонь за заданими вимогами;
- геометричні методи оптимізації в різних галузях науки і техніки;
- геометричні основи комп'ютерного дослідження та конструювання.

Теоретичною та інформаційною базою для досліджень, виконаних у дисертації, стали роботи вітчизняних та зарубіжних вчених в області:

- теорії диференціальної геометрії кривих ліній та поверхонь: Г. Дарбу, Ф. Дюпена, Ф. Френе, Ф. Іоахімсталя, Е. Картана та ін.;

- теорії геометричного моделювання кривих ліній та поверхонь Д. Алберга, Н.М. Аушевої, Ю.І. Бадаєва, І.Г. Балюби, В.Д. Борисенко, В.В. Ваніна, В.М. Верещаги, Г.А. Вірченко, В.В. Гнатушенко, С.М. Грибова, Ю.О. Дорошенко, Ю.С. Зав'ялова, Г.С. Іванова, С.М. Ковальова, Ю.М. Ковальова, В.М. Корчинського, І.І. Котова, Л.М. Куценко, Д.Ф. Кучкарова, Є.В. Мартина, В.Є. Михайленко, А.В. Найдиша, В.М. Найдиша, В.М. Несвідоміна, В.С. Обухової, В.А. Осипова, А.В. Павлова, О.Л. Підгорного, С.Ф. Пилипаки, В.О. Плоского, А.М. Подкоритова, Є.В. Пугачова, М.М. Рижова, А.М. Тевліна, П.В. Філіппова, А.М. Хомченко, О.В. Шоман, В.І. Якуніна;

- теорії моделювання інженерних об'єктів та процесів: Г.С. Іванова, С.М. Ковальова, Л.М. Куценко, В.Є. Михайленко, В.С. Обухової, А.В. Павлова, О.Л. Підгорного, А.М. Подкоритова, Н.І. Седлецької, І.А. Скідана, А.М. Тевліна, П.В. Філіппова та ін.;

- обчислювальної та комбінаторної геометрії: Б. Грюнбаума, Г. Дербуннера, М. Пратта, Ф. Препарата, Д. Роджерса, А. Фокса, А.М. Хомченко, А.Т. Фоменко та ін.

Об'єктом дослідження є варіативне дискретне геометричне моделювання кривих ліній довільної конфігурації з забезпеченням закономірної зміни їх диференціально-геометричних характеристик.

Предметом дослідження є забезпечення закономірної зміни значень кривини, скруту, радіусів стичних сфер при моделюванні дискретно представлених кривих на основі області їх можливого розташування.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана на кафедрі «Інформаційні технології проектування ім. В.М. Найдиша» Таврійського державного агротехнологічного університету відповідно до держбюджетної науково - технічної програми «Розробка наукових основ, систем, технологій і технічних засобів для забезпечення продовольчої безпеки південного регіону України» (номер державної реєстрації 0111U001949) та відповідно до науково-дослідницької програми Мелітопольського державного педагогічного університету імені Богдана

Хмельницького «Варіативне дискретне геометричне моделювання об'єктів, явищ і процесів» (номер державної реєстрації 0115U001737).

В процесі впровадження результатів досліджень вирішувалися завдання в рамках науково-виробничих програм НПК «Роста» по моделюванню робочих поверхонь інструменту для розпушування ґрунту в пристовбурних смугах саду; ТОВ «Спеціальні гідравлічні машини» по оптимізації конструкції робочих коліс відцентрового одноступінчатого насоса; ТОВ «Мелітопольський завод турбокомпресорів» щодо підвищення динамічних характеристик потоків в міжлопатковому каналі робочих коліс турбокомпресорів.

Наукова новизна отриманих в дослідженні результатів полягає в розробці теоретичних і методологічних основ моделювання обводів точкових рядів довільної конфігурації в просторі можливого розташування кривих ліній із заданим поєднанням геометричних характеристик, що є подальшим розвитком варіативного дискретного геометричного моделювання геометричних образів за заданими умовами.

У роботі вперше:

- запропоновано і теоретично обґрунтовано напрям наукових досліджень по варіативному дискретному геометричному моделюванню кривих ліній за заданими умовами, який засновано на формуванні точкових рядів, що належать області можливого розташування кривих з заданими геометричними властивостями;

- розроблена методика аналізу точкового ряду довільної конфігурації, що дозволяє визначати його частини, які можливо інтерполювати кривою лінією постійного ходу з монотонною зміною радіусів стичних кіл і сфер, а також визначати ділянки, на яких інтерполююча крива обов'язково містить особливі точки. Аналіз встановлює можливість інтерполяції точкового ряду монотонною кривою, її характеристики і область розташування;

- запропонована загальна схема моделювання просторових і плоских ДПК по частинах, уздовж яких значення характеристик кривої монотонно зростають або зменшуються. Алгоритмічна реалізація схеми забезпечила формування точкових рядів, що складаються з як завгодно великої кількості точок, які належать кривій лінії з призначеними на підставі аналізу вихідного точкового ряду характеристиками;

- встановлені залежності між характеристиками кривої лінії, яка інтерполює точковий ряд, і областю її можливого розташування в просторі, що дозволило формувати ДПК у вигляді послідовності замкнутих геометричних образів, які обмежені дискретно заданими аналогами стичних площин або сфер;

- розроблені алгоритми визначення положень проміжних точок інтерполюючої кривої лінії, виходячи з умови монотонного збільшення (зменшення) уздовж неї значень її характеристик, які дозволяють згущувати точкові ряди, розташовані на кривих постійного ходу, кривих з монотонним зміною кривини, скруту, радіусів стичних сфер;

- розроблено метод моделювання просторової ДПК на основі формування її полярного торса. Використання дискретного аналога полярного торса дозволило здійснювати комплексний контроль дискретних характеристик точкового ряду, що формується, і області можливого розташування кривої, яка його інтерполює, призначати у вихідних точках фіксовані значення кривини, скруту, радіусів стичних сфер, при яких задача моделювання ДПК по частинах з монотонною зміною значень її характеристик має розв’язок;

- розроблено спосіб моделювання плоскої ДПК на основі формування дискретного аналога її еволюти по частинах, уздовж яких значення кривини монотонно зростають або зменшуються. Контроль конфігурації дискретного аналога еволюти дозволяє визначати область можливого розташування монотонних частин ДПК, формувати в їх межах точковий ряд, призначати положення особливих точок;

- запропоновані способи формування ДПК на ділянках, які містять особливі точки: точки перегину, зміни ходу, зміни зростання - убування кривини, скруту, радіусів стичних сфер, що дозволило моделювати ДПК на основі точкового ряду довільної конфігурації по частинах, уздовж яких значення її характеристик змінюються монотонно.

- розроблені способи формування обводів точкових рядів в межах області можливого розташування монотонних частин ДПК. Способи дозволяють створювати безперервні геометричні образи і їх комп'ютерні моделі, які з похибкою, що не перевищує задану величину, замінюють ДПК довільної конфігурації.

Удосконалено методику оцінки абсолютної похибки, з якою точковий ряд представляє криву лінію, яка заснована на визначенні максимально можливої відстані між кривими лініями із заданими характеристиками, що интерполюють сформований точковий ряд. Визначення похибки дискретної інтерполяції дозволяє встановити необхідну кількість проміжних точок, призначення яких забезпечує задану точність формування ДПК на кожній з вихідних ділянок.

Отримало подальший розвиток методологія оцінки геометричних характеристик кривої за допомогою дискретних характеристик точкового ряду, який їй належить. При цьому запропоновані дискретні аналоги стичних сфер і значень скруту використовуються вперше. Дискретні характеристики є вихідними даними для визначення частин ДПК з монотонною зміною геометричних характеристик і простору їх можливого розташування.

Практичне значення отриманих результатів полягає в наданні конструктору ефективного інструменту формування кривих ліній із заданою закономірністю зміни диференціально-геометричних характеристик і моделювання на їх основі каркасів поверхонь з заданими функціональними властивостями. Розроблене алгоритмічне і програмне забезпечення дозволяє підвищити якість моделювання складних поверхонь, що обмежують промислові вироби, і скоротити витрати часу на створення програм для їх обробки на верстатах з ЧПУ.

Розроблені на підставі проведених в дисертації досліджень алгоритми, методичні рекомендації та програмне забезпечення прийняті до впровадження ливарною компанією «Мелт», ТОВ «Мелітопольський завод турбокомпресорів», приватним підприємством «Таврія Турбо Плюс», науково-виробничою комерційною фірмою «Спеціальні гідравлічні машини» , науково - виробничою компанією «РОСТА» (м. Мелітополь); науково-виробничім підприємством «Центр САПР» (м. Львів).

Достовірність і обґрунтованість отриманих результатів підтверджується доведенням тверджень, зіставленням результатів тестових прикладів з уже відомими фактами, впровадженням у виробництво.

Особистий внесок здобувача. Автором самостійно отримані основні результати, які становлять наукову новизну і практичне значення роботи:

- запропонована методика формування ДПК по частинах з монотонною зміною диференціально-геометричних характеристик і стикуванням монотонних частин із заданим порядком гладкості;
- запропонована методика формування полярних торсів, які визначають дискретно представлену криву, що інтерполює просторовий точковий ряд;
- запропонована методика формування еволюти, яка визначає дискретно представлену криву, що інтерполює плоский точковий ряд;
- розроблені способи стикування монотонних частин ДПК із забезпеченням призначених характеристик в особливих точках;
- розроблені методи формування плоских і просторових одновимірних обводів, які із заданою точністю представляють криву лінію, з регулярною зміною значень кривини, скруту, радіусів стичних сфер і мінімальним за умовами задачі числом особливих точок;
- запропонована схема формування дискретних і безперервних каркасів поверхонь на основі ДПК із заданими диференціально-геометричними характеристиками.

Особистий внесок автора у працях, які опубліковано у співавторстві: у працях [1] – розроблено спосіб моделювання одновимірних обводів с закономірною зміною диференціально-геометричних характеристик; [2] – запропоновано спосіб оцінки точності дискретної інтерполяції; [3] – запропоновано спосіб визначення області розташування точки перегину кривої; [5] – запропоновано спосіб визначення діапазонів положень нормалей дискретно представленої кривої виходячи із умови монотонної зміни значень її характеристик; [6] – запропоновано спосіб визначення області розташування монотонної кривої лінії; [9] – запропоновано спосіб визначення діапазонів можливих, за умовами задачі, характеристик при моделюванні монотонної кривої на ділянці, що обмежена сусідніми точками; [13] – запропоновано спосіб визначення та алгоритм розрахунку діапазонів можливих значень диференціально-геометричних характеристик у точках кривої виходячи із умови монотонної зміни кривини; [14] – запропоновано спосіб моделювання дискретно представленої поверхні із забезпеченням заданих диференціально-геометричних характеристик [15] – запропоновано геометрична схема та розроблено алгоритм моделювання дискретно

представленої кривої другого порядку гладкості на основі просторових кутових параметрів, виконано перевірку алгоритму на контрольних прикладах; [16] – визначено систему обмежень на розташування кривої відповідно до умов задачі; [18] – розроблено спосіб визначення та уточнення області можливого розташування точки перегину та нормалі, яка проходить через цю точку, виходячи із умови монотонної зміни диференціально-геометричних характеристик уздовж кривої; [19] – розроблено спосіб визначення діапазонів положень нормалей та значень радіусів кривини у вихідних точках при моделюванні монотонної кривої; [20] – розроблено спосіб визначення максимальної абсолютної похибки дискретної інтерполяції ; [21] – запропоновано спосіб формування міжлопаткового каналу робочого колеса та розроблено геометричну схему моделювання дискретного каркасу робочої поверхні лопатки; [22] – запропоновано схему формування дискретних каркасів поверхонь на основі дискретно представлених кривих із заданими диференціально-геометричними характеристиками; [24] – запропоновано спосіб формування лінійчатого каркасу поверхні на основі вихідного масиву точок [25] – запропоновано спосіб визначення геометричних характеристик монотонної кривої лінії; [26] – запропоновано спосіб формування міжлопаткового каналу робочого колеса та розроблено геометричну схему моделювання дискретного каркасу робочої поверхні лопатки; [27] – запропоновано спосіб визначення простору можливого розташування кривих із визначеними геометричними властивостями; [28] – запропоновано спосіб визначення ділянок вихідного точкового ряду, який можливо інтерполювати кривою з монотонною зміною кривини; [29] – запропоновано спосіб визначення абсолютної похибки інтерполяції кривою з заданими геометричними властивостями; [30] – запропоновано спосіб формування одновимірних обводів із закономірною зміною кривини виходячи з конфігурації вихідного точкового ряду; [31] – запропоновано спосіб визначення ділянок, що містять особливі точки, та формування дискретно представленої кривої на цих ділянках; [32] – запропоновано геометричну схему та розроблено алгоритм моделювання просторових обводів за заданими умовами, виконано перевірку методу на контрольних прикладах; [34] – запропоновано спосіб формування кривої виходячи з динаміки зміни уздовж неї радіусів стичних сфер; [35] – розроблено алгоритм моделювання кривої з монотонною зміною кривини по заданим умовам: фіксовані положення нормалей та значень радіусів кривини у вихідних точках; [36] – розроблено алгоритм моделювання одновимірних обводів на основі просторових кутових параметрів, виконано перевірку методу на контрольних прикладах, зроблено висновки; [37] – запропоновано схему формування лінійчатого каркасу, що задає поверхню, та спосіб визначення можливих значень її характеристик; [38] – Особистий внесок здобувача: запропоновано геометричну схему та розроблено алгоритм моделювання кривих із закономірною зміною диференціально-геометричних характеристик, виконано перевірку схеми на контрольних прикладах; [40] – запропоновано спосіб формування одновимірних обводів із забезпеченням

контролю виникнення осциляції; [41] – запропоновано спосіб формування лінійчатого каркасу, що задає поверхню, функціональне призначення якої – взаємодія з середовищем.

Аналіз наукових досліджень, розробка алгоритмічного забезпечення, впровадження результатів досліджень у виробництво виконані автором самостійно.

Постановка наукової проблеми та визначення шляхів її розв'язання виконана спільно з науковим консультантом.

Апробація результатів дисертаційної роботи. Основні положення дисертаційної роботи доповідалися на наступних конференціях:

- XIV-XX Міжнародних науково - практичних конференціях «Сучасні проблеми геометричного моделювання» (м. Мелітополь, 2012-2018 р.);
- IX, X Кримських міжнародних науково - практичних конференціях «Геометричне та комп'ютерне моделювання: енергозбереження, екологія, дизайн» (м. Сімферополь, 2012-2013 р.);
- XV-XVIII Міжнародних конференціях з математичного моделювання (м. Херсон, 2014-2017 р.);
- XVI Міжнародній науково - практичній конференції «Технические науки – от теории к практике» (м. Новосибірськ, 2013 р.);
- XVIII, XIX Міжнародних науково - практичних конференціях «Научные итоги: достижения, проекты, гипотезы» (м. Мінеральні Води, 2013, 2014 р.);
- Всеукраїнської науково-методичної конференції «Дослідження можливостей використання інноваційних технологій в науковій роботі з прикладної геометрії та навчальному процесі кафедр ВНЗ, які займаються графічною підготовкою студентів» (м. Луцьк, 2015 р.);
- XI Міжнародній науково - практичній конференції «Обухівські читання» (м. Київ, 2016 р.);
- III, IV Міжнародних науково - практичних конференціях «Комп' ютерні системи та інформаційні технології в освіті, науці та управлінні» (м. Дніпро, 2016, 2017 р.)
- щорічних науково-практичних конференціях професорсько - викладацького складу ТДАТУ (м. Мелітополь, 2012-2019 р.).

Публікації. Основні положення дисертаційної роботи опубліковані в друкованих виданнях, серед яких 6 статей у виданнях, які входять до наукометричних баз, 25 статей у виданнях, рекомендованих ВАК України, 7 матеріалів конференцій, 3 додаткові публікації, 1 патент України на корисну модель.

Структура і обсяг дисертації. Дисертація складається з анотації, вступу, семи розділів з висновками, загальних висновків по роботі, списку використаних джерел, додатків. Загальний обсяг роботи склав 422 сторінки, включаючи 143 рисунки, 27 таблиць.

РОЗДІЛ 1
АНАЛІЗ ІСНУЮЧИХ МЕТОДІВ МОДЕЛЮВАННЯ ОБВОДІВ ЗА ЗАДАНИМИ УМОВАМИ

Геометричне моделювання передбачає визначення і дослідження характеристик явища, процесу або об'єкта через вивчення поставлених їм у відповідність характеристик геометричних образів, які складають модель. Ефективність і універсальність методу моделювання визначається кількістю характеристик і властивостей кривих ліній і поверхонь, що формується, які цей метод дозволяє контролювати. Одночасно завдання програмної та обчислювальної реалізації методу вимагає відносної простоти і узгодженості геометричних схем і розрахункових алгоритмів, які його складають.

Розглянемо існуючі методи геометричного моделювання з позицій забезпечення зазначених вимог та з метою відбору закладених в них ідей, які можуть бути використані і розвинені в цьому дисертаційному дослідженні.

Теоретичні основи методів моделювання поверхонь складної конфігурації, які в даний час розробляються фахівцями в галузі прикладної геометрії, закладені дослідженнями Іванова Г.С. [170-171], Котова І.І. [197-208], Ковальова С.М. [179-181], Михайленка В.Є. [229-235], Найдиша В.М. [248-250, 259-262, 264-268, 270, 273], Обухової В.С. [276-282], Осипова В.А. [283-289], Павлова А.В. [291-295], Підгорного О.Л. [297-298, 301-306], Рижова М.М. [319-323], Тевліна А.М. [338-346] та інших [8, 38, 52, 58, 113, 127, 148, 173, 177, 178, 227, 240, 242, 274, 299, 311, 313].

З точки зору забезпечення заданих функціональних якостей задача моделювання поверхонь, які обмежують вироби, що взаємодіють із середовищем, є однією з найбільш складних. Такі поверхні будемо називати поверхнями з підвищеними динамічними якостями або динамічними поверхнями [285]. Підвищені динамічні якості необхідні поверхням, які обмежують корпусні вироби автомобілів [15, 20, 47, 56, 154, 337, 400], літальних апаратів [2-5, 16, 17, 135, 142, 143, 149, 157, 158, 161, 275, 285, 322], робочі органи сільськогосподарських машин [39, 40, 50, 115, 116, 124, 125, 140, 141, 156, 176, 193, 194, 215], лопатки робочих коліс турбін і компресорів [1, 12, 126, 145, 155, 175, 192, 218, 290, 318, 329, 334, 349, 373, 378, 379].

Поверхні складної конфігурації [3, 45, 46, 120, 172, 181, 208, 214, 222, 228, 289, 302, 364] формуються на основі дискретного або неперервного лінійчатого каркаса. Конфігурація поверхні, її геометричні та функціональні властивості визначаються характеристиками кривих ліній, які є елементами каркаса.

Якщо модель створюється на основі масиву точок, координати яких можуть бути отримані в результаті розрахунків або замірів на вже існуючому виробі, то задача стає ще більш складною. У цьому випадку лінійні елементи моделі формуються в результаті інтерполяції точкових рядів і до задачі забезпечення необхідного поєднання характеристик кривої додається задача забезпечення заданої точності інтерполяції [348, 365].

У нашому дисертаційному дослідженні завдання інтерполяції точкових рядів будемо розглядати, перш за все, як інструмент для моделювання функціональних поверхонь складної конфігурації. Для розв'язання такої задачі необхідна розробка методу моделювання обводів точкових рядів довільної конфігурації, які із заданою точністю представляють криву з мінімальною, виходячи з вихідних умов, кількістю особливих точок. Вважаємо, що виконання зазначених вимог робить метод універсальним, так як інтерполяцію при меншій кількості вихідних умов можна розглядати як окремий випадок основного варіанту постановки задачі.

Далі розглянемо існуючі методи інтерполяції точкових рядів і їх можливості щодо забезпечення заданих характеристик кривої, що формується.

1.1 Інтерполяція точкових рядів методами неперервного геометричного моделювання (НГМ)

НГМ засноване на відповідності аналітичним виразам деяких геометричних образів. Кожне алгебраїчне або трансцендентне рівняння від одного аргументу або система рівнянь від одного параметра задає певну криву лінію. Зазначені рівняння однозначно визначають характеристики кривої лінії і її розташування в просторі.

Оскільки для завдання кривої можна використовувати нескінченну кількість формул, то логічно вважати, що для будь-якої, заздалегідь заданої кривої лінії знайдеться відповідний аналітичний вираз. Ключова задача НГМ полягає у виборі на основі заданих умов конкретних функцій, яким повинна задовольняти крива лінія.

На даний момент досліджені властивості великої кількості аналітично заданих кривих [72, 195, 377] і задача їх вибору, виходячи з цих властивостей без урахування умов розташування в просторі, не є складною. Наприклад, якщо при формуванні моделі необхідно використання плоскої кривої лінії з монотонною зміною кривини, то можна скористатися евольвентою кола, а якщо потрібна просторова крива, яка не містить особливих точок, то можна використовувати конічну гвинтову лінію. При накладенні на криву, що формується, комплексу умов: проходження через задану послідовність точок, фіксація в цих точках призначених диференційно-геометричних характеристик кривої, забезпечення заданої динаміки зміни уздовж кривої значень її характеристик та ін., складність розв'язання задачі зростає.

Методи, засновані на визначенні полінома, який задає криву лінію, що інтерполює точковий ряд довільної конфігурації [6, 18, 19, 23, 25, 41, 42, 44, 114, 118, 121, 146, 168-170, 174, 210, 283, 284, 307, 330, 383], забезпечують проходження кривої через вихідні точки, але надають обмежені можливості контролю і коригування її характеристик і форми. Ступінь рівняння інтерполюючої кривої визначається числом вихідних точок, збільшення якого призводить до неконтрольованого виникнення особливих точок і відхилення форми кривої від запланованої. Ці недоліки обмежують область можливого застосування зазначених методів.

Можливість локального коригування форми інтерполюючої кривої при контролі її характеристик у вихідних точках дають методи інтерполяції точкового ряду обводом. Обвід формується ділянками аналітично заданих кривих ліній, які стикуються у вихідних точках із заданим порядком гладкості.

Методи формування гладких обводів дугами кіл [28, 30, 38, 150, 151, 210, 219, 31] забезпечують інтерполяцію точкових рядів довільної конфігурації, в тому числі і просторових. Недоліком інтерполяції з використанням дуг кіл є нерегулярність зміни кривини і зниження внаслідок цього динамічних якостей обводу. Знизити або усунути негативний ефект зазначеного недоліку можливо за рахунок інтерполяції великої кількості близько розташованих точок, які належать кривій лінії з заданими характеристиками. У цьому випадку можливо добитися, щоб різниця значень радіусів суміжних кіл і похибка, з якою обвід представляє вихідну криву, не перевищували задану величину. Такий підхід застосовують при формуванні в CAM-системах траєкторій переміщення ріжучого інструменту верстатів з ЧПУ [213, 405, 406].

Обводи другого і вищих порядків гладкості формують дугами кривих, на форму і розташування яких можливо накласти більшу кількість умов. Це методи інтерполяції з використанням кривих другого порядку [10, 11, 16, 17, 20, 21, 24, 78, 113, 117, 119, 147, 159, 188, 197, 198, 200, 204-207, 211, 212, 219, 223, 230, 239, 241, 292, 305, 307, 358, 359, 382, 384], сплайн-функцій [45, 68, 69, 159, 160, 189-191, 196, 240, 324, 328, 331, 335, 374, 376, 395, 396, 398, 399], кривих Безьє [13, 18, 36, 51, 62, 117, 225, 316, 361, 362, 385-388, 396], В-сплайнів [117, 196, 361, 363, 389, 390, 393, 394], інші методи [9, 18, 19, 35, 37, 43, 44, 114, 122, 123, 149, 150, 151, 153, 170, 171, 220, 240, 203, 206, 291].

Конфігурація і властивості кожної ділянки обводу визначаються вибором кривої лінії, яка її складає, і характеристиками цієї кривої на межах ділянки. При цьому можливість коригування форми ділянок, умова контролю за виникненням особливих точок і задача збільшення порядків гладкості і фіксації обводу можуть суперечити або виключати один одного. Покажемо механізм зазначених протиріч на прикладі формування обводів дугами кривих другого порядку.

Максимальна кількість умов, які можливо накласти на кожну дугу кривої другого порядку, дорівнює п'яти. Це означає, що коригування форми можливе для дуги, у якій, наприклад, зафіксовано положення граничних точок і дотичних в них. Задачею коригування може бути забезпечення регулярності кривини уздовж обводу. Накладення будь-якої додаткової умови фіксує ділянку і коригування стає неможливим. При цьому інтерполяція дугами кривих другого порядку гарантує відсутність у обводу тільки точок перегину. Контроль і запобігання виникненню точок зміни збільшення -зменшення уздовж кривої значень кривини не забезпечується.

Збільшення кількості накладених на ділянки обводу умов можливо за рахунок збільшення параметричного числа кривих ліній, які його формують. При цьому ймовірність неконтрольованого виникнення особливих точок, в

тому числі і точок перегину, зростає. Інший варіант розв'язання проблеми полягає в формуванні ділянки двома і більше гладко зістикованими дугами. В результаті сумарне параметричне число ділянки збільшується, а можливість контролю і коригування кожної з дуг, які його складають, залишається такою ж самою. З методів, які реалізують такий підхід, найбільші можливості коригування ділянок обводу забезпечує інтерполяція В-сплайном.

В-сплайн визначається точками, що його задають (або контрольними точками), кожній з яких відповідає функція сполучення. Він являє собою складову криву лінію, кожен сегмент якої визначає окреме рівняння, ступінь якого дорівнює ступені функцій сполучення (k). При цьому в точках стикування сегментів автоматично забезпечується безперервність значень похідних до k-1-го порядку включно. Крива апроксимує ламану лінію, яка з'єднує контрольні точки. Конфігурація цієї ламаної визначає плоскою чи просторовою лінією є В-сплайн, а також дозволяє контролювати наявність у нього точок перегину і зміни ходу.

Можливості локального коригування частин В-сплайна визначаються ступенем його рівняння і кількістю сегментів. При п точках, що задають сплайн, він складається з п-k сегментів, а зміна положення однієї контрольної точки призводить до зміни конфігурації кривої на ділянці, що складається з k +1-го сегмента. Таким чином, підвищення якості стикування сегментів за рахунок збільшення ступеня їх рівнянь знижує можливості локального коригування конфігурації і характеристик сплайна. Підвищення цих можливостей за рахунок збільшення числа сегментів вимагає збільшення числа точок, які задають сплайн, що ускладнює контроль виникнення особливих точок, а також розташування і форми кривої в цілому. При розв'язанні практичних задач найбільш часто використовують кубічні В-сплайни, у яких сегменти зістиковано з другим порядком гладкості і переміщення кожної контрольної точки призводить до зміни конфігурації не більше, ніж чотирьох сегментів.

Найбільші можливості управління формою кривої надають раціональні В-сплайни або NURBS (nonuniform rational B-spline curve). Для цієї модифікації В-сплайна коригування здійснюється як за рахунок положення контрольних точок, так і завдяки перерозподілу значень функцій сполучення, при збільшенні яких крива розташовується ближче до відповідної контрольної точки.

Інструменти коригування конфігурації В-сплайна не забезпечують формування уздовж кривої заданого графіка зміни кривини. В сучасних CAD -системах [162, 308] така задача вирішується в інтерактивному режимі. На екрані монітора за допомогою курсору змінюється положення контрольних точок і коригується значення функцій сполучення, що їм відповідають. Результат зазначених коригувань оцінюється візуально на графіку зміни кривини, фантом якого зображується уздовж сплайна. При такому підході забезпечити задану закономірність зміни значень кривини можливо при інтерполяції незначної кількості точок. Існуючі модифікації В-сплайна не

забезпечують ефективне розв’язання задачі інтерполяції точкових рядів довільної конфігурації, що складаються з великої кількості точок, при можливості контролю і запобігання виникненню точок, в яких значення кривини досягають екстремуму.

Зазначені недоліки знижують можливості використання В-сплайнів для формування обводів із заданими характеристиками і перш за все обводів, призначених для моделювання динамічних поверхонь.

Подання кривої лінії функцією від значень кривини в її точках та від довжини відповідної частини кривої (натуральним рівнянням) дає додаткові можливості контролю закономірності зміни кривини і наявності особливих точок. Натуральне рівняння задає плоску криву лінію, якщо відомі координати її початкової точки, положення дотичної і значення кривини в цій точці [48, 71]. При зазначеному наборі вихідних даних забезпечити інтерполяцію великої кількості заздалегідь заданих точок складно. Задача вирішується формуванням обводу ділянками кривих ліній, заданих натуральним рівнянням [22, 25-32, 350-356].

Розглянемо переваги і недоліки цих методів з точки зору можливості забезпечення регулярної та монотонної зміни значень кривини уздовж обводу.

Вихідними даними для визначення кривої, що становить ділянку обводу, є її натуральне рівняння в загальному вигляді і координати граничних точок ділянки. Невідомі коефіцієнти рівняння визначаються виходячи з призначених характеристик кривої, які можна використовувати як параметри для її коригування. Такими характеристиками можуть бути довжина ділянки обводу, значення кривини в початковій і кінцевій точках, кути нахилу до осі абсцис дотичних до обводу в точках стикування його ділянок. Коефіцієнти визначаються в результаті розв’язання системи вихідних і диференціальних рівнянь, в які підставляються координати вихідних точок і значення призначених характеристик кривої.

Динаміку зміни кривини найпростіше контролювати уздовж ділянки, яка задана лінійним натуральним рівнянням. В роботі [350] запропонована методика визначення натурального рівняння виду $k(s) = as + b$, довжини дуги кривої (s), значень кривини (k) в початковій (1) і кінцевій (2) точках. Зазначені характеристики визначаються виходячи з відомих координат граничних точок і призначених в них положень дотичних прямих ($t1$ і $t2$). Отримані значення кривини можуть виявитися протилежних знаків. Це означає, що крива на ділянці обводу містить точку перегину. Інша проблема полягає в тому, що кривина вздовж ділянки може змінюватися монотонно, але крива описує навколо кінцевої точки повний оборот (рис. 1.1). Така конфігурація виключає застосування обводу для моделювання динамічних поверхонь. Обидві проблеми передбачається вирішувати коригуванням положень дотичних в граничних точках.

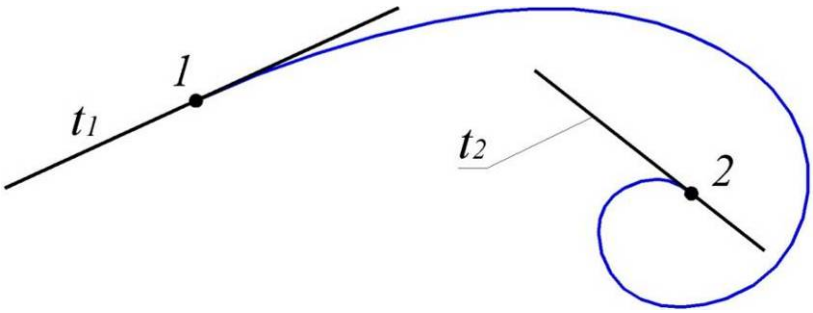


Рис. 1.1. Варіант ділянки кривої, заданої натуральним рівнянням

У розглянутому прикладі автоматично забезпечується перший порядок гладкості обводу. Регулярність значень кривини в точках стикування ділянок порушується. Проблему можна вирішити за рахунок відмови від фіксованого положення дотичної в кінцевій точці другої і наступних ділянок на користь призначення значень кривини в їх початкових точках. Тоді другий порядок гладкості обводу забезпечується за рахунок призначення в початкових точках ділянок характеристик, значення яких отримані в кінцевих точках попередніх ділянок. Недоліком такого підходу є відмова від локального коригування обводу. Зміна будь-якої з характеристик кожної ділянки призведе до неконтрольованої зміни форми і характеристик усіх ділянок.

Збільшити локальність коригування обводу можливо за рахунок підвищення ступеня натуральних рівнянь його ділянок. В роботі [354] запропоновано формування ділянок кривої, натуральне рівняння якої має вигляд: $k(s)=as3+bs2+cs+d$. Така залежність дозволяє призначати в граничних точках ділянки положення дотичних і значення кривини, що забезпечує локальність коригування кожної з ділянок обводу другого порядку гладкості. Крім збільшення кількості необхідних розрахунків застосування кубічної залежності кривини від довжини дуги кривої збільшує ймовірність виникнення у неї особливих точок. Це можуть бути як точки перегину, так і точки екстремуму значень кривини. Наприклад, на рис. 1.2 представлений графік натурального рівняння ділянки кривої, яка містить дві точки перегину і одну точку зміни напряму зростання кривини.

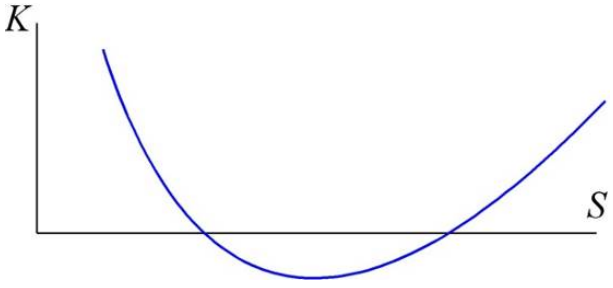


Рис. 1.2. Графік залежності $k=f(s)$, який визначає наявність у кривої трьох особливих точок

За отриманим натуральним рівнянням можливо визначити наявність у кривій особливих точок. Автоматичне запобігання виникненню особливих точок на ділянках обводу відомі методи, засновані на використанні

натуральних рівнянь, не забезпечують.

Проведений аналіз показує, що джерелом проблем інтерполяції аналітично заданими кривими лініями є протиріччя між потребою в збільшенні параметричного числа кривої і необхідністю запобігання неконтрольованого виникнення у неї особливих точок. Існування зазначеної проблеми є об'єктивним і не може бути усунуто. Збільшення параметричного числа кривої забезпечує можливість накладення на неї відповідної кількості різних умов. Виникнення особливих точок є наслідком збільшення параметричного числа і не може бути проігноровано, так як мінімальне за умовами задачі число особливих точок є необхідною умовою розв’язання багатьох прикладних задач.

Основним напрямком пошуку розв’язку задачі є збільшення можливостей локального коригування ділянок обводу. Коригування здійснюється за рахунок зміни характеристик кривих, що становлять обвід. Відзначимо, що перш ніж починати пошук розв’язку задачі за допомогою ітераційного процесу, доцільно було б встановити саму можливість її розв’язання. При формуванні обводу з монотонною зміною диференційно-геометричних характеристик необхідно попередньо визначити частини вихідного точкового ряду, які можливо інтерполювати кривою із заданими геометричними властивостями і діапазони значень характеристик, що фіксуються в початкових точках, при яких задача має розв’язок. Відомі методи НГМ не пропонують можливість такого аналізу і не спираються на його результати. Крім того, навіть при наявності потенційної можливості досягнення необхідного розв’язку його реалізація може бути неможливою через невдалий вибір конкретної аналітичної залежності, яка визначає інтерполюючу криву лінію. Тому процес ітераційного пошуку розв’язку може виявитися надмірно трудомістким.

В силу існування зазначених проблем і наявності у розглянутих методів перерахованих недоліків можливості запобігання з їх допомогою неконтрольованого виникнення особливих точок обмежені. Методи формування обводів кривими другого порядку, кривими Безьє і B-сплайном дозволяють контролювати і запобігати виникненню точок перегину. Методи, засновані на використанні кривих, заданих натуральним рівнянням, дозволяють визначати наявність у кривій як точок перегину, так і точок екстремальних значень кривини, але не надають ефективних механізмів їх усунення.

Задачу інтерполяції точкового ряду довільної конфігурації обводом другого порядку гладкості при забезпеченні мінімально можливого за умовами завдання числа особливих точок відомі нам методи НГМ не вирішують.

1.2 Інтерполяція точкових рядів методами дискретного геометричного моделювання (ДГМ)

Дискретна інтерполяція передбачає призначення положень проміжних точок для заданого точкового ряду. При цьому передбачається, що вихідні точки задані без похибки і в процесі інтерполяції не змінюють свого положення [244, 245]. Дискретне подання результату моделювання дозволяє відмовитися від аналітичного представлення інтерполюючої кривої лінії і уникнути пов'язаного з ним неконтрольованого виникнення особливих точок.

Іншою потенційною перевагою дискретної інтерполяції є можливість коригування будь-якої, в тому числі і як завгодно малої ділянки ДПК при відсутності впливу цього коригування на характеристики решти масиву.

Умовою реалізації цих можливостей є розробка алгоритмів визначення положення проміжних точок, що забезпечують формування точкового ряду, який можливо інтерполювати кривою із заданими характеристиками.

Основні напрямки ДГМ закладені дослідженнями Грибова С.М., Ковальова С.М., Найдиша В.М.

У роботах Ковальова С.М і його учнів розробляється статико-геометричний метод моделювання кривих і поверхонь, представлених врівноваженою мережею [14, 34, 70, 136, 137, 144, 163-167, 179-187, 221, 230, 310, 397, 326, 327, 336, 359]. Ділянка обводу формується у вигляді ламаної лінії, ланки якої визначає нерозтяжна нитка, закріплена в граничних точках ділянки. До нитки прикладаються зовнішні зусилля (Pi) в точках, призначених всередині ділянки (рис. 1.3). Коригування форми ділянки може здійснюватися за рахунок зміни довжини нитки, значень зусиль, які докладаються, кількості і розташування точок їх застосування.

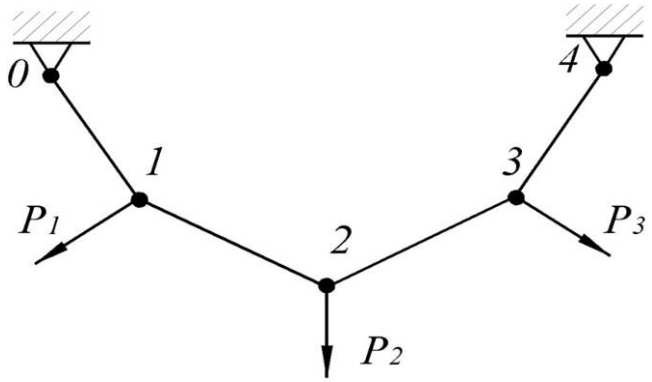


Рис. 1.3. Формування ділянки кривої статико-геометричним методом

Запропоновані інструменти коригування конфігурації ламаної лінії забезпечують формування послідовності точок, які належать кривій, що інтерполює вихідний точковий ряд довільної конфігурації. При цьому гарантовано можливість запобігання виникненню у кривої незапланованих точок перегину.

Контроль значень кривини інтерполюючої кривої у вихідних і проміжних точках зазначені методи не забезпечують. Вони не забезпечують і формування точкового ряду, який можливо інтерполювати кривою лінією з монотонною зміною кривини. Відзначимо, що для статико-геометричного методу така задача не є пріоритетною, а для її розв’язання потрібна розробка

спеціальних підходів та інструментарію. Основною сферою застосування статико-геометричного методу є моделювання оболонок, комунікацій, перекриттів і їх елементів з урахуванням впливу на їх форму деформацій, які виникають під дією власної ваги і зовнішніх навантажень.

В якості загального недоліку, який знижує можливості застосування статико-геометричного методу до розв’язання більш широкого кола завдань, відзначимо відсутність механізму локального коригування конфігурації точкового ряду всередині окремої ділянки. Наприклад, при зміні значення будь-якого з прикладених зусиль зміниться конфігурація всієї ламаної лінії між сусідніми вихідними точками.

У роботах Павлова А.В., Грибова С.М. та їх учнів [63-67, 127, 128-134, 291, 295, 380] розглядається метод формування обводів на основі кривих кінцевих сум.

Крива кінцевих сум формується у вигляді ламаної лінії з рівними ланками, яка з'єднує задані початкову (A) і кінцеву (B) точки (рис. 1.4).

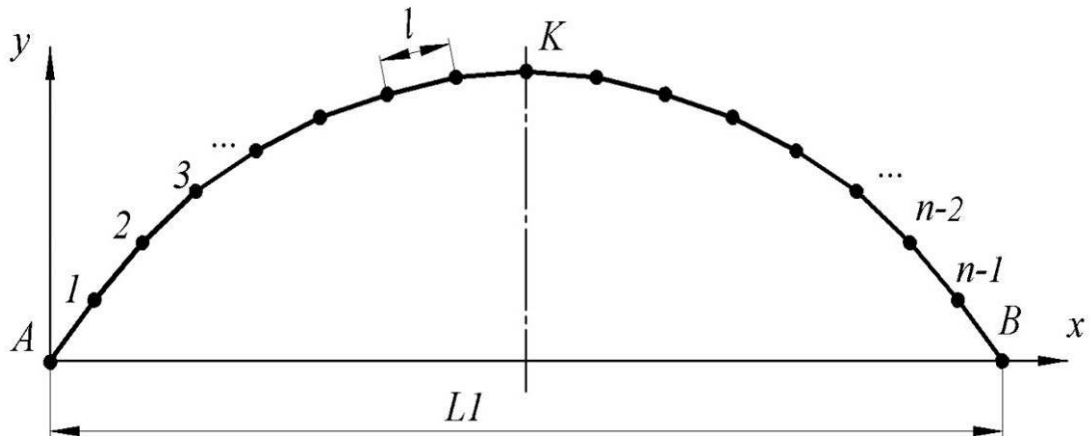


Рис. 1.4. Формування кривої кінцевих сум

Ламана складається з двох частин симетричних відносно прямої лінії, що проходить через середину відрізка [A, B] перпендикулярно відрізку. Конфігурація кривої кінцевих сум визначається сумарною довжиною її ланок (L), відстанню між граничними точками L1=|A, B| і додатковими умовами, що накладаються на ділянку кривої.

В якості додаткової умови запропонований коефіцієнт

,

де k – кількість ланок у кожній з симетричних частин ламаної лінії [134]. Цей коефіцієнт задає динаміку монотонного збільшення довжин проекцій ланок на вісь Ox≡(A, B) від граничних точок до середини ламаної лінії. Якщо значення зазначених характеристик відомі, то координати вузлів ламаної лінії визначаються за формулами:

де l – довжина однієї ланки ламаної лінії.

Таким чином, при заданій кількості вершин кривої кінцевих сум значення L і L1 однозначно визначають її конфігурацію.

Можлива модифікація розглянутої вихідної схеми, в тому числі з метою забезпечення гладкого стикування ділянок обводу. В роботі [64] розв'язана задача формоутворення обводу другого порядку гладкості з використанням кривих кінцевих сум. Розглянемо основну ідею, закладену в отриманому розв'язку (рис. 1.5).

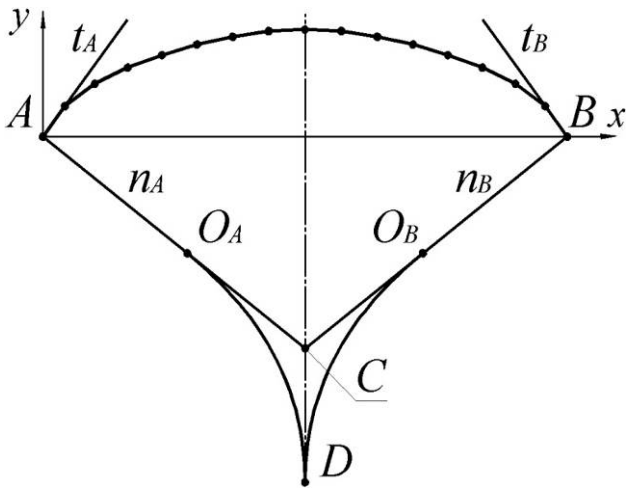


Рис. 1.5. Формування ділянки обводу другого порядку гладкості

Вихідними даними на формування ділянки обводу є координати початкової і кінцевої точок (A і B), положення дотичних (tA і tB) і значення кривини в них. Крива формується на основі еволюти, яка складається з двох симетричних частин, що дотикаються у вершині вістря (D). Точка перетину нормалей кривої в граничних точках C≡nA× nB і вершина вістря еволюти розташовані на серединному перпендикулярі до відрізка [A, B]. Положення точки D визначається зі співвідношення

$$|C, D|=|OA, C|=|OB, C|,$$

де OA и OB – центри кривини в точках A і B відповідно. Пряма (C, D) є нормаллю евольвенти в середній точці ділянки.

Призначення в якості половини еволюти частини будь-якої опуклої кривої лінії, розташованої у межах трикутника OA, C, D, яка дотикається

нормалей евольвенти в точках OA і D, однозначно визначає половину ділянки обводу. При цьому формування еволюти у вигляді впорядкованої послідовності точок позбавляє від необхідності її аналітичного подання. Використання еволюти при формуванні кожної з кривих кінчених сум гарантує розташування сумарного точкового ряду на гладкій кривій лінії з регулярною зміною кривини.

Розглянута схема забезпечує формування обводу другого порядку гладкості будь-якого точкового ряду, який можливо інтерполювати опуклою кривою лінією. Її реалізація не вимагає складних обчислень і при цьому гарантується автоматичне запобігання виникненню у обводу точок перегину.

Зазначені переваги є наслідком симетричної будови кривої і її еволюти. Одночасно зазначені особливості визначають і основний недолік інтерполяції на основі кривих кінцевих сум, так як ми завідомо йдемо на формування обводу, кожна ділянка якого містить точку екстремуму кривини. Використання обводів, що володіють зазначеним недоліком, неминуче призводить до зниження якості розв'язання низки прикладних задач, до яких відноситься і моделювання поверхонь з підвищеними динамічними якостями.

До загальних для інтерполяції на основі кривих кінцевих сум недоліків також віднесемо неможливість локального коригування частин окремої ділянки і порушення регулярності значень кривини у обводів, які завідомо містять точки перегину.

1.3 Інтерполяція точкових рядів методами варіативного дискретного геометричного моделювання (ВДГМ)

Основні ідеї та напрямки розвитку ВДГМ визначені й обґрунтовані в роботах Найдиша В.М. [244-266] і отримали подальший розвиток у роботах його учнів [38, 47, 49, 53-60, 78, 217, 224, 226, 242, 269, 271, 381].

Особливістю дискретної інтерполяції методами ВДГМ є відмова від одночасного призначення послідовності проміжних точок, які визначають ламану лінію, що з'єднує початкову і кінцеву точки ділянки обводу. Замість цього проміжні точки кожної ділянки призначаються по одній з можливістю покрокового аналізу і коригування розв'язку, що формується. Такий процес призначення проміжних точок отримав назву згущення точкового ряду або згущення ДПК, а самі проміжні точки названі точками згущення [245].

При послідовних призначеннях точок згущення раніше призначені точки розглядаються як вихідні. Положення точок згущення визначається на підставі алгоритму і системи обмежень, які залежать від конфігурації вихідного точкового ряду і заданих характеристик ДПК. Такий підхід забезпечив максимальну гнучкість формування кривої. Точки згущення можуть заповнювати вихідні ділянки в призначеній послідовності і в різних кількостях. Остаточна кількість точок згущення може бути як завгодно великою. ДПК вважається сформованою, коли розміри області простору, в якій розташовуються всі криві лінії із заданим поєднанням характеристик, що інтерполюють отриманий точковий ряд (максимальна похибка дискретної

інтерполяції), стає менше заданої величини.

Розглянемо можливості існуючих методів ВДГМ щодо забезпечення заданої закономірності зміни диференційно-геометричних характеристик і контролю за виникненням особливих точок у кривих ліній, що інтерполюють згущений точковий ряд.

1.3.1 Формування гладких ДПК із забезпеченням контролю за виникненням точок перегину

У роботах [58, 217, 332, 333, 381] розроблені способи формування ДПК , засновані на призначення точки згущення в межах області можливого розташування ділянки гладкої опуклої кривої. Для ділянки, обмеженої вихідними точками i та i+1, ця область від самого початку обмежена трикутником, сторони якого належать прямим, що проходять через послідовні вихідні точки (i-1, i), (i, i+1), (i+1, i+2) (рис. 1.6).

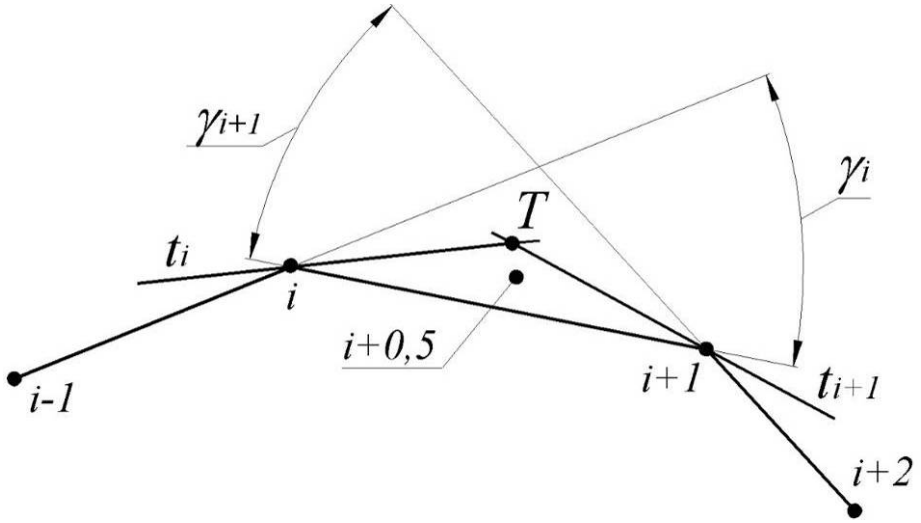


Рис. 1.6. Область можливого розташування ділянки опуклої ДПК

У разі призначення точки згущення i+0,5 в межах зазначеної області отримуємо точковий ряд, який можливо інтерполювати опуклою кривою лінією. Якщо точка згущення розташовується за межами зазначеного трикутника, інтерполююча крива обов'язково буде містити точку перегину. Призначення точки згущення i+0,5 призводить до локалізації областей можливого розташування точок згущення сусідніх ділянок.

Кут γi, обмежений прямими (i-1, i) і (i, i+1), які проходять через вихідні точки, є областю можливого розташування дотичній ti до ДПК, що формується, в точці i. У разі призначення ti в межах γi завдання має розв’язок . В іншому випадку інтерполяція вихідного точкового ряду опуклою кривою лінією, що має в точці i дотичну ti, неможлива.

Після призначення в межах відповідних кутів дотичних до ДПК у всіх вихідних точках отримуємо ДПК першого порядку фіксації. Область її

можливого розташування локалізована щодо вихідної області. Для i-ї ділянки тепер це трикутник i, i+1, T (рис. 1.6), обмежений хордою [i, i+1] і дотичними до ДПК ti і ti+1 в точках i і i+1 відповідно. Такий трикутник будемо називати базисним (БТ).

Після призначення в межах уточненої області точки i+0,5 для неї, в свою чергу, призначається дотична до ДПК ti+0,5. Умовою розташування цієї дотичної є перетин нею відрізків [i, T] і [i+1, T], де T – точка перетину дотичних ti і ti+1. В результаті область розташування отриманої ДПК на i-й вихідній ділянці ще більше локалізується і розташовується в межах двох БТ, які обмежені хордами і дотичними [i, i+0,5], ti, ti+0,5 та [i+0,5, i+1], ti+0,5, ti+1 відповідно. Точки наступних згущень можуть призначатися тільки в межах цих трикутників.

Відзначимо, що після призначення в початкових точках дотичних до ДПК, призначення точок згущення не тягне зміни уточнених областей можливого розташування ДПК на інших ділянках.

Можливі різні критерії визначення остаточного положення точок згущення. Наприклад, в роботі [58] це заданий закон зміни кутів між суміжними хордами ламаної лінії, що з'єднують послідовність точок, яка формується. У роботах [217, 332, 333, 381] пропонуються інші варіанти розв’язку. Спільною особливістю є пошук остаточного розв’язку в межах вже сформованої області, яка забезпечує виконання головної умови. Для перерахованих робіт це гладкість ДПК, що формується, і запобігання неконтрольованого виникнення у неї точок перегину.

Отриманий результат не є унікальним. Більшість з раніше розглянутих методів забезпечують аналогічні характеристики інтерполюючої кривої. В даному випадку нас цікавлять загальні для ВДГМ підходи, які були задіяні при формуванні ДПК. Розглянемо закладені в цих підходах ідеї з позицій перспективи їх реалізації при вирішенні більш складних задач дискретної інтерполяції.

Призначення точок згущення по одній і на підставі єдиного алгоритму забезпечує формування точкового ряду, що складається з будь-якої кількості точок. Це дозволяє на всіх стадіях моделювання оцінювати характеристики не тільки точкового ряду, але і кривої лінії, яка буде отримана в результаті нескінченно великої кількості згущень, в межі, коли відстань між точками стане нескінченно малою. Наприклад, в розглянутому прикладі алгоритм призначення точки згущення забезпечує перевищення кожної з точок точкового ряду, що формується, над хордою, яка з'єднує будь-які попередні і наступні точки. Це гарантує опуклість ДПК, що формується. Гладкість кривої забезпечує послідовне наближення хорди, яка з'єднує вихідну точку з найближчою до неї точкою згущення, до положення дотичної, раніше призначеній у вихідній точці.

Призначені характеристики ДПК обмежують область, в межах якої можлива реалізація різних варіантів розв’язку. Можливість вибору остаточного розв’язку дозволяє накладати на ДПК, що формується, додаткові умови. Завдання зводиться до визначення області можливого розв’язку як

результату перетину окремих областей простору, кожна з яких відповідає одній з накладених на ДПК умов. При вирішенні більшості задач геометричного моделювання запобігання виникненню осциляції у лінійних елементів моделі є ключовою умовою. Не забезпечивши виконання цієї умови неможливо забезпечити необхідну якість кінцевого розв’язку. Тому при розробці варіативних методів дискретної інтерполяції визначення області розташування точки згущення, яка гарантує запобігання неконтрольованого виникнення точок перегину, є обов'язковою умовою. Виконання всіх додаткових умов, що накладаються на ДПК, забезпечується за рахунок уточнення цієї вихідної області.

Формування ДПК у вигляді послідовності замкнутих геометричних образів, кожен з яких обмежує область розташування одної з її ділянок, дозволяє оцінювати похибку, з якою отриманий точковий ряд і алгоритм призначення проміжних точок задають криву лінію з призначеними характеристиками.

У розглянутому прикладі похибку дискретної інтерполяції можна оцінити висотою отриманих БТ. Після того, як буде отримана послідовність БТ, у яких відстань від точки перетину дотичних до хорди, що з'єднує точки ДПК, не перевищує задану величину, ДПК можна вважати сформованою. В цьому випадку ламана лінія, що з'єднує точки отриманого точкового ряду, буде із заданою точністю представляти інтерполюючу криву лінію.

У роботах [58, 217] запропоновано критерій приблизної оцінки кривини інтерполюючої кривої лінії в точках ряду, що формується. Значення кривини оцінюється відношенням кута між суміжними хордами, що з' єднують три послідовні точки, до їх сумарній довжини. Алгоритми, в яких вказаний критерій використовувався б як параметр для визначення положення точки згущення, в зазначених роботах не запропоновані. Крім того, в процесі послідовних згущень не забезпечується наближення значень критерію до призначеної величини. Відсутність інструменту розв’язання зазначених задач не дозволяє формувати ДПК із заданою динамікою зміни значень кривини за допомогою розглянутих методів.

1.3.2 Моделювання ДПК з регулярною монотонною зміною кривини

У роботах [73-76, 243] запропонований метод формування ДПК, яка містить мінімальну, виходячи з конфігурації вихідного точкового ряду, кількість точок перегину і точок з екстремальним значенням кривини.

В процесі моделювання, коли крива представлена дискретно, значення радіусів кривини в її точках оцінюються радіусами прилеглих кіл (ПК), які проходять через три послідовні точки ряду. Необхідною умовою формування ДПК, уздовж якої значення кривини змінюються монотонно, є монотонне збільшення або зменшення радіусів ПК вздовж вихідного точкового ряду. Монотонні частини ДПК формуються окремо і стикуються з забезпеченням другого порядку гладкості в особливих точках.

Алгоритми визначення положення точок згущення розроблені виходячи з умови збереження вихідної закономірності зміни радіусів ПК

вздовж точкового ряду, що формується. Вихідна область можливого розташування ділянки (i…i+1) монотонної ДПК обмежена i-ою і i+1-ою ПК (ПКi і ПКi+1), які проходять через точки i-1, i, i+1 і i, i+1, i+2 відповідно (рис. 1.7). Точка згущення призначається на прямій li, яка перпендикулярна відрізку [i, i+1] і проходить через його середину. Таким чином, діапазон розташування точки згущення – відрізок [Ai, Bi], обмежений точками перетину прямої li с ПКi та ПКi+1.

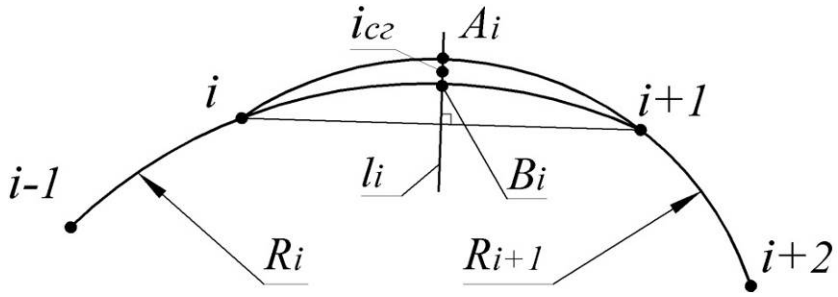


Рис. 1.7. Вихідна область розташування точки згущення

Якщо точка згущення призначається тільки на i-й дільниці ДПК (iзг), то отримуємо три нові ПК: ПКi(i-1, i, iзг), ПКзг(i, iзг, i+1), ПКi+1(iзг, i+1, i+2). При формуванні ДПК, уздовж якої значення радіусів кривини зменшуються, умова

$$R\text{ПК}i+1 > R\text{ПК}i > R\text{ПК}\text{сг} > R\text{ПК}i+1 > R\text{ПК}i+2$$

виконується за рахунок призначення iзг в межах уточненого діапазону, що визначається виходячи з розташування шести послідовних вихідних точок: i -2, ..., i+3. В результаті призначення iзг отримуємо дві нові ділянки ДПК. Одночасно область розташування ДПК на вихідних ділянках (i-1 ... i) і (i+1 ... i+2) локалізується, а радіуси ПКi і ПКi+1 змінюють своє значення.

Геометрична схема одночасного згущення послідовності вихідних ділянок ДПК заснована на умові збереження радіусів ПК, що відповідають одній і тій же середній з трьох точок, які визначають ПК. Наприклад, для ПКi це означає рівність радіусів кіл, що проходять через точки i-1, i, i+1 та i-1зг, i, iзг (рис. 1.8). Після призначення точки згущення i-1зг через неї і вихідну точку i проводиться коло, радіус якого дорівнює радіусу вихідного ПКi. Положення точки згущення iзг визначається перетином зазначеного кола і прямої li.

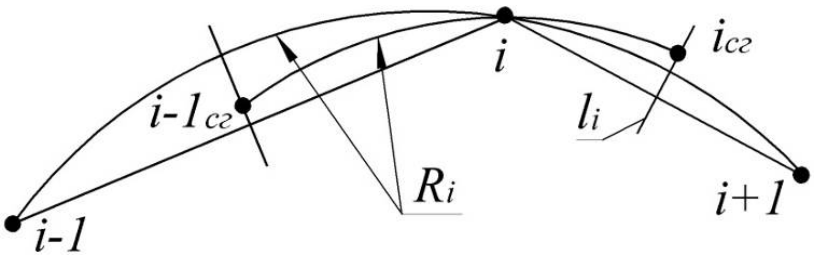


Рис. 1.8. Згущення ДПК зі збереженням радіусів вихідних ПК

Положення точки згущення на ділянці (i+1 ... i+2) визначається перетином прямої li+1 і кола, що проходить через точки iзг та i+1, радіус якої дорівнює радіусу вихідного ПКi+1. Точки згущення наступних ділянок визначаються за аналогічною схемою послідовно від ділянки до ділянки. В результаті отримуємо точковий ряд, що складається з подвійної кількості точок, уздовж якого радіуси ПК монотонно зростають, а для вихідних точок радіуси ПК зберігають свої значення.

Згущення ДПК за вказаною схемою вимагає попереднього уточнення діапазонів розташування точок згущення. Через точки An-1 і Bn-1, що обмежують вихідний діапазон розташування точки згущення на останній з ділянок (n-1, n), і вихідну точку n-1 проводяться кола, радіус яких дорівнює радіусу ПКn-1. Ці кола обмежують на прямий ln-2 відрізок, який накладається на вихідний діапазон розташування точки згущення ділянки (n-2, n-1) – відрізок [An-2, Bn-2]. У перетині зазначених відрізків отримуємо уточнений діапазон розташування точки згущення. З використанням кіл, що проходять через межи цього уточненого діапазону і точку n-2, радіуси яких дорівнюють радіусу вихідної ПКn-2, уточнюється діапазон [An-3, Bn-3] ділянки (n-3, n-2). Діапазони розташування точок згущення інших ділянок уточнюються за аналогічною схемою. На першій із ділянок, в межах уточненого діапазону призначається точка згущення. Положення цієї точки визначає точки згущення інших ділянок відповідно до схеми, представленій на рис. 1.8.

Таким чином, метод моделювання ДПК включає дві стратегії згущення точкового ряду, які дозволяють як зберігати радіуси ПК, які відповідають початковим точкам, так і коригувати їх значення. Критерієм вибору стратегії є величина відношення довжини вихідного діапазону розташування точки згущення до довжини хорди, що з'єднує відповідні вихідні точки:

.

Встановлено, що при рівності значень Ki для всіх ділянок, точки згущення можуть призначатися по центру відповідних діапазонів [Ai, Bi]. В результаті отримуємо точковий ряд, у якого радіуси ПК, що відповідають початковим точкам, залишилися незмінними, а значення Ki для отриманих ділянок залишаються рівними, зменшившись приблизно у вісім разів відносно вихідних значень. На початковому етапі моделювання згущуються окремі ділянки, для яких значення Ki максимальні. Після вирівнювання значень Ki уздовж всього точкового ряду здійснюється одночасне згущення послідовності ділянок ДПК.

Розглянутий метод забезпечує формування точкового ряду, що належить кривій лінії, уздовж якої значення кривини монотонно зростають або зменшуються. При цьому в процесі послідовних згущень зберігаються

призначені радіуси ПК в точках ДПК. Збереження при будь-якій кількості згущень радіусів ПК означає, що їх значення визначають радіуси кривини в відповідних точках інтерполюючої кривої, яка формується.

Метод не дозволяє призначати фіксовані положення дотичних до ДПК. У вихідних точках і точках згущення дотичні до ДПК визначаються як дотичні до відповідних ПК. У міру згущення точкового ряду розташування ПК і дотичних до них послідовно уточнюється, прагнучи зайняти своє остаточне положення. Наслідком відсутності механізму фіксації дотичних до ДПК є необхідність перерахунку меж можливого розташування всіх її ділянок при призначенні або коригуванні положення окремих точок згущення.

Метод моделювання ДПК з монотонною зміною кривини, в точках якої призначаються фіксовані положення дотичних і стичних кіл, запропонований в роботах [368-372]. Вихідний діапазон розташування дотичної прямої в i-й точці ДПК (ti) обмежений дотичними до ПКi-1 і ПКi+1 (рис. 1.9)

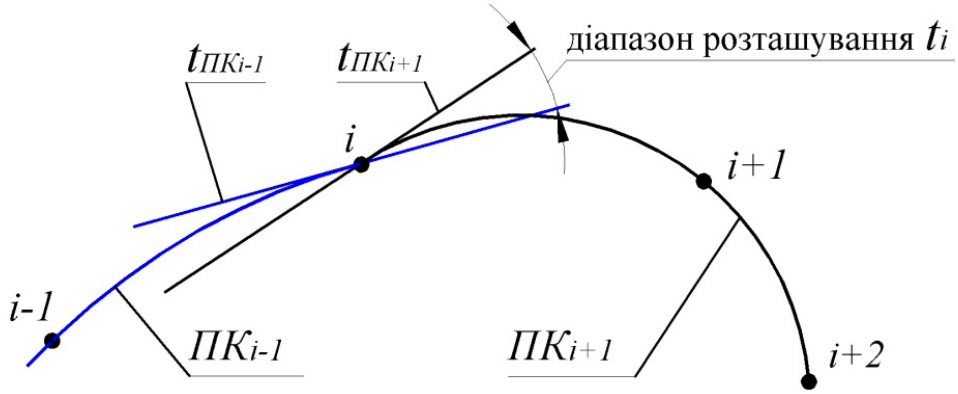


Рис. 1.9. Діапазон розташування дотичної до ДПК

Остаточне положення дотичних призначається в межах зазначених діапазонів виходячи зі співвідношення довжин сторін БТ, які обмежені дотичними до монотонної кривої. Ділянка ДПК, уздовж якої значення радіусів кривини зростають, може бути сформована в межах БТ з співвідношенням довжин сторін |i, Ti| < |Ti, i+1|. Значення радіусів кривини у вихідних точках призначаються виходячи з умови їх зростання вздовж ДПК і з урахуванням вже призначених положень дотичних прямих. Наприклад, i-е стичне коло (СКi) дотикається з прямою ti в точці i, а значення його радіусу (Ri) забезпечує розташування точки i+1 за його межами (рис. 1.10). Значення Ri+1 забезпечує розташування СКi всередині СКi+1.

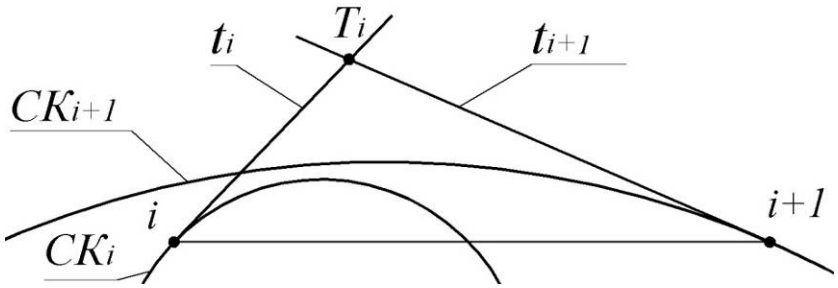


Рис. 1.10. Призначення стичних кіл у вихідних точках ДПК

Призначення стичних кіл у вихідних точках ДПК уточнює область їх можливого розташування. Для ділянки (i,i+1) уточнена область розташована в межах БТi, всередині СКi+1 і за межами СКi. Наявність на всіх ділянках зазначених уточнених областей означає можливість інтерполяції точкового ряду монотонною кривою лінією, яка має у вихідних точках призначені характеристики.

Запропоновано алгоритм [372] призначення трьох точок згущення (′iзг , iзг, iзг′) і дотичних до ДПК в цих точках (′tзг, tзг, tзг′), положення яких задає в межах вихідного БТi послідовність з чотирьох БТ згущення (БТзг) (рис. 1. 11).

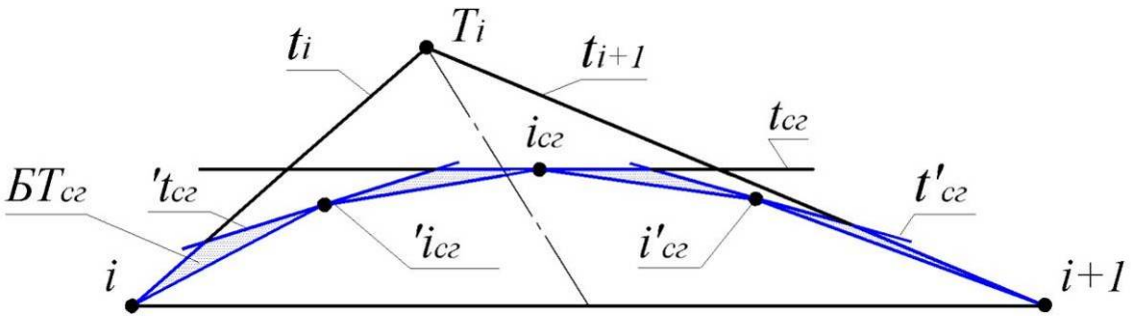


Рис. 1.11. Формування послідовності БТзг

Конфігурація кожного з БТзг забезпечує виконання умов:

- довжина сторони БТзг, що належить дотичній до ДПК в попередній точці, менше довжини сторони цього ж БТ, що належить дотичній в наступній точці;

- БТ задають чотири дуги парабол, які зістиковано в точках ′iзг, iзг, iзг′ і мають в цих точках спільні стичні кола;

- значення радіуса кривини першої параболи в точці i і четвертої параболи в точці i+1 дорівнюють раніше призначеним в цих точках радіусам кривини ДПК Ri і Ri+1 відповідно.

Після формування складеної кривої перевіряється наявність чи відсутність вершини в межах кожної дуги параболи. Якщо дуга не містить вершину, то ділянка ДПК формується цією дугою. В іншому випадку в межах відповідного БТзг здійснюється наступний крок згущення, в результаті якого

формується послідовність з чотирьох БТ, які задовольняють викладеним вище умовам.

Задане співвідношення довжин сторін БТ, одержуваних на кожному кроці згущення, гарантує формування на одному з кроків послідовності БТ, кожен з яких визначає дугу параболи, яка не містить вершини. В результаті отримуємо один з можливих варіантів розв'язку задачі у вигляді обводу другого порядку гладкості, уздовж якого значення кривини монотонно зростають. На якому саме етапі згущення настане момент, коли ділянки обводу не міститимуть особливих точок, заздалегідь визначити неможливо. На окремих ділянках це може статися при нескінченно малій відстані між точками ДПК, коли дуга параболи може розглядатися як дуга стичного кола. В цьому випадку ділянка вважається сформованою, коли висота відповідного БТ стає менше заданої похибки інтерполяції. Іншим недоліком методу є необхідність коригувань при визначенні положень дотичних, що призначаються на кожному кроці згущення.

Зазначені недоліки обумовлені рішенням використовувати один конкретний з безлічі можливих варіант формування ДПК у вигляді обводу з дуг парабол.

Загальною умовою застосування розглянутих в даному пункті способів дискретної інтерполяції є попередній аналіз конфігурації вихідного точкового ряду. Задачею аналізу є визначення можливості інтерполяції точкового ряду монотонною кривою лінією і меж області її розташування. Закономірний характер зміни значень характеристик уздовж інтерполюючої кривої є необхідною умовою існування обмеженої області простору, в межах якої гарантується розташування кривої. При цьому призначення у вихідних точках фіксованих значень цих характеристик забезпечує локалізацію області розташування ДПК, межи якої змінюються при призначенні кожної з точок згущення.

1.3.3 Лінійна інтерполяція просторових точкових рядів

Формування просторової кривої з заданим поєднанням характеристик, що інтерполює точковий ряд, є важливим інструментом моделювання поверхонь. Просторовими є осьові лінії поверхонь каналів, лінії стикування відсіків складових поверхонь, траєкторії обтікання поверхні середовищем.

Фундаментальні дослідження просторових кривих ліній представлені в роботах [7, 48, 71, 138, 139, 315]. Крива лінія в кожній своїй точці характеризується розташуванням елементів основного тригранника, значеннями кривини, скруту, радіусу стичної сфери. Кожна характеристика визначається розташуванням нескінченно близьких точок кривої і може бути розрахована за рівнянням, яке задає криву і рівнянням, які отримані в результаті його диференціювання.

Властивості кривої лінії визначає динаміка зміни її диференційно-геометричних характеристик, яку можна досліджувати аналізуючи конфігурацію лінійчатих поверхонь, що огинають послідовність відповідних граней основних тригранників. Найбільш повну інформацію про просторової

кривої лінії дає її полярна поверхня (полярний торс), яка є огинаючою нормальних площин. Полярному торсу належить лінія центрів кривини, його ребро звороту є місцем центрів стичних сфер, а прямолінійні твірні поверхні паралельні відповідним бінормалям кривої.

Таким чином, елементи полярного торса визначають диференційно-геометричні характеристики у всіх точках кривої. З цього випливає, що способи інтерполяції точкових рядів можуть бути засновані на контролі конфігурації полярного торса кривої, що формується. Однак на даний момент способи, які реалізують зазначену ідею, нам невідомі.

В роботі [138] дана класифікація особливих точок просторової кривої лінії в залежності від розташування частин кривої щодо основного тригранника в особливій точці, а також динаміки приросту кутів суміжності і скруту в її околі. Зокрема визначено поняття точки перегину просторової кривої, як точки, в якій спрямна площина перетинає криву. В роботі також сформульовані поняття монотонної кривої, уздовж якої величини кутів суміжності і скруту отримують позитивні збільшення, і регулярної сумарної кривої, що складається з ділянок різних кривих, у яких в точках стикування збігаються основні тригранники, центри кривини, гвинтові параметри.

У нашому дисертаційному дослідженні ми також будемо використовувати поняття точки перегину просторової кривої, монотонної кривої лінії, регулярної кривої.

Можливі два різних підходи до формування одновимірних просторових обводів. Один з підходів [238, 308] передбачає формування обводу ділянками просторових кривих ліній. В цьому випадку для ділянок, які стикуються, у вихідних точках необхідно забезпечити співпадіння основних тригранників, рівні значення кривини і скруту. Методи, що реалізують другий підхід [139, 197, 199, 317, 236-237], забезпечують формування плоских обводів, розташованих в площинах проекцій. Ці обводи однозначно визначають інтерполюючу криву, будучи прийнятими за її ортогональні проекції.

Відзначимо, що відносно плоскої інтерполяції задача формування просторових одновимірних обводів з використанням будь-якого із зазначених підходів різко ускладнюється. Це обумовлено необхідністю використання кривих, заданих рівнянням третього і вищих ступенів, а також збільшенням кількості характеристик, значення яких необхідно контролювати в точках обводу, що формується. Відомі методи інтерполяції просторових точкових рядів аналітично заданими кривими лініями не забезпечують регулярну і монотонну зміну диференційно-геометричних характеристик уздовж інтерполюючої кривої.

Спосіб формування просторових одновимірних обводів з використанням кривих кінцевих сум запропонований в роботі [64]. Ділянку просторової кривої представляє ламана лінія, яку задають дві плоскі криві кінцевих сум, що розташовані в різних площинах і складаються з однакової кількості ланок. (рис. 1.12).

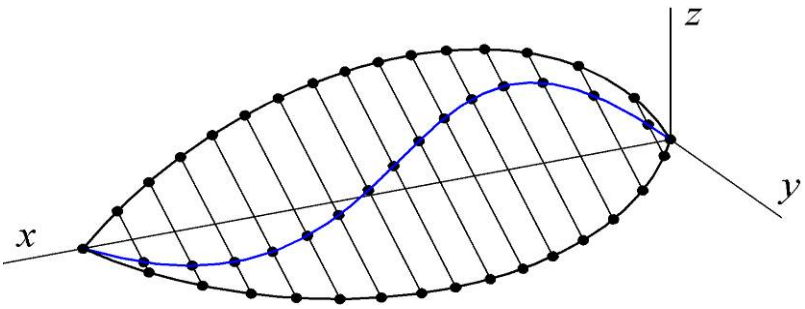


Рис. 1.12. Формування просторової кривої кінцевих сум

Початкові і кінцеві точки плоских кривих кінцевих сум збігаються, а їх проміжні точки, що мають однакові номери щодо початкової точки, з'єднуються відрізками прямих ліній. На цих відрізках призначаються вузли просторової кривої кінцевих сум. Розташування кожного вузла в межах відповідного відрізка визначається його номером щодо початкової точки ділянки. Від відрізка до відрізка вузли рівномірно віддаляються від однієї з вихідних плоских кривих кінцевих сум.

Запропонована схема формування просторової ламаної забезпечує збіг аналогів основних тригранників і значень кривини в точках стикування ділянок. Конфігурація точкового ряду, що становить кожну з ділянок, дозволяє інтерполювати його кривою лінією постійного ходу. Як і при формуванні плоских кривих кінцевих сум, положення вузлів просторової ламаної лінії призначається без урахування конфігурації всього вихідного точкового ряду. Кожна ділянка формується виходячи з умови наявності у неї частини, уздовж якої значення кривини зростають, і частини, уздовж якої ці значення зменшуються. Метод не розрахований на формування інтерполюючої кривої лінії, властивості якої відповідають передбачуваним властивостям кривої, на якій був призначений вихідний точковий ряд.

Розв’язання задачі побудови просторової ламаної лінії з використанням дискретно представлених аналогів натуральних координат просторової кривої лінії запропоновано в роботі [7].

Як аналог довжини дуги кривої використовується довжина ланки ламаної лінії. Аналогом кута суміжності є кут між прямими, що проходять через сусідні ланки. Кут між суміжними площинами, що проходять через три послідовні вузла ламаної, відповідає куту скруту просторової кривої. Якщо відомо положення перших двох ланок ламаної лінії і задані довжини всіх наступних ланок, а також кути, відповідні кутам суміжності і скруту, то перераховані характеристики задають в просторі єдину ламану лінію.

Використання дискретних аналогів довжини дуги, кутів суміжності і скруту доцільно при розробці методу аналізу вихідного точкового ряду на можливість його інтерполяції кривою лінією з закономірною зміною кривини і скруту.

Спосіб формування просторової ДПК, заснований на контролі наявності у неї особливих точок, розроблений в роботі [313]. В результаті аналізу конфігурації вихідного точкового ряду визначаються його частини, які можливо інтерполювати кривою лінією, яка не містить точок зміни ходу і

точок перегину. Точки перегину розглядаються як точки, в яких спрямна площина перетинає просторову криву лінію [7]. Частини точкового ряду згущуються виходячи з умови запобігання виникненню у ДПК, яка формується, ділянок, що містять зазначені особливі точки.

Критерієм ділянки ДПК постійного ходу $Ai…Ai+2$ є розташування попередньої та наступної частин точкового ряду по різні боки відносно площини, що проходить через точки $Ai, Ai+1, Ai+2$. В іншому випадку ділянка буде містити точку зміни ходу кривої. Наявність у ДПК точки перегину визначається наступним чином. Якщо в площині, що проходить через точки $Ai, Ai+1, Ai+2$, точка Ai і ортогональна проекція точки $Ai+3$ розташовані по різні боки відносно прямої $(Ai+1, Ai+2)$, то ділянка ДПК $Ai+1…Ai+2$ містить точку перегину.

Точки згущення призначаються в межах областей, межи яких забезпечують виконання зазначених умов. Точка згущення вихідної ділянки $Ai, Ai+1$ (Mi) належить площині αi, яка призначається в межах двогранного кута $\varphi i<90^{o}$, обмеженого площинами, що проходять через точки $Ai-1, Ai, Ai+1$ та $Ai, Ai+1, Ai+2$. Розташування αi забезпечує постійний хід ДПК, отриманої в результаті призначення Mi.

Область розташування точки Mi на площині αi обмежена трикутником, одна зі сторін якого – відрізок $[Ai, Ai+1]$, а дві інші сторони належать прямим , що становлять з цим відрізком кути, рівні кутам між прямими $(Ai-1, Ai)$ і $(Ai, Ai+1)$, $(Ai, Ai+1)$ і $(Ai+1, Ai+2)$ відповідно. Призначення точки Mi в межах зазначеного трикутника забезпечує відсутність точок перегину у отриманої ДПК. Перевищення точки ДПК над відрізком, що з'єднує попередню й наступну точки є критерієм точності, з якою ламана лінія, що формується, представляє криву. Після того, як максимальне з зазначених перевищень стає менше заданої величини, ДПК вважається сформованою.

Розглянутий спосіб дозволяє контролювати і запобігати виникненню осциляції при формуванні ДПК згущенням вихідного точкового ряду. Основу способу складають алгоритми:

- попереднього аналізу вихідного точкового ряду на можливість його інтерполяції неосцилюючою кривою лінією;

- визначення області можливого за умовами задачі розташування точок згущення на кожній з ділянок ДПК;

- визначення абсолютної похибки, з якою ламана лінія, що формується, представляє безперервну криву.

Розглянуті методи дискретної інтерполяції лише частково вирішують задачу контролю і забезпечення заданих характеристик ДПК, що формується. Моделювання точкових рядів, що з заданою точністю представляють регулярну просторову криву лінію, уздовж якої значення її характеристик монотонно зростають або зменшуються за допомогою цих методів неможливо. Інші методи дискретного геометричного моделювання, що дозволяють контролювати властивості кривих ліній, які інтерполюють точковий ряд, що формується, нам невідомі.

За результатами аналізу відомих методів інтерполяції просторових точкових рядів можна зробити висновок про те, що задача забезпечення заданої динаміки зміни уздовж інтерполюючої кривої значень кривини, скруту, радіусів стичних сфер на даний момент не має розв'язку.

1.4 Задачі дисертаційного дослідження

Огляд літературних джерел дозволяє зробити висновок про необхідність подальшого розвитку теорії моделювання за заданими умовами дискретно представлених геометричних образів і розробки на її основі алгоритмів для створення математичного забезпечення САПР кривих ліній і поверхонь. Зазначена потреба визначає актуальність мети дисертаційного дослідження, яка полягає в розробці теоретичних основ методу ВДГМ обводів на основі області можливого розташування кривих ліній, уздовж яких значення диференційно-геометричних характеристик монотонно зростають або зменшуються.

Для досягнення мети дослідження необхідно вирішити наступні задачі:

1. Запропонувати систему дискретно представлених аналогів диференційно-геометричних характеристик кривої лінії.

2. Розробити методику аналізу вихідного точкового ряду на можливість його інтерполяції кривої лінією, уздовж якої значення її характеристик монотонно зростають або зменшуються.

3. Розробити методику визначення діапазонів можливих значень кривини, скруту, радіусів стичних сфер, положень елементів основних тригранників, а також критерії призначення їх конкретних значень в точках монотонної лінії, що інтерполює точковий ряд.

4. Встановити залежності між значеннями характеристик кривої лінії, динамікою їх зміни уздовж кривої і межами області її можливого розташування.

5. Розробити алгоритми визначення положень проміжних точок інтерполюючої кривої лінії, що належать її частинам, уздовж яких значення характеристик змінюються монотонно.

6. Запропонувати класифікацію особливих точок кривої лінії, яка враховує її розташування щодо граней відповідного основного тригранника, а також динаміку зміни уздовж кривої значень кривини, скруту, радіусів стичних сфер.

7. Розробити способи визначення, класифікації та згущення ділянок, які містять особливі точки стикування монотонних частин ДПК.

8. Запропонувати методику оцінки похибки, з якою точковий ряд, що формується, представляє інтерполюючу його криву лінію з заданим поєднанням характеристик.

9. Розробити способи формування безперервних обводів, які із заданою точністю замінюють ДПК з відомими характеристиками.

10. Дослідити можливості розробленого методу при розв'язанні задач моделювання поверхонь з заданими характеристиками.

Висновки по першому розділу

1. В результаті аналізу існуючих підходів до моделювання складних функціональних поверхонь зроблено висновок про необхідність використання сучасних комп'ютерних технологій геометричного моделювання, орієнтованих на застосування CAD-систем. Основу програмного забезпечення CAD-систем складають алгоритми формування плоских і просторових кривих ліній, з яких найбільш складні вирішують задачу інтерполяції точкових рядів кривою лінією з заданими геометричними властивостями.

2. Аналіз існуючих методів моделювання кривих ліній показав, що їх можливості недостатні для розв’язання задачі інтерполяції точкових рядів складної конфігурації з забезпеченням заданої динаміки зміни значень диференціальних характеристик уздовж інтерполюючої кривої. Розробка методу інтерполяції точкового ряду кривою лінією із заданою закономірністю зміни значень характеристик є актуальною задачею геометричного моделювання. Основною областю використання таких кривих є формування лінійчатих каркасів, які задають поверхні з підвищеними динамічними якостями.

3. Огляд методів інтерполяції точкових рядів показав, що найбільш широкі можливості в забезпеченні заданих характеристик інтерполюючої кривої дає апарат ВДГМ завдяки вибору конкретного розв’язку з діапазону можливих за умовами задачі, локальності коригувань форми і характеристик ДПК, контролю точності, з якою точковий ряд, що формується, представляє криву лінію з заданими характеристиками.

4. В результаті аналізу відомих методів ВДГМ зроблено висновок про необхідність подальшого розвитку варіативного моделювання просторових і плоских ДПК з заданими характеристиками. Визначено задачі по розробці методу моделювання регулярних ДПК з закономірною зміною значень кривини, скруту і мінімальним, виходячи з вихідних умов, числом особливих точок.

Публікації автора за розглянутими в розділі питаннями – [73-76, 78, 243, 371].

Використані в розділі результати досліджень інших авторів опубліковані в роботах – [1, 2-32, 34-72, 113-151, 153-208, 210-215, 217-242, 244-271, 273-275, 283-285, 291, 292, 295, 299, 302, 305, 307, 308, 310, 311, 313, 315-324, 326-346, 348-356, 358, 359, 361-365, 372-374, 376-390, 393-400, 405, 406].

РОЗДІЛ 2
АНАЛІЗ ГЕОМЕТРИЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ДПК НА ОСНОВІ ХАРАКТЕРИСТИК ВИХІДНОГО ТОЧКОВОГО РЯДУ

Дискретне геометричне моделювання передбачає формування кривої лінії у вигляді впорядкованої множини точок, що їй належать. Таку криву будемо називати дискретно представленою кривою або ДПК. Крім вихідного точкового ряду в визначник ДПК можуть входити її диференційно-геометричні характеристики, які забезпечуються в процесі моделювання [244].

ДПК формується методом дискретної інтерполяції або згущення, який передбачає визначення положення проміжних точок для вихідного точкового ряду. При цьому вважаємо, що вихідні точки задані без похибки і в процесі моделювання не змінюють свого положення. Дискретне подання означає, що і сама крива і її характеристики не визначені однозначно на всіх етапах моделювання. У такій постановці задача не має однозначного розв’язку.

Положення точок згущення визначається виходячи з координат вихідних точок і геометричних умов, яким повинна відповідати крива. Основною вимогою до ДПК, що формується методом, який розробляється, є закономірна зміна значень диференційно-геометричних характеристик уздовж кривої.

Під закономірною зміною значень характеристик будемо мати на увазі, що ДПК містить мінімальну, виходячи з початкових умов, кількість особливих точок: точок перегину, зміни ходу, точок зміни збільшення - зменшення уздовж кривої значень кривини і скруту.

Умова закономірної зміни значень диференційно-геометричних характеристик носить універсальний характер. Будь-яку криву лінію можна розділити на частини, уздовж яких її характеристики змінюються монотонно.

Основним варіантом постановки задачі будемо вважати формування ДПК нульового порядку фіксації, яка задана тільки координатами вихідних вузлів. Інші характеристики ДПК – напрям ходу, ділянки монотонної зміни значень кривини і скруту, наявність особливих точок, фіксовані характеристики в вузлах призначаються виходячи з конфігурації вихідного точкового ряду. Формування ДПК більш високих порядків фіксації будемо розглядати як окремий випадок основної постановки задачі.

Розробка методики аналізу вихідного точкового ряду з метою визначення основних характеристик ДПК, що формується на його основі, є завданням цього розділу.

Розв’язок поставленої задачі передбачає:

- розробку критеріїв оцінки характеристик кривої, представленої точковим рядом;

- розробку способів визначення частин точкового ряду, на основі яких можливо сформувати ДПК з монотонною зміною значень її характеристик;

- визначення діапазонів значень характеристик ДПК у вузлових точках, при яких можливо забезпечити їх монотонну зміну вздовж кривої;

- визначення області можливого розташування кривої, що відповідає умовам задачі.

2.1 Диференційно-геометричні властивості просторових кривих ліній

Дискретна геометрична модель кривої лінії складається з точкового ряду і алгоритму його згущення. Алгоритм згущення точкового ряду розробляється виходячи із заданих властивостей кривої, що моделюється, найважливішим з яких є закономірність зміни уздовж неї значень її геометричних характеристик.

Криву лінію постійного ходу, вздовж якої радіуси стичних кіл і сфер монотонно зростають або зменшуються, будемо називати монотонною. Будь-яку криву лінію можна розглядати як таку, що складається з монотонних частин. З'ясуємо умови, що визначають закономірність зміни геометричних характеристик уздовж монотонних частин кривих та в точках їх стикування.

2.1.1 Формування монотонних кривих ліній

Розглянемо криву лінію l як траєкторію руху точки M, що належить площині N, яка обкатує полярний торс, ребро звороту якого – крива правого ходу (рис. 2.1).

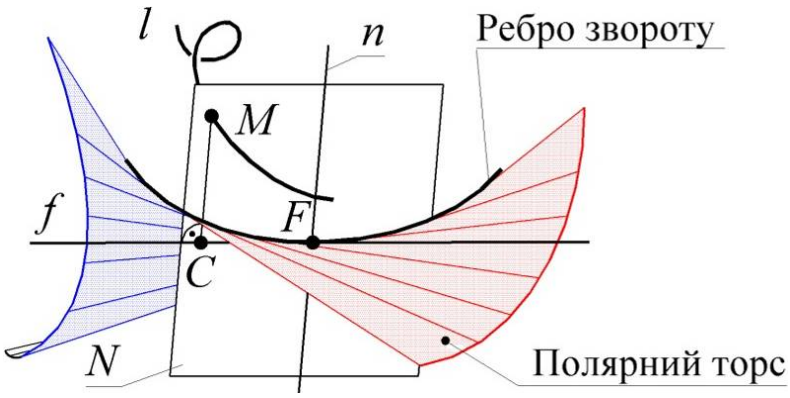


Рис. 2.1. Формування монотонної кривої

Геометричні характеристики кривої l визначаються характеристиками ребра звороту полярного торса, напрямом обкатки торса площиною N і розташуванням точки M в цій площині. На рис. 2.1 зображений момент, коли площина N торкається полярного торса по прямій f – дотичній ребра звороту в деякій точці F. Напрям руху точки F уздовж ребра звороту визначається напрямом обкатки полярного торса площиною N. Ребро звороту розділяє полярний торс на дві порожнини, які сформовані напівдотичними додатного і від'ємного напряму відповідно. Напівдотичною додатного напряму будемо вважати половину прямої f, в напрямі якої спрямований вектор швидкості руху точки F.

Проведемо в площині N пряму n, яка перетинає під прямим кутом дотичну f в точці F. Прямі f і n розділяють площину N на чотири частини. У

кожній чверті призначимо точку – М1, М2, М3, М4 і визначимо геометричні характеристики кривих ліній l1, l2, l3, l4, які є траєкторіями руху цих точок. Механізм формування характеристик кривої розглянемо на прикладі лінії l1.

Нехай площина N переміщається таким чином, що її чверть, в якій розташована точка М1 (перша чверть) накочується на порожнину полярного торса, яка сформована напівдотичними додатного напряму. На торс також накочується четверта чверть площині N, а друга і третя чверті скочуються з нього (рис. 2.1).

Для кривої l пряма f є віссю кривини, а точка F – центром стичної сфери в точці М [71]. Головна нормаль проходить через точку М перпендикулярно вісі кривини і перетинається з нею в центрі стичного кола (точка С).

Накочення першої чверті площини N на полярний торс означає, що уздовж траєкторії руху точки М1 значення радіусів кривини (відстань |С, М1 |) монотонно зменшуються.

Динаміка зміни уздовж кривої l радіусів стичних сфер визначається розташуванням точки М відносно прямої n. Розглянемо вісь кривини f як пряму, що обкочує ребро звороту полярного торса, а центр стичної сфери F як точку, що переміщується по прямій f. Разом з точкою F уздовж вісі кривини переміщується і пряма n. Тоді точки площини N, в напрямі яких переміщується пряма n, в даний момент рухаються по кривій, уздовж якої радіуси стичних сфер монотонно зменшуються.

Розглянемо розташування кривої лінії l1 щодо стичних сфер (ССф) і на її прикладі доведемо кілька тверджень.

На рис. 2.2 i-та ССф (ССфi), що визначається нескінченно близькими точками кривої i-1, i , i+1, i+2, зображена таким чином, що погляд спрямований вздовж дотичної прямої ti ≡(i, i+1).

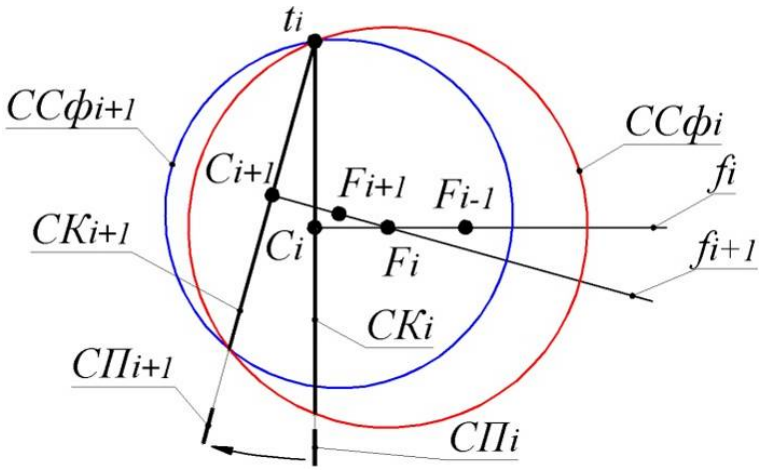


Рис. 2.2. Характеристики кривої лінії l1

Стичні кола – СКi (визначається точками i-1, i, i+1) і СКi+1 (визначається точками i, i+1, i+2) будемо вважати розташованими на ССфi. Ці кола отримуємо в перетині ССфi стичними площинами – СПi і СПi+1, відповідно. Центр ССфi – точка Fi. Це точка перетину вісей кривини fi і fi+1,

що проходять через центри кривини Ci і Ci+1.

Твердження 2.1 Точка, що розташована в чверті площини, яка накочується на порожнину полярного торса, утворену напівдотичними додатного напряму, переміщується по кривій, хід якої збігається з ходом ребра звороту полярного торса.

Нескінченно близькі точки Fi-1 , Fi , Fi+1 визначають стичну площину ребра звороту полярного торса в точці Fi (рис. 2.2). Ця площина є нормальною площиною кривої l1 в точці i (Ni) [71, 315]. При накоченні на полярний торс Ni обертається щодо дотичній ребра звороту fi за годинниковою стрілкою, якщо дивитися в додатному напрямі дотичної, що визначає правий хід ребра звороту.

Одночасно, точка Fi, в якій нормальна площина Ni торкається ребра звороту, переміщується в положення Fi+1. При цьому стична площина СПi, перпендикулярна вісі кривини fi, обертається щодо дотичній ti прагнучи зайняти положення СПi+1, яка перпендикулярна вісі кривини fi+1. Напрям обертання СП визначає правий хід кривої l1, який збігається з ходом ребра звороту її полярного торса. Твердження 2.1 доведено.

З твердження 2.1 випливає, що l1 і l3 – криві правого ходу, а l2 і l4 – криві лівого ходу.

Твердження 2.2 Крива лінія постійного ходу, вздовж якої радіуси стичних кіл і сфер зростають в одному напрямі, розташована за межами своїх стичних сфер.

Якщо на криву l1 правого ходу дивитися в напрямі вектора дотичної ti, то центр кривини Ci+1 розташовується по ліву сторону від СПi, а центр сфери Fi – по праву (рис. 2.2). Таке розташування центрів стичних кіл щодо центру стичної сфери визначає співвідношення відстаней |Ci, Fi|<|Ci+1, Fi |, а значить і співвідношення радіусів: R CKi > R CKi+1.

Стична сфера ССфi+1 визначається СКi і нескінченно близькою точкою i+3, що розташована на кривій l1 за межами ССфi. Центр ССфi+1 – точка Fi+1, належить вісі кривини (Ci+1, Fi). При цьому |Ci+1, Fi|>|Ci+1, Fi+1 |, що визначає співвідношення радіусів: R ССфi > R ССфi+1. Зазначене поєднання співвідношень радіусів СК і ССф визначено розташуванням точки i+3 за межами ССфi.

Постійний хід кривої і розташування наступних нескінченно близьких точок за межами попередньої стичної сфери визначає монотонну зміну значень радіусів стичних сфер і кіл уздовж кривої:

$$\ldots > R\ ССфi > R\ ССфi+1 > R\ ССфi+2 > \ldots,$$
$$\ldots > R\ CKi > R\ CKi+1 > R\ CKi+2 > \ldots$$

Ця закономірність визначається взаємним положенням послідовних СК і ССф, аналогічним показаному на рис. 2.2. Отже, твердження 2.2 доведено.

Аналіз переміщення точок М1, М2, М3, М4, зображених на рис. 2.1, дозволяє встановити характеристики відповідних кривих ліній [79]: l1 (П, R: <, R Cф: <) – крива правого ходу (П), вздовж якої радіуси кривини (R) і стичних сфер (R Cф) зменшуються; l2 (Л, R:>, R Cф: <) – крива лівого ходу,

вздовж якої радіуси стичних кіл зростають, а радіуси стичних сфер зменшуються; l3 (П, R:>, R Сф: >) – крива правого ходу, вздовж якої радіуси стичних кіл і сфер зростають; l4 (Л, R:<, R Сф: >) – крива лівого ходу, вздовж якої радіуси стичних кіл зменшуються, а радіуси стичних сфер зростають.

Якщо напрям обкатки полярного торса поміняти на протилежний, точки М будуть переміщуватися по тих же траєкторіях, але в зворотному напрямі. Хід відповідних кривих ліній залишиться колишнім, а динаміка зміни радіусів стичних кіл і сфер зміниться на протилежну. Отже, точка М1 перетворюється в М3 (при реверсній обкатці рухається по кривій з характеристиками l3), М3 – в М1, М2 – в М4, М4 – в М2.

Аналіз закономірностей розташування стичних кіл і сфер уздовж кривої l1 (l3) показав, що крива розташована за межами її стичних сфер. Тепер визначимо розташування кривої l2 (l4) щодо її стичних сфер.

Твердження 2.3 Крива лінія постійного ходу, вздовж якої радіуси стичних кіл і сфер зростають в різних напрямах, розташована всередині своїх стичних сфер.

На рис. 2.3 зображена ССфi, що обумовлена нескінченно близькими точками i-1, i, i+1, i+2, які належать кривій l2. Напрям погляду направлено вздовж дотичної ti ≡(i, i+1).

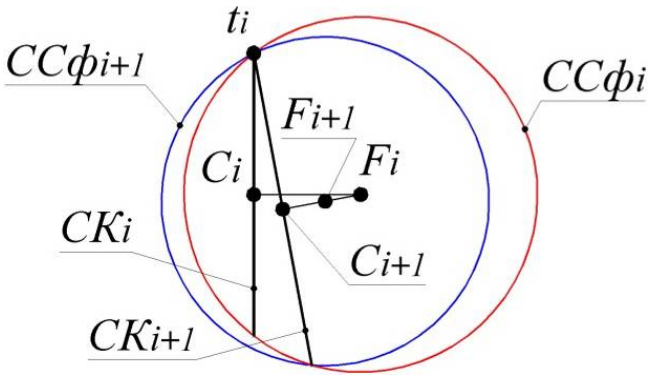


Рис. 2.3. Характеристики кривої лінії l2

Стичні кола СКi(i-1, i, i+1) і СКi+1(i, i+1, i+2), що належать ССфi, проекціюються у відрізки. При цьому R СКi < R СКi+1.

Сфера ССфi+1 проходить через СКi+1 і нескінченно близьку до неї точку i+3, розташовану на l2. Лівий хід кривої l2 і співвідношення R ССфi > R ССфi+1 визначають приналежність точки i+3 до тієї частини ССфi+1, яка розташована всередині ССфi. Якщо дивитися в напрямі вектора дотичної прямої ti, то це частина сфери, яка розташована по ліву сторону СКi. З рисунка 2.3 видно, що точка i-1, яка належить СКi, розташована всередині ССфi+1. Це означає, що кожна точка кривої l2 розташована всередині стичних сфер, відповідних попереднім і наступним точкам. Таке розташування стичних сфер обумовлено напрямом зростання вздовж кривої радіусів стичної кіл і сфер. Твердження 2.3 доведено.

Ділянка кривої, уздовж якої R СК і R ССф зростають в різних напрямах , обмежена. При русі вздовж l2 радіуси стичних кіл збільшуються, а радіуси

стичних сфер зменшуються. У граничній точці кривої R ССф=R СК і центр стичного кола належить ребру звороту полярного торса. При русі в зворотному напрямі (крива l4, уздовж якої R СК зменшуються, а R ССф збільшуються) граничною буде точка, в якій R СК=0.

Полярний торс, у якого ребро звороту крива лінія лівого ходу, визначає інші чотири варіанти сполучень геометричних характеристик кривих ліній:

l5 (Л, R:<, R Сф: <), l6 (П, R:>, R Сф: <),
l7 (Л, R:>, R Сф: >), l8 (П, R:<, R Сф: >).

Таким чином, існує вісім різних варіантів поєднань напряму зростання радіусів кривини, радіусів стичних сфер і ходу уздовж монотонних кривих. Всі варіанти можна визначити трьома параметрами:

- напрямом ходу ребра звороту полярного торса кривої;
- напрямом обкатки полярного торса нормальною площиною кривої;
- розташуванням в нормальній площині точки, яка описує при своєму русі монотонну криву.

Окремим випадком монотонної кривої, уздовж якої радіуси стичних кіл і сфер зростають в одному напрямі (l1, l3, l5, l7), можна вважати криву постійної кривини.

Крива постійної кривизни розташована за межами своїх стичних сфер, а її лінія центрів кривини збігається з ребром звороту полярного торса [71].

Окремим випадком монотонної кривої, уздовж якої радіуси стичних кіл і сфер зростають в різних напрямах (l2, l4, l6, l8), можна вважати сферичну криву лінію.

2.1.2 Особливі точки просторової кривої лінії

Особливими будемо вважати точки, в яких закономірність зміни уздовж кривої її геометричних характеристик змінюється на протилежну. Для кривої лінії, в кожній точці якої існує єдиний основний тригранник, особливими є точки перегину, зміни ходу, точки зміни напряму зростання вздовж кривої радіусів її стичних кіл і сфер.

В особливих точках (М) стикуються монотонні частини кривих ліній. Вісь кривини і головна нормаль ребра звороту, які відповідні особливій точці , розділяють порожнини полярного торса на чверті. Кожна монотонна частина кривої визначається однією з чвертей полярного торса [77].

2.1.2.1 До першої групи особливих точок віднесемо точки, в яких стикуються монотонні криві, що визначаються одним і тим же полярним торсом. Єдиним торсом будемо вважати поверхню, яка визначається ребром звороту постійного ходу, в кожній точці якого існує єдиний основний тригранник. В іншому випадку будемо розглядати торсову поверхню як складову.

Особливі точки першої групи виникають в наступних випадках:

- точка М кривої l належить її осі кривини f і збігається з центром кривини (радіус кривини R=0);

- точка М належить головній нормалі n ребра звороту полярного торса кривої l. Центр кривини і центр стичної сфери, що відповідні такій точці, збігаються (С≡F).

Особливі точки будемо позначати буквою М з індексами, що вказують на тип монотонних кривих, які стикуються в цій точці (п. 2.2.1). Наприклад, в точці М1,2 стикуються криві l1 и l2.

Закономірності утворення особливих точок першої групи розглянемо на прикладі кривих, полярний торс яких визначається ребром звороту правого ходу.

1) Точка М рухається по кривій l1, накочуючись разом з нормальною площиною N на полярний торс. Центр стичної сфери F переміщується по ребру звороту. В даний момент можна розглядати F як точку, яка переміщується вздовж осі кривини f в напрямі центру кривини С. Чим більше радіус кривини ребра звороту, тим більше переміщення точки F щодо повороту вісі кривини на кут β – кут суміжності для ребра звороту і кут скруту для кривої l1. Одночасно, центр кривини С віддаляється від точки F по вісі кривини f. Це переміщення збільшується при збільшенні радіуса кривини кривої l1 в точці М – R=|C,M|.

Таким чином, при переміщенні точки М уздовж кривої l1 точки С і F переміщуються по вісі кривини в одному напрямі і відстань | C, F | може як збільшуватися, так і зменшуватися.

а) Якщо |C,F| монотонно збільшується, то особлива точка на кривій l1 виникне за умови R=0. В цей момент точка М накотилася на полярний торс і належить вісі кривини f (М≡С). При подальшому перекочуванні площини N точка М продовжить рухатися по кривій l2. Особливу точку, що розділяє монотонні ділянки l1 і l2, позначимо М1,2 (П-Л; R:< 0 >; R Сф:<). У дужках зазначено, що в точці М1,2 хід кривої змінюється з правого на лівий, радіуси кривини після зменшення на ділянці l1 досягають нульового значення в точці М1,2 і збільшуються на ділянці l2, радіуси стичних сфер продовжують зменшуватися.

б) Якщо |C,F| монотонно зменшується, то настає момент, коли центр кривини С перетинає ребро звороту полярного торса (С≡F). У цей момент точка М визначить особливу точку М1,3 (П; R:<>; R Сф:<>), після якої вона продовжить переміщатися по кривій l3.

2) Точка М переміщується по кривій l2, а відповідна чверть площини N скочується з полярного торса. Точки С і F переміщуються назустріч одна одної і відстань |C,F| може тільки зменшуватися. У момент, коли С≡F, отримаємо особливу точку М2,4 (Л; R: ><; R Сф:<>).

3) Точка М переміщується по кривій l3, а площина N скочується з полярного торса. Точки С і F переміщаються в одному напрямі.

а) Якщо |C,F| зростає, то характеристики кривої l3 змінюються монотонно (П; R:>; R Сф:>) і крива не містить особливих точок.

б) Якщо |C,F| зменшується, то в момент, коли С≡F, отримаємо особливу точку М3,1 (П; R: ><; R Сф: ><).

4) При переміщенні точки М вздовж кривої l4 площина N накочується на полярний торс, точки С і F переміщуються в протилежних напрямах і відстань |C,F| може тільки збільшуватися. У момент, коли М≡С, отримаємо особливу точку М4,3 (Л-П; R:<0>; R Сф:<), після якої точка М продовжить переміщатися по кривій l3.

Особливі точки першої групи, що належать кривим лініям, полярний торс яких визначається ребром звороту лівого ходу, можна встановити в результаті аналогічного аналізу. Це особливі точки, що розділяють монотонні частини l5, l6, l7, l8:

- М5,6 (Л-П; R:<0>; R Сф:<), М5,7 (Л; R:<>; R Сф:<>);
- М6,8 (П; R:><; R Сф:<>);
- М7,5(Л; R:><; R Сф:><);
- М8,7 (П-Л; R:<0>; R Сф:>).

Розглянута група складається з 8 особливих точок (в точках М1,3 і М3, 1, М5,7 і М7,5 характеристики кривої аналогічні). У цих точках частини монотонних кривих, що стикуються, мають спільне стичне коло і стичну сферу, напрями векторів дотичної збігаються. Властивості кривої лінії в околі особливої точки визначаються взаємним розташуванням відповідних центрів кривини і центрів стичних сфер.

Розташування центру кривини на ребрі звороту означає, що частини монотонних кривих, які стикуються, визначаються чвертями полярного торса , одна з яких утворена напівдотичними з ребром звороту додатного напряму, а інша – напівдотичними від'ємного напряму. У таких точках відбувається зміна напряму зростання вздовж кривої радіусів стичних кіл і сфер. При цьому хід кривої залишається незмінним.

В особливих точках, центр кривини яких не належить ребру звороту, стикуються частини монотонних кривих, що визначаються чвертями полярного торса, утвореними напівдотичними одного напряму. При переході через такі особливі точки хід кривої змінюється напротилежний, а радіуси стичних сфер продовжують змінюватися монотонно. Для даної групи особливих точок це точки, що належать полярному торсу, в яких відбувається перехід від зменшення до збільшення радіусів кривини через нульове значення.

2.1.2.2 До другої групи віднесемо особливі точки, в яких стикуються монотонні частині кривої, що визначаються чвертями різних полярних торсів . Закономірності утворення таких особливих точок розглянемо окремо для кривих, полярний торс яких складається з відсіків із ребрами звороту однакового ходу і протилежного ходу.

а) Один з варіантів кривої лінії, заданої чвертями полярних торсів з ребрами звороту правого ходу, зображений на рис. 2.4.

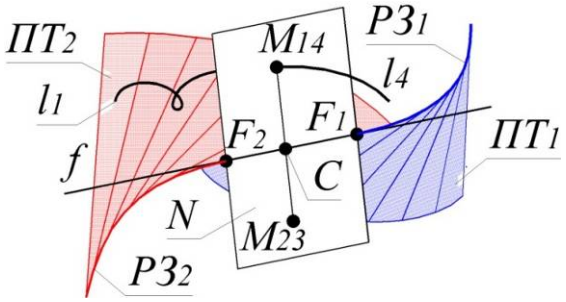


Рис. 2.4. Точка зміни ходу і напряму зростання вздовж кривої

радіусів стичних сфер

Чверть полярного торса ПТ1 сформована напівдотичними додатного напряму до половини ребра звороту РЗ1. Чверть ПТ2 складається з напівдотичних від'ємного напряму до РЗ2. Точка М, що належить частини площини N, яка накочується на ПТ1, а потім на ПТ2, переміщується вздовж кривої l, що складається з монотонних частин l1 – l4. Вісь кривини f, по якій стикуються ПТ1 і ПТ2, відповідає особливій точці М1,4 (П-Л; R:<; R Сф:<>).

Прямій f належать центри кіл і сфер, які є стичними для кривих l1 і l4 в точці їх стикування. Збіг центрів стичних кіл в точці С забезпечує регулярність зміни кривини уздовж кривої. Центри стичних сфер (F1 і F2) можуть не співпадати.

Дотик РЗ1 і РЗ2 з прямою f забезпечує гладку стиковку кривих l1 і l4. Спільна стична площина РЗ1 і РЗ2 в точках F1 і F2, відповідно, є нормальною площиною (N) кривої l в особливій точці. Зазначений збіг площин визначає наявність єдиного основного тригранника в точці М1,4.

Наявність у кривої лінії особливої точки другої групи визначається розташуванням РЗ1 і РЗ2. Для розглянутого випадку характерно:

- розташування центрів стичних сфер, в яких РЗ1 і РЗ2 дотикаються із спільною віссю кривини по різні боки центру кривини, що відповідає особливій точці;

- розташування РЗ1 і РЗ2 по різні боки спільної для них спрямної площини в точках F1 і F2 відповідно.

Визначимо інші особливі точки, що відповідають такому розташуванню ребер звороту. Одночасно з переміщенням точки М по кривим l1 – l4 точка, що належить частини площині N, яка скочується з полярних торсів, переміщується по кривим l2 – l3. Ці криві зістиковано в особливій точці М2,3 (Л-П; R:>; R Сф:<>). Якщо поміняти напрям обкатки полярних торсів площиною N на протилежний, то замість особливої точки М1,4 отримаємо М3,2 (П-Л; R:>; R Сф:><), а замість М2,3 – М4,1 (Л-П; R:<; R Сф:><).

У разі заміни РЗ1 і РЗ2 на аналогічно розташовані криві лівого ходу отримаємо ще чотири варіанти особливих точок:

М5,8 (Л-П; R:<; R Сф:<>), М8,5 (П-Л; R:<; R Сф:><),
М6,7 (П-Л; R:>; R Сф:<>), М7,6 (Л-П; R:>; R Сф:><).

Спільними характеристиками кривої в розглянутих восьми особливих точках є:

- зміна ходу кривої лінії;
- зміна напряму зростання вздовж кривої радіусів стичних сфер;
- збереження напряму зростання вздовж кривої радіусів кривини.

Ці характеристики обумовлені розташуванням РЗ1 і РЗ2 по різні боки щодо спільної для них спрямної площини і дотиком із спільною віссю кривини f по різні боки точки С.

В результаті аналогічного аналізу конфігурації полярних торсів та умов розташування ребер звороту інші особливі точки розділені на інші групи з подібним поєднанням характеристик.

РЗ1 і РЗ2, які розташовані по одну сторону спільної спрямної площини і дотикаються до спільної вісі кривини по різні боки центру кривини, що відповідає особливій точці, визначають групу з восьми особливих точок:

М1,3 (П; R:<>; R Сф:<>), М3,1 (П; R:><; R Сф:><),
М2,4 (Л; R:><; R Сф:<>), М4,2 (Л; R:<>; R Сф:><),
М5,7 (Л; R:<>; R Сф:<>), М7,5 (Л; R:><; R Сф:><),
М6,8 (П; R:><; R Сф:<>), М8,6 (П; R:<>; R Сф:><).

Для цієї групи особливих точок характерно:

- збереження ходу кривої лінії;
- зміна напряму зростання вздовж кривої радіусів стичних сфер.

РЗ1 і РЗ2, які розташовані по різні боки спільної спрямної площини і дотикаються до вісі кривини, що відповідає особливій точці, по одну сторону від точки С визначають особливі точки:

М1,2 (П-Л; R:<>; R Сф:<), М2,1 (Л-П; R:><; R Сф:<),
М3,4 (П-Л; R:><; R Сф:>), М4,3 (Л-П; R:<>; R Сф:>),
М5,6 (Л-П; R:<>; R Сф:<), М6,5 (П-Л; R:><; R Сф:<),
М7,8 (Л-П; R:><; R Сф:>), М8,7 (П-Л; R:<>; R Сф:>).

В особливих точках цієї групи відбувається зміна ходу і напряму зростання радіусів кривини уздовж кривої. Радіуси стичних сфер продовжують змінюватися монотонно.

РЗ1 і РЗ2, які розташовані по одну сторону спільної спрямної площини і центра кривини, що відповідає особливій точці, визначають у кривій l точки звороту в вигляді вершини вістря. Ці точки ми розглядати не будемо.

Таким чином, три варіанти розташування ребер звороту однакового ходу дозволяють формувати полярні торси, які задають 24 варіанта кривих ліній, що складаються з двох монотонних частин. Відзначимо, що розглянута група точок містить аналоги особливих точок першої групи. Відмінність полягає в тому, що в особливих точках другої групи радіус кривини може приймати будь-яке значення і збіг центрів дотичних кіл і сфер не є обов' язковим.

б) На основі полярних торсів, що складаються з двох відсіків з ребрами звороту різного ходу, можливо сформувати 32 варіанта кривих ліній, зістикованих з двох монотонних частин. Розташування ребер звороту полярних торсів, що визначають одну з цих груп, зображено на рис. 2.5.

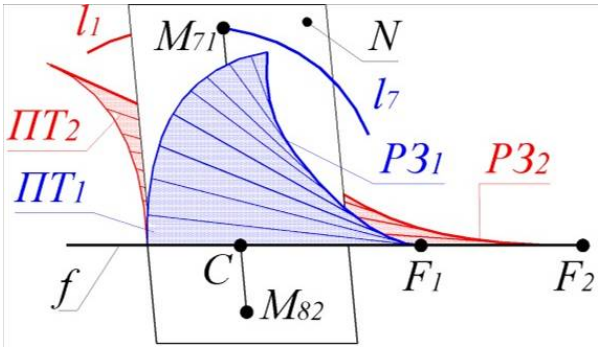


Рис. 2.5. Точка зміни ходу і напряму зростання вздовж кривої радіусів стичних кіл і сфер

Точка, що належить частині площини N, яка спочатку скочується з ПТ1, а потім накочується на ПТ2 переміщується по кривій, яка складається з монотонних частин l7 – l1. Для точки стикування монотонних кривих М7,1 (Л-П; R:><; R Сф:><) пряма f є віссю кривини, якій належить єдиний центр кривини (точка С) і два центри стичних сфер (F1 і F2), що відповідають особливій точці. Точки F1 і F2 розташовані по одну сторону від точки С. РЗ1 і РЗ2 розташовані по одну сторону їх спільної спрямної площини в точках F1 і F2 відповідно.

Одночасно точки, що належать частині площини N, яка накочується на ПТ1, а потім скочується з ПТ2, переміщуються по кривим, що містять особливу точку М8,2 (П-Л; R:<>; R Сф:><).

При зміні напряму обкатки полярних торсів площиною N замість М7,1 отримаємо особливу точку М3,5 (П-Л; R:><; R Сф:><), а замість М8,2 – М4,6 (Л-П; R:<>; R Сф:><).

У разі зміни ходу РЗ1 на правий, а РЗ2 - на лівий і при збереженні особливостей їх розташування отримаємо криві, які містять особливі точки М1,7, М2,8, М5,3, М6,4. Характеристики цих точок протилежні наведеним вище характеристикам точок М7,1, М8,2, М3,5, М4,6 відповідно.

Для розглянутої групи точок загальними характеристиками кривої є зміна ходу і напряму зростання радіусів стичних кіл і сфер.

Ребра звороту різного ходу, які розташовані по один бік спільної спрямної площини і які дотикаються з віссю кривини по різні боки точки С, визначають особливі точки М1,5 (П-Л; R:<; R Сф:<), М2,6 (Л-П; R:<; R Сф:<), М7,3 (Л-П; R:>; R Сф:>), М8,4 (П-Л; R:<; R Сф:>), а також точки М5,1, М6,2, М3,7, М4,8, характеристики яких протилежні характеристикам перших чотирьох точок відповідно. Особливістю цієї групи особливих точок є зміна ходу і монотонність зміни радіусів стичних кіл і сфер.

Наявність у кривої особливих точок М1,6(П; R:<>; RСф:<), М2,5(Л; R:><; RСф:<), М7,4(Л; R:><; RСф:<), М8,3(П; R:<>; RСф:>), М6,1, М5,2, М4,7, М3,8 визначається розташуванням ребер звороту її полярних торсів по різні боки спільної спрямної площини і дотиком із спільною віссю кривини по різні боки точки С.

Характеристиками кривої в цих точках є зміна напряму зростання радіусів кривини, монотонна зміна радіусів стичних сфер, постійний хід.

Особливі точки М1,8 (П; R:<; R Сф:<>), М2,7 (Л; R:>; R Сф:<>), М6,3 (П; R:>; R Сф:<>), М5,4 (Л; R:<; R Сф:<>), М8,1, М7,2, М3,6, М4,5 належать кривим, полярний торс яких визначається ребрами звороту протилежного ходу, розташованими по різні сторони спільної спрямної площини і які дотикаються з спільною віссю кривини по одну сторону від точки С. Характеристиками кривої в цих точках є постійний хід і монотонна зміна радіусів кривини, зміна напряму зростання радіусів стичних сфер.

Виходячи з характеристик монотонних частин кривої, розглянуті точки стикування класифікуються в чотири групи по вісім особливих точок в кожній.

Аналіз особливих точок другого типу показав, що полярний торс, який складається з гладко зістикованих відсіків, може задавати криву лінію, що складається з будь-якого поєднання монотонних частин. Можливі 56 варіантів особливих точок, в яких монотонні криві, що стикуються, мають спільний основний тригранник і спільне стичне коло. Наявність спільної стичної сфери можливо, але не є обов'язковим для особливих точок другої групи.

2.1.2.3 До третьої групи віднесемо точки стикування монотонних кривих, заданих полярними торсами, які дотичні з нормальною площиною в особливій точці кривій l за двома паралельними осями кривини. У таких особливих точках частини кривої, що стикуються, мають спільний основний тригранник, але різні стичні кола і сфери.

З точок третьої групи виділимо точки перегину, в яких стикуються частини кривої, що розташовані по різні боки спільної спрямної площини [138]. Один з варіантів розташування полярних торсів, які задають криву лінію в околі точки перегину, зображений на рис. 2.6.

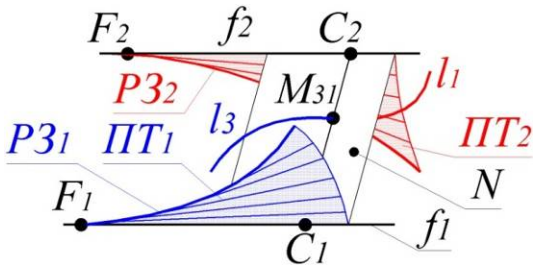


Рис. 2.6. Формування точки перегину

Точка М, що належить площині N, яка скочується з полярного торса ПТ1, переміщується по кривій з монотонним зростанням радіусів кривини. При накоченні цієї частини площини N на полярний торс ПТ2 точка М продовжить переміщуватися по кривій, уздовж якої радіуси кривини зменшуються. У момент, коли площина N торкається ПТ1 по осі кривини f1, а ПТ2 – по f2, точка М стає точкою перегину.

Обов'язковою умовою є приналежність точки перегину відрізку [C1,C2], що з'єднує центри кривини монотонних кривих в точці їх стикування. Якщо вісі кривини f1 і f2 нескінченно віддалені від точки перегину, то вона стає точкою спрямлення.

У точці перегину можуть стикуватися криві з різним поєднанням характеристик. Наприклад, якщо ребра звороту РЗ1 і РЗ2, що задають ПТ1 і ПТ2 відповідно, мають правий хід, то на рис. 2.6 зображена точка перегину М3,1.

2.2 Дискретні характеристики ДПК

Диференційно-геометричні характеристики кривої лінії можна визначити за допомогою геометричних образів, яким належать нескінченно близькі точки, розташовані на цій кривій [71, 315]. Основні з них: дотична пряма, стична площина, стичне коло, стична сфера. Інші характеристики: положення елементів основного тригранника, осі кривини, значення скруту можна визначити за допомогою перерахованих геометричних образів. Наприклад, нормальна площина перпендикулярна дотичній прямій, а вісь кривини проходить через центр стичного кола і стичної сфери.

В процесі моделювання ДПК її диференційно-геометричні характеристики будемо оцінювати за допомогою їх дискретних аналогів (дискретних характеристик):

- хорду супровідної ламаної лінії (СЛЛ) будемо розглядати як наближене положення дотичної прямої;
- дискретна характеристика, яка відповідна стичній площині – площина, що проходить через три послідовні точки ДПК [313]. Таку площину будемо називати прилеглою (ПП);
- радіус кривини в точці ДПК будемо оцінювати радіусом прилеглого кола (ПК), яке визначається цією точкою і найближчими попередньою та наступною точками ряду [73];
- в якості дискретного скруту будемо використовувати величину відношення кута між суміжними прилеглими площинами до довжини відповідної хорди СЛЛ [82];
- стичній сфері відповідає прилегла сфера (ПСф), яка визначається двома сусідніми прилеглими колами [86].

Нарощування вихідних даних, які задають ДПК, дозволяє збільшити кількість дискретних характеристик. Властивості кривої, яка представлена координатами вузлів і положенням дотичних в них, можна оцінити за допомогою дотичних площин, дотичних кіл і сфер.

Співвідношення значень диференційно-геометричних характеристик ДПК і її дискретних характеристик, взаємне розташування кривої лінії і геометричних образів, що визначають ці характеристики, дослідимо на прикладі точкового ряду, розташованого на кривій l1 правого ходу, вздовж якої радіуси стичних кіл і сфер монотонно зменшуються.

2.2.1 Прилеглі і дотичні площини

Розглянемо просторову криву лінію (l) постійного ходу з монотонною зміною значень кривини і скруту. Це може бути, наприклад, конічна гвинтова лінія. Точки i-1, i, i+1, що належать l (рис. 2.7), визначають прилеглу площину – ПП(i-1,i,i+1).

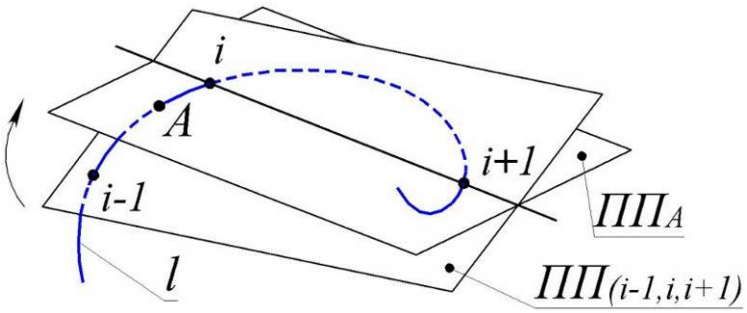


Рис. 2.7. Прилеглі площини кривої постійного ходу

Суміжні ділянки кривої (…i-1), (i-1…i), (i…i+1), (i+1…) розташовуються по різні боки ПП(i-1,i,i+1).

При повороті площини відносно прямої (i, i+1) в напрямі, що збігається з ходом кривої, точка перетину кривої і площини переміщується з положення i-1 в напрямі точки i. Позначимо зміщене положення цієї точки як точку А, а повернуте положення площини – ППА (рис. 2.7).

В момент збігу точок А та ( ) ППА займає положення площини, дотичної з кривою l в точці i, і яка перетинає криву в точці i+1.

В результаті подальшого обертання ППА точка А із положення переміщується в положення (рис. 2.8).

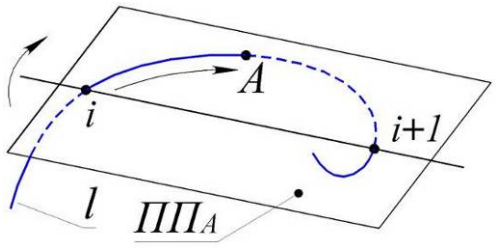


Рис 2.8. Розташування кривої відносно прилеглої площини

Збіг точок А та i+1 означає, що ППА торкається l в точці i+1 і перетинає її в точці . Продовження обертання ППА віддаляє точку А від ділянки (i…i+1).

Розглянемо ділянку (i-1…i+1) кривої l і площини, дотичні з l в точці (рис. 2.9).

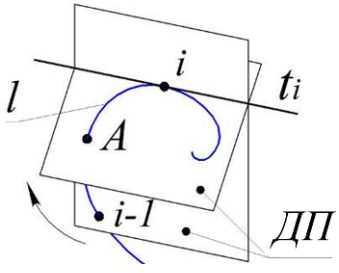


Рис. 2.9. Дотичні площини кривої постійного ходу

У вихідному положенні дотична площина (ДП) перетинає l в точці i-1. При переміщенні точки перетину (точка А) від точки i-1 до точки i ДП обертається навколо дотичної прямої в i-ої точці (ti). Напрям обертання ДП збігається з напрямом ходу кривої.

У момент збігу точки А з точкою i, ДП займає положення стичної площини кривої в точці i. При подальшому переміщенні точки А в напрямі точки i+1 ДП обертається навколо ti в тому ж напрямі.

Таким чином, взаємне розташування прилеглих та дотичних площин визначається напрямом ходу кривої, положенням точок дотику і перетину кривої з площинами [81].

При переміщенні уздовж кривої точок, що визначають ПП, остання повертається щодо хорди СЛЛ в напрямі ходу кривої лінії. Крім того, напрям ходу кривої визначає розташування її ділянок щодо ПП. Аналогічно, ДП повертається навколо дотичної прямої при переміщенні точки її перетину з кривою.

Суміжні ПП(i-1, i, i+1) і ПП(i, i+1, i+2) утворюють двогранний кут φi, усередині якого розташовується ділянка (i; i+1) кривої лінії l [313] (рис. 2.10).

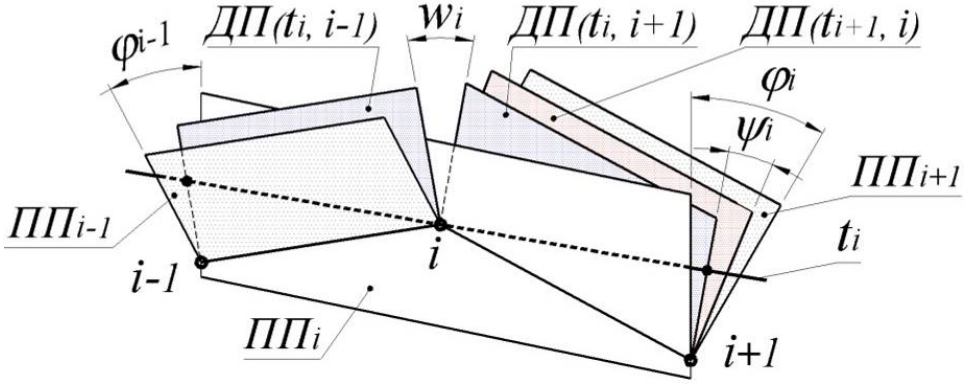


Рис. 2.10. Двогранні кути, що обмежують область розташування кривої

Площини, дотичні з ДПК в точках i та i+1:

- ДП(ti, i+1), що визначається дотичною ti і точкою i+1;

- ДП(i, ti+1), що визначається дотичною ti+1 і точкою i – обмежують двогранний кут ψi, розташований всередині кута φi. Кут ψi уточнює область розташування ділянки кривої l (i; i+1).

Площини ДП(i-1, ti) і ДП(ti, i+1), дотичні з ДПК в одній точці, перетинаються по прямій ti – дотичній до кривої в точці i. Отже, дотична ti розташовується всередині двох суміжних двогранних кутів φi-1 і φi одночасно. Двогранний кут wi, обмежений ДП(i-1, ti) і ДП(ti, i+1), містить в собі площину, що стикається з кривою l в точці i.

Розглянемо, як скрут кривої і характеристики точкового ряду, що їй належить, визначають співвідношення кутів між стичною і дотичними площинами [82].

Дотичні площини ДП(ti, i+1) і ДП(i, ti+1) поділяють двогранний кут φi на три кути:

- ΄ψi – кут між ППi і ДП(ti, i+1);

- ψi – кут між ДП(ti, i+1) і ДП(i, ti+1);
- ψi′ – кут між ДП(i, ti+1) і ППi+1.

Якщо зафіксувати точки i, i+1, i+2, і перемістити точку i-1 збільшуючи відстань hi=|i-1, i|, то кут φi збільшується за рахунок кута ′ψi при незмінних ψi і ψi′. Аналогічно при збільшенні hi+1 кут φi збільшується за рахунок ψi′. Можна припустити пропорцію:

і або:

. (2.1)

Міркуючи аналогічно можна припустити, що двогранний кут wi між дотичними площинами ДП(i-1, ti) і ДП(ti, i+1) розділяється стичною площиною СПi на кути ′wi і wi′ (рис. 2.11) пропорційно довжинам хорд СЛЛ:

. (2.2)

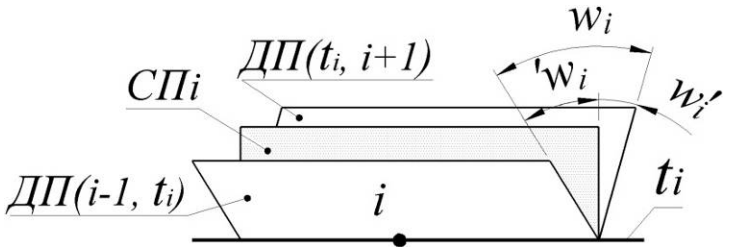


Рис. 2.11. Область розташування стичної площини

Перевіримо припущення, дослідивши співвідношення кутів між площинами, визначеними циліндричною гвинтовою лінією, яка задана рівняннями:

(2.3)

та точковим рядом, що до неї належить. Циліндрична гвинтова лінія обрана для виключення впливу змінного скруту на співвідношення кутів.

В таблиці 2.1 наведені значення відносини для різних відстаней hi+1=|i, i+1| при зафіксованих відстанях hi-1=hi=15 мм.

Таблиця 2.1

Співвідношення величин кутів ′ψi - ψi′

hi+1, мм	5	10	15	20	30	40	50
	1,0159	1,0199	1, 0457	1,0559	1,0639	1,0802	1,0923

В таблиці 2.2 наведені значення відносини для різних hi при hi-1=15 мм.

Таблиця 2.2

Співвідношення величин кутів ´ i - i´

hi, мм	5	10	15	20	30	40	50
	1,0363	1,0432	1,0518	1,0565	1,0672	1,0763	1,0818

Дані таблиць підтверджують справедливість співвідношень (2.1), (2.2).

Залежність розподілу двогранних кутів від скруту кривої лінії (Bi) розглянемо на прикладі точкового ряду з постійною довжиною хорд СЛЛ, котрий належить конічній гвинтовій лінії, яка визначається рівняннями (2.3).

Наведені в таблиці 2.3 значення дозволяють оцінити залежність співвідношення кутів ´ψi і ψi´ від середнього значення

скруту на ділянках (i-1, i) и (i+1, i+2), а значення
оцінюють вплив значення середнього скруту на ділянках (i-1, i) і (i, i+1) на розподіл кутів ´wi и wi´.

Таблиця 2.3

Співвідношення значень середнього скруту на ділянках кривої

i	hi=5, мм			hi=15, мм		
	Bi, рад/ мм			Bi рад/ мм		
1	0,0099	0,9263	0,9214	0,0111	0,9482	0,9754
2	0,0104	0,8895	0,9654	0,0117	0,9546	0,9784
3	0,0110	0,9707	1,0054	0,0125	0,9599	0,9807
4	0,0117	1,0075	1,0019	0,0134	0,9634	0,9819
5	0,0125	1,0002	0,9981	0,0145	0,9643	0,9815
6	0,0134	0,9923	0,9940	0,0156	0,9215	0,9384
7	0,0144	0,9305	0,9360	0,0171	0,9192	0,9790
8	0,0156	0,9276	0,9909	0,0186	0,9213	0,9403

Дані таблиці підтверджують існування залежностей:

, (2.4)

. (2.5)

Закономірності розташування прилеглих, дотичних і стичних площин універсальні для кривих ліній постійного ходу і можуть використовуватися при аналізі ДПК з метою визначення її геометричних характеристик.

2.2.2 Хід і дискретний скрут ДПК

Чотири послідовні точки (i-1, i, i+1 ,i+2) визначають дві сусідні ПП: ПП (i-1,i,i+1) і ПП(i,i+1,i+2). Зазначені площини перетинаються по прямій (i, i+1), якій належить відповідна хорда СЛЛ (рис. 2.12).

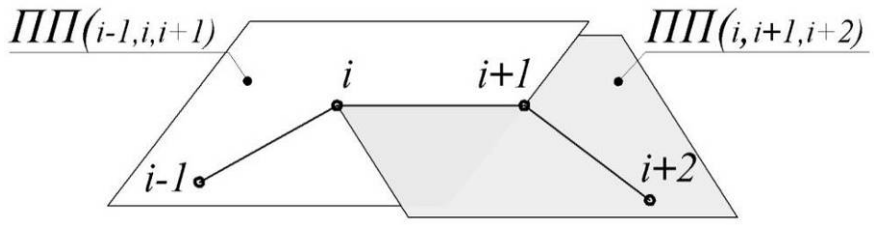


Рис. 2.12. Розташування сусідніх прилеглих площин

ПП(i-1,i,i+1) і ПП(i,i+1,i+2) поділяють простір на чотири двогранні кута. Ділянка ДПК (i, i+1) розташована всередині двогранного кута , єдиного з чотирьох, граням якого не належать точки i-1 та i+1 [90] (рис. 2.13).

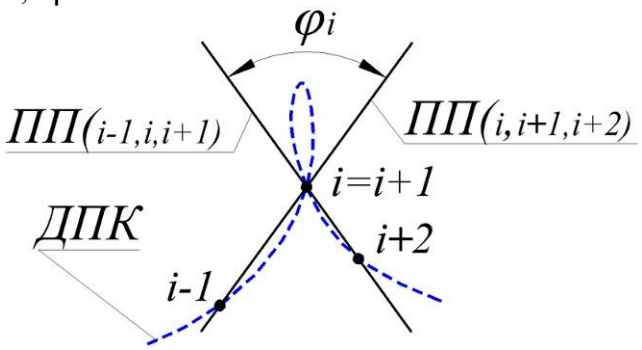


Рис. 2.13. Розташування ділянки ДПК всередині двогранного кута

Вимагатимемо, щоб вихідний точковий ряд забезпечував таке розташування ПП, при якому кут не перевищує дев'яносто градусів. При виконанні цієї умови по розташуванню чотирьох послідовних точок ряду можна визначити хід ділянки ДПК.

Розглянемо проекцію ділянки ДПК постійного ходу (i-1…i+2) на площину, перпендикулярну прямій (i, i+1) (рис. 2.13). Якщо дивитися уздовж вектора , то поворот ПП(i-1,i,i+1) в положення ПП(i,i+1,i+2) на кут здійснюється проти годинникової стрілки. В такому випадку будемо вважати, що і стична площина повертається проти годинникової стрілки навколо дотичної прямої, при русі точки дотику уздовж ділянки кривої ( ) – тобто, ДПК буде лівого ходу (від'ємного гвинтового параметра). Аналогічно, при повороті ПП за годинниковою стрілкою гвинтовий параметр ДПК буде додатним.

Величину скруту в точці просторової кривої лінії визначають відношенням кута повороту стичної площини на нескінченно малій ділянці дуги кривої до довжини цієї дуги [71]. Якщо розглядати стичну площину як прилеглу, яка визначається трьома нескінченно близькими точками, коли довжини хорд $h_{i-1}=|i-1, i|$, $h_i=|i, i+1|$, $h_{i+1}=|i+1, i+2|$ нескінченно малі, то величину скруту в i-ої точці ДПК можна визначити як [71]

. (2.6)

За аналогією з (2.6) скрут на i-ої ділянці ДПК будемо оцінювати величиною дискретного скруту [83]

. (2.7)

Використання усередненого значення довжини хорд дозволяє врахувати в (2.7) розташування чотирьох точок ДПК, які визначають величину кута φ_i між послідовними прилеглими площинами.

Зауважимо, що при $h_{i-1}=h_i=h_{i+1}$ (2.7) аналогічно (2.6).

Якщо відстані h_{i-1} і h_{i+1} нескінченно малі, то хорди $[i-1, i]$ і $[i+1, i+2]$ визначають дотичні до ДПК – t_i і t_{i+1}. У цьому випадку кут φ_i стає кутом ψ_i між площинами, дотичними з ДПК в точках i та i+1 – ДП$(t_i, i+1)$ та ДП(i, t_{i+1}) відповідно. Тоді дискретний скрут на ділянках ДПК, в вузлах якої задано положення дотичних прямих, визначається як

. (2.8)

Якщо відстань h_i нескінченно мала, то (2.7) перетворюється у вираз для визначення дискретного скруту в точці ДПК:

, (2.9)

де w_i – величина кута між площинами ДП$(i-1, t_i)$ і ДП$(t_i, i+1)$, які торкаються з ДПК в точці i (рис. 2.11).

Значення скруту в точках конічної гвинтової лінії (B_i), яка визначається рівняннями (2.3) і дискретні характеристики точкового ряду, що належить їй, представлені в таблиці 2.4.

Таблиця 2.4

Значення дискретного скруту в точках монотонної ДПК

i	h_i, мм	φ_i, рад				

			, 10-3 рад/ мм	,10-3 рад/ мм	,10-3 рад/ мм	Bi,10-3 рад/ мм
1	2	3	4	5	6	7
1	64,4678	0,14061	1,6609	1,5551	1,7075	1,5894
2	87,8147	0,1350	1,9534	1,9106	1,9897	1,9321
3	55,0454	0,1662	2,3002	2,1541	2,3992	2,2255
4	74,021	0,1621	2,7838	2,7231	2,8788	2,8077
5	45,7002	0,2035	3,3901	3,1756	3,6089	3,3312
6	60,3773	0,2031	4,2740	4,1812	4,5178	4,4348
7	36,4910	0,2622	5,4670	5,1233	6,0001	5,4981
8	47,0141	0,2714	7,3313	7,1738	8,0157	7,9469

При визначенні наведених у таблиці значень , в якості дотичних до ДПК використані дотичні до конічної гвинтової лінії.

Дані таблиці демонструють закономірність зміни значень дискретного скруту вздовж ДПК:

. (2.10)

Точність, з якою дискретні характеристики представляють скрут в точках кривої лінії збільшується зі зменшенням і вирівнюванням значень hi вздовж точкового ряду.

2.2.3 Прилеглі і дотичні кола просторової кривої лінії

Три послідовні точки i-1, i, i+1, що належать кривій лінії l, визначають i -е прилегле коло ПК(i-1, i, i+1) або ПКi. Змінюючи положення точок, що визначають ПК, можна отримати:

- коло, дотичне з l в точці i – ДК(i, ti; i+1), коли відстань між точками i-1 та i нескінченно мала (i-1≡i) або ДК (i-1; i, ti), коли i≡i+1;
- коло, стичне з l в точці i – СКi , коли i-1≡i≡i+1.

Співвідношення радіусів СКi , ДКi, ДКi залежить від динаміки зміни кривини та скруту уздовж l і відстаней між точками: hi-1=|i-1; i|, hi=|i; i+1| [83].

Розглянемо ці залежності на прикладі кривої l1 (П; R:<; R Сф:<). Це може бути конічна гвинтова лінія, характеристики якої відповідають l1 при русі вздовж неї в напрямі зменшення радіусів кривини або l3, при русі в протилежному напрямі.

Дані таблиці 2.5 показують, як при зміні hi-1 і hi змінюються радіуси кіл, дотичних з конічною гвинтовою лінією в точці i.

Таблиця 2.5

Залежність радіусів дотичних кіл від довжини хорд СЛЛ

	hi, мм	φi-1, рад	φi, рад	RДК(i-1; i, ti) , мм	RДК(i, ti; i+1) , мм

hi-1, мм					
1	2	3	4	5	6
48,1086		0,2575		68,2585	
19,5689		0,0848		66,6327	
15,1762		0,0640		66,4176	
11,9765		0,0496		66,2554	
4,8034		0,0146		65,9709	
0	0	-	-	65,6591	65,6591
	5,1282		0,0157		65,2448
	12,3699		0,0471		64,9088
	15,6866		0,0593		65,0673
	20,0802		0,7830		65,9709
	51,9617		0,2015		66,6428

При переміщенні точки i-1 уздовж l в напрямі збільшення радіусів кривини (hi-1 збільшуються) радіус ДК(i-1; i, ti) монотонно зростає, починаючи зі значення радіуса кривини в точці i Ri=65,6591 мм.

При збільшенні hi радіус ДК(i, ti; i+1) спочатку зменшується відносно Ri, а потім монотонно зростає.

Довжина ділянки зменшення радіусу ДК(i, ti; i+1) скорочується при зменшенні динаміки зміни значень кривини уздовж кривої. Наприклад, для циліндричної гвинтової лінії (крива постійної кривини) довжина такої ділянки дорівнює нулю.

Залежність радіусу ПК від розташування точок i-1, i, i+1 аналогічна. При збільшенні hi-1 радіус монотонно зростає, а при збільшенні hi+1 зменшення радіусу переходить в його монотонне зростання.

Таким чином, динаміка зміни радіусів ПК і ДК уздовж точкового ряду залежить від кроку розташування вузлів і може не відповідати закономірності зміни кривини уздовж кривої. Цю закономірність більш точно відображає співвідношення радіусів кіл, дотичних з l в сусідніх вузлах, які мають спільну хорду СЛЛ (таблиця 2.6).

Таблиця 2.6

Співвідношення радіусів дотичних кіл

hi, мм	10	20	30	40	50	100	150
R ДК(i, ti; i+1), мм	33,54	35,40	37,61	40,03	42,63	57,93	78,22
R ДК(i; i+1, ti+1), мм	32,84	33,91	35,25	36,88	38,78	53,58	84,23

Дані таблиці 2.6 демонструють, що співвідношення радіусів ДК(i, ti; i+1) і ДК(i; i+1, ti+1) відображає напрям зростання кривини уздовж l при зафіксованої точці i та збільшенні відстані hi.

У таблиці 2.7 представлені значення радіусів прилеглих та дотичних кіл, які визначаються точковим рядом, який розташований на конічній гвинтовій лінії, заданої рівняннями (2.3). Для визначення дотичних кіл використані дотичні прямі до гвинтової лінії. В останній колонці таблиці, для порівняння, наведені значення радіусів кривини у відповідних точках конічної гвинтової лінії (Ri).

Таблиця 2.7

Радіуси прилеглих та дотичних кіл монотонної ДПК

	i hi, мм	RПКi, мм	R ДК(i-1, i, ti;), мм	R ДК(i, ti; i+1), мм	Ri, мм
1	64,4677	101,1126	98,9670	104,1332	102,0237
2	87,8147	94,1886	90,8361	96,0933	92,8496
3	55,0454	85,8962	83,7452	88,8586	86,7567
4	74,0209	79,0387	75,6815	80,8965	77,6625
5	45,7001	70,8551	68,6995	73,7263	71,6382
6	60,3773	64,1124	60,7543	65,8934	62,6801
7	36,4913	56,1259	53,9680	58,8388	56,7777
8	47,014	49,6027	46,2537	51,2427	48,0740

Дані таблиці 2.7 демонструють, що співвідношення радіусів RПКi, ДК(i+1; i, ti) і ДК(i; i+1, ti+1) відображає напрям зростання радіусів кривини уздовж кривої.

2.2.4 Стичні, дотичні та прилеглі сфери

Чотири послідовні точки ряду, що належить кривій l, визначають прилеглу сферу ПСф(i-1, i, i+1, i+2) або ПСфi (рис. 2.14).

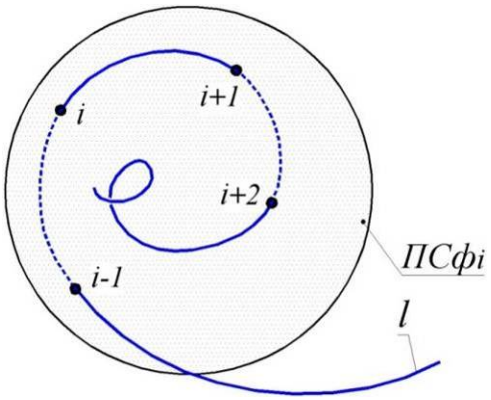


Рис. 2.14. Прилегла сфера

ПСфi можна визначити як сферу, на якій розташовані два прилеглих кола: ПСфi≡ПСф(ПКi, ПКi+1) або прилегле коло і точка: ПСфi≡ПСф(ПКi, i+2).

Змінюючи положення точок, що визначають ПСфi, можна отримати стичну сферу – ССфi, коли i-1≡i≡i+1≡i+2 або дотичну сферу – ДСфi.

Можливі різні варіанти сфер, дотичних до кривої l [89]:

- ДСф(СКi, i+1) – сфера, яка визначається i-м стичним колом СКi і подальшою точкою i+1, коли i-2≡i-1≡i;

- ДСф(i-1, i, ti, i+1,) ≡ ДСф(ДК(i-1, ti; i), i+1) – сфера, яка дотична з l в точці i та перетинає її в точках i-1 та i+1;

- ДСф(i, ti, i+1, ti+1) ≡ ДСф(ДК(i, ti; i+1), ДК(i; i+1, ti+1)) – сфера, дотична з l в двох послідовних точках i та i+1.

Відносне розташування стичних, дотичних і прилеглих сфер і кіл, співвідношення їх радіусів залежить від відстаней між точками, що їх визначають. Формування дотичних і прилеглих сфер можна уявити як результат трансформації стичної сфери при збільшенні відстані між точками, що її задають. Закономірності такої трансформації розглянемо на прикладі кривої l, характеристики якої відповідають l1 (l3).

1. Дотичну сферу ДСф(СКi, i-1), що проходить через стичне коло СКi і точку i-1, отримуємо в результаті переміщення точки i-1 від ССфi в напряму збільшення радіусів кривини кривої l (рис. 2.15).

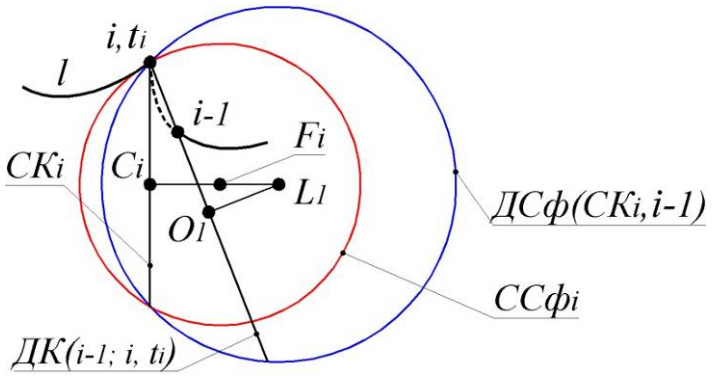


Рис.2.15. Формування дотичної сфери ДСф(СКi, i-1)

На рисунку сфери зображені таким чином, що дотична ti проекціюється в точку i. У міру переміщення точки i-1 дотична площина ДП(i-1, ti) обертається відносно прямої ti перетинаючи ДСф(СКi, i-1) по дотичному колу ДК(i-1; i, ti). При цьому радіус ДСф збільшується, а її центр L1 переміщується по i-й вісі кривини віддаляючись від центру ССфi (точка Fi). Ділянка i-1…i кривої l розташовується всередині ДСф(СКi, i-1), а ділянки ... i -1 та i ... – за її межами.

2. При переміщенні точки i+1 вздовж кривої l за межи ДСф(СКi, i-1) отримаємо ДСф(i-1; i, ti; i+1), задану проходженням через ДК(i-1; i, ti) і точку i+1.

Центр ДСф(i-1; i, ti; i+1) – точка Li, переміщується по прямій від центра ДСф(СКi, i-1) до центру зафіксованого ДК(i-1; i, ti). Дотична площина ДП(ti; i+1) обертається відносно прямої ti і перетинає ДСф по ДК(i, ti; i+1). Радіуси ДСф(i-1; i, ti; i+1) і ДК(i, ti; i+1) зменшуються. Ділянки i-1…i та i…i+1 розташовані всередині ДСф(i-1; i, ti; i+1), а ділянки… i-1 та i+1 … – за її межами (рис. 2.16).

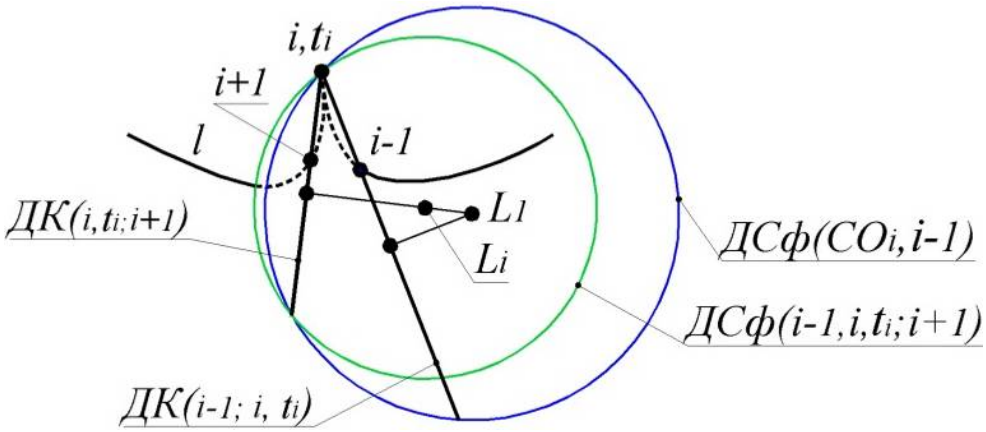


Рис. 2.16. Формування дотичної сфери ДСф(i-1; i, ti; i+1)

3. Дотичну сферу ДСф(i-1; i, ti; i+1) можна розглядати як сферу, що проходить через точки i-1; i, i+1 і точку А, відстань від якої до точки i нескінченно мала. Перемістимо точку А по кривій l від точки i в напрямі i+1. Отримаємо сферу, задану проходженням через ПК(i-1, i, i+1) і точку А. Очевидно, що ділянка i…А розташовується за межами сфери. Перенумерувавши точки i-1, i, А, i+1 на i-1, i, i+1, i+2 відповідно, отримаємо ПСфi(i-1, i, i+1, i+2), зображену на рис. 2.14.

Твердження 2.4 Точки i-1, i, i+1, i+2, що належать монотонній кривій, уздовж якої радіуси стичних кіл і сфер збільшуються в одному напрямі, задають прилеглу сферу, яка розділяє криву на ділянки …i-1, i…i+1, …i+2, розташовані за межами сфери, та ділянки i-1…i, i+1…i+2, розташовані всередині сфери.

В результаті аналогічних міркувань можна довести ще одне твердження.

Твердження 2.5 Ділянки …i-1, i…i+1, …i+2 монотонної кривої, вздовж якої радіуси стичних кіл і сфер збільшуються в протилежних напрямах, розташовані всередині ПСфi(i-1, i, i+1, i+2), а ділянки i-1…i, i+1…i+2 за її межами.

Розглянутий механізм формування геометричних образів показує, що існують діапазони відстаней між вузлами (hi), при яких динаміка зміни уздовж точкового ряду, що належить монотонній кривій, радіусів прилеглих та дотичних кіл і сфер, відповідає динаміці зміни уздовж кривої радіусів стичних кіл та сфер.

2.2.5 Гранні полярні поверхні

Диференційно-геометричні характеристики просторової кривої лінії однозначно визначаються її розташуванням щодо полярного торса. Полярний торс є геометричним місцем розташування осей кривини – прямих, що з'єднують відповідні центри кривини і центри стичних сфер кривої [71].

Визначимо поверхню – аналог полярного торса, яка задає дискретні характеристики ДПК. Це поверхня, що утворена площинами (Pi), які

проходять через середини хорд супровідної ламаної лінії ДПК перпендикулярно цим хордам. Будемо називати таку поверхню – гранна полярна поверхня перпендикулярних площин (ГППР) [80].

Суміжні перпендикулярні площині перетинаються по прямих: $p_i \equiv P_{i-1} \times P_i$, які за аналогією з осями кривини будемо називати осями прилеглих кіл ДПК (рис. 2.17). Центр ПК$_i$(i-1, i, i+1) – Ц$_i$, це точка перетину вісі p_i і перпендикуляра, проведеного до неї з середини хорди [i, i+1]. Суміжні вісі ПК перетинаються в центрах прилеглих сфер: $p_i \times p_{i+1} \equiv T_i$, а кут між цими осями дорівнює куту між відповідними прилеглими площинами (φ_i). Ламану лінію …, T_{i-1}, T_i, T_{i+1}, …, хорди якої належать послідовним осям ПК будемо розглядати як аналог ребра звороту полярного торса. ГППР апроксимує полярний торс просторової кривої лінії і визначає дискретні характеристики ДПК, вузли якої розташовані на цій кривій.

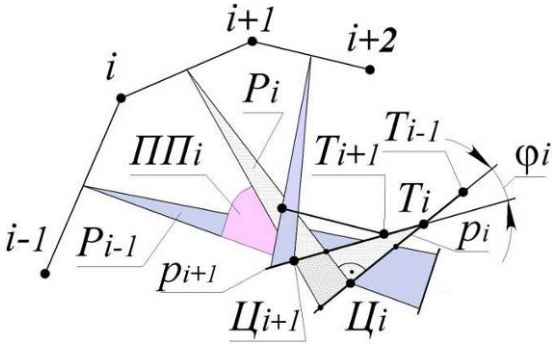


Рис. 2.17. Гранна полярна поверхня перпендикулярних площин

Дискретні характеристики ДПК, в вузлах якої задані положення дотичних прямих, визначає гранна поверхня, що утворена перпендикулярними (P_i) та нормальними (N_i) площинами. Таку поверхню будемо називати гранною полярної поверхнею нормальних площин і позначати ГППN.

Прямі $m_i' \equiv N_i \times P_{i-1}$ і $m_i' \equiv N_i \times P_i$ будемо називати осями дотичних кіл – центри кіл, дотичних з ДПК в точці i (точки O_i' і O_i'), розташовані на цих прямих (рис. 2.18).

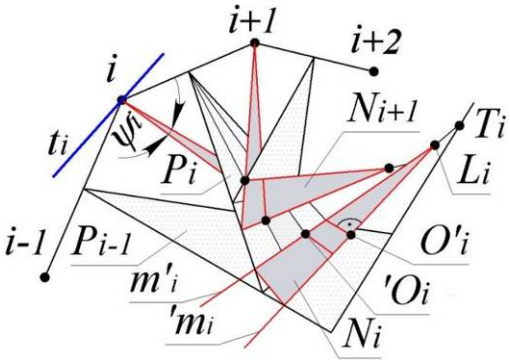


Рис. 2.18. Гранна полярна поверхня нормальних площин

Вісі ДК перетинаються в центрах дотичних сфер (Li): ′mi×mi′≡Li, а кути між послідовними осями ДК (φi, ωi) рівні кутам між відповідними дотичними площинами. ГППN інтерполює послідовність осей кривини просторової кривої лінії, які відповідають точкам, що розташовані на цій кривій. Ламана лінія …, Li-1, Li, Li+1, …, що належить послідовним осям ДК , є уточненим аналогом ребра звороту полярного торса.

Параметри ГПП однозначно визначають дискретні характеристики ДПК і дозволяють визначити динаміку зміни диференційно-геометричних характеристик уздовж вихідної кривої.

2.3 Область розташування ДПК

Варіативне дискретне геометричне моделювання ДПК передбачає визначення для вихідного точкового ряду проміжних точок, що належать кривій. Визначення області можливого за умовами задачи розв'язку і призначення точок згущення всередині цієї області – необхідна умова забезпечення заданих геометричних властивостей кривої. Обмеження, що накладаються на розташування монотонної ДПК її характеристиками, розглянемо на прикладі кривої з характеристиками l1.

2.3.1 Тетраедри розташування ДПК

Точковий ряд, розташований на просторовій кривій лінії (l) визначає послідовність прилеглих площин: … ППi-1, ППi(i-1, i, i+1), ППi+1 … (рис. 2.19).

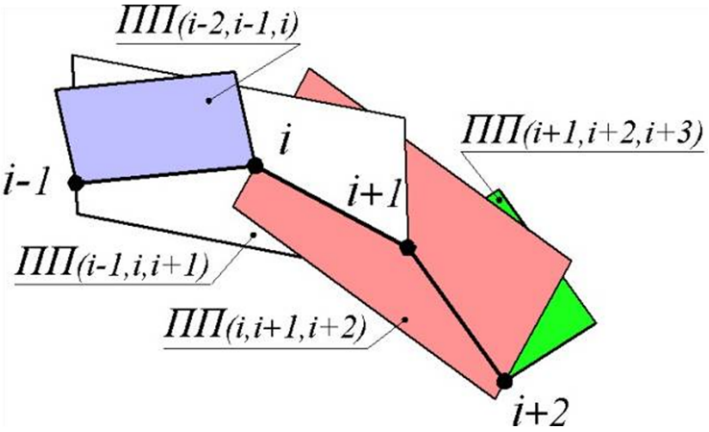


Рис. 2.19. Прилеглі площини ДПК

Кожні чотири послідовні ПП обмежують тетраедр, одним з ребер якого є хорда СЛЛ [86]. Будемо називати такі тетраедри прилеглими (ПТ). Кожній ПП належить одна з граней чотирьох послідовних ПТ.

Якщо l крива постійного ходу, то кожна ПП розділяє l на чотири ділянки (п. 2.3.1). Наприклад, для ППi це ділянки … i-1, i-1…i, i…i+1, i+1 … (рис. 2.7). При цьому перша і третя ділянки розташовані по одну сторону ПП, а друга і четверта – по іншу (рис. 2.20).

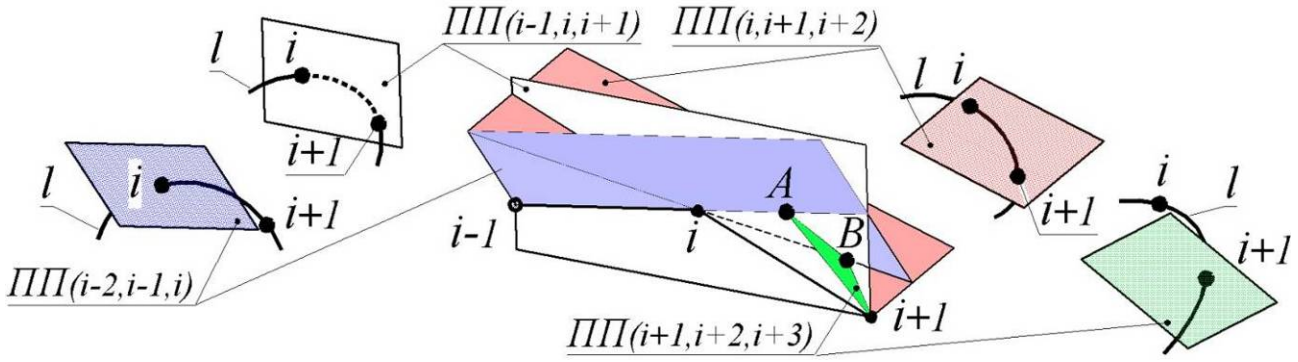


Рис. 2.20. Прилеглий тетраедр ДПК постійного ходу

На рисунку зображений ПТi(i, i+1, A, B), грані якого належать ППi-1, ППi, ППi+1, ППi+2, і показано розташування ділянки i…i+1 кривої l щодо цих ПП.

Для кожної з чотирьох ПП ділянка кривої розташована по той же бік, що і ПТi. З цього випливає, що будь-яка крива постійного ходу, яка інтерполює точковий ряд i-2…i+3, на ділянці i…i+1 розташована всередині ПТi. Ланцюжок ПТ, визначених на всіх ділянках, є областю можливого розташування ДПК постійного ходу.

Прилеглий тетраедр має обмежений обсяг і може розглядатися як область розташування ділянки ДПК, якщо сума величин двогранних кутів φi і φi+1, що обмежують область розташування ДПК на сусідніх ділянках (п. 2.3 .1), не перевищує 180°. Вимагатимемо, щоб вихідний точковий ряд забезпечував виконання цієї умови.

Нарощування фіксованих характеристик у вузлових точках уточнює область розташування ДПК. Задавши в точках ДПК положення дотичних прямих, отримаємо послідовність дотичних площин: … ДП(i-1, ti), ДП(ti, i+1), ДП(i+1, ti+1), ДП(ti+1, i+2) … На ділянці (i, i+1) зазначені чотири ДП обмежують тетраедр, який будемо називати дотичним (ДТi). Дотичні тетраедри розташовуються усередині прилеглих тетраедрів. Величина кута ψi між сусідніми ДП в середньому в три рази менше кута φi між відповідними ПП. З цього випливає, що область розташування ДПК, яка обмежена ДТi (обсяг тетраедрів), в середньому, в 27 разів менше області обмеженої ПТi.

Призначивши в точках ДПК положення стичних площин (СПi), на кожній дільниці отримуємо стичний тетраедр (СТ). Тетраедр СТi обмежують ДП(i, ti; i+1), ДП(i; i+1, ti+1), СПi, СПi+1 (рис 2.21). Ланцюжок стичних тетраедрів, визначених на всіх ділянках, обмежує область розташування ДПК постійного ходу, в вузлах якої визначено положення основних тригранників. Стичні тетраедри приблизно в чотири рази точніше визначають область розташування ДПК щодо дотичних тетраедрів.

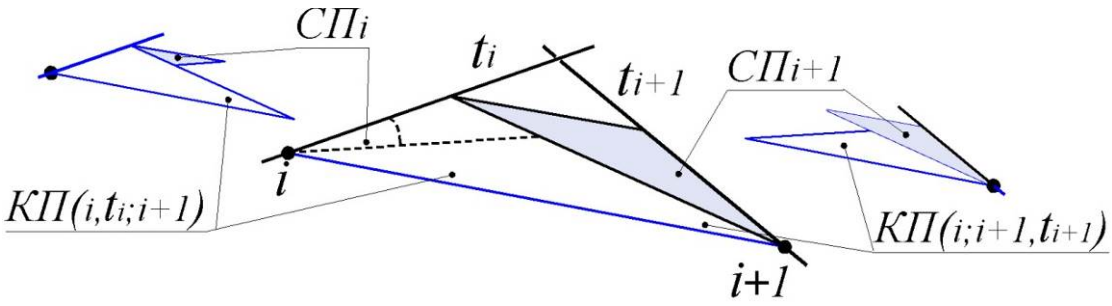


Рис. 2.21. Стичний тетраедр ДПК постійного ходу

Розташування ДПК всередині дотичних і стичних тетраедрів випливає з закономірностей розташування кривої лінії постійного ходу щодо її дотичних і стичних площин. Міркування, що дозволяють зробити цей висновок, аналогічні наведеним вище про розташування ДПК в межах прилеглих тетраедрів.

Твердження 2.6 Крива лінія постійного ходу розташовується в межах ланцюжка тетраедрів, обмежених послідовністю прилеглих, дотичних і стичних площин, визначених у точках розташованого на кривій точкового ряду.

2.3.2 Сферичні тригранники

Впорядкована множина точок, розташованих на просторовій кривій лінії, визначає послідовність прилеглих і дотичних сфер. Три послідовні сфери, перетинаючись, обмежують геометричний образ, який будемо називати сферичним тригранником.

Тригранники, що обмежені прилеглими сферами, будемо називати тригранниками прилеглих сфер (ТПСф), тригранники, що обмежені дотичними сферами, – тригранниками дотичних сфер (ТДСф) [89].

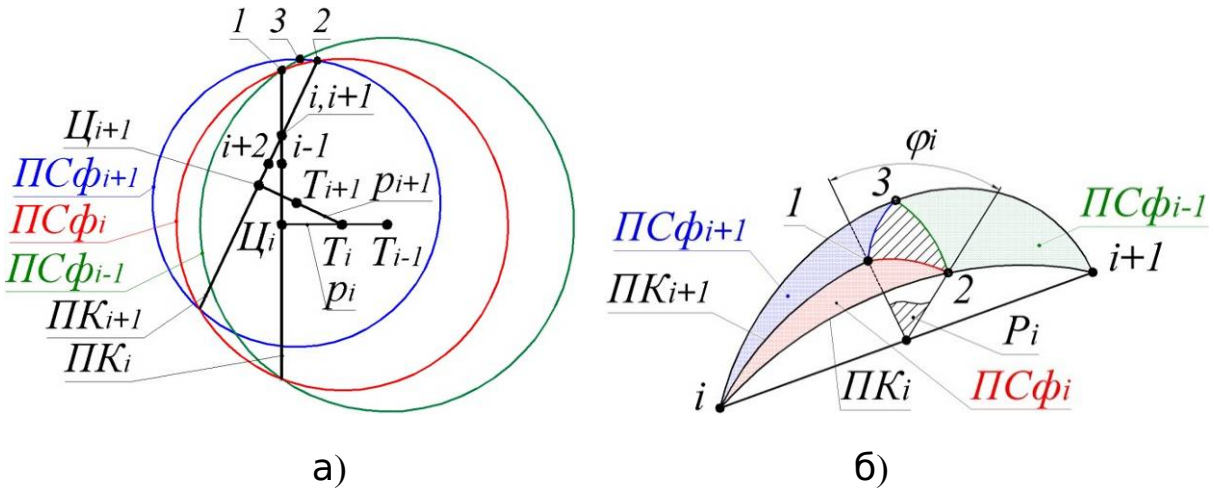
Розглянемо, як дискретні характеристики точкового ряду визначають конфігурацію сферичних тригранників і доведемо, що ТПСф і ТКСф є областю розташування монотонної ДПК.

2.3.2.1 Тригранник прилеглих сфер

Розглянемо взаємне розташування сфер, що визначаються точковим рядом i-2…i+3, який розташований на монотонній кривій з характеристиками l1.

Сфери обмежують тригранник ТПСфi, який має дві вершини – i та i+1, а його межі належать прилеглим сферам – ПСфi-1, ПСфi(i-1, i , i+1, i+2), ПСфi+1. Ребра тригранника – прилеглі кола ПКi, ПКi+1, що розташовані на ПСфi, і коло, по якому перетинаються ПСфi-1 и ПСфi+1. На рис. 2.22 а) показані ПСфi-1, ПСфi, ПСфi+1, коли погляд направлено вздовж прямої (i, i+1). Контури сфер – кола максимального радіуса, що розташовані в площині Pi, яка проходить через середину хорди [i, i+1] перпендикулярно цій хорді. ПКi і ПКi+1 проекціюються в хорди цих кіл. Наочне зображення

ТПСфi показано на рис. 2.22 б).



а) б)

Рис. 2.22. Тригранник прилеглих сфер

Прилеглу сферу ПСфi-1 можна розглядати як сферу, що проходить через ПКi і точку i-2. У міру переміщення точки i-2 по кривій l від точки i-1 в напрямі збільшення радіусів кривини центр ПСфi-1 (точка Ti-1) переміщується по прямій, що проходить через центри ПКi (точка Цi) і ПСфi (точка Ti). При цьому радіус сфери зростає, а ребро ТПСфi, що належить ПКi +1 розташовується всередині ПСфi-1. Розглядаючи ПСфi+1 як сферу, що проходить через ПКi+1 і точку i+3, визначаємо, що ребро, яке належить ПКi, розташовується всередині ПСфi+1.

Відзначимо особливості розташування елементів ТПСфi. Центри прилеглих сфер – точки Ti-1, Ti, Ti+1, і центри прилеглих кіл – точки Цi-1, Цi , належать Pi. Нижня грань ТПСфi (найближча до хорди [i, i+1]) належить ПСфi. Напрям обходу центрів ПСф Ti-1 → Ti → Ti+1 відповідає ходу кривої l, а напрям обходу граней ТПСфi: ПСфi-1 → ПСфi → ПСфi+1 протилежний ходу кривої.

Тепер визначимо розташування кривої l щодо ТПСфi і доведемо твердження:

Твердження 2.7 Монотонна крива лінія розташовується в межах ланцюжка сферичних тригранників, обмежених послідовністю прилеглих сфер, які задає точковий ряд, розташований на кривій.

Точки, що визначають ПСф, обмежують три ділянки кривої (рис. 2.14). Середня ділянка розташована за сферою (для ПСфi це ділянка i…i+1), а сусідні ділянки – всередині сфери. З цього випливає, що ділянка кривої i…i+ 1 розташована всередині ПСфi-1 і ПСфi+1, але за межами ПСфi.

Таким чином, ТПСфi – область простору, в межах якої розташована ділянка i…i+1 монотонної кривої лінії. Послідовність сфер, визначених точковим рядом, обмежує ланцюжок сферичних тригранників, кожен з яких обмежує область розташування відповідної ділянки монотонної ДПК. При цьому кожні три послідовні сфери визначають одну з ланок цього ланцюжка, а на поверхні кожної сфери розташовано три грані, що належать послідовним

тригранникам. Твердження 2.7 доведено.

2.3.2.2 Тригранник дотичних сфер

Область розташування ДПК на ділянці i…i+1 можуть обмежувати дотичні сфери, що проходять через дотичні кола ДКi(i, ti; i+1) і ДКi+1(i; i+1, ti+1). Таких сфер п'ять і їх можна задати дотичними і прилеглими колами: ДСф(ДКi , ПКi), ДСф(ДКi , ПКi+1), ДСф(ДКi+1 , ПКi), ДСф(ДКi+1 , ПКi), ДСф(ДКi , ДКi+1).

Сфери, що проходять через ПКi, утворюють пучок, і їх можна задати колом ПКi і точкою М, що належить кривій l1 – Сф(ПКi, М). Сфери ПСфi-1 , ДСф(ДКi , ПКi), ДСф(ДКi+1, ПКi), ПСфi належать цьому пучку. Розглянемо взаємне розташування сфер пучка Сф(ПКi, М) (рис. 2.23).

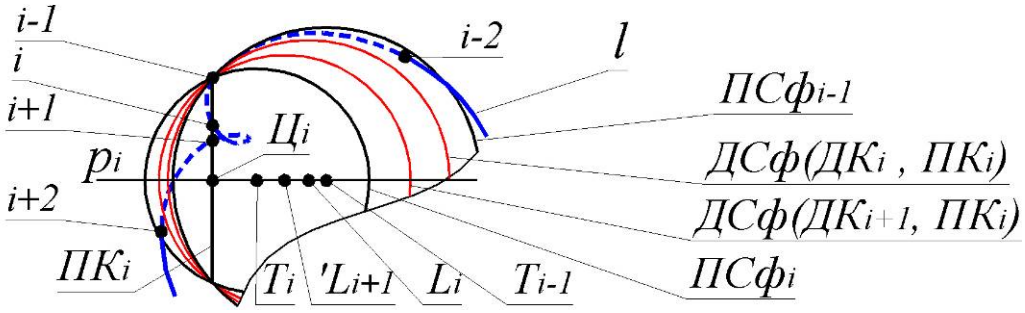


Рис. 2.23. Пучок сфер, які проходять через ПКi

Коли точка М збігається з точкою i+2 (М≡i+2) Сф(ПКi, М) визначає ДСфi. Перемістимо точку М в напряму збільшення радіусів кривини кривої l1. При цьому центр сфери Сф(ПКi, М) переміщується по i-ої вісі прилеглого кола – pi від центру ПКi до центру ПКi-1 (точки Ti і Ti-1 відповідно).

Коли точка М співпаде з точкою i+1, Сф(ПКi, М) визначить ДСфi+1(ПКi, ДКi+1) з центром в точці ´Li+1. При подальшому переміщенні точки М настає момент, коли Сф(ПКi, М) визначить ДСфi(ДКi, ПКi) з центром в точці Li (М≡i), а потім ПКi-1 (М≡i-2).

Послідовність розташування сфер в пучку Сф(ПКi, М) і їх центрів Ti – ´Li+1 – Li – Ti-1 на осі pi відповідає послідовності розташування точок i+2 – i+1 – i – i-2 на кривій. У центрах дотичних сфер перетинаються осі дотичних кіл (mi) з віссю прилеглого кола: Li≡mi× pi; ´Li+1≡mi+1× pi.

Прилегле коло ПКi+1 і точка М, що займає на кривій різні положення, задають пучок сфер Сф(ПКi+1, М). Цьому пучку належать: ПСфi, ДСф(ДКi , ПКi+1), ДСф(ДКi+1, ПКi+1), ПСфi+1. Послідовність сфер в пучку визначена розташуванням на кривій точок i-1, i, i+1, i+3, які належать зазначеним сферам. Центри цих сфер Ti, Li´, Li+1, Ti+1 розташовані на осі ПК pi+1. При цьому Li´ ≡pi+1× mi; Li+1≡pi+1× mi+1.

Дотична сфера ДСф(ДКi , ДКi+1) не належить до розглянутих пучків. Її центр отримуємо в перетині осей дотичних кіл: ≡ mi× mi+1.

У таблиці 2.8 представлені значення радіусів прилеглих та дотичних сфер, які визначаються точковим рядом, що розташовано на конічній гвинтовій лінії, яка задана рівняннями (2.3). Для визначення дотичних сфер використані дотичні прямі до гвинтової лінії.

Таблиця 2.8

Радіуси прилеглих та дотичних сфер

	hi, мм	RПСфi, мм	Радіуси дотичних сфер, мм			
			´RДСфi	RДСфi	RДСфi´	RДСфii+1
1	64,4677	122,6387	133,7683	126,3855	113,2690	120,8462
2	87,8147	113,4499	125,3154	117,8409	104,1052	111,4804
3	55,0454	104,4359	115,2236	108,7932	95,0603	101,4236
4	74,0209	95,28252	107,0681	99,6194	85,9422	93,30220
5	45,7001	86,35848	97,0226	90,6217	76,9924	83,3220
6	60,3773	77,28244	88,9177	81,5214	67,9761	75,2889
7	36,4913	68,54189	78,9631	72,6263	59,2372	65,4745
8	47,014	59,65798	70,9636	63,6881	52,3364	57,6496

В таблиці радіуси RДСф(i-2, i-1; i, ti) позначені як ´RДСфi, RДСф(ДКi, ПКi) позначені як RДСфi, RДСф(i, ti; i+1, i+2) позначені RДСфi´, а RДСф(ДКi , ДКi+1) – RДСфii+1. Дані таблиці підтверджують порядок розташування сфер в пучку, зображеному на рис. 2.23.

Сфери ДСф(ДКi, ПКi), ДСф(ДКi+1, ПКi+1) і ДСф(ДКi , ДКi+1) обмежують тригранник дотичних сфер ТКСфi. Ребра ТДСфi – ДКi, ДКi+1 і коло, по якому перетинаються ДСф(ДКi, ПКi) та ДСф(ДКi+1, ПКi+1), а вершини тригранника – точки i та i+1. На рис. 2.24 показані перетини сферичних тригранників ТПСфi і ТДСфi площиною Pi – криволінійні трикутники 1,2,3 та 1′,2′,3′ відповідно. В площині Pi розташовуються осі ПК pi і pi+1, осі ДК mi і mi+1, центри кіл та сфер, що належать цим осям, а також середина хорди [i, i+1] – точка Ki. Кола ПКi, ПКi+1 (на рисунку не позначені), ДКi, ДКi+1 проекціюються на Pi у відрізки. Показане на рис. 2.24

розташування центрів дотичних сфер Li+1, Li, відносно центрів прилеглих сфер Ti-1, Ti, Ti+1 задає розташування ТДСфi всередині ПТСфi.

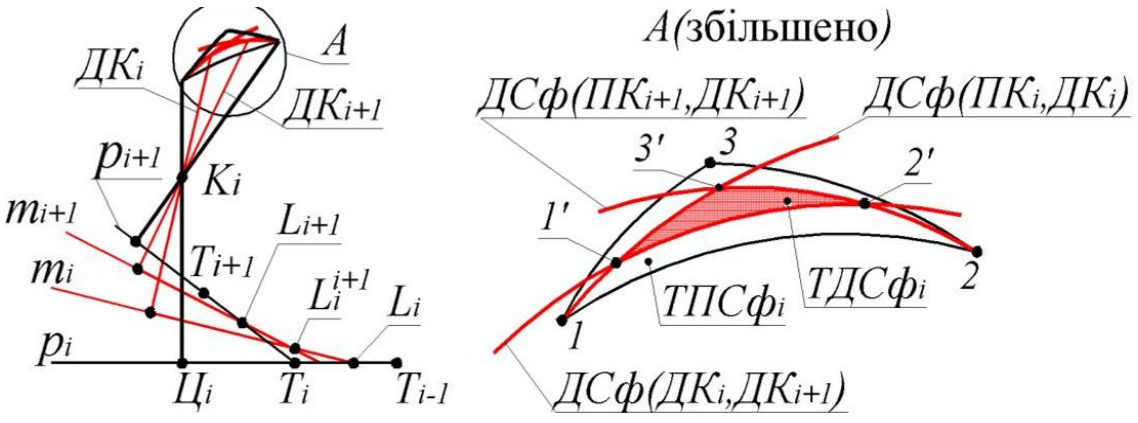


Рис. 2.24. Взаємне розташування прилеглих та дотичних тригранників

Тепер визначимо розташування кривої l1 щодо ТДСфi і доведемо твердження:

Твердження 2.8 Послідовність тригранників дотичних сфер є областю розташування монотонної ДПК, в точках якої визначено положення дотичних прямих.

Раніше (п. 2.3.4) було доведено, що ділянку i…i+1 кривої l1 розташовано всередині ДСф(ДКi, ПКi) і ДСф(ДКi+1, ПКi+1), яким належать дві грані ТДСфi. Визначимо розташування кривої l1 щодо ДСф(ДКi, ДКi+1), що утворює третю грань ТДСфi.

Для цього розглянемо ДСф(ДКi, ДКi+1) як окремий випадок ПСфi(i-1, i, i+1, i+2), коли відстань між точками i-1 та i, а також i+1 та i+2 нескінченно мало. Тоді ділянки i-1…i та i+1…i+2 кривої l1, що розташовані всередині ПСфi (рис. 2.14), вироджуються в точки, а крива розташовується за межами ДСф(ДКi, ДКi+1) і торкається цієї сфери в точках i та i+1. Таким чином, на ділянці i…i+1 крива розташована всередині ДСф(ДКi, ПКi), ДСф(ДКi+1, ПКi+1) і зовні ДСф(ДКi, ПКi+1). З огляду на те, що крива проходить всередині двогранного кута ψi, обмеженого дотичними площинами ДП(ti, i+1) та ДП(i, ti+1), робимо остаточний висновок: на ділянці i…i+1 крива проходить всередині ДТСфi. Розташування інших ділянок кривої l1 щодо відповідних ДТСф аналогічно.

Точковий ряд, розташований на інших монотонних кривих, уздовж яких радіуси стичних кіл і сфер зростають в одному напрямі (l3, l5, l7), визначає сферичні тригранники, у яких взаємне розташування елементів аналогічно розглянутому для кривої l1: ТПСфi розташовуються за межами ПСфi, а ТКСфi за межами ДСф(ДКi, ДКi+1) [85, 86].

Для монотонної ДПК, вздовж якої радіуси дотичних кіл і сфер зростають в протилежних напрямах (l2, l4, l6, l8), ТПСф та ТДСф також являються областю її можливого розташування. Перетин площиною Pi сферичних тригранників, що обмежують область можливого розташування ділянки ДПК з характеристиками l2, показано на рис. 2.25.

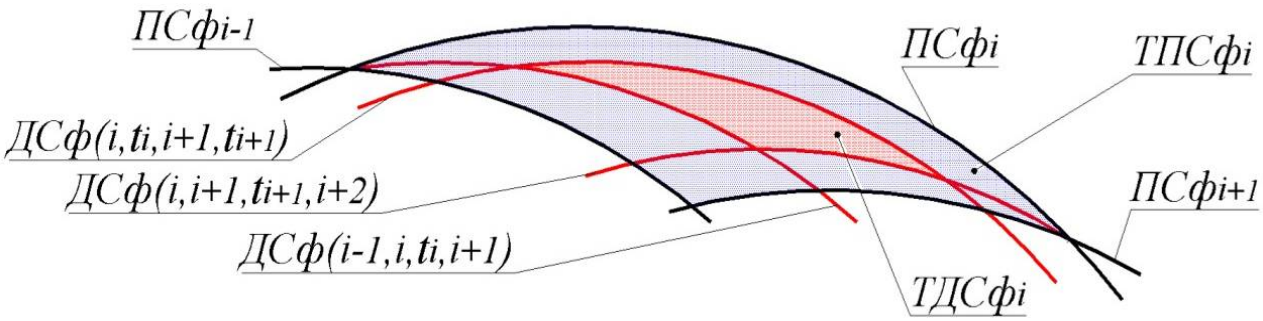


Рис. 2.25. Перетин сферичних тригранників площиною Pi

В цьому випадку ТПСфi розташовується всередині ПСфi, а ТДСфi всередині ДСф(ДКi, ДКi+1). У монотонних ДПК з характеристиками l4, l6, l8

конфігурація сферичних тригранників аналогічна – вони розташовуються в межах відповідних прилеглих або дотичних сфер.

2.4 Визначення геометричних характеристик ДПК

2.4.1 Вихідні характеристики заданого точкового ряду

Вихідний точковий ряд заданий координатами точок в прямокутній системі декартових координат: i(xi;yi;zi). Безпосередньо за координатами вихідних точок визначається:

- довжина хорд СЛЛ, як відстань між сусідніми точками hi=|i, i+1|;
- координати середини хорд СЛЛ (точки Ki);
- рівняння прилеглих площин, як таких, що проходять через три задані точки ППi(i-1, i, i+1) [72];
- рівняння площин Pi, що проходять через точки Ki перпендикулярно хордам СЛЛ.

Положення центрів прилеглих кіл визначаються як точки перетину площин Ці≡Pi-1× Pi× ППi. Радіуси прилеглих кіл визначаються як відстані R ПКi=|Ці,i|.

Центри прилеглих сфер визначаються як точки перетину площин Ti≡Pi -1× Pi× Pi+1, а їх радіуси як відстані R ПСфi=|Ti, i|.

Характеристики точкового ряду є вихідними даними для визначення характеристик прилеглих тетраедрів і тригранників прилеглих сфер, на підставі яких призначаються геометричні властивості ДПК, що формуєтья.

2.4.2 Локальні системи координат

Характеристики прилеглих тетраедрів і сферичних тригранників будемо аналізувати через характеристики їх перетинів площинами Pi. Необхідні розрахунки будемо робити з використанням локальних систем декартових і барицентричних координат.

Локальну систему барицентричних координат (БКi) визначимо щодо вершин трикутника Ki, A, B, де Ki – середина відрізка [i,i+1]; A≡Pi× ППi-1× ППi; B≡Pi× ППi+1× ППi+2 (рис. 2.26).

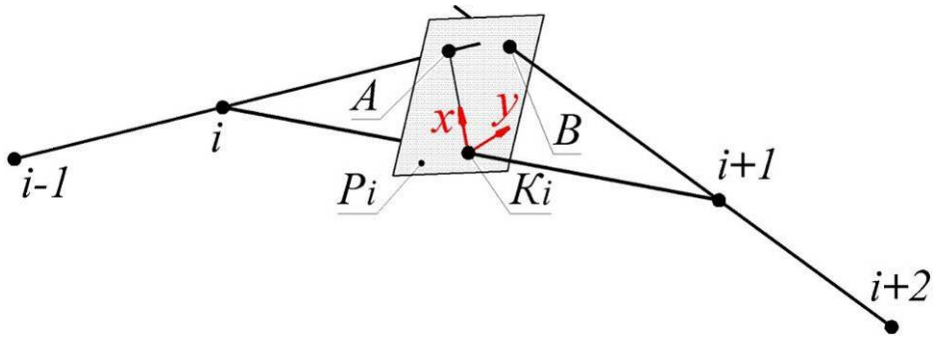


Рис. 2.26. Локальна система координат

Точка М, що розташована в площині Pi, в системі БКi визначається координатами М(МК, МА, МВ) [88]:

; ; ,

де V= ; VK= ; VA= ; VB= – величина змішаних векторних добутків.

Локальну систему декартових координат в площині Pi визначимо наступним чином:

- початок координат – точка Ki;

- напрям осі абсцис (Ki x) збігається з вектором .

В системі x Ki y декартові координати точки М(х, у) визначаються по її барицентричним координатам:

; ,

де декартові координати точок A(xA, 0) і В(xВ, уВ) визначаються виходячи з довжин сторін трикутника Ki, А, В.

Локальні системи координат також будуть використані для визначення положення точок згущення. Після чого зворотний перехід до вихідної тривимірної системи декартових координат Oxyz здійснюється за формулами:

де (x, y, z), (xK, yK, zK), (xA, yA, zA), (xB, yB, zB) – координати точок M, Ki, A, B в системі Oxyz відповідно.

2.4.3 Хід і напрями зростання скруту вздовж ДПК

На i-й ділянці хід ДПК визначається виходячи з положення ППi і ППi+1 (п. 2.3.2), яке будемо оцінювати розташуванням в площині Pi точок Ki, А, В (рис. 2.26).

Якщо величина векторного добутку додатна, то поворот ППi відносно прямої (i, i+1) на кут φi до суміщення з ППi+1 здійснюється проти годинникової стрілки і на ділянці (i, i+1) ДПК лівого

ходу.

Ділянки, обмежені послідовними вихідними точками, на яких величини S_i мають однаковий знак, становлять частину ДПК постійного ходу. Зміна знака S_i, наприклад: ...; $S_{i-1}<0$; $S_i<0$; $S_{i+1}>0$; $S_{i+2}>0$; …, означає, що ділянка $(i…i+2)$ містить точку зміни ходу ДПК. Якщо виконується $\varphi_i / h_i < \varphi_{i+1} / h_{i+1}$, то будемо вважати, що точка зміни ходу належить ділянці $(i, i+1)$.

Скрут на ділянках ДПК оцінюється величиною дискретного скруту:

.

Двогранний кут φ_i між $ПП_i$ і $ПП_{i+1}$ дорівнює величині кута A, K, B, що

належить площині P_i і його величина визначається як .

Будемо вважати, що точковий ряд, уздовж якого значення послідовно зростають, представляє криву лінію з монотонним зростанням

скруту. У разі зміни напряму зростання уздовж точкового ряду вважаємо , що точка зміни зростання скруту належить граничній ділянці з меншим

значенням | |.

2.4.4 Ділянка перегину просторової ДПК

Точкою перегину будемо вважати точку, яка розділяє просторову криву лінію на частини, розташовані по різні боки спрямної площини в цій точці [138]. На ділянці ДПК $(i, i+1)$, що містить точку перегину, величина кута φ_i між $ПП_i$ і $ПП_{i+1}$, що дорівнює величині кута A, K, B (рис. 2.27), близька до $180°$.

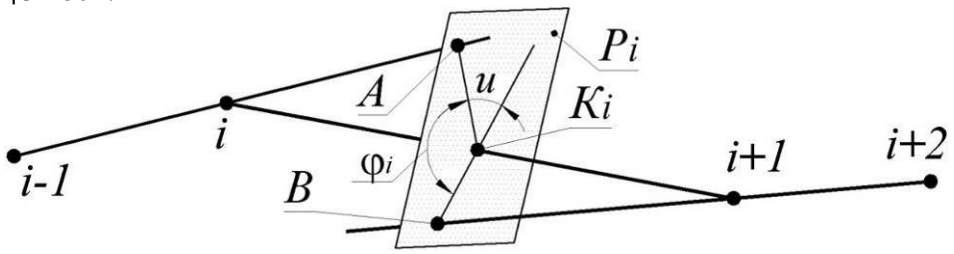


Рис. 2.27. Ділянка ДПК, що містить точку перегину

При визначенні особливої ділянки не можна орієнтуватися тільки на величину кута φ_i. При збільшенні відстаней між вихідними точками величина φ_i зростає і може наближатися до $180°$ і для точкового ряду, розташованого на кривій, яка не містить точку перегину. Приймаючи рішення, слід врахувати динаміку зміни значень дискретного скруту вздовж ДПК.

Іншою ознакою особливої ділянки є повторна зміна знака величини

векторного добутку . Наприклад,

…; Si-1 > 0; Si < 0; Si+1 > 0; Si+2 > 0; …

В такому випадку ділянка (i, i+2) може формуватися як така, що містить точку перегину або як така, що містить дві точки зміни ходу. У першому випадку будемо вважати, що точка перегину належить ділянці (

i, i+1), якщо .

Ще одним критерієм при визначенні ділянки перегину є графік зміни радіусів прилеглих кіл і сфер уздовж ДПК. Якщо точка перегину є точкою випрямлення, то на особливій ділянці стикуються ділянки збільшення і зменшення уздовж ДПК R ПК і R ПСф. Рішення про формування i-ої ділянки , що містить точку перегину, приймається на підставі перерахованої сукупності характеристик вихідного точкового ряду.

Альтернативою формування ділянки перегину є:

- формування ділянки з повторною зміною ходу кривої;
- формування ділянки, що не містить особливих точок, але з різким зростанням значень скруту.

2.4.5 Визначення монотонних ділянок ДПК

Переріз ТПСфi площиною Pi – криволінійний трикутник 1,2,3 (рис. 2. 28). Сторони трикутника – дуги кіл Колоi-1, Колоi, Колоi+1, що належать ПСфi-1, ПСфi, ПСфi+1 відповідно. Центри ПСф належать Pi і є центрами кіл, що визначають сторони криволінійного трикутника. Тип монотонної кривої на ділянці ДПК можна визначити по розташуванню вершини 3 криволінійного трикутника щодо Колаi.

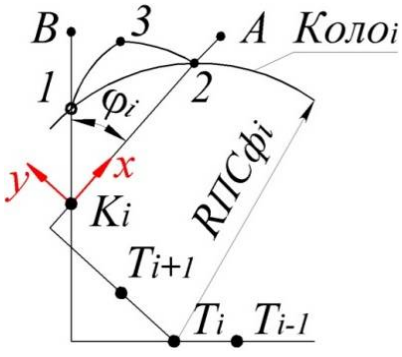


Рис. 2.28. Перетин тригранника прилеглих сфер

Координати вершин 1,2,3 визначимо в системі декартових координат Ki xy, як точки перетину відповідних кіл. Якщо точка 3 розташовується за межами Колаi: |Ti,3| > R ПСфi, то характеристики монотонної ділянки ДПК відповідають l1,3 при правом ході кривої або l5,7 при лівому ході. Якщо |Ti,3| .3 $R\ ПСф_i$, тип кривої правого ходу буде $l_{2,4}$, а лівого – $l_{6,8}$.

Остаточно тип кривої (наприклад, l_1 або l_3) уточнюється по співвідношенню значень радіусів ПК і ПСф в послідовних точках ДПК.

2.4.6 Загальний алгоритм аналізу характеристик ДПК

1. Визначаються характеристики вихідного точкового ряду: довжини хорд СЛЛ, рівняння прилеглих ($ПП_i$) і перпендикулярних (P_i) площин.

2. На кожній дільниці ДПК призначаються локальні системи декартових і барицентричних координат, які розташовані в перпендикулярних площинах P_i. Визначаються формули переходу між вихідною і локальними системами координат. Розрахунки, необхідні для визначення значень характеристик вихідної ДПК, а також її подальшого згущення здійснюються з використанням як вихідної, так і локальних систем координат.

3. Визначаються дискретні характеристики вихідної ДПК: величини двогранних кутів між прилеглими площинами, значення дискретного скруту, радіусів прилеглих кіл і сфер, параметри прилеглих тетраедрів і тригранників прилеглих сфер.

4. Визначаються геометричні властивості ДПК: межи і тип її монотонних частин, ділянки збільшення і зменшення уздовж ДПК значень скруту, ділянки, що містять особливі точки, і класифікація цих точок.

5. Визначаються області можливого розташування дотичних прямих і стичних площин у вихідних точках ДПК і призначаються їх конкретні положення.

6. Визначається розташування дотичних з ДПК площин, розташування і радіуси дотичних кіл і сфер, параметри дотичних тетраедрів і тригранників дотичних сфер.

В результаті аналізу характеристик вихідної ДПК отримуємо всю необхідну інформацію для згущення ділянок, що становлять монотонні частини ДПК, а також згущення особливих ділянок, що містять точки стикування монотонних частин.

Висновки по другому розділу

В результаті досліджень, проведених в розділі, розроблено метод аналізу ДПК, яка задана впорядкованою множиною точок, що їй належать. Завданням аналізу є визначення геометричних властивостей кривої: напряму її ходу, динаміки зміни значень радіусів стичних кіл і сфер, області можливого розташування кривої.

При розробці методу аналізу ДПК отримані нові теоретичні та практичні результати.

1. Запропоновано класифікацію монотонних кривих ліній – кривих постійного ходу, вздовж яких значення радіусів стичних кіл і сфер монотонно зростають або зменшуються. Можливі вісім варіантів поєднання характеристик кривої, що визначають її монотонність. Класифікація дозволяє розглядати будь-яку криву лінію, як таку, що складається з монотонних частин зістикованих в особливих точках.

2. Досліджено характеристики полярних торсів та їх ребер звороту, що відповідають кожному типу монотонної кривої, а також умови стикування полярних торсів, які забезпечують регулярність характеристик кривої в особливих точках. В результаті визначено та класифіковано можливі варіанти формування ребер звороту полярних торсів частинами постійного ходу. Ребра звороту формуються виходячи з властивостей кривих ліній, які задають полярні торси. Це можуть бути криві, що складаються з будь-якого поєднання монотонних частин і містять будь-який набір особливих точок – точок перегину, зміни ходу, зміни напряму зростання вздовж кривої радіусів стичних кіл і сфер. Встановлені взаємозв'язки відкривають можливість моделювання ДПК виходячи з характеристик її полярного торса без використання функцій, які задають ділянки кривої.

3. Запропоновано систему дискретних характеристик ДПК. Дискретні характеристики визначаються виходячи з положення послідовних точок, які задають ДПК, і є аналогами геометричних характеристик кривої лінії: стичних кіл, стичних сфер, скруту, елементів основних тригранників і полярного торса.

Досліджено залежність між значеннями дискретних характеристик, які визначаються вузлами ДПК, і типом її монотонних ділянок. Встановлено, що закономірність зміни значень дискретних характеристик уздовж точкового ряду визначається закономірністю зміни відповідних геометричних характеристик уздовж кривої лінії, якій цей точковий ряд належить. Зазначені закономірності дають можливість оцінювати геометричні характеристики ДПК за допомогою їх дискретних аналогів.

4. Аналіз розташування монотонної кривої щодо геометричних образів, заданих точками, що їй належать, дозволив визначити область можливого розташування ДПК. Межі області належать прилеглим площинам, які проходять через три послідовні точки ДПК або прилеглим сферам, які проходять через чотири послідовні точки.

Доведено, що ділянки кривої постійного ходу розташовані в межах прилеглих тетраедрів, обмежених чотирма послідовними прилеглими площинами. Монотонна ДПК розташовується в межах ланцюга сферичних тригранників, кожен з яких обмежений ділянками трьох послідовних прилеглих сфер. Область можливого розташування є необхідною характеристикою монотонної ДПК. Розташування її меж дозволяє визначити тип монотонної кривої, якою можливо інтерполювати точковий ряд.

5. Використання в якості дискретних характеристик геометричних образів дотичних до ДПК підвищує точність оцінки її геометричних властивостей. Це площині, кола та сфери, що проходять через точки, які належать кривій і мають з нею спільну дотичну пряму в одній з цих точок.

Доведено, що обмежені дотичними площинами тетраедри і обмежені дотичними сферами тригранники розташовуються всередині відповідних прилеглих тетраедрів і сферичних тригранників і є уточненою областю можливого розташування монотонної ДПК.

Розташування дотичних тетраедрів і сферичних тригранників є критерієм коректного призначення прямих, дотичних до монотонної ДПК в точках, що її задають.

6. Найбільш повну комплексну оцінку властивостей ДПК дозволяє отримати аналіз гранної полярної поверхні, яка є аналогом полярного торса кривої лінії. Її грані належать площинам, які задані проходженням через центри послідовних прилеглих сфер. Розташування граней визначає всі дискретні характеристики і динаміку зміни їх значень уздовж точкового ряду , тип і область можливого розташування монотонних частин ДПК.

Гранна полярна поверхня може бути використана в якості вихідних даних для формування полярного торса кривої лінії, яка інтерполює заданий точковий ряд.

7. Запропоновано схему розрахунку параметрів вихідного точкового ряду, значень дискретних характеристик, меж області можливого розташування ДПК і характеристик її гранної полярної поверхні. Аналіз форми і розташування просторових геометричних образів здійснюється через розрахунок характеристик їх плоских перетинів в локальних системах координат. Перехід від вихідної тривимірної системи декартових координат до систем барицентричних і декартових координат на площині дозволяє спростити геометричну схему і скоротити обсяг необхідних обчислень.

Основні результати досліджень, проведених у другому розділі, опубліковані в роботах – [73, 77, 79-86, 88-90].

Використані в розділі результати досліджень інших авторів опубліковані в роботах – [71, 138, 244, 313, 315].

РОЗДІЛ 3
ФОРМУВАННЯ МОНОТОННОЇ ДПК НУЛЬОВОГО ПОРЯДКУ ФІКСАЦІЇ

ДПК задана впорядкованою множиною точок, що їй належать. Вихідний точковий ряд розбивається на частини, які можливо інтерполювати монотонними кривими лініями – кривими постійного ходу з монотонною зміною радіусів кривини і стичних сфер. ДПК конструюється по частинах, які задані вихідними точками, що належать монотонним кривим лініям. Монотонні частини ДПК стикуються на ділянках, які містять особливі точки.

Основу методу, який розробляється, складуть алгоритми згущення монотонних ДПК, алгоритми формування ділянок, що містять особливі точки , способи оцінки точності, з якою точковий ряд, що формується, представляє ДПК.

Завданням розділу є розробка способів формування точкового ряду, що складається з вихідних точок і як завгодно великої кількості точок згущення, які можливо інтерполювати монотонною кривою лінією.

3.1 Загальна схема згущення монотонної ДПК

В результаті аналізу вихідного точкового ряду для кожної монотонної частини ДПК визначаються [79]:

- дискретні характеристики – дискретний скрут, радіуси прилеглих кіл, радіуси прилеглих сфер;

- область можливого розташування – прилеглі тетраедри ($ПТ_i$) і тригранники прилеглих сфер ($ТПСф_i$);

- дискретний аналог полярного торса просторової кривої лінії – гранна полярна поверхня (ГПП).

Згущення проводиться на ділянках з областю розташування ДПК максимального розміру. Точка згущення ($i_{зг}$) призначається в площині P_i, що перпендикулярна хорді СЛЛ [$i,\ i+1$] і проходить через середину хорди. Область розташування точки згущення – фігура, що отримується в перетині $ПТ_i$ або $ТПСф_i$ площиною P_i. В результаті призначення кожної точки згущення отримуємо дві нові ділянки – ($i,\ i_{зг}$) і ($i_{зг},\ i+1$), для яких визначаються області розташування ДПК. Область розташування ДПК на ділянках, отриманих в результаті згущення, знаходиться всередині відповідної області вихідної ділянки. Наявність області можливого розташування, що постійно локалізується в результаті послідовних згущень, – необхідна умова формування монотонної ДПК.

Залежно від умов завдання згущення ДПК може здійснюватися на основі прилеглих тетраедрів, тригранників прилеглих сфер, гранної полярної поверхні. Розміри геометричних образів, що обмежують область можливого розташування ДПК, є критерієм кількості згущень, необхідних для її формування.

3.2 Згущення ДПК на основі прилеглих тетраедрів (ПТ)

В результаті аналізу вихідної послідовності ПТ точковий ряд розбивається на частини, які можливо інтерполювати кривою постійного ходу, а потім на частини з монотонною зміною значень скруту. ДПК формується за цими частинами, які зістиковані в точках перегину, зміни ходу , точках зміни напряму зростання скруту.

Забезпечення заданої закономірності зміни скруту є основною умовою формування ДПК на основі ПТ. Контроль формування інших характеристик кривої будемо розглядати як додаткові умови.

3.2.1 Вихідна область розташування точки згущення

Положення точки згущення призначається виходячи з умови закономірної зміни уздовж точкового ряду значень дискретних характеристик. Першою з таких умов є збереження знака дискретного скруту

( ) на ділянках ДПК, що формується в процесі послідовних згущень. Виконання умови забезпечує формування кривої постійного ходу.

Відповідну область розташування $i_{зг}$ позначимо δ_i. На ділянці $(i, i+1)$ вихідна область δ_i – багатокутник, сторони якого отримуємо в перетині граней $ПТ_i$ площиною P_i (рис. 3.1).

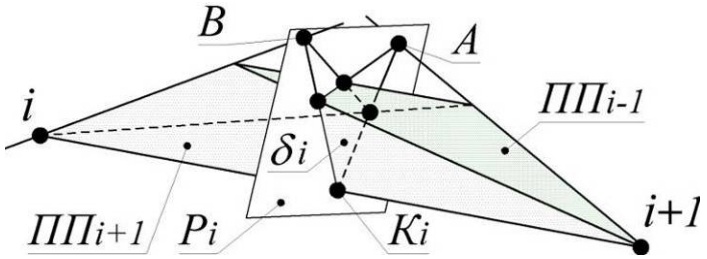
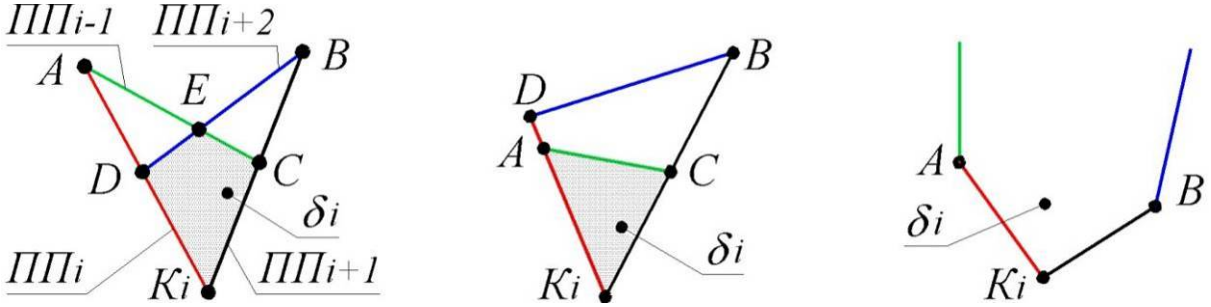


Рис. 3.1. Вихідна область розташування точки згущення

Залежно від значень кутів φ_{i-1}, φ_i, φ_{i+1} між послідовними прилеглими площинами, δ_i може бути чотирикутником (рис. 3.2 а) або трикутником (рис. 3.2 б) [82].



а) б) в)

Рис. 3.2. Конфігурація областей розташування точки згущення

При збільшенні відстаней між вихідними точками, коли значення кутів φi перевищують 90°, послідовні ПП можуть визначати область розташування ділянки ДПК постійного ходу у вигляді незамкненої гранної поверхні. В цьому випадку отримаємо вихідну область δi, обмежену розімкнутою ламаною лінією (рис. 3.2 в).

Прямі лінії, що обмежують область δi, отримуємо в перетині площин: (Ki , A)≡ Pi× ППi(i-1, i, i+1); (Ki , B)≡ Pi× ППi+1; (Ki , C)≡ Pi× ППi-1; (Ki , D)≡ Pi× ППi+2.

Незалежно від контурів вихідної області δi ділянки ДПК згущуються за єдиною схемою. В результаті послідовних згущень ділянок ДПК з максимальною областю δi значення кутів φi вирівнюються уздовж точкового ряду, і контури всіх областей стають чотирикутними. Чотирикутний контур δi будемо вважати основним і схему згущення ділянок ДПК будемо розглядати на прикладі таких контурів.

3.2.2 Призначення точки згущення ДПК постійного ходу

Нехай вихідний точковий ряд визначає ДПК правого ходу (на всіх ділянках дискретний скрут), а область δi максимальна на ділянці (i, i+1). Величину δi можна оцінювати величиною відношення , де |C, D| – довжина діагоналі чотирикутника, що обмежує δi (рис. 3.2 а), hi|i, i+1| – довжина хорди СЛЛ.

Сформулюємо і доведемо твердження.

Твердження 3.1 Призначення точок згущення в межах перетину прилеглого тетраедра площиною Pi – необхідна і достатня умова формування ДПК постійного ходу.

Призначивши iзг, отримаємо новий точковий ряд …, i-1, i, iзг, i+1, i+2, … і нові прилеглі площини: ПП(i-1, i, iзг), ПП(i, iзг, i+1), ПП(iзг, i+1, i+2). Хід на ділянках ДПК визначається розташуванням послідовних ПП, про який можна судити по положенню прямих перетину ПП площиною Pi (рис. 3.3).

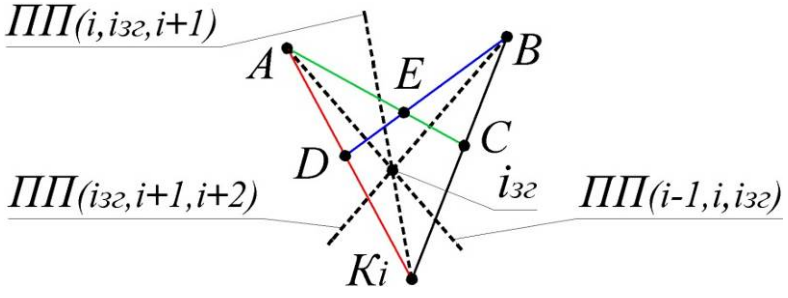


Рис. 3.3. Призначення точки згущення ДПК правого ходу

Для вихідної ДПК правого ходу значення векторних добутків

, , будуть додатні. Призначивши iзг, отримаємо нову послідовність ПП, розташування яких можна оцінити знаком

векторних добутків: , , , .
Очевидно, що призначення iзг в межах δi забезпечує розташування ПП, при якому знак дискретного скруту на ділянках отриманої ДПК постійний.

Якщо iзг призначити на межі δi, то отримаємо чотири послідовні точки ДПК, які розташовані в одній площині. В цьому випадку відповідна ділянка

ДПК буде формуватися плоскою. Наприклад, якщо , плоскою

буде ділянка ДПК (i, iсг), а якщо – ділянка (iзг, i+1). При

призначенні iзг за межами δi отримаємо ДПК, на ділянках якої змінює

свій знак. Здійснюючи наступні згущення, домогтися сталості знака уздовж ДПК буде неможливо.

Встановлений взаємозв'язок між положенням точки згущення і знаком дискретного скруту на ділянках отриманої ДПК доводить твердження 3.1.

Конкретне положення iсг в межах δi може призначатися виходячи із заданої закономірності зміни значень скруту вздовж ДПК.

3.2.3 Призначення точки згущення ДПК з монотонною зміною скруту

Нехай вихідний точковий ряд визначає ДПК постійного ходу, вздовж якої абсолютні величини дискретного скруту ділянок монотонно зростають.

Зажадаємо збереження вихідної закономірності зміни для ДПК, що одержується в результаті згущення. Умова призначення iзг для ДПК правого ходу [107]:

,

де , – вихідні значення дискретного скруту на ділянках

(i-2, i-1) та (i+2, i+3); , , , – значення дискретного скруту на ділянках (i-1, i), (i, iсг), (iсг, i+1), (i+1, i+2), що отримані в результаті призначення iзг.

, (3.1)

де – величина двогранного кута розташування ДПК, обмеженого ППi-1 і , .

, (3.2)

де – величина кута між і .

, (3.3)

де – величина кута між ППсг і .

, (3.4)

де – величина кута між і ППi+2.

Схема визначення положення iзг, виходячи з умови монотонного зростання значень дискретного скруту вздовж точкового ряду, представлена на рис. 3.4

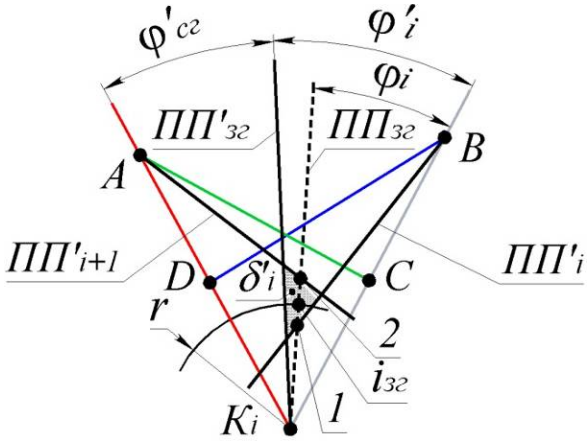


Рис. 3.4. Область розташування точки згущення ДПК з монотонним зростанням значень скруту

1. Визначається попереднє перевищення r=|Ki, iзг| точки згущення iзг над хордою [i, i+1]. У першому наближенні r беремо як середнє арифметичне відстаней від точки Ki до точок перетину прилеглих кіл ПКi і ПКi+1 площиною Pi. Величина r задає попередню довжину хорд СЛЛ

, яку позначимо .

Призначається крайнє положення площини ППзг, при якому

. На рисунку пряма перетину площини Pi і площини ППзг в крайньому положенні позначена як ПП′зг. Кути φ′i і φ′зг між ПП′зг і вихідними ППi та ППi+1 розраховуються з рівнянь:

2. Визначається значення кута (φ′i-1), що визначає крайнє положення площини , при якому :

.

На рисунку пряма перетину площини Pi і площини в крайньому положенні позначена як ПП′i.

3. Визначається значення кута (φ′i+1), що визначає крайнє положення , при якому :

.

На рисунку пряма перетину площини Pi і площини в крайньому положенні позначена як ПП′i+1.

4. Визначається область розташування точки iзг. Це многокутник, який обмежений прямими ПП′зг , ПП′i, ПП′i+1, (B; D), (A; K). На рис. 3.4 область розташування iзг – це трикутник, якій обмежений прямими ПП′зг , ПП′i, ПП′i+1, та позначен δ′i. Призначення iзг в межах δ′i забезпечує виконання умов: , , .

5. Призначається остаточне положення точки згущення, при якому додатково виконуються умови: та . Це положення iзг визначається на прямій ППзг в межах відрізка [1; 2], який обмежений прямими ПП′i і ПП′i+1 ітераційним способом. При цьому положення iзг коригується двома параметрами: відстанню r=|Ki, iзг| і кутом φзг. При збільшенні r збільшуються і , а і зменшуються. При збільшенні φзг збільшуються

і , а зменшуються і .

Оптимальним будемо вважати таке розташування iзг, при якому

різниця між величинами не перевищує задане значення.

Спосіб формування ДПК постійного ходу передбачає призначення точок згущення в межах багатокутників, обмежених прямими перетину вихідних ПП площинами Pi.

Згущення точкового ряду, уздовж якого значення дискретного скруту змінюються монотонно, вимагає уточнення вихідної області можливого розташування точки згущення. Ця уточнена область обмежена площинами, які з вихідними ПП утворюють кути, що забезпечують рівність значень дискретного скруту на сусідніх ділянках ДПК. Збереження в процесі послідовних згущень заданої динаміки зміни уздовж точкового ряду значень дискретного скруту в межі забезпечує формування ДПК з монотонною зміною скруту. У таблиці 3.1 представлені значення дискретного скруту ДПК , яка отримана в результаті призначення точки згущення на одній ділянці. Характеристики вихідної ДПК представлені в таблиці 2.4. Точка згущення (4зг) призначена на вихідній ділянці (4;5).

Таблиця 3.1

Значення дискретного скруту

, рад/мм	, рад/мм	, рад/мм	, рад/мм	, рад/мм	, рад/мм
1,9534	2,5167	2,8665	3,3312	3,7831	4,2740

Величини відносин значень дискретного скруту на ділянках згущення ДПК представлені в таблиці 3.2.

Таблиця 3.2

Величина відносин значень дискретного скруту

1,1962	1,1390	1,1621	1,1357	1,1298

Призначення точок згущення в межах областей, обмежених ПП, не дозволяє контролювати формування графіка зміни уздовж ДПК значень радіусів стичних кіл і сфер. Для вирішення цієї задачі необхідна подальша локалізація області можливого розташування точки згущення виходячи з розмірів і розташування прилеглих сфер.

3.3 Згущення ДПК на основі тригранників прилеглих сфер (ТПСф)

Тип монотонної ДПК можна контролювати через характеристики ТПСф, які відповідають її ділянкам. Призначивши iзг на ділянці (i, i+1) отримуємо послідовність точок, що визначають чотири нові прилеглі сфери:

, , ,

і шість нових ТПСф:

- – сферичний тригранник, що відповідає ділянці (i-2, i-1), грані якого належать ПСфi-3, ПСфi-2, ;

- – сферичний тригранник, що відповідає ділянці (i-1, i), обмежений ПСфi-2, , ;

- – сферичний тригранник, що відповідає ділянці (i, iзг), обмежений , , ПСфзг;

- ТПСфзг – сферичний тригранник, що відповідає ділянці (iзг, i+1), обмежений , ПСфзг, ;

- – сферичний тригранник, що відповідає ділянці (i+1, i+2), обмежений ПСфсг, , ПСфi+2;

- – сферичний тригранник, що відповідає ділянці (i+2, i+3), обмежений , ПСфi+2, ПСфi+3.

Основна вимога до розташування iзг – сферичні тригранники, що отримані в результаті призначення точки згущення, повинні визначати той же тип монотонної ДПК, що і вихідні ТПСф. Збереження в процесі послідовних згущень характеристик ТПСф – умова формування монотонної ДПК [89].

Закономірності формування сферичних тригранників розглянемо на прикладі згущення ДПК з характеристиками l1 – правий хід і монотонне зменшення радіусів ПК і ПСф в напрямі збільшення номерів вузлів.

3.3.1 Вихідна область розташування точки згущення

На ділянці (i, i+1) монотонна ДПК розташовується в межах ТПСфi (п. 2 .4.2). Отже, iзг повинна призначатися в межах криволінійного трикутника 1, 2, 3, який одержуємо в перетині ТПСфi площиною Pi (рис. 2.22). Такий трикутник будемо позначати (1, 2, 3)i .

Виходячи з характеристик криволінійного трикутника, можна визначити тип монотонної ДПК. В разі ДПК l1 це:

- обхід проти годинникової стрілки вершин 1→2→3, при погляді

спостерігача в напрямі вектора ;

- розташування вершини 3 за межами дуги [1, 2] кола, що належить ПСфi;

- співвідношення значень радіусів кіл, що визначають сторони криволінійного трикутника: R1,3>R1,2>R2,3.

Ділянка ДПК (i, i+1) розташована в межах ТПСфi і одночасно за межами ПСфi-2 і ПСфi+2 (п. 2.3.4). Розглянемо, як зазначені ПСф обмежують область можливого розташування iзг.

ПСфi-1 и ПСфi-2 обмежують область простору у вигляді увігнутої лінзи, всередині якої розташована i-та ділянка ДПК (рис 3.5).

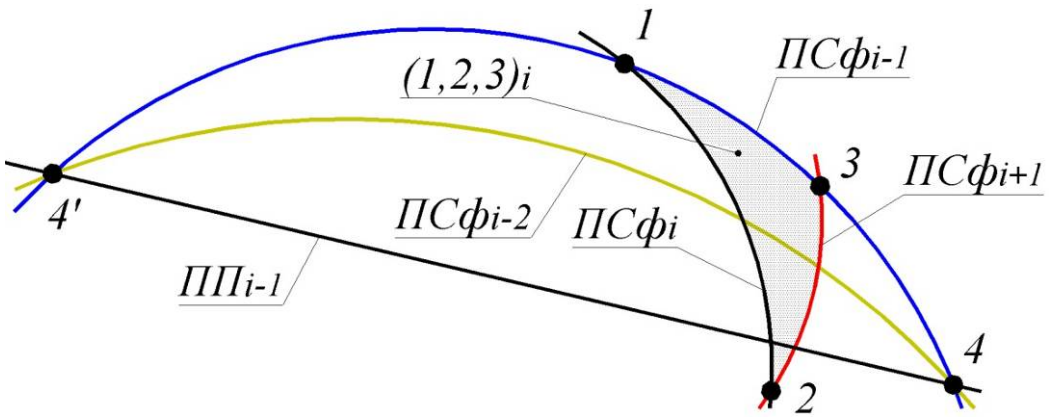
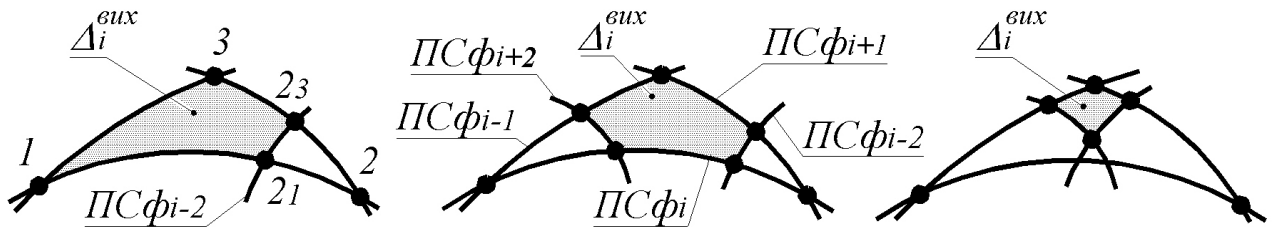


Рис. 3.5. Уточнення області можливого розташування точки згущення

Для ДПК, вузли якої розташовані на сфері, коли ПСфi-2 і ПСфi-1 збігаються, обсяг зазначеної області дорівнює нулю. У разі, коли ділянка ДПК (i-3…i) плоска і ПСфi-2 вироджується в ППi-1, обсяг області максимальний. Очевидно, що в діапазоні значень

існують такі, при яких ПСфi перетинає ТПСфi, а коло, по якому ПСфi-2 перетинається площиною Pi, перетинає область (1, 2 , 3)i. На рис. 3.5 також зображена пряма (4, 4′), по якій перетинаються площини Pi і ППi-1. У точках 4 і 4′ з Pi перетинається ПКi-1 ≡ ПСфi-1 × ПСфi-2.

Точка згущення i-ої ділянки ДПК не може бути призначена всередині ПСфi-2, отже, областю можливого розташування iзг стає криволінійний чотирикутник 1,21,23,3 (рис. 3.6 а). На рисунку дуги кіл, що обмежують криволінійний багатокутник, позначені так само, як ПСф, яким ці кола належать.



а) б) в)

Рис. 3.6. Варіанти конфігурації області розташування точки згущення

Коло перетину ПСфi+2 площиною Pi в свою чергу може обмежувати область можливого розташування точки iзг. Криволінійний багатокутник, обмежений дугами п'яти кіл, які одержуємо в перетині площиною Pi п'яти послідовних прилеглих сфер (ПСфi-2 ... ПСфi+2), будемо називати вихідною

областю розташування точки згущення i-ої ділянки ДПК і позначимо .

Різні варіанти конфігурації показані на рис. 3.6. Умовою існування

області є монотонна зміна уздовж точкового ряду радіусів ПСф. У разі

рівності радіусів ПСф, що обмежують , область вироджується в дугу кола або точку.

Призначення точок згущення всередині – необхідна умова

формування монотонної ДПК [90]. У разі призначення iзг на межі ,

наприклад, на ПСфi-2, області обмежені і виродяться в відсіки цієї сфери. В цьому випадку ділянка ДПК (i-2, i) буде формуватися як

сферична крива, що належить ПСфi-2. Якщо iзг призначити за межами ,
наприклад, всередині криволінійного трикутника 2,21,23 (рис. 3.6 а), то

отримаємо і , які визначають ділянки ДПК з характеристиками l6. В цьому випадку ДПК буде містити як мінімум три монотонні ділянки: l1 - l6 - l1.

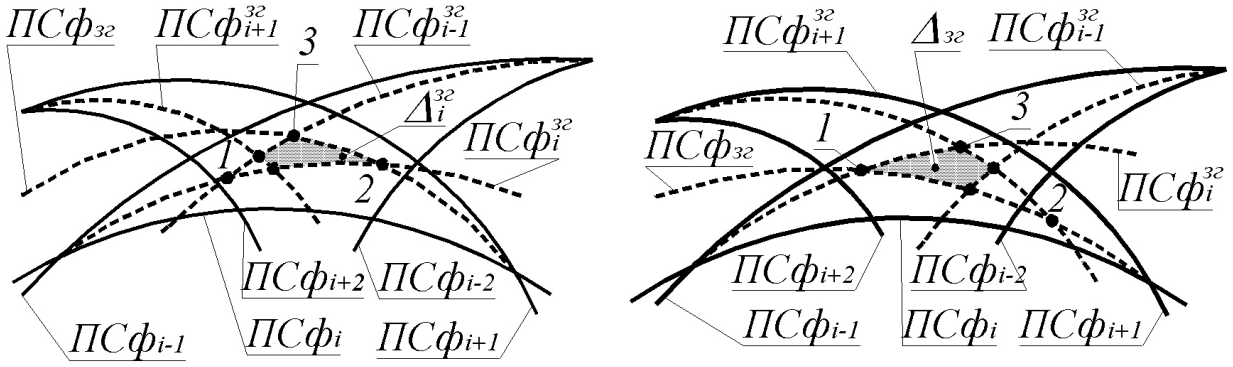
3.3.2 Область розташування згущеної ДПК

Призначивши точку згущення i-ої ділянки всередині області ,
отримуємо області розташування двох нових ділянок ДПК – (i, iзг) і (iзг, i+1).

Одночасно змінюються межі на двох попередніх і двох наступних вихідних ділянках [86]. Визначимо характеристики областей розташування точки згущення на ділянках ДПК, отриманих в результаті призначення

.

У перетині площиною , яка перпендикулярна хорді [i, iзг] і проходить через її середину, отримуємо криволінійний трикутник (рис. 3.7 а). Сторони – кола, які належать сферам , , ПСфзг. На рисунку також зображені кола, по яких перетинає вихідні ПСф. Кола позначені так само, як ПСф, яким вони належать.



а) б)

Рис. 3.7. Область розташування точок другого кроку згущення

(ПКi-1, iзг) належить пучку сфер, що перетинаються по ПКi-1 і розташовується між вихідними (ПКi-1, i-3) і (ПКi-1, i+1).

Залежно від розташування радіус може приймати значення в діапазоні:

.

(ПКi, iзг) належить пучку сфер, що перетинаються по ПКi і розташовується між вихідними ПСфi-1(ПКi, i-2) і ПСфi(ПКi, i+2). Її радіус може приймати значення в діапазоні:

.

Розташування (ПКi+1, iзг) в пучку сфер, що перетинаються по ПКi+1 між ПСфi(ПКi+1, i-1) і ПСфi+1(ПКi+1, i+3) визначає діапазон можливих значень її радіусу:

.

Таким чином, розташовується всередині вихідного ТПСфi.

Співвідношення радіусів сфер, що обмежують :

і напрям обходу його вершин: 1→2→3 проти годинникової стрілки відповідають характеристикам вихідної ДПК.

Область можливого розташування точки згущення на ділянці (i, iзг) –

є частиною криволінійного трикутника , яка розташована за межами сфер, що проходять через чотири найближчі до ділянки точки. Це

(i-3, i-2, i-1, i) и (iзг, i+1, i+2, i+3).

Призначення iзг в межах гарантує розташування за

межами ПСфi-2. Сфера може відсікати від трикутника вершину 1, але не може повністю його поглинути. Таким чином, область можливого розташування точки згущення ділянки (i, iзг) або криволінійний трикутник,

або його частина, розташована за межами (рис. 3.7 а).

Область можливого розташування точки згущення на ділянці (iзг, i+1)

– належить площині Pзг, що перпендикулярна хорді [iзг, i+1] і проходить

через її середину. Це може бути криволінійний трикутник ,

обмежений , , , або криволінійний багатокутник,

отриманий в результаті відсікання від частини, розташованої

усередині сфери (рис. 3.7 б).

Призначення точки згущення всередині області гарантує існування на ділянках (i, iзг) і (iзг, i+1) областей можливого розташування точки подальшого згущення і характеристики цих областей відповідають

характеристикам вихідної ДПК. Призначення призводить до

локалізації областей на шести вихідних ділянках ДПК. Це ділянки (i -3, i-2), (i-2, i-1), (i-1, i), (i+1, i+2), (i+2, i+3), (i+3, i+4). Механізм цієї

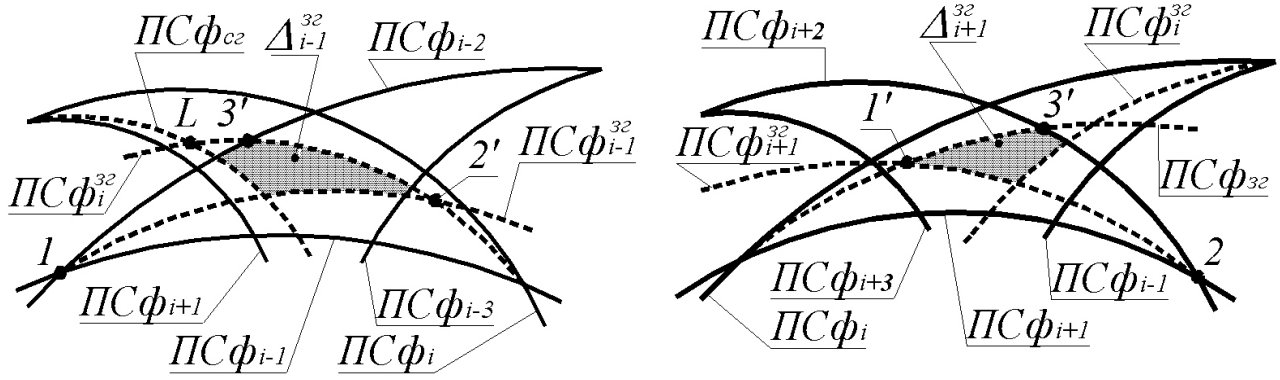
локалізації розглянемо на прикладі , що обмежує розташування ДПК на ділянці (i-1, i).

Сторони уточненого криволінійного трикутника

належать , , ПСфi-2 (рис. 3.8 а). Належність

і пучкам, обмеженим сферами, яким належать грані ТПСфi -1, забезпечує відповідність характеристик криволінійного трикутника

характеристикам вихідного трикутника (1,2,3)i-1.



а) б)

Рис. 3.8. Локалізація області розташування точок згущення вихідних

ділянок (i-1, i) та (i+1, i+2)

Область можливого розташування точки згущення i-1-ої ділянки

( ) отримуємо в результаті відсікання від трикутника частин,

розташованих усередині сфер ПСфi-3 і .

Схема локалізації області можливого розташування точки згущення на вихідних ділянках (i-2, i-1), (i+1, i+2), (i+2, i+3) аналогічна розглянутій вище для ділянки (i-1, i). Нові межі області належать прилеглим сферам, які

отримані в результаті призначення . Положення цих ПСф визначаються в межах пучків сфер, що перетинаються по відповідним ПК.

Область , що відповідає ділянці (i+1, i+2), зображена на рис. 3.8 б).

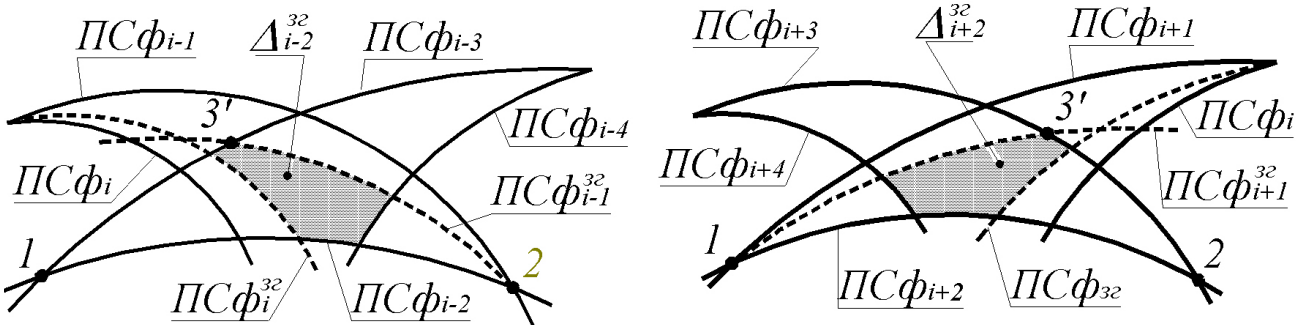
Межі криволінійного трикутника отримані в результаті заміни

ПСфi і ПСфi+1 на і , відповідно. Область отримана в

результаті відсікання від трикутника частини, розташованої

усередині сфери .

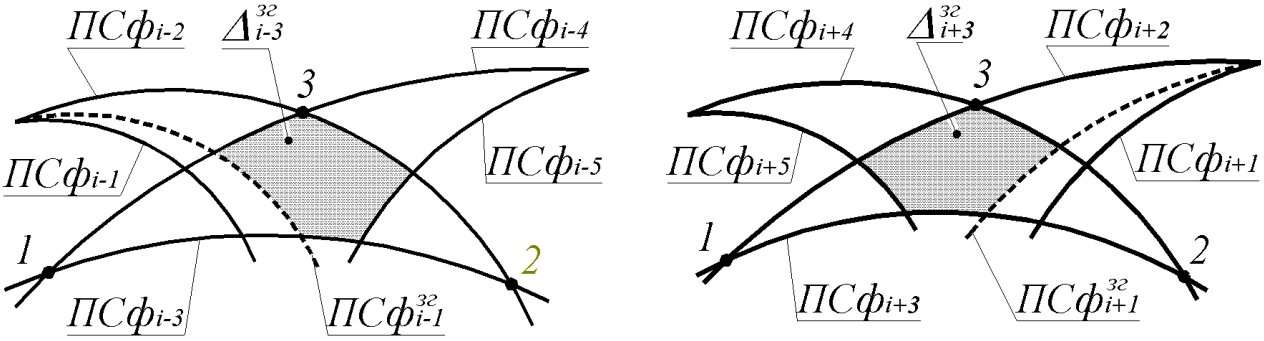
Області і , що відповідають ділянкам (i-2, i-1) і (i+2, i+3), зображені на рис 3.9 а) і 3.9 б). Ці області отримані заміною двох з п'яти вихідних ПСф на сфери, що отримані в результаті призначення iзг.



а) б)

Рис. 3.9. Локалізація області розташування точок згущення вихідних ділянок (i-2, i-1) та (i+2, i+3)

Призначення не призводить до зміни ТПСфi-3 і ТПСфi+3. Локалізація областей і відбувається в результаті відсікання від них частини, розташованої в межах і (рис. 3.10).



а) б)

Рис. 3.10. Локалізація області розташування точок згущення вихідних ділянок (i-3, i-2) та (i+3, i+4)

В результаті призначення точки згущення на ділянці (i, i+1) локалізується область розташування частини монотонної ДПК (i-3…i+4).

Призначення точки згущення в межах області гарантує наявність області розташування точок згущення на знов отриманих ділянках (i, iзг), (iзг, i+1) і вихідних ділянках (i-3, i-2), (i+3, i+4), (i-2, i-1), (i-1, i), (i+1, i+2), (i+2, i+3).

3.3.3 Визначення меж області розташування точки згущення і оцінка її розмірів

Область розташування точки згущення обмежена дугами кіл, за якими вихідні ПСф перетинаються площиною Pi. Положення дуг кіл можна

визначити точно. Вихідний криволінійний трикутник (1,2,3)i обмежений дугами кіл максимального радіуса прилеглих сфер – ПСфi-1, ПСфi, ПСфi+1 (рис. 2.22). Центр кола збігається з центром сфери і може бути визначений як точка перетину трьох площин. Наприклад, для сфери ПСфi положення

центру (Ti) визначається як . Радіус кола дорівнює відстані |Ti, i|.

Сфери ПСфi-2 і ПСфi+2 перетинаються площиною Pi по колах, які не є для них колами максимального радіуса. Положення центру такого кола отримаємо як ортогональну проекцію на площину Pi центру ПСф. Радіус кола (r) визначимо виходячи з відстані h від центру сфери до площини Pi:

, де R – радіус відповідної ПСф.

Після визначення координат центрів кіл у вихідній тривимірній системі декартових координат положення цих центрів визначаються в локальній системі координат на площині Pi (п. 2.4.2). За відомими радіусами кіл і

координатами їх центрів визначаються межі області на площині Pi.

Незважаючи на те, що область можливого розташування точки згущення, в загальному випадку, є плоскою фігурою, оцінювати її розміри через площу недоцільно. У разі, коли вздовж ДПК значення скруту або

радіусів стичних сфер змінюються незначно, площа області може бути мінімальною при великій протяжності. Наприклад, в разі належності

вихідних точок i-2 … i+2 однієї і тієї ж сфери область вироджується в дугу кола, по якому цю сферу перетинає площина Pi. Для плоскої кривої лінії

область вироджується у відрізок прямої лінії. Тому розміри області

будемо оцінювати максимальною довжиною відрізка, що з'єднує

вершини контуру області. Наприклад, розмір області , зображеної на рис . 3.11, оцінюється відстанню |13, 23|.

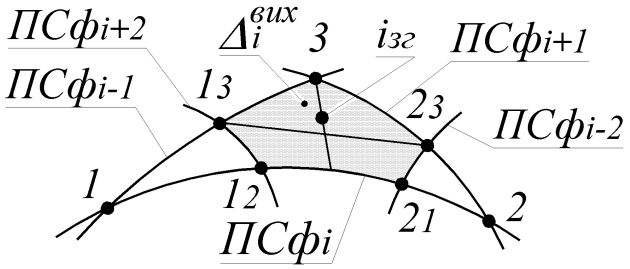


Рис. 3.11. Оцінка розміру області розташування точки згущення

Розміри областей розташування точок згущення будуть використані при оцінці абсолютної похибки дискретної інтерполяції, а також для визначення черговості згущення ділянок ДПК.

3.3.4 Згущення монотонної ДПК

Визначення меж області можливого розташування ДПК дозволяє згущувати її ділянки в довільній послідовності і формувати в межах кожної вихідної ділянки точковий ряд, що складається з будь-якої кількості точок згущення. Критерієм вибору черговості згущення ділянок ДПК є розміри областей їх можливого розташування. Послідовне згущення ділянок з максимальними розмірами областей розташування забезпечує формування точкового ряду, який з заданою точністю задає монотонну ДПК, при мінімальній кількості кроків згущення.

Призначення точки згущення i-ої ділянки ДПК (iзг) всередині області

гарантує наявність областей розташування точки згущення на ділянках (i-2, i-1), (i-1, i), (i+1, i+2), (i+2, i+3), отриманих в результаті

згущення ділянки ДПК (i, i+1). При цьому розміри областей , а отже і динаміка зміни значень дискретних характеристик уздовж точкового ряду,

що формується, залежить від того, в якому саме місці області буде призначена точка iзг. Наприклад, при призначенні точки iзг на дузі [12, 21],

яка належить ПСфi (рис. 3.11), області розташування точок згущення

, , , вироджуються в дуги кіл, що належать ПСфi. У цьому випадку частина монотонної ДПК (i-1…i+2) буде сформована як сферична

крива лінія. Якщо iзг призначити в вершині області – точці 12, в якій

перетинаються кола ПСфi і ПСфi+2 (рис. 3.11), то області і

вироджуються в дуги кіл, що належать ПСфi; області і вироджуються в точки перетину сфер ПСфi, ПСфi+2 і площин Рзг і Рi+1 відповідно; область

вироджується в дугу кола, розташованого на ПСфi+2. У цьому випадку частина монотонної ДПК (i-1…iзг) буде сформована як сферична крива, що належить ПСфi, частина (iзг …i+2) буде належать ПК(iзг, i+1, i+2), а частина (i+2…i+4) буде сформована як сферична крива, що належить ПСфi+2.

Для забезпечення плавної зміни значень характеристик уздовж ДПК

необхідно призначати точку згущення в центрі області . Для області, яка обмежена криволінійним п'ятикутником, точка iзг може бути призначена в центрі відрізка, який з'єднує вершину 3 і середину дуги [12, 21] (рис. 3.11). Для області, обмеженої криволінійним чотирикутником (рис. 3.6 в), точка iзг може бути призначена на перетині його діагоналей.

Покажемо один з можливих варіантів алгоритму згущення точкового ряду, який реалізує викладені вище міркування [105].

1. Визначаються межі областей можливого розташування точок згущення на всіх ділянках вихідної ДПК.

2. Визначається ділянка ДПК з максимальною за розмірами областю розташування точки згущення . У центрі області призначається точка згущення.

3. Положення точки згущення може уточнюватися відповідно до додаткової умови монотонної зміни уздовж точкового ряду значень дискретного скруту. У цьому випадку точка iзг призначається в межах області та одночасно в межах трикутника, обмеженого прямими ПП′зг, ПП′i, ПП′i+1, який зображено на рис. 3.4.

4. Після призначення точки згущення проводиться аналіз отриманого точкового ряду і визначається наступна ділянка з максимальною за розмірами областю . Точка наступного згущення призначається на цій ділянці. Розміри області розташування є критерієм, що визначає число згущень, необхідних для формування ДПК.

Запропонований алгоритм згущення точкового ряду заснований на встановленій в п. 2.3.4 закономірності розташування монотонної ДПК відносно прилеглих сфер, які визначаються її вихідними точками. Кожна точка згущення призначається в границях області, яку обмежено послідовністю з п'яти вихідних ПСф.

Обмеження на розташування точки згущення можна контролювати через діапазони можливого розташування центрів ПСф, що формуються в результаті її призначення. Спосіб формування ДПК, заснований на визначенні зазначених діапазонів, дозволить спростити схему згущення точкового ряду і зменшити кількість необхідних обчислень.

3.4 Згущення ДПК на основі гранної полярної поверхні перпендикулярних площин (ГППР)

Площини Pi, що проходять через середини хорд СЛЛ перпендикулярно хордам, утворюють ГППР (рис. 2.17). У кожній перпендикулярній площині розташовані центри трьох ПСф, кожна з яких задана проходженням через чотири послідовні вихідні точки ДПК. Для площині Pi це центри ПСфi-1, ПСфi, ПСфi+1 – точки Ti-1, Ti, Ti+1 відповідно. Ці точки визначають область можливого розташування ДПК на ділянці (i, i+1) – сферичний тригранник ТПСфi.

Центри ПСф є основою ГППР, а їх взаємне розташування визначено геометричними властивостями ДПК. Ламана лінія, що з'єднує послідовні центри ПСф, однозначно визначає ГППР [80]. Цю лінію будемо називати ламаною звороту гранної поверхні і позначимо ЛЗР. На рис. 3.12 зображена i-та грань ГППР при погляді на площину Pi в напрямі вектора .

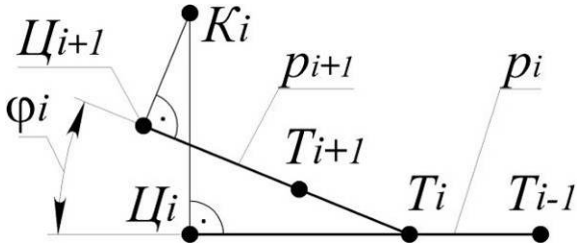


Рис. 3.12. Ланки ламаної звороту гранної поверхні

Грань обмежена осями ПК ρi і ρi+1 – прямими, що проходять через ланки ЛЗР: ρi ≡ (Ti-1, Ti), ρi+1 ≡ (Ti, Ti+1). Між характеристиками ДПК і характеристиками відповідних ділянок ЛЗР існує взаємозв'язок. Покажемо цю залежність на прикладі ДПК з характеристиками l1 [401]:

- обхід точок Ti-1 → Ti → Ti+1 за годинниковою стрілкою відповідає правому ходу ДПК;

- розташування центру ПСфi+1 (точка Ti+1) і середини хорди [i, i+1] (точка Ki) по одну сторону від осі ρi означає, що радіуси кривини і стичних сфер зростають уздовж кривої в одному напрямі;

- співвідношення відстаней , де Цi – центр ПКi(i-1, i, i+1) відповідає зменшенню радіусів стичних сфер в напрямі збільшення нумерації вузлів ДПК.

В результаті призначення точок згущення на ділянках ДПК отримуємо нову ГППР, що складається з як завгодно великого числа граней. Збереження вихідної закономірності розташування центрів ПСф на відповідних гранях ГППР – необхідна і достатня умова формування точкового ряду, що належить монотонній кривій лінії.

3.4.1 Схема згущення ділянки ДПК на основі ГППР

Призначивши точку згущення на i-й ділянці ДПК ( ), отримуємо згущену гранну поверхню , у якій вихідну i-ту грань (Ti-1, Ti ,Ti+1) замінили дві нові грані ( ) і ( ), де – центр (i-2, i-1, i, iзг), – центр (i-1, i, iзг, i+1), – центр (i, iзг, i+1, i+2), – центр (iзг, i +1, i+2, i+3).

В позначенні штрих, розташований попереду букви, означає, що це центр сфери, яка замінила вихідну ПСфi-1 в результаті призначення точки згущення на наступній за номером, в даному випадку i-й дільниці ДПК.

Аналогічно, позначає центр сфери, яка замінила вихідну ПСфi+1 в результаті призначення точки згущення на попередній ділянці ДПК.

Отримані грані належать площині , що проходить через середину хорди СЛЛ [i, iзг] перпендикулярно хорді та площині Рзг, що проходить через середину хорди СЛЛ [iзг, i+1]. Центри отриманих сфер

визначають осі ПК: , ,
на яких розташовані центри ПК(i-1, i, iзг), ПК(i, iзг, i+1), ПК(iзг, i+1, i+2) відповідно. В позначенні осей ПК верхній індекс вказує номер ділянки, на якої призначена точка згущення, що визначила їх положення. Нижній індекс вказує номер ПК, яке ця вісь визначає.

Осі та відсікають від вихідних

граней ( ) і ( ) сектора. В результаті отримуємо грань

( ), що належить площині Pi-1 і грань ( ), що належить площині Pi+1 (рис. 3.13).

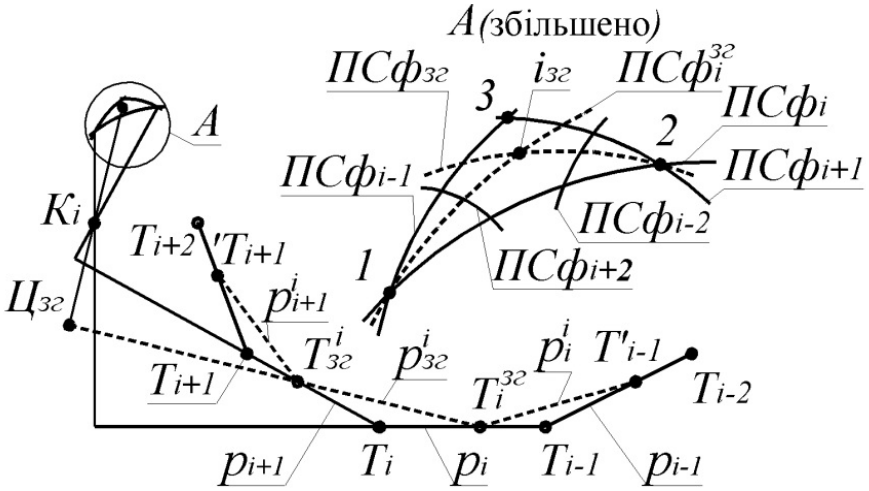


Рис. 3.13. ГПП, що отримана в результаті призначення точки згущення

На рис. 3.13 зображена в ракурсі, коли площина Pi паралельна площині кресленика. У цій площині розташовані точки iзг, Ki, вихідні осі ПК

ρi і ρi+1, вісь , яка отримана в результаті згущення і криволінійний

трикутник (1, 2, 3)i ≡ ТПСфi×Pi. Інші елементи належать площинам Pi-1 або Pi+1.

Вісь перетинає вихідні осі ρi і ρi+1 в центрах сфер і

(точки і відповідно). Зазначені сфери перетинаються площиною Pi по колах, які в свою чергу перетинаються в точці iзг.

Розташування точок і в границях відрізків [Ti-1, Ti] і [Ti, Ti+1] гарантує розташування iзг в границях криволінійного трикутника (1, 2, 3)i.

Розташування центру – точки на відрізку [Ti -1, Ti-2], а центру – точки в границях [Ti+1, Ti+ 2] означає приналежність точки iзг області .

Величини кутів між осями ПК дорівнюють величинам двогранних кутів між відповідними ПП. Наприклад, кут між і ρi дорівнює куту між ППзг і ППi, а кут між і дорівнює куту між ППзг і .

Таким чином, положення прямої однозначно визначає точку iзг та дискретні характеристики згущеної ДПК. Основна вимога до розташування – перетин осями , , відповідних ланок ЛЗР, вершини яких – центри вихідних ПСф. При такому розташуванні отримуємо послідовність прилеглих кіл …ПК(i-1, i, iзг), ПК(i, iзг, i+1)… і прилеглих сфер … ПСф(i-2, i-1, i, iзг), ПСф(i-1, i, iзг, i+1) …, радіуси яких змінюються монотонно уздовж точкового ряду. При цьому зберігається хід ДПК (напрям повороту прилеглої площини щодо відповідної хорди СЛЛ до суміщення з подальшою ПП), але збереження монотонності зміни значень дискретного скруту не гарантовано.

Як приклад покажемо, як змінилися значення радіусів ПК і ПСф в результаті призначення точки згущення 4зг на ділянці (4; 5) вихідної ДПК, характеристики якої представлені в таблицях 2.7, 2.8. Точці згущення відповідають осі ПК , , , які поділяють ланки вихідної ЛЗР (рис. 3. 19) в співвідношеннях:

; ; ; .

Значення радіусів ПСф і ПК ДПК, яку отримано в результаті призначення в межах області Δ4 точки 4зг, представлені в таблицях 3.3, 3.4.

Таблиця 3.3

Значення радіусів прилеглих сфер

Радіуси ПСф, мм					
ПСф2	ПСф(2;3;4; 4зг)	ПСф(3;4;4зг; 5)	ПСф(4;4зг;5; 6)	ПСф(4зг;5;6; 7)	ПСф6
	108,5890	99,8972	90,4324	83,4754	

113, 4499					77, 2824

Таблиця 3.4

Значення радіусів прилеглих кіл

Радіуси ПК, мм				
ПК3(2;3;4)	ПК(3;4;4зг)	ПК(4;4зг;5)	ПК(4зг;5;6)	ПК6(5;6;7)
85,8962	77,2834	74,6888	70,1352	64,1124

Для формування ДПК з монотонною зміною скруту при призначенні положення необхідно додатково враховувати обмеження на розташування точки iзг, які визначені в п. 3.3.3.

3.4.2 Взаємозв'язок характеристик ГППР і меж області розташування ДПК

Конкретне положення осі визначає параметри ГППР, а через них і характеристики ДПК. Вихідною умовою формування точкового ряду, уздовж якого значення дискретних характеристик змінюються монотонно, є перетин віссю відрізків [Ti-1, Ti] і [Ti, Ti+1] (рис. 3.19) [402].

При переміщенні в напрямі точки Ti точка згущення iзг наближається до сфери ПСфi. Наприклад, зафіксуємо точку в центрі відрізка [Ti, Ti+1], а точку переміщатимемо в напрямі Ti. Точка iзг буде переміщатися по зафіксованій дузі в напрямі точки 2, а значить і в напрямі сфери ПСфi-2. При цьому точка переміщається до точки Ti-2, а – до точки Ti+1. Крайнім буде положення , коли точки і Ti-2 співпадуть, а точка iзг буде розташована на межі – дузі кола, по якому сфера ПСфi-2 перетинається площиною Pi. В цьому випадку і виродяться в відсіки ПСфi-2, а ділянка ДПК, яка визначається цими сферичними тригранниками, буде формуватися як сферична крива, що належить ПСфi-2.

Аналогічно при наближенні точки до Ti точка рухається в напрямі Ti+2.

Розглянемо окремі положення осі , коли вона проходить через центри вихідних ПСф.

1. Вісь проходить через точки Ti-1 і Ti+1 (рис. 3.14).

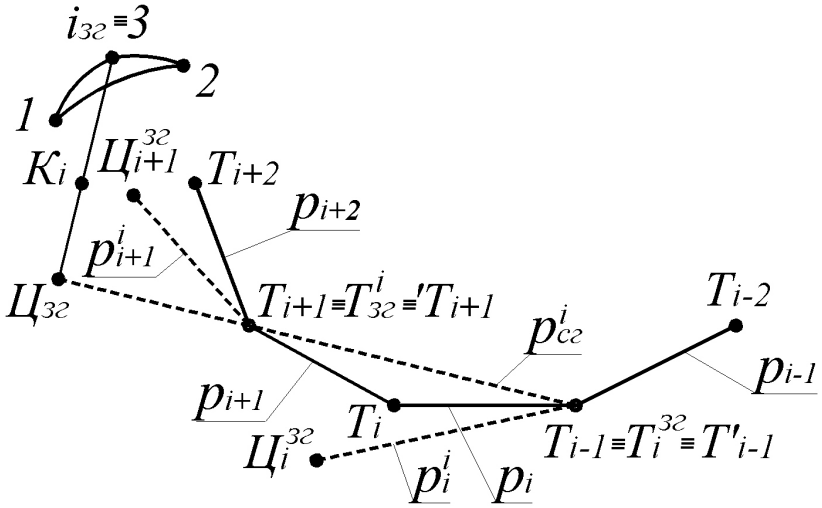


Рис. 3.14. Взаємозв'язок положень точки згущення і осі

Таке розташування визначає приналежність точки iзг вихідним ПСфi-1 і ПСфi+1 одночасно – iзг збігається з вершиною 3 криволінійного трикутника (1, 2, 3)i. В цьому випадку і . Грані ( ) і ( ) перетворюються у відрізок [Ti-1, Ti+1]. Ці грані-відрізки визначають і , які виродилися в ділянки кола перетину ПСфi-1 і ПСфi+1 – дугу (i, iзг) і дугу (iзг , i+1) відповідно. Осі , , перетинаються в точці Ti-1 – центрі вихідної ПСфi-1. Це означає, що (ПКi-1, iзг) і (ПКi, iзг) збігаються з ПСфi-1, а ПК(i-1, i, iзг) і ПК(i, iзг, i+1) належать ПСфi-1.

Аналогічно, перетин в точці Ti+1 осей , , означає збіг (ПКi+1, iзг), (ПКi+2, iзг), ПК(i, iзг, i+1), ПК(iзг, i+1, i+2) з вихідною ПСфi+1.

Збіг отриманих в результаті згущення ПСф означає, що області розташування ДПК і вироджуються у відсіки ПСфi-1, а і – у відсіки ПСфi+1. З цього випливає, що точковий ряд , отриманий в результаті призначення iзг ≡ 3, можливо інтерполювати монотонною кривою, у якій:

- ділянка i-2зг…i-1зг – сферична крива, що належить ПСфi-1;
- ділянка i-1зг…i+1зг – коло перетину ПСфi-1 і ПСфi+1;
- ділянка i+1зг…i+2зг – сферична крива, що належить ПСфi+1, де i-2зг, i-1зг, i+1зг, i+2зг – точки першого згущення вихідних ділянок (i-2, i-1), (i-1, i), (i+1, i+2), (i+2, i+3) відповідно.

Сформованій ділянці ДПК (i-2…i+3) буде відповідати полярний торс, що складається з двох конічних поверхонь з вершинами в точках Ti-1 і Ti+1, які гладко зістиковано по прямій (Ti-1, Ti).

2. Призначимо положення , при якому вона перетинає одну зі сторін трикутника Ti-1, Ti, Ti+1 і проходить через центр вихідної ПСф. Наприклад, і .

У цьому випадку точка iзг розташована на дузі [1, 3] кола, що належить ПСфi-1. Перетин осей , , в точці Ti-1 визначає виродження , , , у відсіки ПСфi-1. Ділянка ДПК i-2зг…i+1 буде формуватися як сферична крива, що належить ПСфi-1.

3. Вісь проходить через точку Ti. У цьому випадку точка iзг розташована на дузі [1, 2] кола, що належить . Вісь розташовується всередині кута ϕ_i між крайніми положеннями від (Ti-1, Ti), коли iзг збігається з точкою 1 до (Ti, Ti+1), коли iзг збігається з точкою 2. Належність точки iзг сфері визначає виродження , , , , , у відсіки . Ділянка ДПК (i-2зг…i+2зг) буде формуватися як сферична крива, що належить ПСфi. В крайньому положенні , коли iсг≡1, чотири послідовні точки i-1, i, iзг, i+1 належать одному колу. У такому випадку ділянка монотонної ДПК (i-1…i+1) може бути сформована тільки як дуга ПКi.

Розглянуті варіанти призначення точки згущення демонструють взаємозв'язок характеристик сферичних тригранників, що обмежують область можливого розташування отриманої ДПК і параметрів ламаної звороту її гранної полярної поверхні. Області можливого розташування монотонної ДПК у вигляді ланцюжка ТПСф відповідає ламана лінія, що з'єднує центри сусідніх ПСф. Характеристики ТПСф і ЛЗР взаємопов'язані і однозначно визначають один одного.

Обхід в одному напрямі (наприклад, за годинниковою стрілкою) кожних трьох послідовних вузлів ЛЗР (центрів ПСф) відповідає постійному

знаку дискретного скруту ( ) на ділянках ДПК, що формується. В крайньому положенні, коли вузли розташовані на одній прямій, ділянка ЛЗР відповідає плоскій ділянці ДПК.

Кожному ТПСф відповідають дві ланки ЛЗР. У разі виродження ланок в точку (центри ПСф збігаються) вихідний точковий ряд визначає сферичну криву лінію – крайній варіант монотонної кривої.

Призначенню точки згущення на ділянці ДПК відповідає формування трьох нових ланок ЛЗР, які замінюють дві вихідні ланки. Розташування точок , що обмежують новосформовані ланки, на ланках вихідної ЛЗР забезпечує збереження в процесі згущення закономірності зміни уздовж точкового ряду значень дискретних характеристик.

3.4.3 Формування ламаної звороту гранної полярної поверхні згущеної ДПК ( )

Призначивши точки згущення на всіх ділянках ДПК, отримуємо точковий ряд … , i-1зг, iзг, i+1зг, …, який задає послідовність прилеглих сфер … ПСф(i-1, i-1зг, i, iзг), ПСф(i-1зг, i, iзг, i+1), ПСф(i, iзг, i+1, i+1зг), ….

Центри отриманих ПСф позначимо … , , , , … відповідно.

Систему нумерації центрів ПСф пояснимо на прикладі центру сфери ПСф(i-1зг, i, iзг, i+1). Цю сферу можна розглядати як задану i-м прилеглим колом згущення (i-1, iзг, i+1) і точкою згущення i-1-ої ділянки ДПК – i-1зг. Номер ПК згущення визначає нижній індекс в позначенні центру сфери, а верхній індекс відповідає номеру точки згущення.

Кожна точка згущення визначає положення трьох нових осей ПК (, ,) (рис. 3.19). Осі ПК, що відповідають точкам згущення сусідніх ділянок, перетинаються між собою і визначають, таким чином, положення зазначених ПСф. Наприклад, на осі розташовані центри ПСф , (рис. 3.15); осі належать та і т.д.

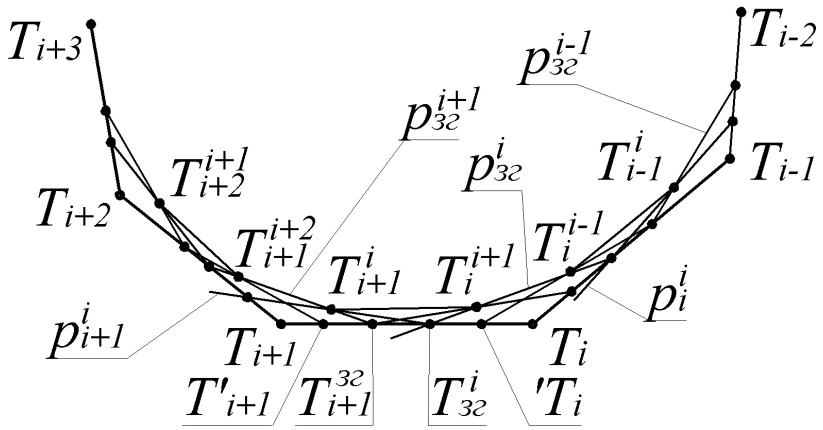


Рис. 3.15. Ламана звороту гранної полярної поверхні згущеної ДПК

Центри ПСф, які отримано в результаті призначення точок згущення на всіх ділянках ДПК, задають ламану звороту …- - - -…, яку позначимо .

Ланки можна розділити на дві групи. До першої групи віднесемо ланки, розташовані на осях ПК, які визначають положення точок згущення:

; і т.д.. Такі ланки будемо називати ланками згущення. До другої групи віднесемо проміжні ланки, розташовані між ланками згущення. Проміжними ланками є: ; і т.д.

Положення осей ρзг визначає розміри і розташування як ланок згущення, так і проміжних ланок. Наприклад, при видаленні прямої від точки T_i точки і переміщаються по прямим і віддаляючись одна від одної. Одночасно, точки і переміщаються по прямим и , зближуючись з точками і відповідно. В результаті довжина ланок згущення ; ; збільшується, а довжина проміжних ланок ; зменшується. Крайнім буде положення, коли станеться збіг точок на прямій або на прямій . В цьому випадку проміжні ланки вироджуються в точку, а відповідні ділянки ДПК представляють сферичні криві лінії. Наприклад, збіг точок означає, що ділянка (iзг…i+1зг) належить ПСф(i, iзг, i+1, i+1зг) ≡ ПСф(iзг, i+1, i+1зг, i+2).

При зворотному переміщенні прямої крайнім буде положення, коли вона проходить через точку перетину і . В цьому випадку в точку вироджується ланка згущення . Збіг означає формування ділянки ДПК (i…i+1) як сферичної кривої, що належить ПСф(i-1зг, i, iзг, i+1) ≡ ПСф(i, iзг, i+1, i+1зг).

Переміщення осей згущення далі крайніх положень призводить до порушення монотонності ДПК, що формується. Наявність у ланок згущення і проміжних ланок, які чергуються, є критерієм призначення точок згущення в межах області їх можливого розташування.

Характеристики згущеної ДПК можна контролювати по розташуванню точок перетину осей ПК згущення з ланками вихідної ЛЗР. Наприклад, на ланці розташовуються точки перетину осей ПК (рис. 3.21) :

- – центр ПСф(i-1зг, i, i+1, i+2);
- – центр ПСф(i, iзг, i+1, i+2);
- – центр ПСф(i, i+1, i+1зг, i+2);
- – центр ПСф(i, i+1, i+2, i+2зг).

Шість ПСф, центри яких належать , утворюють пучок сфер, що перетинаються по ПКi+1. Розташування відрізка всередині гарантує наявність у ланок ; ; . Аналогічне розташування центрів ПСф, отриманих в результаті згущення інших ділянок, забезпечує монотонну зміну значень дискретних характеристик уздовж згущеного точкового ряду.

Можливість формування , що складається з ланок згущення, які чергуються з проміжними ланками, можна заздалегідь встановити за допомогою попередньої ламаної, що складається тільки з ланок згущення (рис. 3.16).

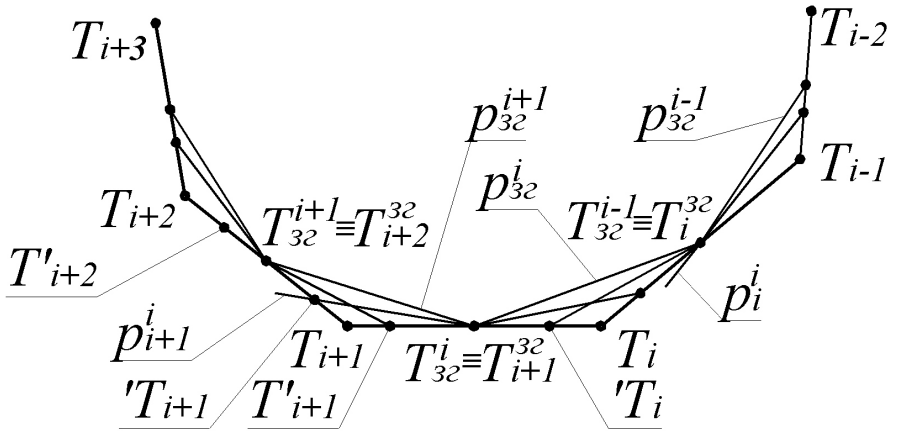


Рис. 3.16. Попередня ламана звороту

Точки стикування ланок згущення, в які виродилися проміжні ланки, призначаються в центрі відповідних ланок вихідної ЛЗР. Наприклад, точки

призначаються в центрі відрізка [Ti-1, Ti], – в центрі [Ti, Ti+1] і т.д.

Отримана таким чином ламана звороту задає монотонну ДПК, що

складається з ділянок сферичних кривих ліній. Умовою формування , яка задає ДПК з плавною зміною радіусів стичних сфер, є розташування вузлів попередньої ламаної всередині відрізків, які на ланках вихідної ЛЗР відсікають осі ПК, відповідні точкам згущення сусідніх ділянок. Наприклад,

точки повинні розташовуватися всередині відрізка ,

точки – в границях і т.д.

Проміжні ланки формуються в результаті переміщення осей ρзг

в напрямі відповідних центрів вихідних ПСф: наближається до Ti,

наближається до Ti+1 і т.д. При цьому точки і розділяться і будуть переміщуватися в напрямі точок Ti і Ti+1 відповідно. Одночасно, точки ′Ti і

переміщаються назустріч один одному, зближуючись з точками і

відповідно. Переміщення центрів ПСф згущення по іншим ланкам вихідної ЛЗР аналогічно.

В результаті отримуємо , зображену на рис. 3.15.

Якщо прямі ρзг переміщаються, залишаючись паралельними свого

початкового положення, то величини кутів між суміжними ланками змінюються незначно. У цьому випадку коригування динаміки зміни уздовж точкового ряду радіусів ПСф відбувається при збереженні динаміки зміни значень дискретного скруту.

Коригування співвідношень значень дискретного скруту може здійснюватися за рахунок зміни кутів між вихідними осями ПК і осями ПК

згущення. Наприклад, в результаті переміщення точки в напрямі точки

Ti-1 (рис. 3.21) відбувається збільшення кутів між ланками [,

] і [,], [,] і [,]. Одночасно зменшується кут між

ланками [,] і [,].

Зміни зазначених кутів призводять до збільшення дискретного скруту Bφ на ділянках (i-1зг, i), (iзг, i+1) згущеної ДПК і до зменшення цього значення на ділянці (i, iзг). В результаті подальшого переміщення прямої

, при якому вона паралельна положенню, що призначено в результаті коригування, змінене співвідношення значень дискретного скруту зберігається.

Запропонована схема формування допускає як одночасне згущення всіх вихідних ділянок ДПК, так і локальне згущення будь-якого числа ділянок.

Наприклад, при локальному згущуванні i-ої ділянки ДПК

призначається положення , при якому [ ], [ ]

(рис. 3.19). Отримані в результаті згущення ланки [ ], [ ], [

], [ ], [ ] розглядаються як вихідні при наступних згущеннях. Задачею локальних згущень є вирівнювання довжини хорд СЛЛ і ланок ЛЗР. Близькі по довжині ланки ЛЗР забезпечують стійкість процесу згущення і плавну зміну значень дискретних характеристик уздовж точкового ряду, що формується.

3.4.4 Алгоритм згущення монотонної ДПК на основі гранної полярної поверхні

1. Для кожної ділянки ДПК призначаються положення осей ПК

згущення, при яких вони проходять через середини ланок вихідної ЛЗР (рис. 3.22). Отримуємо попередню ламану звороту, яка складається з ланок згущення, довжина яких максимальна, а проміжні ланки виродилися в точки.

Виходячи з розташування точок перетину ланок вихідної ЛЗР і осей ПК

згущення визначається можливість формування , що складається з

ланок згущення і проміжних ланок. Умовою формування є

розташування точок , в які виродилися проміжні ланки, в межах відрізків

, обмежених точками перетину вихідних осей ПК з осями ПК згущення сусідніх ділянок. При необхідності можливе корегування положення вузлів попередньої ламаної звороту з метою їх розташування в

центрі відрізків .

2. Здійснюється локальне згущення окремих ділянок ДПК (п. 3.5.2). Мета локального згущення – вирівнювання довжини ланок ламаної звороту, що формується. Локальні згущення здійснюються до досягнення заданої різниці довжин максимальної і мінімальної ланок, яка не повинна перевищувати співвідношення 2/3.

3. Одночасне згущення всіх ділянок ДПК здійснюється на основі попередньої ламаної звороту з рівномірним розподілом довжин ланок (п. 3.5.3). Положення точок згущення визначаються в результаті віддалення осей ПК згущення від однойменних центрів вихідних ПСф. В результаті довжини проміжних ланок збільшуються, а довжини ланок згущення зменшуються. Остаточне положення осей ПК визначається в результаті

ітерацій, мета яких – формування з близькими по довжині ланками.

Після призначення точок згущення на всіх ділянках вихідної ДПК, характеристики якої представлені в таблицях 2.7, 2.8, отримано точковий ряд, який задає характеристики, що представлені в таблиці 3.5.

Таблиця 3.5

Дискретні характеристики згущеної ДПК

№ ділянки		, рад/мм	hi, мм	RПКi, мм	RПСфi, мм	|Ti,Ti+1|, мм
вихідної ДПК	згущеної ДПК					
3	5	2,4461	27,3842	86,2965	101,8500	9,0613
	6	2,6951	27,3842	82,2898	97,3278	9,0888
4	7	2,9504	38,0398	78,2422	92,8095	9,0536
	8	3,2047	38,0398	74,6888	88,2483	9,1019
5	9	3,7405	23,1362	71,1991	83,7122	9,1972
	10	4,1825	23,1362	67,2591	79,2384	9,2511
6	11	4,6928	32,0682	63,2691	74,7697	9,2302
	12	5,2107	32,0682	59,7767	70,2595	9,2917
7	13	6,3152	18,8281	56,3746	65,7983	9,4225
	14	7,2940	18,8281	52,5506	61,4312	9,5242

Формування монотонної ДПК на основі ГПП зводиться до призначення центрів ПСф, які проходять через точку згущення і три вихідні точки. Кожна точка згущення визначає чотири ПСф, центри яких належать чотирьом ланкам вихідної ЛЗР і кожній вихідній ланці ЛЗР належать центри чотирьох ПСф згущення. Відповідність послідовності розташування уздовж точкового ряду ПСф і послідовності розташування їх центрів на ланках ЛЗР забезпечує монотонність зміни значень дискретних характеристик.

3.5 Діапазони можливих значень геометричних характеристик ДПК

Стичне коло і сферу в i-й точці ДПК можна визначити проходженням через точку i та нескінченно близькі до неї точки кривої [71, 315]. Межі діапазонів можливих значень радіусів кривини і стичних сфер можна визначити як крайні значення, які можуть приймати радіуси відповідних прилеглих кіл і сфер.

В результаті призначення точки згущення на ділянці (i, i+1) отримуємо ПК(i, iзг, i+1), радіус якої не повинен бути менше радіуса ПКi+1(i, i+1, i+2) –

[112]. Мінімальний з можливих радіус ПК(i, iзг, i+1) означає, що точка iзг призначена на ПКi+1. В цьому випадку ділянка (i, i+2) монотонної ДПК

формується як дуга цього кола. З цього випливає, що – нижня межа діапазону можливих значень радіуса кривини ДПК в точці i – Ri. Верхня межа діапазону – максимальний з можливих радіус ПК(i-1, iзг, i), яка одержується в результаті призначення точки згущення на ділянці (i-1, i).

Значення цього радіусу дорівнює – радіусу вихідної ПКi-1(i-2, i-1, i).

Таким чином, діапазон можливих значень радіуса кривини монотонної ДПК в точці i обмежений значеннями

.

Аналогічні міркування покажуть, що для i-тої точки вихідної ДПК

діапазон можливих значень радіуса стичної сфери обмежений радіусами ПСфi-2(i-3, i-2, i-1, i) і ПСфi+1(i, i+1, i+2, i+3):

.

Діапазони значень Ri і згущеної ДПК зменшуються і обмежуються радіусами відповідних ПК і ПСф згущення.

Дискретний скрут визначається не окремим геометричним образом, а відношенням кута φi між послідовними прилеглими площинами до довжини відповідної хорди СЛЛ. Тому значення дискретного скруту на ділянках ДПК

( ) не завжди обмежують діапазони можливих значень скруту в її точках. Відзначимо, що при згущенні ДПК із забезпеченням монотонної зміни

значень (п. 3.3.3) призначення точки згущення зменшує кут між сусідніми ПП в середньому в два рази, а довжина відповідної хорди зменшується менш, ніж в два рази. Ця закономірність дозволяє оцінювати

значеннями дискретного скруту тільки верхню межу значень скруту в точках ДПК, що формується.

Висновки по третьому розділу

У розділі розроблені способи формування просторових ДПК, що складаються з як завгодно великої кількості точок. ДПК формується згущенням вихідного точкового ряду і задана координатами його вузлів. Точки згущення призначаються виходячи з умови можливості інтерполяції точкового ряду, що формується, монотонною кривою – лінією постійного ходу, вздовж якої значення кривини і радіусів стичних сфер змінюються монотонно. В результаті досліджень, проведених у розділі, отримані нові теоретичні та практичні результати.

1. Запропоновано схеми згущення точкового ряду, засновані на призначенні точки згущення в межах контуру, що одержується в перетині області можливого розташування кривої лінії з заданими геометричними характеристиками площиною. Такий підхід дозволив звести формування просторової ДПК до розв’язання позиційних задач на площині. Схема визначення положення точки згущення дозволяє враховувати всю область можливого розв’язку і контролювати локалізацію цієї області при накладанні на ДПК, що сформується, додаткових умов.

2. Встановлено, що призначення точок згущення в межах багатокутників, які є перетином прилеглих тетраедрів, гарантує формування точкового ряду, що належить кривій лінії постійного ходу. Варіативність одержуваного розв’язку дозволяє контролювати значення дискретного скруту на ділянках ДПК, що формується.

На підставі аналізу залежності характеристик вихідних прилеглих тетраедрів, положення точки згущення і характеристик тетраедрів, отриманих в результаті згущення, запропонований спосіб визначення всередині області розташування ДПК постійного ходу області розташування ДПК з монотонною зміною значень скруту. Призначення точок згущення в межах цих областей гарантує монотонну зміну значень дискретного скруту вздовж точкового ряду, отриманого в результаті як завгодно великої кількості згущень.

3. Визначено область можливого розташування точки згущення монотонної ДПК. Це криволінійний багатокутник, який обмежено дугами п'яти кіл, що належать суміжним прилеглим сферам. Таким чином, область розташування точки згущення монотонної ДПК визначається конфігурацією частини вихідного точкового ряду, що складається з восьми послідовних точок.

Доведено, що призначення точки згущення в межах криволінійного багатокутника призводить до локалізації області можливого розташування частини ДПК, від самого початку обмеженою послідовністю з п'яти тригранників прилеглих сфер. При цьому поєднання дискретних характеристик отриманого точкового ряду відповідає тому ж типу монотонної ДПК, що і характеристики вихідного точкового ряду.

Призначення точок згущення в межах областей їх можливого розташування, які локалізуються в процесі згущення, гарантує формування

точкового ряду, що належить монотонній ДПК.

4. Встановлено залежність між згущенням ДПК і формуванням її гранної полярної поверхні, грані якої належать площинам, що проходять через центри послідовних прилеглих сфер. Призначенню кожної точки згущення відповідає заміна однієї вихідної грані на дві нові грані меншого розміру. Положення точки згущення однозначно визначає розташування і конфігурацію граней згущення і навпаки.

Гранна полярна поверхня формується на основі своєї ламаної звороту – просторової ламаної лінії, ланки якої обмежені центрами послідовних прилеглих сфер. Доведено можливість і запропоновано механізм формування характеристик ДПК через контроль конфігурації ламаної звороту гранної полярної поверхні. Дискретні характеристики згущеної ДПК (прилеглі площини, кола та сфери, значення дискретного скруту), а також відповідні їм положення точок згущення однозначно визначаються положенням і розмірами ланок ламаної звороту.

5. На підставі аналізу взаємозв'язку дискретних характеристик ДПК і метричних характеристик гранної полярної поверхні запропоновано алгоритм формування точкового ряду, що складається з як завгодно великої кількості точок, які належать монотонній кривій лінії. Алгоритм забезпечує послідовне збільшення числа граней гранної полярної поверхні, які зменшуються в розмірах, кожна з яких визначає область можливого розташування ділянки ДПК з заданими характеристиками. Точність, з якою гранна полярна поверхня, що формується, представляє полярний торс монотонної кривої лінії, досягається числом необхідних згущень.

6. Формування ДПК у вигляді точкового ряду означає, що крива не визначена однозначно на всіх етапах моделювання. Розроблені в розділі способи дозволяють визначати область можливого розташування ДПК і діапазони можливих значень її характеристик. Наявність області розташування ДПК, яка послідовно локалізується в процесі згущення, – необхідна і достатня умова формування кривої за заданими умовами.

Кожній умові, що накладаються на ДПК, відповідають обмеження на область її можливого розташування. Задача формування ДПК, що задовольняє сукупності різних вимог, зводиться до визначення геометричних образів, які є перетином відповідних областей простору.

7. Запропоновані способи моделювання ДПК на основі області її можливого розташування дозволяють:

- формувати ДПК по частинах, представлених будь-якою кількістю вихідних точок;
- проводити корегування отриманого розв’язку на будь-якій стадії формування;
- накладати на ДПК, що формується, додаткові умови;
- відмовитися від аналітичного подання ДПК і контролювати її властивості через характеристики прилеглих тетраедрів, тригранників прилеглих сфер, гранної полярної поверхні.

Основні результати досліджень, проведених в третьому розділі, опубліковані в роботах – [79, 80, 82, 86, 89, 90, 105, 107, 112, 401, 402].

Використані в розділі результати досліджень інших авторів опубліковані в роботах – [315].

РОЗДІЛ 4
ФОРМУВАННЯ ДПК ВИЩИХ ПОРЯДКІВ ФІКСАЦІЇ

ДПК формується на основі точкового ряду і характеристик, призначених у вихідних точках. Це можуть бути положення дотичних прямих, стичних площин, значення кривини, скруту, радіусів стичних сфер. Фіксовані характеристики не входять у вихідні умови на формування ДПК. Вони повинні бути призначені в процесі моделювання виходячи з умови мінімальної кількості особливих точок у ДПК. При такій постановці варіант, коли фіксовані характеристики задані заздалегідь, є окремим випадком задачі , що вирішується в розділі.

Призначення фіксованих характеристик дозволяє локалізувати область можливого розташування ДПК. В результаті, згущення ДПК може здійснюватися на основі дотичних тетраедрів, тригранників дотичних сфер, гранної поверхні нормальних площин.

Формування ДПК в межах областей, визначених з урахуванням фіксованих характеристик, дозволяє зменшити частину кривої, область можливого розташування якої змінюється при призначенні точки згущення. Збільшення локальності формоутворення за рахунок реалізації зазначеної можливості – важлива задача розділу.

4.1 Згущення ДПК на основі дотичних тетраедрів

4.1.1 Призначення дотичних прямих в точках ДПК

Дотична до ДПК в точці i (ti) визначає дві дотичні площини (ДП): ДП(i -1, ti) і ДП(ti, i+1), що перетинають ДПК в точках i-1 та i+1 відповідно. Чотири послідовні ДП: ДП(i-1, ti), ДП (ti, i+1), ДП(i, ti+1), ДП(ti+1, i+2) обмежують дотичний тетраедр ДТi (рис. 4.1) . Характеристиками ДТi є величини двогранних кутів ψi, wi, wi+1, що визначають значення дискретного скруту на ділянці ДПК (i, i+1) [102].

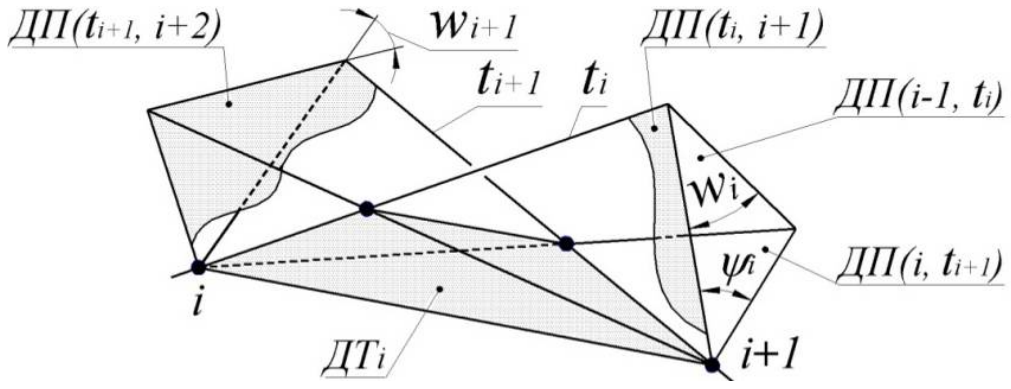


Рис. 4.1. Елементи дотичного тетраедра

Вихідна умова розташування дотичних прямих: дотичні тетраедри визначають той же хід ділянок ДПК, що і відповідні прилеглі тетраедри (ПТi

). Тоді ДП(ti, i+1) і ДП(i, ti+1) повинні розташовуватися всередині двогранного кута $\varphi_i \leq 90^\circ$ (рис. 2.10). При цьому напрям повороту ДП(ti, i+1) на кут ψi<φi до суміщення з ДП(i, ti+1) збігається з напрямком повороту ППi на кут φi до суміщення з ППi+1.

Для ДПК, в вузлах якої положення дотичних зафіксовані, значення дискретного скруту визначається по формулі (2.8). Вимагатимемо, щоб закономірність зміни значень уздовж ділянок ДПК відповідала закономірності зміни відповідних значень , визначених за формулою (2.7).

Прирівнявши , отримуємо формулу для визначення величини кута ψi [82]:

. (4.1)

Розташування двогранного кута ψi всередині ϕ_i визначається кутом ′ψi між ДП(ti, i+1) і ПП(i, i+1, i+2). Значення кутів ψ′i-1 і ′ψi визначають положення дотичної ti, а ψ′i і ′ψi+1 визначають ti+1. Співвідношення величин ′ψi і ψi′ визначає динаміку зміни значень дискретного скруту вздовж ділянки ДПК, яка буде сформована в результаті послідовних згущень. Наприклад, при ′ψi=0 ділянка ДПК (i-1…i+1) буде сформована плоскою і розташованою у ППi.

Для ДПК з монотонною зміною скруту співвідношення ′ψi / ψi′ залежить від довжини хорд СЛЛ і збільшення значень скруту на відповідних ділянках кривої. Вираз для визначення величин двогранних кутів будемо шукати у вигляді

(4.2)

де Kh – коефіцієнти, що враховують співвідношення довжин хорд СЛЛ, KB – коефіцієнти, що враховують збільшення скруту на ділянках ДПК.

Збільшення довжини хорди hi-1=|i-1, i| призводить до збільшення кута ′ψi, а кут ψi′ збільшується в результаті збільшення hi+1 (п. 2.3.2). Виходячи з цієї залежності, значення коефіцієнтів Kh визначимо, вирішивши систему рівнянь:

4.3)

В результаті отримуємо:

;

.

Для ДПК постійного скруту коефіцієнти KB призначаються рівними одиниці і положення ДП визначаються виходячи з значень , K, .

За допомогою коефіцієнтів KB враховується перерозподіл величин кутів ′ψi і ψi′, який викликано монотонною зміною значень скруту вздовж ДПК. Якщо скрут зростає в напрямі збільшення нумерації вузлів, то кут ′ψi збільшується за рахунок зменшення кута ψi′.

Коефіцієнти KB визначимо виходячи із значень дискретного скруту на ділянках ДПК. Для цього будемо вимагати виконання умов:

(4.4)

де ; .

Виконання (4.4) забезпечує положення прямих, дотичних до ДПК у вихідних точках, при якому:

- значення дискретного скруту на вихідних ділянках дорівнюють відповідним значенням ;

- зберігається можливість забезпечити монотонну зміну значень дискретного скруту вздовж точкового ряду, який формується в результаті наступних згущень.

Після визначення положення дотичних прямих, дискретний скрут в точках ДПК ( ) визначається за формулою (2.9).

ДПК з монотонним збільшенням скруту формується на основі точкового ряду, уздовж якого виконується умова:

. (4.5)

Для забезпечення виконання (4.5) можливе корегування вихідних положень ДП. Наприклад, при збільшенні кута ′ψi за рахунок зменшення ψi′ відбувається збільшення значення і зменшення . При збільшенні кута ψi за рахунок зменшення ψi′ збільшується значення і зменшується . В результаті отримуємо послідовність ДП, що обмежують ланцюжок дотичних тетраедрів, в межах яких розташовуються всі криві постійного ходу , що інтерполюють вихідний точковий ряд і мають у вихідних точках призначене положення дотичних прямих.

4.1.2 Призначення положень стичних площин (СП) в точках ДПК

Вихідний діапазон можливого розташування СП в точці i (СПi) – двогранний кут wi, обмежений ДП(i-1, ti) і ДП(ti, i+1). Визначимо, як змінюється вихідний діапазон при накладенні умови монотонного зростання значень дискретного скруту вздовж ДПК [96].

СПi ділить wi на два двогранних кута (рис. 2.11):

-′wi, обмежений СПi і ДП(i-1, ti);

- w′i, обмежений СПi і ДП(ti, i+1).

Співвідношення величин цих кутів визначає динаміку зміни значень скруту ДПК, що формується, уздовж ділянки (i-1…i+1). Наприклад, якщо СПi збігається з ДП(i-1, ti), то ділянка (i-1…i) буде сформована плоскою, а вздовж ділянки (i…i+1) збільшення значень скруту буде максимально.

Введемо ще дві дискретні характеристики, які оцінюють скрут в i-й точці ДПК: і . Ці характеристики дозволяють оцінити, як швидко ДПК відходить від СП на ділянці, що обмежена сусідніми вихідними точками.

Вимагатимемо, щоб для ДПК, уздовж якої значення скруту монотонно зростають, виконувалися умови:

, (4.6)

, (4.7)

Можуть бути різні способи визначення положень СП виходячи з умов (4.6), (4.7). Покажемо два таких способи.

4.1.2.1 Призначення положень стичних плщин на основі уточнення області їх можливого разташування

Крайнє положення, яке СПi може займати виходячи з умови (4.6), визначається рівністю:

. (4.8)

Позначимо вказане положення СПi як СПi′, а відповідний цим положенням кут ′wi як . Площина СПi може бути призначена в межах двогранного кута, обмеженого ДП(i-1, ti,) і СПi′ (рис. 4.2). Положення СПi′ визначається величиною

.

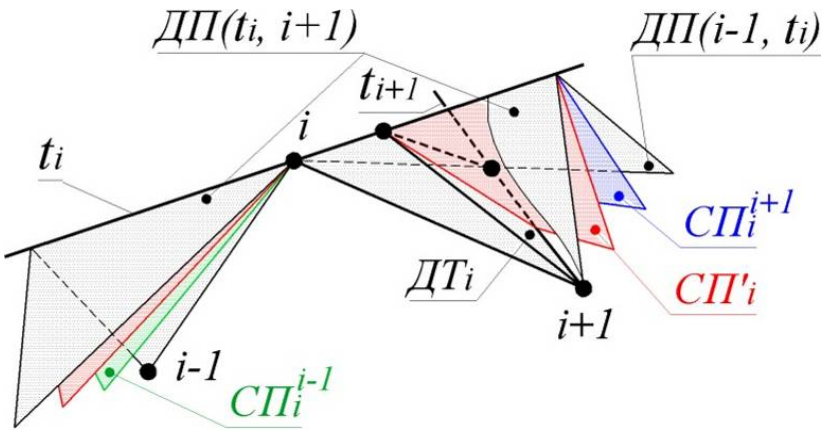


Рис. 4.2. Діапазон розташування стичної площини

Умови, аналогічні (4.8), визначають кути ′wmax для інших вузлів ДПК. Подальше уточнення отриманих областей здійснюється виходячи з умови (4. 7).

Відповідно до умов w′i=′wi+1 і ′wi+1 < значення кута між СПi і ДП(ti, i+1) не може перевищувати . Відповідне крайнє положення СПi позначимо як .

Відповідно до умов w′i-1=′wi і w′i-1 > wi-1 - значення кута між СПi і ДП(i-1, ti,) не може бути менше ніж wi-1 - . Крайнє щодо

виконання зазначених умов положення СПi позначимо . Площина СПi

призначається в межах двогранних кутів, обмежених СПi′ і , СПi′ і

одночасно. Варіант перекриття зазначених кутів показаний на рис. 4.3 , де зображені прямі, за якими площини, що обмежують діапазон розташування СПi, перетинаються площиною, яка перпендикулярна дотичній ti. Діапазон розташування СПi існує при одночасному виконанні умов: wi-1 <

+ і wi < + . Уточнений діапазон розташування СПi

обмежений площиною СПi′ і тією з площин або , яка становить з площиною ДП(i-1, ti,) більший кут (на рис. 4.3 цей діапазон заштриховано).

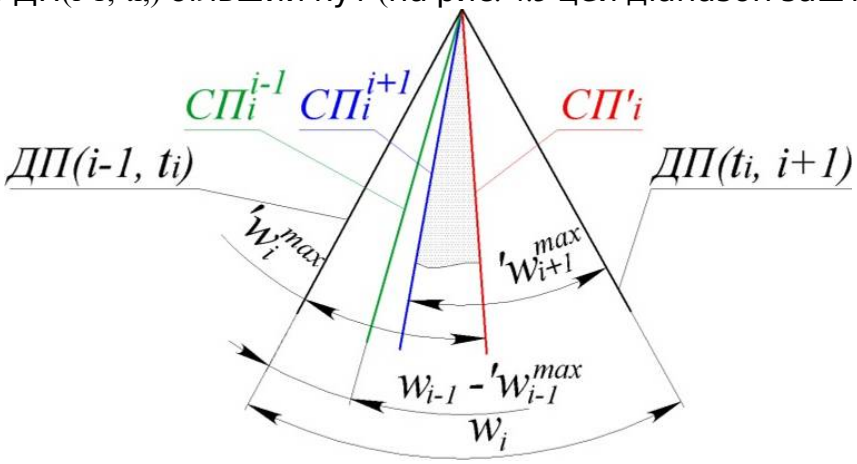


Рис. 4.3. Уточнення діапазону розташування стичної площини

Якщо діапазон обмежено площиною , то його величина

дорівнює - (wi-1 -). Величина діапазону, якій обмежено

площиною , дорівнює - (wi -).

За аналогічною схемою «по ланцюжку», в початок і кінець точкового ряду, уточнюються всі області розташування СП. В результаті величини всіх областей узгоджуються з мінімальною за розмірами областю, яка не уточнюється. По центру цієї мінімальної області у відповідній вихідній точці ДПК призначається положення СП. В інших вихідних точках СП призначаються виходячи з умови (4.7) і вже призначеного положення СП в сусідній точці.

4.1.2.2 Призначення положень стичних площин на основі співвідношення значень дискретного скруту

Положення стичної площини, призначеної в i-й вихідної точці ДПК, визначається значеннями кутів ′wi і w′i, на які СПi розділяє двогранний кут

wi (рис. 4.2). У першому наближенні співвідношення кутів може бути призначено виходячи зі значень дискретного скруту на i-1-й та i-й ділянках:

.

Для кожної ділянки визначається величина

,

– яка характеризує відхилення вихідних положень СП від положень, що відповідають (4.7). Коригування положень СП проводиться з метою вирівнювання значень уздовж точкового ряду. Для цього

визначається ділянка, на якій значення максимально і здійснюється коригування положень СП в точках, що обмежують ділянку.

Наприклад, нехай для ділянки (i, i+1) значення максимально і необхідно зменшити величину . Зменшити можна змінюючи положення СПi в сторону збільшення кута w′i або змінюючи положення СПi +1 в сторону зменшення кута ′wi+1. У першому випадку одночасно з зменшується значення , а в другому випадку – . Якщо , то зменшення здійснюється за рахунок зміни положення СПi-1. Коригування відбувається в результаті ітерацій до досягнення положення СПi-1, при якому .

Положення СП послідовно коригується у вузлах, що обмежують ділянки ДПК з максимальним значенням . Коригування вважаємо завершеним, коли значення на кожній з ділянок стануть менше призначеної величини.

Для ДПК, у вузлах якої визначено положення СП, умова монотонного зростання значень дискретного скруту має вигляд:

(4.9)

Умова (4.9) визначає діапазони значень скруту, які можуть бути призначені у вихідних точках ДПК. Для i-й точки цей діапазон становить:

. (4.10)

Фіксовані у вихідних точках значення скруту є параметрами формоутворення ДПК і повинні бути забезпечені в результаті наступних згущень.

4.1.3 Згущення точкового ряду на основі стичних тетраедрів

Призначивши у вихідних точках положення дотичних прямих і стичних площин, отримуємо нову ДПК. Ця ДПК представлена тим же точковим рядом, але в її вузлах призначені положення основних тригранників.

Дві стичні площини: СПi і СПi+1, а також дві дотичні площини: ДП(i, ti+1) і ДП(ti, i+1) обмежують тетраедр (рис. 2.21), який будемо називати стичним (СТi). Послідовність СТ, визначених на кожній з ділянок, обмежує область можливого розташування ДПК. Призначення точок згущення в межах відповідних СТ забезпечує формування ДПК постійного ходу.

У разі формування ДПК з монотонним зростанням скруту положення точки згущення i-ої ділянки iзг, дотичної прямої tзг і стичної площини СПзг в цій точці, призначаються виходячи з умови [106]:

, (4.11)

де w′i – кут між СПi і ДП(ti, iзг);
ψ′i – кут між ДП(ti, iзг) і СПзг;
′wсг – кут між СПзг і ДП(tзг, i+1);
ψсг – кут між ДП(tзг, i+1) і ДП(iсг, ti+1);
′wi+1 – кут між ДП(iзг, ti+1) и СПi+1.
hзг=|i, iзг|=|iзг, i+1| – довжина хорди СЛЛ.

Розглянемо варіант згущення ділянки ДПК, який забезпечує виконання умови (4.11). Точка iзг призначається на прямій (Ki, iзг), по якій перетинаються площини ППзг(i, iзг, i+1) і Pi. Початкове положення ППзг визначається виходячи зі співвідношення:

,

де ′φi – кут між ДП(ti, i+1) та ППзг;
φ′i – кут між ППзг та ДП(i, ti+1);

і – значення скруту ДПК, зафіксовані в точках i та i+1.

Призначення iзг задає положення площин ДП(ti, iзг) і ДП(iзг, ti+1) (рис. 4.4).

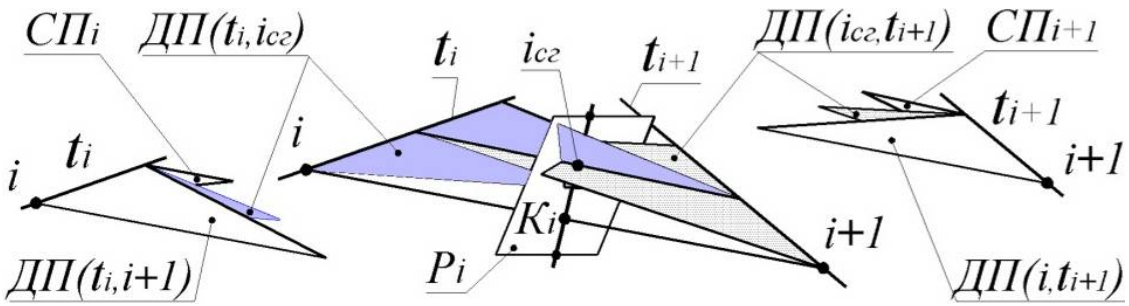


Рис. 4.4. Призначення точки згущення в межах стичного тетраедра

Положення iзг на прямій (Ki, iзг) визначається виходячи з умови:

. (4.12)

Для виконання умови (4.12) можливе коригування положення iзг.

Наприклад, при збільшенні відстані |Ki, iзг| величини і

зменшуються, а при збільшенні кута ′φi значення зменшується, а – збільшується.

Дотичну tзг визначимо як пряму перетину площин ДП(i, tзг) і ДП(tзг, i+1). Положення зазначених площин визначається величинами кутів ψi і ψзг, які ці площини складають з ДП(ti, iзг) і ДП(iзг, ti+1) відповідно. У першому

наближенні , де φi – кут між ППзг і ПП(i-1, i, iзг); , де φзг – кут між ППзг і ПП(iзг, i+1, i+2).

Площини ДП(i, tзг) і ДП(tзг, i+1) обмежують двогранний кут wзг, який є діапазоном можливого розташування СПзг. Якщо умова

wзгi + ′wi+1 (4.13)

виконується з похибкою, що не перевищує задану величину, то розташування площин ДП(i, tзг) і ДП(tзг, i+1) визначено остаточно. В іншому випадку рівність (4.13) забезпечується за рахунок коригування величин кутів ψi і ψсг.

Положення СПзг в межах двогранного кута wзг визначається виходячи з умови:

(4.14)

У таблиці 4.1 представлені значення дискретного скруту ДПК, яка отримана в результаті призначення точки згущення 4зг і основного тригранника в цій точці. Точка згущення призначена в межах стичного тетраедра, що обмежує область розташування ділянки (4;5) вихідної ДПК, характеристики якої представлені в таблиці 2.4.

Таблиця 4.1

Значення дискретного скруту

, рад/мм	, рад/мм	, рад/мм	, рад/мм	, рад/мм	, рад/мм	, рад/мм
2,1541	2,3081	2,5604	2,6187	2,7753	2,8674	3,1756

Після призначення СПзг перевіряється виконання умови (4.11) і в разі необхідності може коригуватися положення точки iзг, дотичних і стичних площин.

Відзначимо, що призначення в початкових точках фіксованих положень СП і значень скруту забезпечує локальність формування дискретних характеристик на ділянках ДПК. Призначення точки згущення i -ої ділянки не призводить до зміни значень дискретного скруту на сусідніх ділянках. Виконання в процесі згущення умови (4.11) забезпечує сходження дискретних характеристик до призначених у відповідних точках положень СП і значень скруту ДПК.

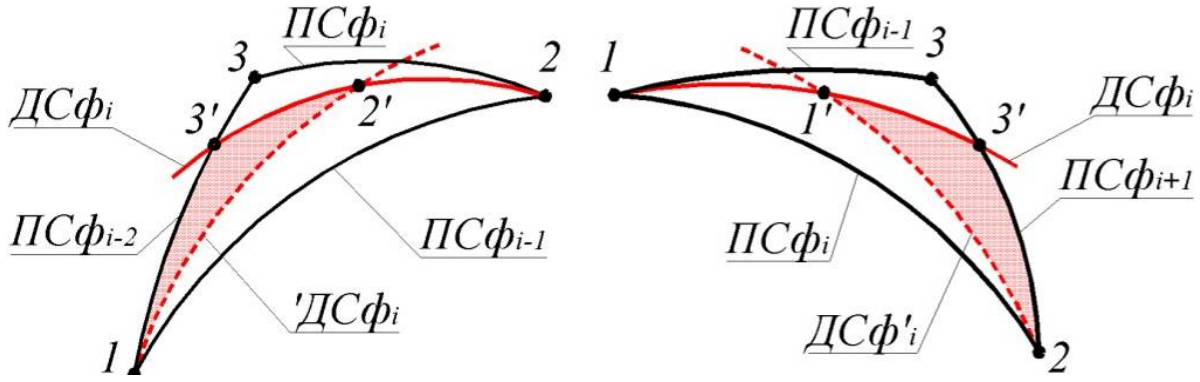
4.2 Згущення ДПК на основі тригранників дотичних сфер (ТДСф)

Дотичні прямі, призначені у вихідних точках ДПК, визначають дотичні з ДПК сфери (ДСф). Послідовність ДСф обмежує ланцюжок ТДСф. Кожен ТДСф уточнює область можливого розташування відповідної ділянки ДПК, яку спочатку обмежено тригранником прилеглих сфер. Умовою формування ТДСф є відповідність їх характеристик характеристикам вихідних ТПСф.

4.2.1 Призначення дотичної прямої у вихідній точці ДПК

Положення ti задає два дотичних кола: ДК(i-1, i, ti) та ДК(i, ti, i+1) і три дотичні сфери: ′ДСфi(i-2, i-1, i, ti), ДСфi(i-1, i, ti, i+1), ДСфi′(i, ti, i+1, i+2).

В результаті заміни граней ТПСф на відсіки ДСф уточнюється область розташування ДПК на чотирьох ділянках [83]. На ділянці (i-1, i) уточнений тригранник обмежують ПСфi-2, ′ДСфi, ДСфi (рис. 4.5 а), а на ділянці (i, i+1) це ДСфi, ПСфi+1 і ДСф′i (рис. 4.5 б).



а) б)

Рис. 4.5. Уточнена область розташування ДПК

На рисунку показані перетини сферичних тригранників, що обмежують область розташування ДПК на ділянках (i-1, i) і (i, i+1), площинами Pi-1 і Pi відповідно. Уточнена область розташування ДПК заштрихована.

Заміну граней уточнених областей розглянемо на прикладі i-ої ділянки ДПК (рис. 4.5, б). Площина Pi перетинає ТПСфi по криволінійному трикутнику (1,2,3)i, а сферичний тригранник, отриманий при призначенні ti, – по трикутнику (1′,2,3′)i. Обхід вершин трикутників проти годинникової стрілки визначає правий хід ДПК, що формується. Розташування вершини 3 за межами ПСфi, а вершини 3′ – за межами ДСфi відповідає збільшенню уздовж ДПК радіусів стичних кіл і сфер.

На ділянці (i-2, i-1) уточнений тригранник обмежують ПСфi-3, ПСфi-2 і ′ДСфi (рис. 4.6 а), а на ділянці (i+1, i+2) – ДСф′i, ПСфi+1, ПСфi+2 (рис. 4.6 б).

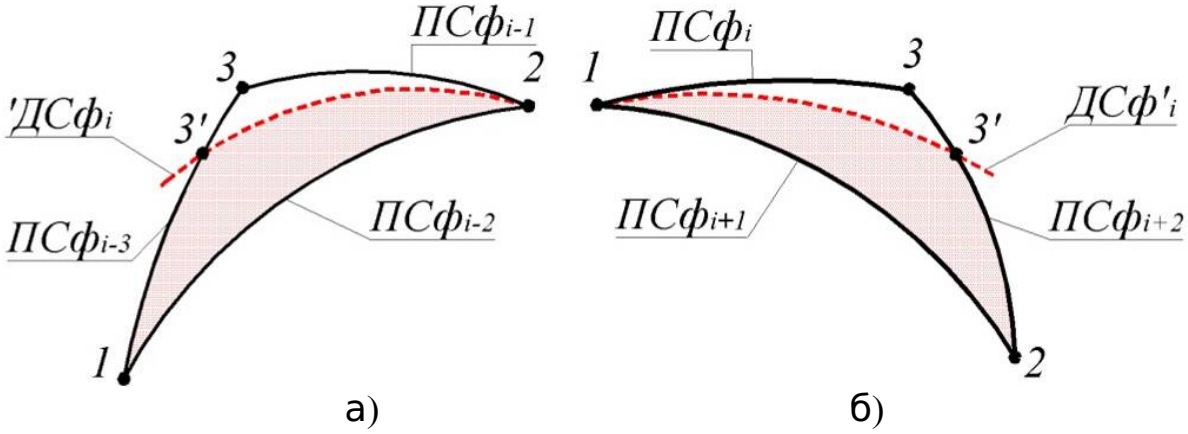


Рис. 4.6. Уточнена область розташування ДПК

Перераховані характеристики сферичних тригранників будуть забезпечені, якщо значення радіусів ДСф, отриманих в результаті призначення ti, належать діапазонам:

$$R\text{ПСф}i\text{-}2 > R'\text{ДСф}i > R\text{ПСф}i\text{-}1;$$
$$R\text{ПСф}i\text{-}1 > R\text{ДСф}i > R\text{ПСф}i;$$
$$R\text{ПСф}i > R\text{ДСф}'i > R\text{ПСф}i\text{+}1.$$

Зазначене розташування дотичних сфер є необхідною умовою формування монотонної ДПК. У разі порушення умови отримаємо ділянку, на якій сферичний тригранник визначає інші властивості ДПК і виникнення особливої точки стає неминучим. Положення ti, яке забезпечує задані характеристики сферичних тригранників, можна визначити за такою схемою.

Призначається положення ДСфi, при якому вона належить пучку сфер, обмеженому ПСфi-1 і ПСфi. Коло ДК(i, ti, i+1) належить цій сфері і перетинається площиною Pi в точці 1′ (рис. 4.5, б). Розташування ДСф′i всередині пучка сфер, який обмежений ПСфi і ПСфi+1 забезпечує приналежність точки 1′ дузі [1, 3'], яка належить колу перетину ДСфi площиною Pi.

Точка 1′ задає ДК(i, ti, i+1), а значить і дотичну до цього кола пряму ti. У свою чергу положення ti задає ДК(i-1, i, ti), яке перетинається площиною Pi -1 в точці 2′ (рис. 4.5, а). Належність точки 2′ дузі [2, 3′] кола, по якій ДСфi перетинається площиною Pi-1, забезпечує приналежність ′ДСфi пучку сфер, який обмежено ПСфi-2 и ПСфi-1.

Зазначене положення точки 2′ можна забезпечити коригуванням положення точки 1′. При переміщенні 1′ по ДСфi в напрямі точки 1 (рис. 4.5, б) точка 2′ переміщується по цій же сфері в напрямі точки 2 (рис. 4.5, а). В крайньому положенні, коли точка 1′ співпаде з точкою 1 відбувається збіг точок 2′ і 2. У цьому випадку отримуємо збіг кіл ДК(i-1, i, ti), ДК(i, ti, i+1) і ПК(i-1, i, i+1), а ділянка ДПК (i-1…i+1) буде належати ПК(i-1, i, i+1).

Розглянута схема доводить існування положення ti, при якому гарантовано відповідність характеристик уточненої області розташування ДПК характеристикам вихідних ТПСф. Критерієм такого становища є розташування ДСф, отриманих в результаті призначення ti, в межах пучків сфер, обмежених відповідними вихідними ПСф. В іншому випадку задача подальшого формування монотонної ДПК не матиме розв’язку.

Наприклад, при RКСфi < RПСфi на ділянці (i, i+1) отримаємо сферичний тригранник, перетин якого (1′, 2, 3′)i площиною Pi показано на рис. 4.7. Такому сферичному трикутнику відповідає лівий хід, зменшення радіусів кривини і збільшення радіусів стичних сфер уздовж ДПК.

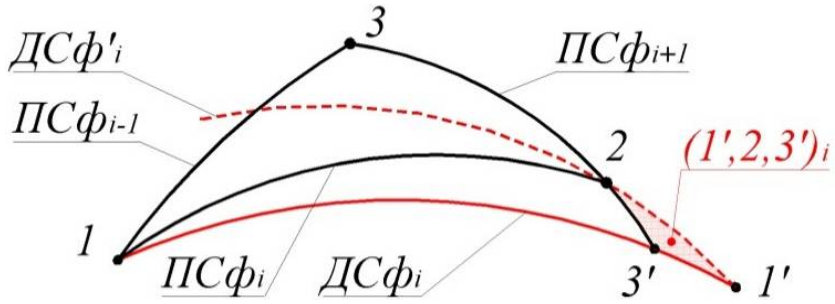


Рис. 4.7. Невідповідність конфігурації сферичного тригранника характеристикам монотонної ДПК

4.2.2 Формування тригранників дотичних сфер

Дотичні ti і ti+1 визначають сфери, що обмежують ТДСфi. Це ДСфi(i-1, i, ti, i+1), ДСфi+1(i, i+1, ti+1, i+2), ДСф(i, ti, i+1, ti+1) [89].

При призначенні дотичних прямих необхідно враховувати обмеження, які на їх розташування накладають дотичні, вже призначені в сусідніх точках . Наприклад, якщо положення ti+1 визначається після призначення ti, то точка перетину площини Pi і кола ДК(i, ti, i+1) (на рис. 4.8 це точка 2′) має бути розташована у межах криволінійного трикутника зі сторонами ДСфi, ДСф′i, ПСфi+1.

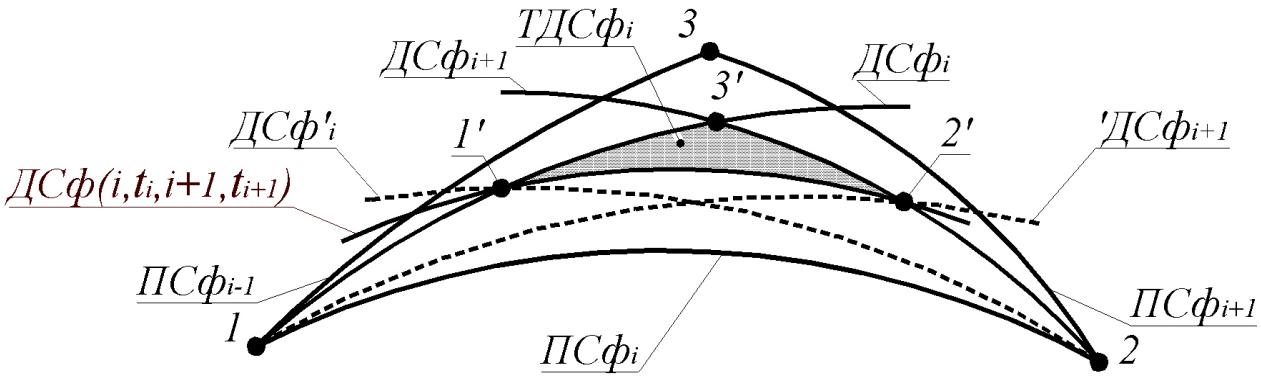


Рис. 4.8. Конфігурація i-го тригранника дотичних сфер

В іншому, умови призначення ti+1 аналогічні розглянутим вище умовам до розташування ti. Виконання цих умов гарантує розташування ТДСфi в межах ТПСфi. При цьому характеристики ТДСфi визначають ті ж властивості ДПК, що і вихідний ТПСфi.

Умови формування ТДСф на інших ділянках ДПК аналогічні розглянутим для ТДСфi.

4.2.3 Призначення точки згущення в межах ТДСфі

Точка згущення iзг призначається в межах криволінійного трикутника, по якому площину Pi перетинає ТКСфi. В результаті отримуємо дотичні сфери: ДСф(ti, i, iсг, i+1) і ДСф(i, iсг, i+1, ti+1), які перетинаються по ПК(i, iсг, i+1) [85] . Ці сфери поділяють ТДСфi на чотири частини (рис. 4.9).

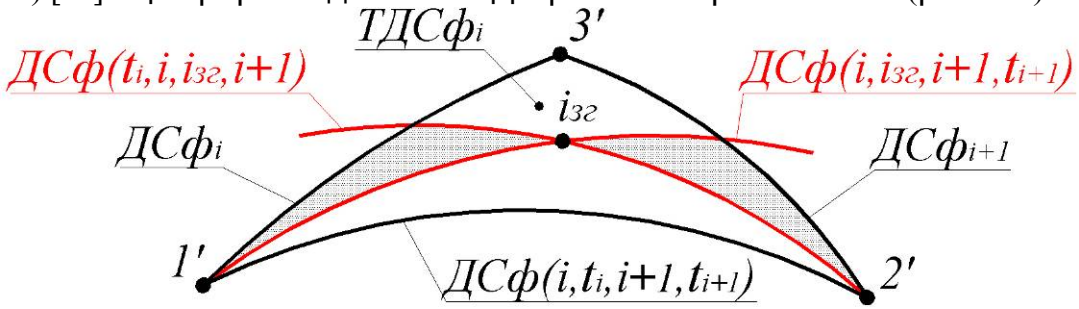


Рис. 4.9. Локалізація області розташування ДПК в результаті призначення точки згущення

На рисунку показано перетин площиною Pi сфер, що обмежують ТКСфi, і сфер, отриманих в результаті призначення iзг. Криволінійні трикутники, що відповідають чвертям ТКСфi, всередині яких проходить монотонна ДПК, заштриховані.

Сфера ДСф(i-1, i, ti, iзг) відсікає від чверті, ребрами якої є ДК(i, ti, i+1) і ПК(i, iзг, i+1), сферичний тригранник, який позначимо 'ТКСфi. Ділянка ДПК (i, iзг) розташовується всередині цього тригранника. Ділянка ДПК (iзг, i+1) розташовується усередині сферичного тригранника ТДСф'i, який від іншої чверті ТДСфi відсікає ДСф(iзг, i+1, ti+1, i+2).

В результаті призначення в точці iсг дотичної до ДПК прямої tзг отримаємо два нових ТДСф, які локалізують область розташування ДПК в межах 'ТДСфi і ТДСф'i. Це , обмежений ДСф(i-1, i, ti, iсг), ДСф(i, iзг, tзг, i+1), ДСф(i, ti, iзг, tзг) і ТДСфзг, обмежений ДСф(i, iзг, tзг, i+1), ДСф(iзг, i+1, ti+1, i+2), ДСф(iзг, tзг, i+1, ti+1).

Закономірності формування сферичних тригранників згущення розглянемо на прикладі , який обмежує область розташування ДПК на ділянці (i, iзг) (рис. 4.10).

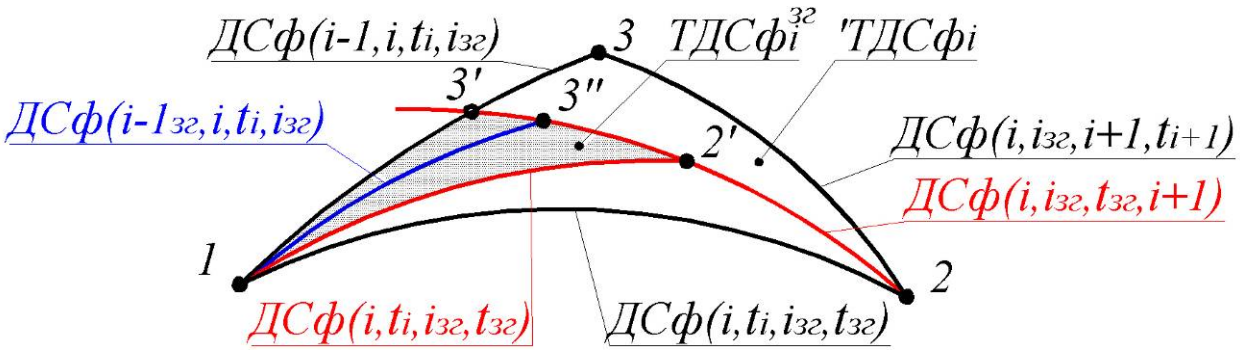


Рис. 4.10. Локалізація області розташування ДПК в результаті призначення дотичної в точці згущення

На рисунку показано перетин ТДСф'i і площиною 'Pi, яка проходить через середину хорди [i, iзг] перпендикулярно хорді. Сферичний тригранник (на рис. 4.10 зображено його перетин – криволінійний трикутник 1,2',3') повинен розташовуватися всередині 'ТКСфi. Положення tзг, при якому виконується зазначена вимога, можна задати призначивши точку 2'≡ДК(i, iзг, tзг)× 'Pi в межах перетину ТКСф'i – криволінійного трикутника (1,2,3)'i. Призначення точки згущення i-1зг на ділянці (i-1, i) призводить до подальшої локалізації . В результаті отримуємо тригранник, обмежений сферами: ДСф(i-1зг, i, ti, iзг), ДСф(i, ti, iзг, tзг), ДСф(i, iзг, tзг, i+1). Перетин цього тригранника площиною 'Pi – криволінійний трикутник (1,2', 3")'i (рис. 4.10). Належність точки 3" дузі [2',3'] – умова, що обмежує розташування точки i-1зг в межах ТКСфi-1. Закономірність формування ТКСфсг і сферичних тригранників згущення на інших ділянках ДПК аналогічні розглянутому вище.

В результаті призначення кожної точки згущення і дотичної до ДПК в цій точці отримуємо два нових ТДСф. Сферичні тригранники згущення розташовуються усередині вихідних тригранників і їх характеристики визначають монотонну ДПК з тими ж геометричними властивостями. Згущення ділянок можна здійснювати в будь-якій послідовності. Критерієм вибору черговості доцільно призначити розміри ТДСф або довжину хорди СЛЛ.

4.3 Згущення ДПК на основі гранної полярної поверхні нормальних площин (ГППN)

Дотичні прямі, призначені у вузлах ДПК, визначають положення нормальних площин. Кожна нормальна площина перетинає перпендикулярні площині попередньої і подальшої ділянок. В результаті отримуємо ГППN, що складається з граней, які по черзі, через одну, належать перпендикулярним (Pi) і нормальним (Ni) площинам (рис. 2.18). Центри дотичних сфер і кіл належать ребрам ГППN. Контроль їх положення дозволяє формувати задані геометричні характеристики ДПК.

4.3.1 Призначення нормальної площини в і-й точці вихідної ДПК

Осі дотичних кіл (′mi, mi′), за якими Ni перетинає Pi-1 і Pi, перетинаються з осями прилеглих кіл (ρi-1, ρi, ρi+1) в центрах ДСф. В результаті отримуємо ламану звороту ГПП, у якій вихідна ділянка Ti-1 - Ti - Ti+1 заміщена ділянкою Ti-1 - ′Li - Li - Li′- Ti+1 (рис. 4.11).

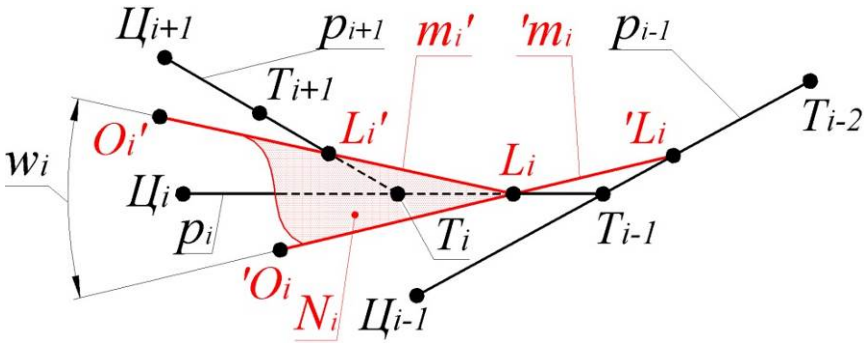


Рис. 4.11. Елементи гранної полярної поверхні

У центрі ДСф(i-1, i, ti, i+1) – точці Li перетинаються осі ρi, ′mi, mi′. Положення Li можна визначити в перетині площин: Li≡Pi-1× Pi× Ni. Положення центру ДСф(i-2, i-1, i, ti) – точки ′Li визначається перетином ′Li≡ρi-1× ′mi або ′Li≡Pi-2× Pi-1× Ni. Центр ДСф(i, ti, i+1, i+2) – точка Li′ визначається як Li′≡ρi+1× mi′ або Li′≡Pi+1× Pi+2× Ni. Центр ДК(i, i+1, ti) – точка ′Oi, розташовується на перетині осі ′mi і перпендикуляра, проведеного до ′mi з точки i. У точці Oi′ – центрі ДК(i, ti, i+1) перетинається вісь mi′ і перпендикуляр, проведений до неї з точки i.

Взаємне розташування центрів ДСф має відповідати розташуванню центрів вихідних ПСф. Для ДПК з характеристиками l1, на прикладі якої ми розглядаємо закономірності формування монотонних кривих, це:

- обхід в площині Ni точок ′Li → Li → Li′ проти годинникової стрілки, якщо дивитися на нормальну площину в напрямі вектора ti;
- співвідношення відстаней |′Oi, Li| < |′Oi, ′Li| та |Oi′, Li′| < |Oi′, Li|.

Наприклад, для ДПК з характеристиками, що представлені в таблиці 2.8, нормальна площина N4 визначає положення точок ′Li, Li, Li′, які поділяють ланки вихідної ЛЗР на відрізки з співвідношенням довжин:

; ; ; .

Положення центрів ДСф зручно контролювати через розташування mi′ щодо трикутника Ti-1, Ti, Ti+1. Початкова умова розташування mi′ – приналежність точок Li і Li′ відрізкам [Ti-1, Ti] і [Ti, Ti+1] відповідно. При цьому кут між mi′ і ρi, що дорівнює куту між ППi(i-1, i, i+1) і ДП(i, ti, i+1), може бути призначений виходячи зі значень дискретного скруту на ділянках ДПК (п. 4.2) .

Пряма mi′ однозначно визначає положення Ni, а значить і точку ′Li. При переміщенні mi′ від точки Ti точка ′Li переміщується в напрямі Ti-1, кут wi між прямими ′mi і mi′ збільшується, а кут ψ′i-1 між прямими ′mi і ρi зменшується. В крайньому положенні відбувається збіг точок: Li≡Ti-1≡′Li. При цьому дотичні сфери ДСф(i-1, i, ti, i+1) і ДСф(i-2, i-1, i, ti) збігаються з прилеглою сферою ПСф(i-2, i-1, i, i+1).

Інший варіант коригування положення центрів ДСф – зміна кута ′ψi між mi′ і ρi. Наприклад, зафіксуємо точку Li і будемо обертати щодо неї пряму mi′. При цьому Ni обертається відносно прямої (Li, i). При обертанні mi′ за годинниковою стрілкою (кут ′ψi збільшується) ′mi обертається відносно точки Li проти годинникової стрілки (кут ψ′i-1 зменшується). Положення осей ДК, при якому Li′≡Ti+1 або ′Li≡Ti-2 – крайнє з можливих. Обертання mi′ проти годинникової стрілки можливо до тих пір, поки не відбудеться збіг mi′ ≡ ′mi ≡ ρi-1.

Використання зазначених коригувань положень ′mi і mi′ забезпечує розташування центрів ДСф в межах відповідних ланок вихідної ЛЗР, які з'єднують центри ПСф. Таке положення центрів ДСф відповідає їх приналежності до пучків, обмежених вихідними ПСф, і є умовою формування монотонної ДПК. У разі розташування центру ДСф за межами відповідної ланки ЛЗР виникнення у ДПК особливої точки стає неминучим.

4.3.2 Формування вихідної ГППN

Призначивши в кожному вузлі вихідної ДПК нормальну площину, отримуємо ГППN. Ця поверхня однозначно визначається ламаною звороту (ЛЗN), яка складається з відрізків осей ДК, що з'єднують центри ДСф:

[401] (рис. 4.12).

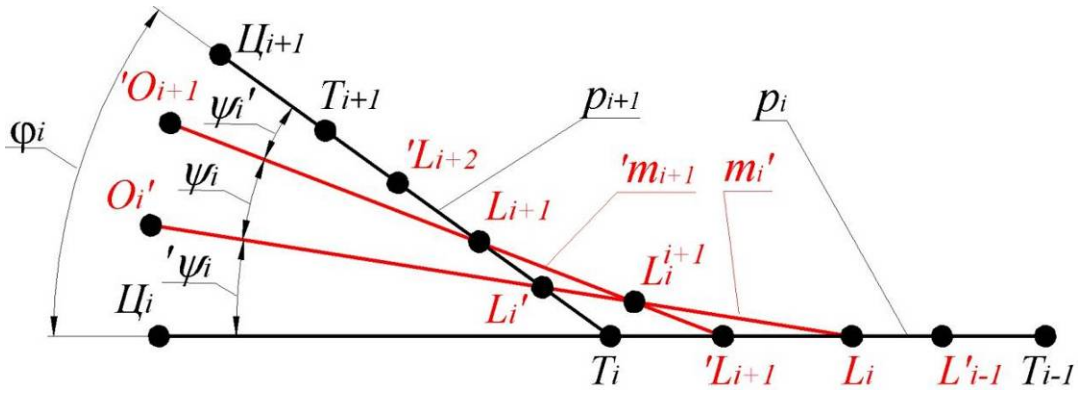


Рис. 4.12. Ділянка ламаної звороту гранної полярної поверхні

нормальних площин

На рисунку показана ділянка ЛЗN: , яка визначає ДСфi(i-1, i, ti, i+1), (i, ti, i+1, ti+1), ДСфi+1(i, i+1, ti+1, i+2). Ці дотичні сфери обмежують ТДСфi – область розташування ДПК на ділянці (i, i+1).

Визначення положення точки Li розглянуто в попередньому пункті. Центр ДСфi+1 можна визначити як точку перетину прямих Li+1≡m′i+1× ρi+1 або точку перетину площин Li+1≡ Ni+1× Pi× Pi+1. Центр може визначатися як точка перетину прямих ≡m′i× mi+1 або площин ≡Ni× Ni+1× Pi.

Умовою формування монотонної ДПК на ділянці (i, i+1) є:

- обхід в площині Pi точок Li → → Li+1 проти годинникової стрілки, якщо дивитися на Pi в напрямі вектора ;

- співвідношення відстаней |O′i, | < |O′i, Li| і |Oi+1′, Li+1| < |O′i+1, |.

Для виконання цих умов необхідно і достатньо, щоб положення Ni+1 забезпечувало приналежність точки Li+1 відрізку [L′i, Ti+1], а точки ′Li+1 – відрізку [Li, Ti] (рис. 4.12). Аналогічні вимоги повинні виконуватися при призначенні нормальних площин в інших вузлах ДПК.

У попередньому пункті було показано, що в результаті коригування положення Ni+1 поворотом щодо (Li+1, i) можна домогтися як завгодно близького розташування точок ′Li+1 і L′i+1 до точок Ti і Ti+1 відповідно. Можливість таких корегувань на будь-яких ділянках ЛЗN доводить справедливість твердження:

Твердження 4.1 На основі будь-якої гранної полярної поверхні перпендикулярних площин, що визначають монотонну ДПК, можливо

сформувати гранну полярну поверхню нормальних площин, яка визначає монотонну ДПК такого ж типу.

Початкове положення нормальних площин в точках ДПК може бути призначено виходячи зі значень дискретного скруту на вихідних ділянках, як це запропоновано в п. 4.2.1. Остаточне положення можна визначити виходячи з розташування центрів ДСф. Критерієм може бути співвідношення

довжин ланок ЛЗN або відрізків на ланках ЛЗР.

4.3.3 Контроль характеристик ДПК через характеристики ЛВN

Розглянемо частину ЛЗN і відповідну їй частину ДПК (i-1… i+1).

Відрізки [ ] і [ ] належать осям ДК m′i і ′mi+1 відповідно (рис. 4.12). Ці осі розташовані в площині Pi і перетинаються між собою і вихідними осями ПО. Положення центрів ДСф на осях ДК визначає радіуси цих сфер, а довжини ланок ЛЗN визначають співвідношення значень їх радіусів. Кути між осями дорівнюють кутам між відповідними ПП и ДП (рис. 4.12):

- ′ψi – кут між ρi і m′i, дорівнює куту між ППi і ДП′i;
- ψi – кут між m′i і ′mi+1 дорівнює куту між ДП′i і ′ДПi+1;
- ψ′i – кут між ′mi+1 і ρi+1, дорівнює куту між ′ДПi+1 і ППi+1.

Осі ′mi і m′i перетинаються під кутом wi, якій дорівнює куту між ′ДПi і ДП′i (рис. 4.11).

Таким чином, ламана звороту визначає всі дискретні характеристики ДПК: значення дискретного скруту, радіусів прилеглих та дотичних сфер і кіл. Динаміку зміни значень геометричних характеристик уздовж ділянок монотонної кривої можна коригувати вибором конкретних положень вузлів ЛЗN. Покажемо один із способів розв’язання такої задачі.

В результаті призначення нормальних площин у всіх точках вихідної ДПК на кожній ланці ЛЗР отримуємо три центри ДК. Наприклад, для відрізка [Ti-1, Ti] це Ti-1 - L′i-1 - Li - ′Li+1 - Ti (рис. 4.12). Зазначена послідовність розташування центрів сфер на ланці ЛЗР – необхідна умова формування монотонної ДПК.

Якщо у ДПК хорди СЛЛ рівної довжини, то при призначенні нормальних площин слід прагнути до такого розташування центрів ДСф, при якому вони поділяють ланку ЛЗР на чотири рівні частини. Для цього вісь ДК m′i призначається так, щоб точка Li розділяла відрізок [Ti-1, Ti] навпіл, а

точка L′i – розділяла відрізок [Ti, Ti+1] у співвідношенні (рис. 4.11). Потім визначається положення точки ′Li і якщо співвідношення

довжин відрізків відрізняється від , здійснюється корегування положень осей ′mi і m′i обертанням відносно точки Li. Мета коригування – рівне відхилення точок ′Li і L′i від заданого положення.

Якщо хорди СЛЛ мають різну довжину, необхідно коригувати положення центрів ДСф. Пояснимо таке коригування на прикладі визначення положення точки Li в межах відрізка [Ti-1, Ti].

Зафіксуємо на монотонній кривій точки i-1, i, i+1,i+2 і дотичну ti. Тоді при переміщенні точки i-2 по кривій від точки i-1 (відстань hi-2=|i-2, i-1| збільшується) радіус ПСфi-1 збільшується при незмінних радіусах ПСфi и ДСфi. При цьому точка Ti-1 переміщується по прямій ρi віддаляючись від зафіксованих точок Ti і Li. В результаті точка Li виявляється зміщеною від центру відрізка [Ti-1, Ti] до точки Ti. Аналогічно, при збільшенні hi+1 точка Li зміститься від центру відрізка [Ti-1, Ti] до Ti-1.

З урахуванням наведених закономірностей уточнене положення Li можна визначити всередині відрізка [A, B], розташованого в межах ланки [Ti -1, Ti] (рис. 4.13).

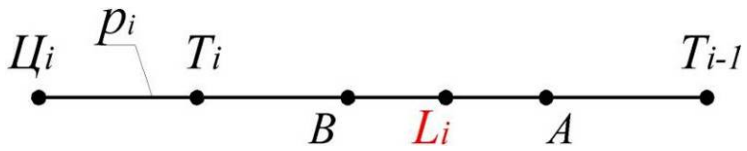


Рис. 4.13. Призначення положення центру дотичної сфери

Точки A і B призначаються в межах відрізка [Ti-1, Ti] на рівних

відстанях від точок Ti-1 і Ti : [Ti-1, A] = [B, Ti] = [Ti-1, Ti]. Положення точки Li призначається виходячи зі співвідношення:

.

Належність точок ′Li і L′i відрізкам [Li-1, Ti-1] і [Ti, Li+1] досягається коригуванням положення осей ′mi, mi′ (рис. 4.11). Оптимальним будемо вважати положення точок ′Li і L′i, при якому виконуються співвідношення:

, .

Центри ДСф, що визначають положення нормальних площин в інших точках ДПК, призначаються аналогічно точкам ′Li, Li, L′i. Призначення центрів ДСф в межах відповідних відрізків гарантує необхідну послідовність їх розташування на ланках ЛЗР.

Запропонований спосіб формування характеристик ДПК на основі контролю довжини ланок ламаної звороту не є єдиним. Можливе використання інших співвідношень довжин ланок. При цьому необхідною

умовою формування ЛЗN є призначення центрів ДСф в межах діапазонів, що забезпечують монотонність ДПК.

4.3.4 Згущення ламаної звороту гранної поверхні нормальних площин

Згущення ділянки ЛЗN можна розділити на два етапи. Спочатку призначається вісь ПК (ρзг), яка визначає положення iзг. Потім призначаються осі ДК, що визначають положення нормальної площини в точці згущення [403].

4.3.4.1 Призначення осі ПО згущення

Точка згущення визначає положення двох площин (рис. 4.14):

- площина ′Рзг проходить через середину хорди [i, iзг] перпендикулярно хорді;
- площина Р′зг проходить через середину хорди [iзг, i+1] перпендикулярно хорді.

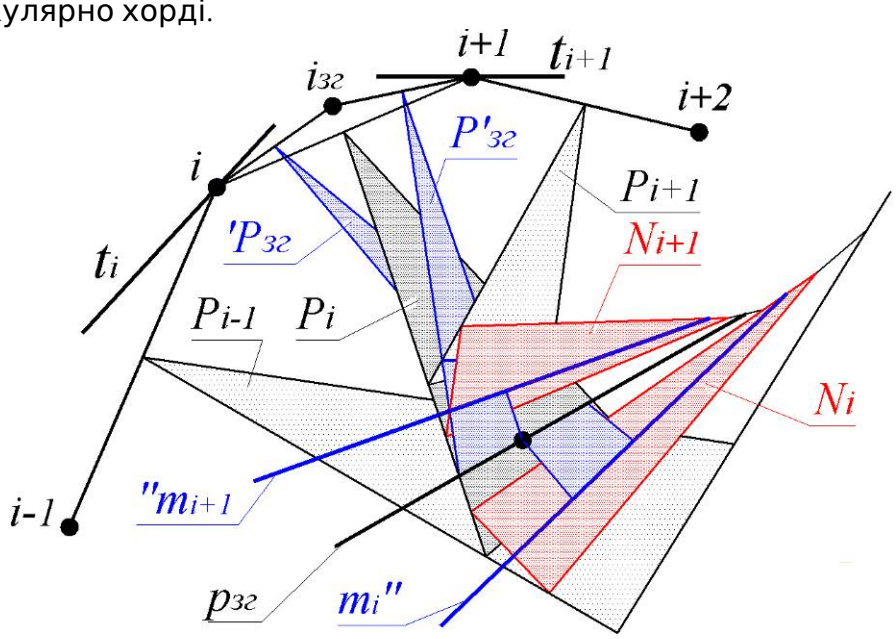


Рис. 4.14. Розташування перпендикулярних площин Рзг

Лінія перетину цих площин – ρзг належить площині Pi. Перпендикулярні площині перетинаються з нормальними площинами по осях ДК: m″i ≡ ′Рзг×Ni, ″mi+1 ≡ Р′зг×Ni+1.

На ділянці ЛЗN, яка відповідає згущеній ділянці ДПК, вісь mi″ заміщає вихідну вісь ДК mi′, по якій Ni перетинається з Pi. Ось ″mi+1 заміщає вісь ′mi +1, по якій з Pi перетинається Ni+1.

Схема перетину осей ДК в центрах ДСф, отриманих в результаті призначення iзг, показана на рис. 4.15.

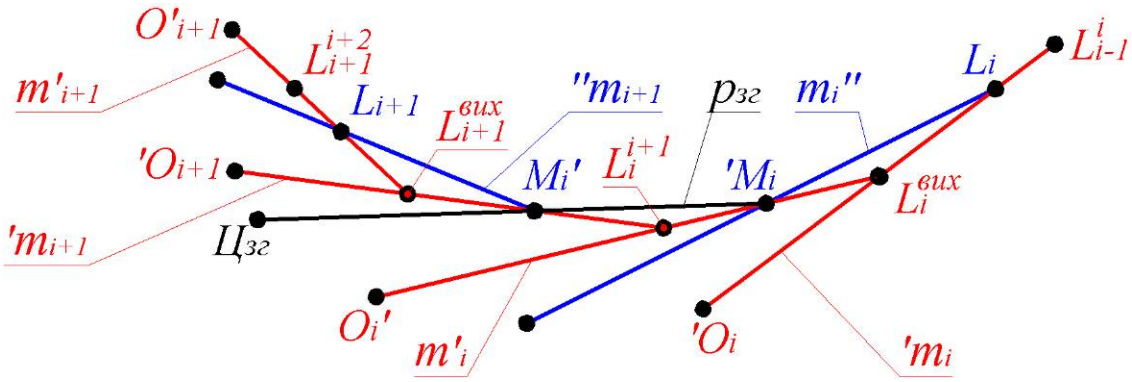


Рис. 4.15. Осі ДК, що задають положення точки згущення

Центр ДСф(i-1, i, ti, iзг) – точка Li ≡ ′mi×mi″ заміщає на ЛЗN однойменний центр вихідної ДСф(i-1, i, ti, i+1). В даному пункті центр ДСф(i -1, i, ti, i+1) будемо позначати . У центрі ДСф(i, ti, iзг, i+1) – точці ′Mi перетинаються осі: ′Mi ≡ ρзг×mi′×mi″. Точка перетину осей M′i ≡ ρсг×′mi+1 ×″mi+1 – центр ДСф(i, iзг, i+1, ti). Точка Li+1 ≡ ″mi+1×m′i+1 – центр ДСф(iзг, i+1, ti+1, i+2) заміщає однойменний центр ДСф(i, i+1, ti+1, i+2), позначений в даному пункті як . В результаті отримуємо згущену ділянку ЛЗN: . Розташування центрів ДСф, отриманих в результаті згущення, в межах ланок вихідної ЛЗN – умова існування області можливого розташування монотонної ДПК. Положення цих центрів можна коригувати змінюючи положення ρзг.

Коли ρзг проходить через точки і , отримаємо збіг центрів ДСф: Li ≡ ′Mi ≡ та Li+1 ≡ M′i ≡ . При наближенні ρзг до точки відбувається переміщення центрів ДСф:

- ′Mi і M′i в напрямі ;

- Li в напрямі ;

- Li+1 в напрямі .

Можна стверджувати, що існує діапазон положення ρзг, при якому ЛЗN, отримана в результаті призначення точки згущення, і вихідна ЛЗN визначають монотонні ДПК з однаковими властивостями.

4.3.4.2 Призначення нормальної площини в точці згущення (Nсг)

Площина Nзг перетинає перпендикулярні площині по осях ДК: ′mзг ≡ Nзг×′Pзг і m′зг ≡ Nзг×P′зг. (рис. 4.16)

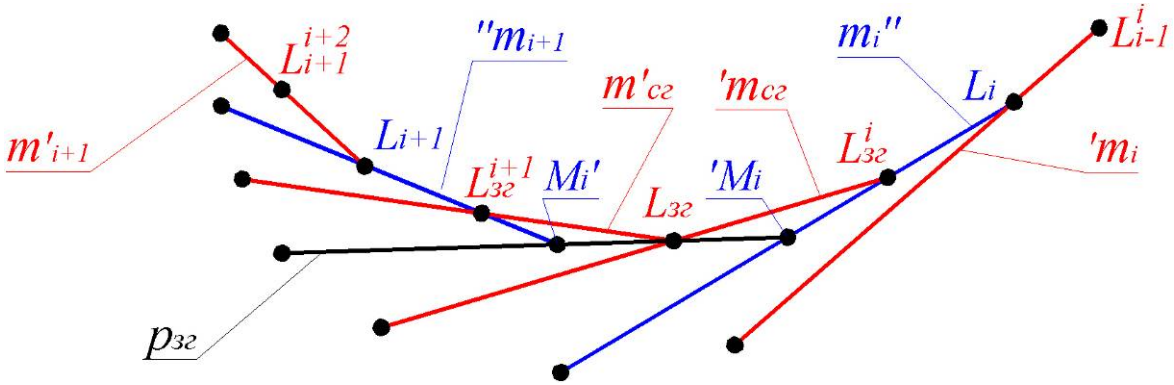


Рис. 4.16. Згущена ділянка ламаної звороту

Опустивши з точки i перпендикуляри на зазначені осі, отримаємо центри дотичних кіл:

- на осі ′mзг точку ′Oзг – центр ДК(i, iзг, tзг);
- на осі m′зг точку O′зг – центр ДК (iзг, tзг, i+1).

На перетині осей ДК отримуємо центри ДСф:

- ≡ ′mзг×m′′i – центр ДСф(i, ti, iзг, tзг);
- Lзг ≡ ′mсг ×ρсг ×m′сг – центр ДСф(i, iзг, tзг, i+1);
- ≡ m′зг×′′mi+1 – центр ДСф(iзг, tзг, i+1, ti+1).

Необхідною умовою формування монотонної ДПК є приналежність отриманих центрів ДСф відрізкам: [Li, ′Mi]; Lзг ⊂ [′Mi, M′i]; [M′i, Li+1].

Доказ існування необхідного розв’язку аналогічно доказу можливості формування вихідної ЛЗN (п. 4.3.1). Умови призначення точки згущення і дотичної до ДПК в цій точці справедливі для всіх ділянок. Можливість формування монотонної ДПК зберігається при будь-якій кількості згущень. Це дозволяє сформулювати твердження:

Твердження 4.2 Якщо вихідна гранна поверхня нормальних площин визначає монотонну ДПК, то існує можливість формування гранної поверхні, яка визначає згущену ДПК з такими ж геометричними властивостями.

Доказ тверджень 4.1 і 4.2 дозволяє зробити висновок, який сформулюємо у вигляді наступного твердження:

Твердження 4.3 Якщо точковий ряд визначає послідовність тригранників прилеглих сфер з однаковим поєднанням дискретних характеристик, то існує монотонна крива лінія, яка інтерполює цей точковий ряд.

4.3.4.3 Формування ланок ламаної звороту

Призначення положень осей ДК, при яких вони перетинають ланки

вихідної ЛЗN, забезпечує наявність області розташування монотонної ДПК після будь-якої кількості згущень Оптимальним положенням осей, що визначають положення iзг і Nзг, будемо вважати положення, при яких отримуємо ЛЗN з близькими по довжині ланками. Вирівнювання довжин ланок забезпечується коригуванням положення осей ρзг и m′зг, яке може бути здійснене за наступною схемою.

1. Призначається положення ρзг, при якому виконується умова (рис.4.15):

.

2. Призначається положення m′зг, при якому виконується умова (рис. 4.16):

.

3. Порівнюються довжини ланок і і в разі їх нерівності

коригується положення осі ρзг. Наприклад, для зменшення необхідно

наблизити ρзг до точки (рис.4.15).

В результаті призначення iзг змінюється частина ЛЗN, яка складається з чотирьох вихідних ланок, що відповідає локалізації області можливого розташування ДПК, яка обмежена трьома вихідними ТДСф. Остаточно сформована ділянка ЛЗN, що відповідає згущеній ділянці ДПК i - iзг - i+1,

складається з послідовності центрів ДСф: . Сфери з

центрами Li, , Lзг обмежують , а сфери з центрами Lзг, , Li+1 обмежують ТДСфзг.

У таблиці 4.2 представлені значення радіусів ДСф, отриманих в результаті призначення точки згущення 4зг в межах ТДСф, що обмежує область розташування ділянки (4;5) монотонної ДПК, характеристики якої представлені в таблиці 2.8.

Таблиця 4.2

Значення радіусів дотичних сфер

Радіуси дотичних сфер, мм						
ДСф (3;t3;4,t4)	ДСф (3;4;t4; 4зг)	ДСф (4;t4;4зг , tзг)	ДСф (4;4зг ;tзг ;5)	ДСф (4зг ;tзг;5 ,t5)	ДСф (4зг;5 ,t5; 6)	ДСф (5 ,t5;6; t6)
104,4236	100,8771	99,2325	95,1481	91,4458	88,9022	86,3220

Послідовне виконання умов згущення ділянки ЛЗN забезпечує відповідність сферичних тригранників характеристикам ДПК, що формуєься. При призначенні крайніх положень осей ДК, коли центри ДСф збігаються, сферичні тригранники вироджуються у відсіки ДСф, і відповідні ділянки монотонної ДПК можуть формуватися тільки як сферичні криві.

В результаті послідовних згущень ділянок ДПК з максимальною областю розташування ДПК отримуємо ЛЗN, що складається з як завгодно

великого числа ланок. При цьому:

- відстані між центрами ДСф , Li, зменшуються і вони наближуються до положення центру i-й стичної сфери;

- кут wi між осями ДК ′mi і m′i наближується до нуля, а осі ДК наближуються до положення i -ої вісі кривини.

В межі отримаємо ребро звороту – криву постійного ходу, дотичні якої формують полярний торс, що визначає монотонну криву, яка інтерполює вихідний точковий ряд.

Після призначення точок згущення та дотичних в них на всіх ділянках вихідної ДПК, характеристики якої представлені в таблицях 2.7, 2.8, отримано ДПК, характеристики якої представлені в таблиці 4.3. Координати точок згущення ДПК, характеристики яких представлені в таблицях 3.5 і 4.3 збігаються.

Таблиця 4.3

Дискретні характеристики згущеної ДПК

№ ділянки ДПК		, рад/мм	hi, мм	Радіуси ДК, мм		RДСфi (i-1; i; ti ; i+1), мм
Вихідної	Згущеної			ДК (i-1; i, ti)	ДК (i, ti; i+1)	
3	5	2,3117	27,3842	86,2965	101,8500	9,0613
	6	2,3624	27,3842	82,2898	97,3278	9,0888
4	7	2,4176	38,0398	78,2422	92,8095	9,0536
	8	2,6187	38,0398	74,6888	88,2483	9,1019
5	9	3,2364	23,1362	71,1991	83,7122	9,1972
	10	3,9444	23,1362	67,2591	79,2384	9,2511
6	11	4,5826	32,0682	63,2691	74,7697	9,2302
	12	5,0845	32,0682	59,7767	70,2595	9,2917
7	13	5,9488	18,8281	56,3746	65,7983	9,4225
	14	6,6734	18,8281	52,5506	61,4312	9,5242

4.3.5 Формування ламаної звороту з використанням осей кривини

Ось кривини, яка відповідна i-й точці ДПК (fi) належить до нормальної площини Ni. Призначаючи вісь кривини для кожної точки ДПК отримуємо ламану звороту (ЛЗf), до складу якої входять ланки, розташовані на осях кривини. Послідовність центрів сфер, що стикаються у вихідних точках з ДПК, що формується, належить ЛЗf. Задачу формування ДПК з використанням осей кривини можна розділити на два етапи:

- призначення осей кривини, що відповідають початковим точкам;
- визначення положень точок згущення на основі вихідної ЛЗf.

4.3.5.1 Призначення осі кривини для і-ої точки ДПК

Грань вихідної ГППN, що належить Ni, визначається осями ДК ′mi і m′i або центрами ДСф , , (рис. 4.17).

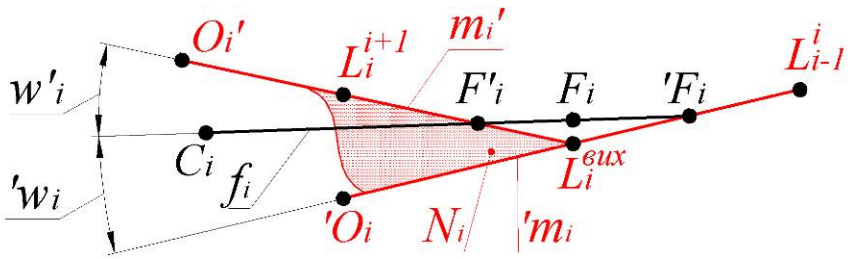


Рис. 4.17. Розташування i-ої вісі кривини монотонної ДПК

Умовою формування монотонної ДПК є перетин віссю кривини fi відрізків [ ] і [ ]. Точки перетину визначають положення центрів ДСф, яким належить стичне коло ДПК в i-й точці (CKi):

- ′Fi ≡ fi×′mi – центр ДСф(CKi, i-1);

- F ′i ≡ fi×m′i – центр ДСф(CKi, i+1).

Центр CKi – точка Ci, це точка перетину прямої fi і перпендикуляра, проведеного до неї з точки i. Ось кривини визначає положення стичної площини ДПК (CПi) [84].

Кут ′wi між fi і ′mi дорівнює куту між ДП(i-1, ti) і CПi, а кут w′i між fi і m′i дорівнює куту між CПi і ДП(ti, i+1). Відрізок [′Fi, F ′i] – область можливого розташування центру Fi сфери, що стикається з ДПК в точці i (CСфi).

Сфера ДСф(COi, i+1) уточнює область розташування ДПК на ділянці (i, i+1) заміщаючи грань ТДСфi, яка належить ДСфi(i-1, i, ti, i+1). Після призначення осі кривини, яка відповідає точці i+1, грань ТДСфi, яка належить ДСфi+1(i, i+1, ti+1, i+2) буде заміщена ДСф(i, CKi+1). На рис. 4.18 показано перетин ТДСфi площиною Pi і розташування в його межах уточненої області розташування точки згущення. Уточнена область заштрихована.

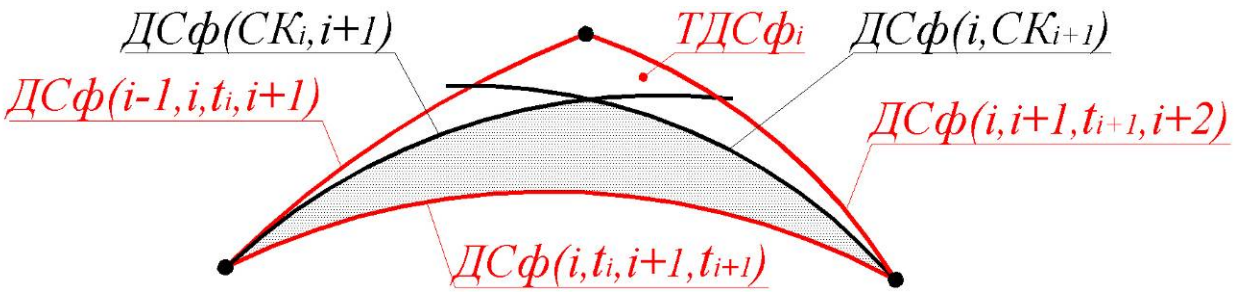


Рис. 4.18. Уточнена область розташування точки згущення

У разі, коли fi займає крайнє з можливих положень, відповідні ділянки ДПК формуються як сферичні криві. Наприклад, якщо fi проходить через

точки і (′Fi ≡ , F ′i ≡), то ділянка ДПК (i-1, i) належить ДСф(i-1, ti-1, i, ti), а ділянка (i, i+1) належить ДСф(i, ti, i+1, ti+1). Якщо fi

проходить через точку , то ССфі збігається з ДСфі і ділянка ДПК (i-1…i+1) належить цій сфері.

У разі, коли точка ′Fi або F ′i розташована за межами відрізків

[ ] і [ ] відповідно, сформувати монотонну ДПК неможливо.

4.3.5.2 Згущення ДПК з визначенням положень осей кривини

Згущення ДПК на основі ЛЗf розглянемо на прикладі ділянки (i, i+1).

Точка ізг визначається положенням осі ПК ρзг, яка одночасно визначає положення осей ДК m′′i і ′′mi+1. Умови призначення ізг зводяться до вимоги розташування точок перетину осей ρзг, m′′i і ′′mi+1 з осями вихідної ЛЗf

в межах відповідних ланок (рис. 4.19):

- точка F i′′ ≡m′′i+1×fi повинна належати відрізку [′F i, Fi ′];

- точка ′Mi ≡ρзг×m′i повинна належати відрізку [Fi ′,];

- точка Mi′ ≡ρзг×′mi+1 повинна належати відрізку [, ′Fi+1];

- точка ′′Fi ≡′′mi+1×fi+1 повинна належати відрізку [′F i+1, F ′i+1].

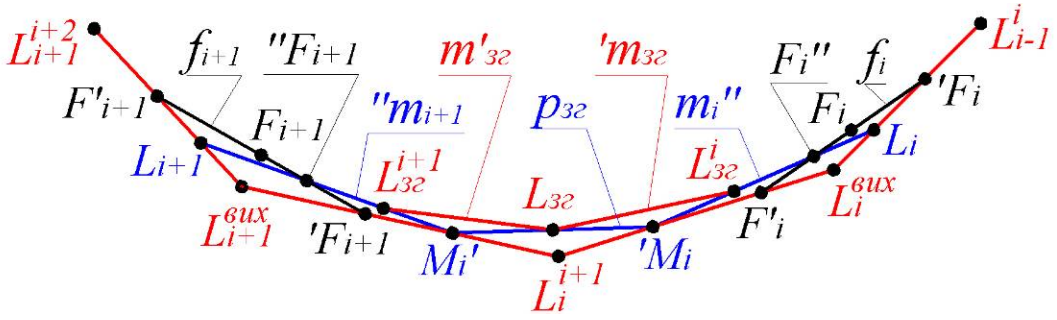


Рис. 4.19. Згущення ламаної звороту ЛЗf

Відрізки [′F i, Fi′′] і [′′Fi+1, F ′i+1] – уточнені області розташування центрів стичних сфер Fi і Fi+1. Якщо в точках вихідної ДПК призначені стичні сфери, то умовою розташування m′′i є приналежність точки F′′i відрізку [F ′ i, Fi], а для ′′mi+1 повинно виконуватися: ′′Fi+1 ⊂ [′Fi+1, Fi+1].

Положення осей ′mзг і m′зг, що визначають дотичну tзг, призначається на основі ламаної F ′′i - ′Mi - M ′i -′′Fi+1:

- точка Lзг ≡′mзг×ρзг повинна належати відрізку [′M i, M ′i];

- точка ≡′mзг×m′′i повинна належати [′M i, Fi ′′];

- точка ≡m′зг×′′mi+1 повинна належати [М′ i, ′′Fi+1].

Умова розташування осі кривини, що відповідає точці ізг (fзг), –

перетин нею відрізків [ ] і [ ] в точках ′Fзг и F ′зг відповідно. Відрізок [′Fзг, F ′зг] – діапазон можливого розташування центру сфери, що стикається з ДПК в точці ізг.

Після призначення точки ізг і формування відповідної ділянки ЛЗf, отримані ДПК і ЛЗf розглядаються як вихідні умови для згущення інших ділянок. Розташування точок Fi′′ і ′′Fi+1 в межах відрізків [′Fi, Fi′] і [′Fi+1, F′i +1] означає, що призначення точки згущення всередині ТДСф, обмеженого Д Сф(i, ti, i+1, ti+1), ДСф(СОi, i+1), ДСф(i, СОi+1), не призводить до локалізації аналогічних ТДСф сусідніх ділянок. З цього випливає, що визначення області розташування монотонної ДПК з використанням осей кривини дозволяє згущувати точковий ряд локально, по окремих ділянках і в довільній послідовності. При цьому відбувається локалізація області розташування ДПК тільки на ділянці, що згущується, і немає необхідності в контролі змін цієї області на інших ділянках.

Висновки по четвертому розділу

1. В результаті досліджень, проведених в четвертому розділі, запропоновані способи формування монотонної ДПК, що складається з як завгодно великої кількості точок, в яких призначені дотичні прямі, основні тригранники, стичні кола і сфери. Це способи згущення точкового ряду на основі дотичних тетраедрів, тригранників дотичних сфер, гранної поверхні нормальних площин. Необхідна умова формування ДПК – наявність області її можливого розташування, яка послідовно локалізується в результаті призначення точок згущення і характеристик кривої в цих точках.

2. Досліджено вплив положень площин, дотичних з монотонною ДПК у вихідних точках на область її можливого розташування. Встановлені залежності дозволили:

- визначати область розташування дотичних площин, при яких існує можливість формування ДПК постійного ходу і монотонної ДПК;
- використовувати положення дотичних прямих як параметр формування області можливого розташування ДПК – послідовності дотичних тетраедрів і тригранників дотичних сфер.

3. Визначено область можливого розташування стичних площин у вузлах ДПК постійного ходу, що дозволило призначати в цих вузлах положення основних тригранників. Призначення основних тригранників локалізує область можливого розташування ДПК. Кожна ділянка формується в межах стичного тетраедра, який обмежено двома дотичними і двома стичними площинами.

4. Досліджено взаємозв'язок між значеннями дискретного скруту і характеристиками стичних тетраедрів. Встановлені залежності дозволили отримати спосіб формування послідовності тетраедрів, що визначають монотонну зміну значень дискретного скруту вздовж згущеного точкового ряду. Спосіб дозволяє формувати точковий ряд, що складається з як завгодно великої кількості точок, що належать кривій лінії, уздовж якої значення скруту змінюються монотонно.

5. Визначено умови формування монотонної ДПК, у вузлах якої призначаються положення дотичних прямих. Положення точок згущення і дотичних прямих в точках ДПК контролюється через характеристики тригранників, обмежених дотичними з ДПК сферами. Встановлено, що умовою формування монотонної ДПК є розташування тригранників дотичних сфер, отриманих у результаті згущення, в межах області розташування вихідної ДПК. Одночасно вихід тригранників дотичних сфер за межі вихідної області розташування неминуче призводить до виникнення особливих точок.

6. Визначено взаємозв'язок між дискретними характеристиками ДПК і характеристиками гранної полярної поверхні нормальних площин, яка складається з відсіків нормальних площин, призначених в точках ДПК і площин, перпендикулярних хордам СЛЛ. Дискретні характеристики і область розташування ДПК контролюються через характеристики ламаної

звороту, що складається з відрізків прямих ліній, розташованих на ребрах гранної поверхні.

Згущення ДПК через формування ламаної звороту дозволило спростити геометричну схему моделювання кривої, звівши її до розв'язку задач на перетин прямих ліній і площин.

7. Встановлено граничні положення, які можуть займати ланки ламаної звороту гранної полярної поверхні нормальних площин, що дозволило визначити область можливого розташування осей кривини у відповідних нормальних площинах. Призначення осей кривини дозволяє визначати положення стичних кіл і сфер в точках ДПК.

ДПК, задана впорядкованою множиною точок, в яких визначені основні тригранники і стичні сфери, формується на основі ламаної звороту, яка містить ланки, що належать осям кривини. Така ламана звороту найбільш точно визначає область можливого розташування монотонної ДПК.

8. Доведено, що геометричні характеристики, призначені в вузлах ДПК , дозволяють підвищити локальність її формоутворення. При формуванні монотонної ДПК, в точках якої визначені положення дотичних прямих, призначення кожної точки згущення призводить до локалізації області розташування частини кривої, яка обмежена трьома послідовними вихідними тригранниками дотичних сфер. При призначенні точки згущення ДПК, у вузлах якої визначені основні тригранники і стичні сфери, область розташування кривої локалізується тільки на одній вихідній ділянці.

Підвищення локалізації формоутворення дозволяє моделювати ДПК по окремих ділянках, призначаючи на них будь-яку кількість точок згущення.

9. Дослідження областей можливого розташування точок згущення і діапазонів можливих значень дискретних характеристик дозволило визначити необхідні і достатні умови формування монотонної ДПК. Монотонну ДПК можливо формувати на основі будь-якого точкового ряду, якій задає прилеглі сфери, що обмежують тригранники, відповідні одному типу монотонної кривої. Щоб отримати згущений точковий ряд, що належить монотонній кривій, досить забезпечити відповідність характеристик тригранників дотичних сфер, які формуються в процесі згущення, характеристикам вихідних тригранників прилеглих сфер.

10. Розроблені в розділі способи формування ДПК доповнюють один одного. Можливо їх спільне застосування, що дозволяє враховувати при формуванні кривої як кутові, так і метричні дискретні характеристики. Спосіб, заснований на використанні гранної полярної поверхні, найбільш універсальний. Він поєднує можливості способів, заснованих на використанні дотичних тетраедрів і тригранників дотичних сфер, і дозволяє контролювати динаміку зміни уздовж кривої, що формується, значень скруту , радіусів стичних сфер і кіл.

Основні результати досліджень, проведених в четвертому розділі, опубліковані в роботах – [82-85, 89, 96, 100, 102, 106, 401, 403].

РОЗДІЛ 5
ФОРМУВАННЯ ДПК НА ДІЛЯНКАХ, ЩО МІСТЯТЬ ОСОБЛИВІ ТОЧКИ

Моделювання кривої на основі точкового ряду довільної конфігурації вимагає розв’язку задачі згущення особливих ділянок. Це ділянки, які містять точки стикування монотонних кривих.

У першому наближенні особлива ділянка обмежена послідовними вихідними точками, в яких відбувається зміна закономірності зміни уздовж точкового ряду значень дискретних характеристик: дискретного скруту, радіусів прилеглих кіл і сфер. У процесі згущення точкового ряду і локалізації області можливого розташування монотонних ділянок ДПК особливі ділянки також послідовно локалізуються в межі вироджуючись в особливі точки – точки зміни ходу, перегину, зміни збільшення та зменшення уздовж кривої значень стичних кіл і сфер.

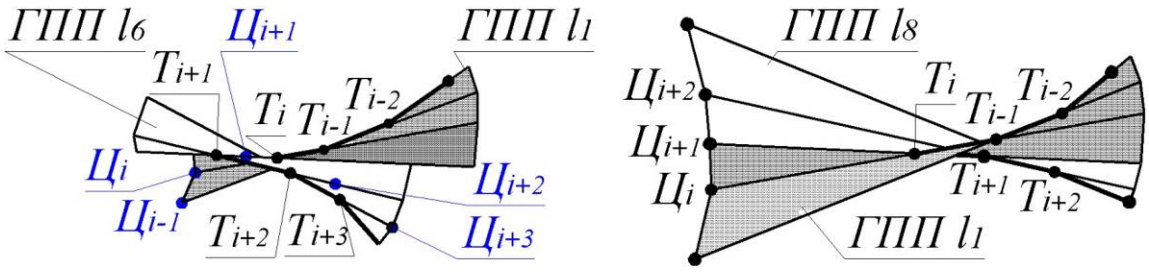
Розробка способів, що дозволяють визначати положення особливих точок і формувати задані характеристики ДПК в їх околі, є задачею п'ятого розділу.

5.1 Формування ділянок, що містять точки зміни напряму зростання вздовж ДПК радіусів стичних кіл і сфер

Якщо особлива точка не є точкою перегину або зміни ходу, то в такій точці відбувається зміна напряму зростання вздовж кривої радіусів стичних кіл і (або) радіусів стичних сфер. Для ДПК, що складається з двох монотонних частин, одна з яких крива з характеристиками $l1$, це можуть бути особливі точки $M_{1,3}$, $M_{1,6}$, $M_{1,8}$ (п. 2.2.2).

Розташування ПП в околі ділянки ДПК, що містить таку точку, таке ж, як і на монотонних ділянках. Тому контроль формування особливої ділянки можливий через аналіз розташування ПСф або ланок ламаної звороту ГПП [77].

Частини ГПП, що відповідають особливій ділянці ДПК $l1 - l6$, на якій змінюється напрям зростання радіусів ПК, і особливій ділянці ДПК $l1 - l8$, на якій відбувається зміна напряму зростання радіусів ПСф, зображені на рис. 5.1, а та 5.1, б.



а) б)

Рис. 5.1. Частини ГПП, що відповідають особливій ділянці ДПК

Частини ламаної звороту, що відповідають монотонним частинам ДПК, представляють ребра звороту різного ходу, які стикуються в вершині вістря. Така конфігурація ламаної звороту однозначно визначає єдину особливу ділянку ДПК. В межах тільки цієї ділянки можливо сформувати єдину особливу точку стикування монотонних частин. При інших варіантах формування особливої ділянки неминуче виникнення додаткових особливих точок.

Закономірності формування ребра звороту, що складається з частин різного ходу, будуть детально розглянуті в п. 5.3 на прикладі ДПК $l1 - l5$. В даному пункті на прикладі стикування частин правого ходу ДПК $l1 - l8$ розглянемо згущення особливої ділянки на основі тригранників прилеглих сфер.

Точковий ряд …, i, i+1, уздовж якого радіуси ПСф і ПК зменшуються, представляє криву з характеристиками $l1$. На ділянках такий ДПК ТПСф розташовуються за межами середньої по номеру з трьох ПСф, що обмежують тригранник (п. 2.4.2). Точковий ряд i, i+1,…, уздовж якого значення радіусів ПСф зростають, а радіуси ПК зменшуються, представляє криву $l8$. На ділянках ДПК $l8$ ТПСф розташовуються усередині середньої з трьох ПСф, що обмежують тригранник.

На особливій ділянці (i, i+1) область можливого розташування ДПК розділяється на два тригранника (рис. 5.2). Тригранник, розташований за межами ПСфi, позначимо ТПСф-1, а тригранник, розташований всередині ПСфi – ТПСф-8.

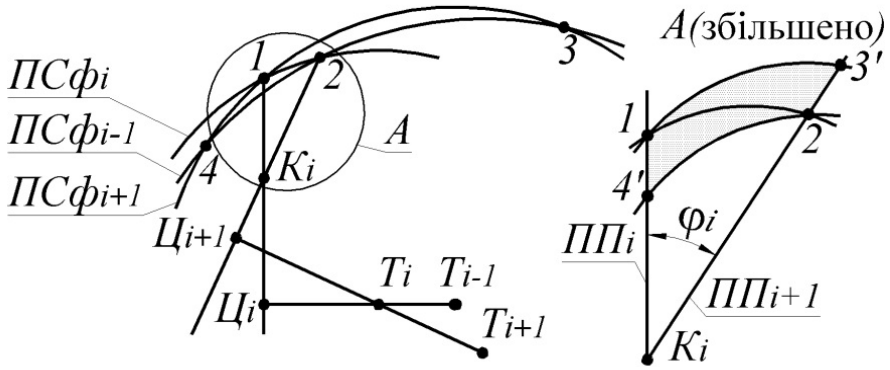


Рис. 5.2. Область можливого розташування особливої ділянки ДПК

На рисунку зображені кола, за якими площина Pi перетинає ПСфi-1, ПСфi та ПСфi+1.

Ці кола обмежують два криволінійних трикутника:

- (1,2,3), що належить ТПСф-1;
- (1,2,4), що належить ТПСф-8.

Якщо прийнято рішення про приналежність ділянки (i, i+1) до частини ДПК з характеристиками $l1$, то вихідна область розташування точки згущення iзг – (1,2,3). Якщо ділянка (i, i+1) належить $l8$, то областю розташування iзг вважаємо (1,2,4).

Ділянка ДПК постійного ходу розташовується в межах відповідного

прилеглого тетраедра. З цього випливає, що iзг повинна бути призначена в межах кута ϕi (рис. 5.2). Отже, пряма (Ki,1), яка належить до ППi, відсікає від вихідної області (1,2,4) уточнену область розташування iзг – криволінійний трикутник $(1,2,4')$. Аналогічно пряма (Ki,2) , яка належить до ППi+1, обмежує уточнену область $(1,2,3')$.

У разі призначення iзг в межах $(1,2,3')$ положення точки згущення визначається віссю ПК ρзг, яка перетинає відрізки [Ti-1, Ti] і [Ti, Цi+1]. В результаті отримаємо точковий ряд, у якого частина …, i, iзг, i+1 представляє криву l1, частина iзг, i+1, i+2,… – криву l8, а особлива ділянка обмежена точками (iзг, i+1) . Якщо iзг належить до $(1,2,4')$, то ρзг перетинає відрізки [Ti, Цi] і [Ti, Ti+1], а особлива ділянка буде обмежена точками (i, iзг).

Критерієм вибору області призначення iзг можуть бути розміри криволінійних трикутників – точку згущення будемо призначати в межах частини області розташування особливої ділянки більшого розміру.

Розташування ПСф, що обмежують особливу ділянку ДПК після призначення iзг, аналогічно показаному на рис. 5.2. Область розташування точки згущення розділена середньою по номеру з ПСф, які обмежують цю область, на частини. Конфігурація кожної частини розташування точки згущення відповідає типу однієї з монотонних частин ДПК.

Така конфігурація області розташування характерна для ділянок, на яких відбувається зміна напряму зростання вздовж точкового ряду радіусів прилеглих кіл або сфер, і може бути критерієм для визначення наявності особливої ділянки.

Частини ГПП, що відповідають особливій ділянці ДПК l1 – l3, на якій одночасно змінюється напрям зростання радіусів ПК і ПСф, зображені на рис . 5.3, а. Відсік ГПП з ламаною звороту … - Ti - Ti+1 відповідає частині ДПК …, i+1, i+2 з характеристиками l1. Відсік ГПП з ламаною звороту Ti - Ti+1- … відповідає частині ДПК i, i+1, … з характеристиками l3. Обидві ламані звороту задають ребро звороту правого ходу. На їх основі можливе формування єдиного полярного торса.

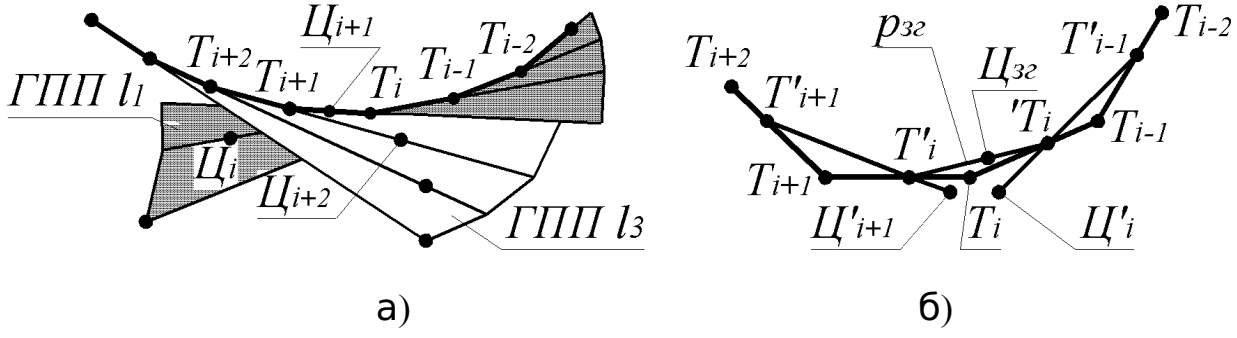


Рис. 5.3. Відсік ГПП, що відповідає ділянці зміни напряму зростання радіусів ПК і ПСф уздовж ДПК

Наявність у ДПК l1 – l3 особливої точки можна визначити по розташуванню центру ПКi+1 (точка Цi+1) в межах ланки ламаної звороту [Ti, Ti+1], яка відповідає особливій ділянці ДПК (i…i+2). Локалізація особливої ділянки відбувається в результаті призначення точок згущення вихідних ділянок (i, i+1) та (i+1, i+2). Схема згущення цих ділянок і ділянок, що належать монотонним частинам ДПК, аналогічна.

Умовою призначення осі ПК , яка визначає точку згущення на ділянці (i, i+1), є розташування центрів ПСф(i-2, i-1, i, iзг), ПСф(i-1, i, iзг, i+1), ПСф(i, iзг, i+1, i+2), ПСф(iзг, i+1, i+2, i+3) (точки T′i-1, T′i, T′i, T′i+1) в межах ланок вихідної ламаної звороту [Ti-2, Ti-1], [Ti-1, Ti], [Ti, Ti+1], [Ti+1, Ti+2] відповідно (рис. 5.3, б). Напрям локалізації особливої ділянки контролюється положенням щодо центрів вихідних ПСф Ti-1, Ti, Ti+1.

Переміщення в напрямі точки Ti забезпечує приналежність центру ПК(i, iзг, i+1) (точка Цзг) відрізку [T′i, T′i]. В цьому випадку отримуємо ДПК, у якій особлива точка може бути призначена в межах ділянки (i, iзг) або (iзг, i+1). Віддалення від Ti призводить до виходу Цзг за межі [T′i, T′i] і приналежності центру ПК(iзг, i+1, i+2) (точка Ц′i+1) відрізку [T′i, T′i+1]. В цьому випадку особливими будуть ділянки (iзг, i+1) і (i+1, i+2).

Наявність двох ділянок, в межах яких може бути призначена особлива точка обумовлено симетричним розташуванням ламаних звороту … - Ti - Ti+1 та Ti - Ti+1- …, які відповідають монотонним частинам ДПК, щодо ланки [Ti, Ti+1], яка відповідає особливій ділянці.

Нагадаємо (п. 2.2.2), що в залежності від напряму обкатки полярного торса нормальною площиною і розташування в цій площині точки, переміщення якої визначає криву, один і той же полярний торс задає монотонні частини ДПК з різним поєднанням характеристик. Тому формування, наприклад, ДПК l1 - l8, l2 - l7, l3 - l6, l4 - l5, здійснюється на основі однієї і тієї ж ГПП, яка зображена на рис. 5.1, б, і за аналогічною схемою.

Таким чином, аналізуючи різні варіанти стикування монотонної ДПК l1 ми розглянемо всі можливі варіанти формування особливих ділянок.

5.2 Формування ділянки ДПК, що містить точку зміни ходу кривої

5.2.1 Згущення ділянки зміни ходу ДПК на основі прилеглих тетраедрів

Просторова крива лінія, що складається з ділянки правого і ділянки лівого ходу розташовується по одну сторону площині, стичної з кривою в точці зміни ходу [138, 315]. Точковий ряд, що належить такій кривій,

розташовується по одну сторону прилеглої площини, яка визначається точками, що обмежують особливу ділянку ДПК. На рис. 5.4 показана послідовність ПП, розташування яких визначає правий хід частини ДПК …, i +1, i+2 і лівий хід частини ДПК i, i+1,… Зміна закономірності розташування площин … - ППi - ППi+1 - ППi+2 - … визначає особливу ділянку ДПК (i…i+ 2), якій належить точка зміни ходу [81].

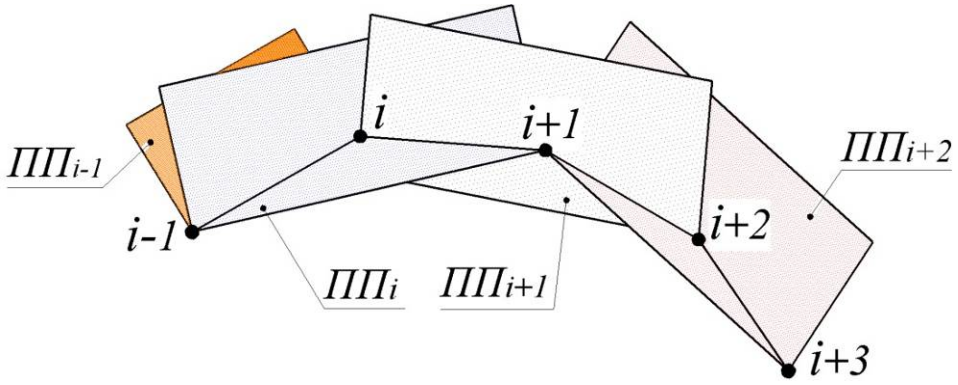
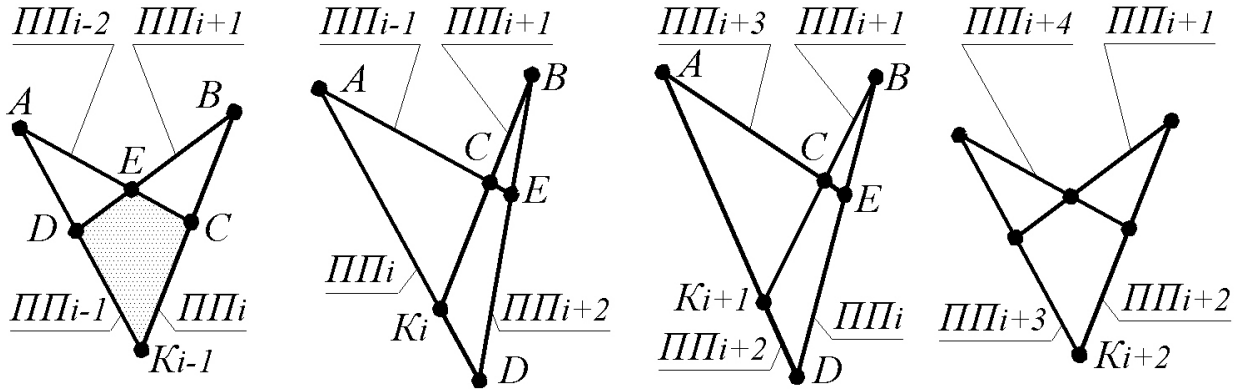


Рис. 5.4. Послідовність ПП, яка визначає зміну ходу ДПК

На рис. 5.5 показані перетини площинами, перпендикулярними відповідним хордам СЛЛ (Pi), прилеглих тетраедрів, що обмежують область розташування ДПК в околі точки зміни ходу. Відрізки, що належать граням ПТ, позначені так само, як і ПП, що визначають ці грані.



а) б) в) г)

Рис. 5.5. Перетини прилеглих тетраедрів ДПК

Розташування зазначених відрізків відображає розташування прилеглих площин і дозволяє визначити хід ДПК на відповідній ділянці.

Кожен відрізок поєднується з наступним за номером відрізком в результаті повороту щодо спільної точки на кут менший 90°. Для відрізків, що належать ПТi-1 (рис. 5.5, а), це повороти ППi-2 → ППi-1 (поворот відрізка ППi-2 до суміщення з відрізком ППi-1), ППi-1 → ППi, ППi → ППi+1, які здійснюються за годинниковою стрілкою. Це означає, що ПТi-1 обмежує область розташування ділянки (i-1, i) ДПК правого ходу. Напрям аналогічних

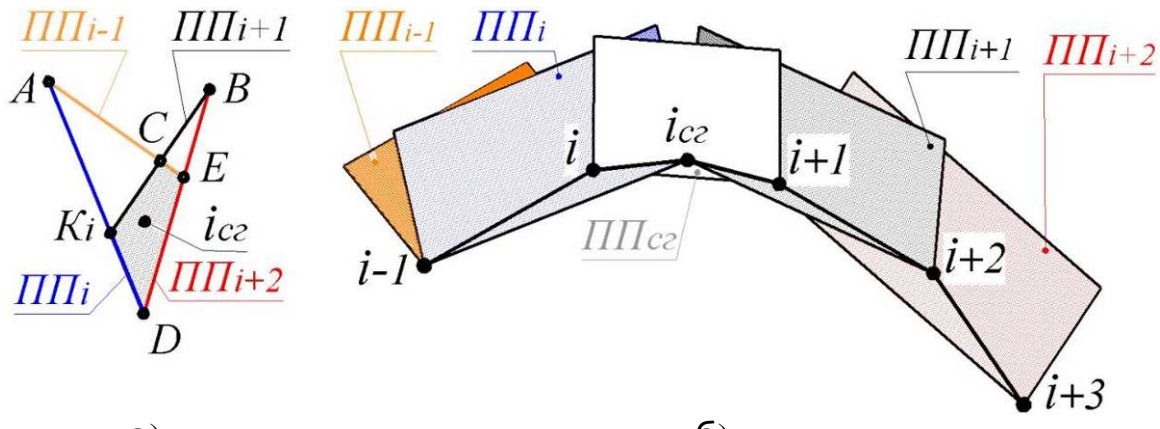
поворотів відрізків, що належать ПТi+2 (рис. 5.5, г), проти годинникової стрілки визначає ДПК лівого ходу на ділянці (i+1, i+2). Область розташування точки згущення на ділянці ДПК, яка не містить особливу точку – чотирикутник, обмежений відрізками, розташованими на гранях ПТ. Для ділянки (i-1, i) це чотирикутник
Ki-1 C E D (рис. 5.5, а).

На ділянках, що містять точку зміни ходу ДПК відрізки, які обмежують область розташування точки згущення, поєднуються поворотами в різних напрямах. Для ділянки (i, i+1) (рис. 5.5, б) повороти ППi-1 → ППi і ППi → ППi+1 здійснюються за годинниковою стрілкою, а поворот ППi+1 → ППi+2 – проти годинникової стрілки. Для ділянки (i+1, i+2) (рис. 5.5, в) поворот ППi → ППi+1 здійснюється за годинниковою стрілкою, а повороти ППi+1 → ППi+2 і ППi+2 → ППi+3 – проти годинникової стрілки.

Область розташування точки згущення на особливій ділянці розділена. Для точки згущення ділянки (i, i+1) це трикутник Ki A C або чотирикутник Ki C E D (рис. 5.5, б). Поділ області розташування точки згущення викликано поділом ПТ на два відкритих тригранника з вершинами в точках i та i+1. Вибір області розташування точки згущення залежить від рішення, на якій з ділянок ДПК буде сформована особлива точка. Якщо вихідний точковий ряд визначає вказане вище розташування ПП, то точка зміни ходу ДПК може бути сформована в межах ділянки (i, i+1), (i+1, i+2) або може бути призначена у вихідній точці i+1. При інших варіантах ДПК буде містити кілька точок зміни ходу. Для ДПК, уздовж якої значення дискретного скруту зменшуються в напрямі особливої ділянки, точка зміни ходу може формуватися як точка сплощення. Точку сплощення будемо формувати на ділянці з меншим значенням дискретного скруту. У разі рівного розподілу значень дискретного скруту на ділянках (i, i+1) та (i+1, i+2) точкою сплощення призначимо вихідну точку i+1.

Розглянемо, як при різних варіантах розташування точки зміни ходу здійснюється згущення ділянки (i, i+1).

1. Якщо прийнято рішення призначити точку зміни ходу на ділянці (i, i +1), то точка згущення цієї ділянки iзг призначається в межах чотирикутника Ki C E D (рис. 5.6, а).

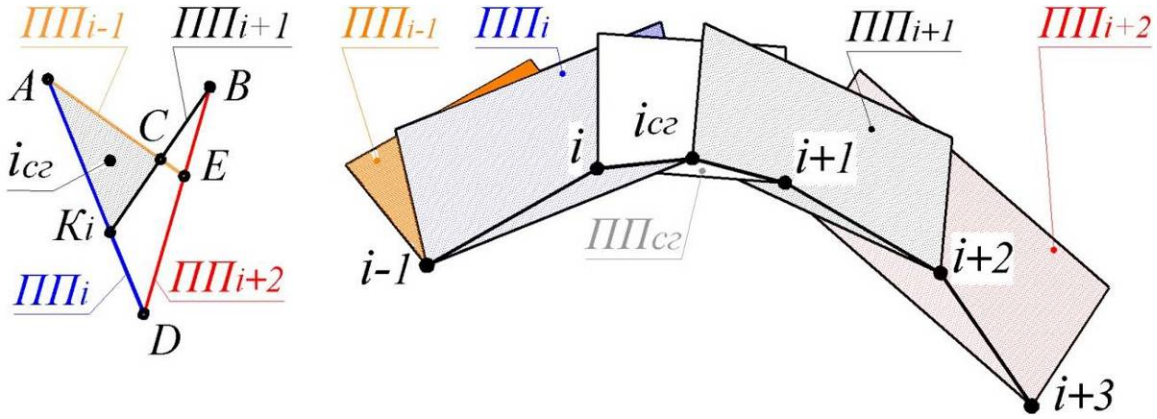


а) б)

Рис. 5.6. Область розташування точки згущення на ділянці зміни ходу

В результаті отримаємо послідовність прилеглих площин … ППi-1 - ППi(i-1, i, iзг) – ППзг(i, iзг, i+1) - ППi+1(iзг, i+1, i+2) - ППi+2 - …, взаємне розташування яких (рис. 5.6, б) вказує на зміну ходу на ділянці (i, iзг) або (iзг, i+1). Вихідна ділянка (i+1, i+2) належить ДПК лівого ходу.

2. Якщо точка зміни ходу розташована на ділянці (i+1, i+2), то точка згущення ділянки (i, i+1) призначається в межах трикутника Ki A C (рис. 5.7, а). Розташування ПП, отриманих в результаті призначення iзг (рис. 5.7, б) вказує, що тепер особливою ділянкою ДПК є ділянка (iзг…i+2).



а) б)

Рис. 5.7. Локалізація ділянки зміни ходу ДПК

У разі подальшого призначення точки згущення i+1зг ділянки (i+1, i+2) в межах чотирикутника Ki+1 C E D (рис. 5.5, в) особлива ділянка буде формуватися в межах вихідної ділянки (i+1, i+1сг) або (i+1сг, i+2), а ділянка (iзг, i+1) буде належати ДПК правого ходу.

3. Якщо точкою зміни ходу призначена вихідна точка i+1, то частини ДПК …, i, i+1 та i+1, i+2, … формуються як криві постійного ходу. У цьому випадку точка згущення на ділянці (i-1, i) призначається в межах трикутника Ki A C (рис. 5.5, б), а на ділянці (i+1, i+2) в межах трикутника Ki+1 B C (рис. 5.5, в). У процесі згущення точкового ряду особлива ділянка ′iзг - i - i′зг, яка обмежена попереднью та подальшю щодо i точками, локалізується. Хорди [′iзг, i] та [i, i′зг], зменшуючись в розмірах, прагнуть прийняти положення прямої, дотичної з ДПК в точці i. Площина ППi(′iзг, i, i′зг) повертається відносно прямої (′iзг, i) або (i, i′зг) проти годинникової стрілки, якщо дивитися в напрямі збільшення нумерації вузлів ДПК. При цьому ППi прагне до положення площини, стичної з ДПК в точці зміни ходу i.

Виходячи з розташування ПП, можна визначити наявність у ДПК точок зміни ходу і точок перегину. Наявність інших особливих точок аналіз розташування ПП не дозволяє виявити. Сформувавши ділянку (i-1…i+1), що

містить єдину точку зміни ходу, ми можемо одночасно отримати кілька особливих точок зміни напряму зростання радіусів стичних кіл і сфер. Щоб запобігти виникненню таких особливих точок, необхідно призначати точку зміни ходу в межах сферичних тригранників, які обмежують особливу ділянку ДПК.

5.2.2 Згущення ділянок зміни ходу ДПК на основі ГПП

Якщо крива лінія складається з декількох монотонних ділянок, то їй відповідає полярний торс, який зістиковано з відсіків. Кожен відсік визначається окремим ребром звороту постійного ходу і відповідає одній з монотонних частин кривої.

Закономірності формування ребер звороту полярних торсів, що відповідають кривим лініям, які містять особливі точки, розглянемо на прикладах ДПК, що складаються з двох монотонних частин, одна з яких має характеристики l1. При цьому будемо розглядати стикування із забезпеченням спільного стичного кола в особливій точці.

5.2.2.1 Згущення особливої ділянки ДПК на основі формування ребер звороту різного ходу

Частина ДПК з характеристиками l1 визначається полярним торсом з ребром звороту правого ходу (п. 2.2.1). Якщо частина l1 стикується з частиною, якій відповідає ребро звороту лівого ходу (монотонні криві з характеристиками l5, l6, l7, l8), то зміна ходу ДПК відбувається при стикуванні l1 – l5 и l1 – l7 [401].

Криву лінію з характеристиками l1 – l5 можна розглядати як траєкторію руху точки, що належить нормальній площині, яка послідовно накочується на два відсіки полярного торса. У точці стиковки, ділянки l1 і l5 мають спільне стичне коло і дві різні стичні сфери (п. 2.2.2). Центри цих сфер і кола належать осі кривини, по якій стикуються відсіки полярного торса. Дискретний аналог полярного торса – ГПП, на підставі якої формується ДПК з характеристиками l1 – l5, зображена на рис. 5.8.

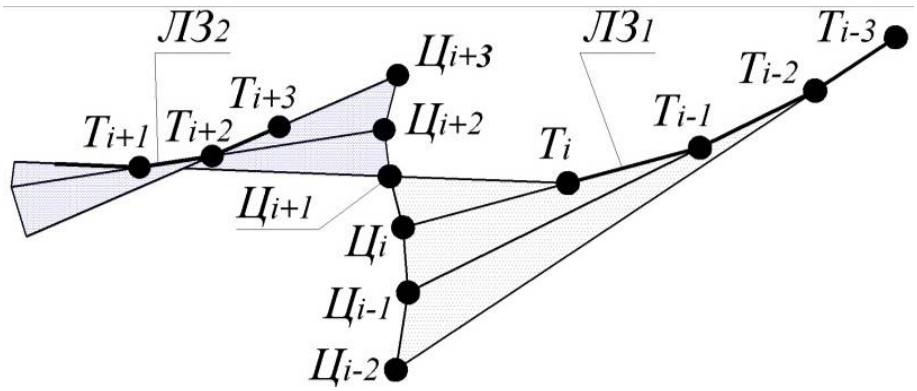


Рис. 5.8. Відсіки ДПП з ребрами звороту різного ходу

Відсік ДПП з ламаної звороту … - Ti - Ti+1 (ЛЗ1) визначається розташуванням вихідних точок частини ДПК …, i+1, i+2. Вихідні точки частини ДПК i+1, i+2 ,… визначають відсік ГПП з ламаною звороту Ti+1 - Ti+2 - … (ЛЗ2). Відсіки стикуються по осі ПК (Ti, Ti+1).

Напрям повороту ланки ламаної звороту до суміщення з прямою, якій належить наступна ланка, визначає хід ДПК, що формується. Наприклад, відрізок [Ti-1, Ti-2] займе положення на одній прямій з відрізком [Ti-1, Ti] в результаті повороту за годинниковою стрілкою відносно точки Ti-1. Цьому повороту відповідає поворот за годинниковою стрілкою ППi-1 відносно прямої (i-1, i) до суміщення з ППi (рис. 5.4). Напрям цих поворотів визначає правий хід ДПК на ділянці (i-1, i).

Розташування вузлів ЛЗ1 визначає правий хід частини ДПК …, i+1, а ЛЗ2 – лівий хід частини ДПК i+1,…. Взаємне розташування центрів сусідніх ПСф і центру ПК, по якому ці сфери перетинаються, визначає напрям зростання радіусів ПСф уздовж точкового ряду. Наприклад, розташування центру ПКi-1 (точка Ці-1) за межами відрізка [Ti-2, Ti-1] і співвідношення довжин |Ці-1, Ti-2| > |Ці-1, Ti-1| означає, що RПСфi-2 > RПСфi-1.

Розташування центру ПК щодо відповідних ланок ЛЗ1 і ЛЗ2 визначає зменшення радіусів ПСф уздовж всього точкового ряду. Напрям нумерації центрів ПСф визначає, що при переміщенні уздовж ДПК точки, яка належить нормальній площині, остання накочується на обидва відсіки полярного торса, що формується. Це означає зменшення радіусів кривини уздовж кривої.

Таким чином, поєднання дискретних характеристик, які визначаються ЛЗ1, вказує, що на основі частини точкового ряду … i+2 можливо сформувати монотонну ДПК тільки з характеристиками l1. Характеристики ЛЗ2 визначають тип l5 монотонної ДПК, яку можливо сформувати на основі точкового ряду i+1 … .

Ділянка ДПК (i+1, i+2) є перехідною. В її межах буде призначена особлива точка. Цій ділянці ДПК відповідає ділянка Ti - Ti+1 - Ti+2 ламаної звороту, на якій стикуються ЛЗ1 і ЛЗ2.

Монотонні частини ДПК формуються за алгоритмами, запропонованими в розділах 3 і 4. У даному пункті розглянемо згущення особливої ділянки ДПК на основі формування ламаної звороту на ділянці Ti - Ti+1 - Ti+2.

Для особливої ділянки ламаної звороту характерно (рис. 5.8):

- зміна напряму повороту послідовних ланок до суміщення одна з одною на одній прямій. У нашому випадку це поворот [Ti-1, Ti] → [Ti, Ti+1] за годинниковою стрілкою і [Ti, Ti+1] → [Ti+1, Ti+2] проти годинникової стрілки;

- розташування центру ПК, що належить прямій, по якій стикуються відсіки ГПП, ланці вихідної ламаної. У нашому випадку це приналежність точки Ці+1 відрізку [Ti, Ti+1].

Умовою формування точки стикування монотонних кривих є збереження характеристик особливої ділянки ламаної звороту в процесі послідовних згущень ДПК.

Визначимо межі, в границях яких може бути призначена точка згущення i+1зг особливої ділянки. Розташування кіл, за якими ПСф, що обмежують область розташування ДПК на особливій ділянці, перетинаються площиною Pi+1, показано на рис. 5.9.

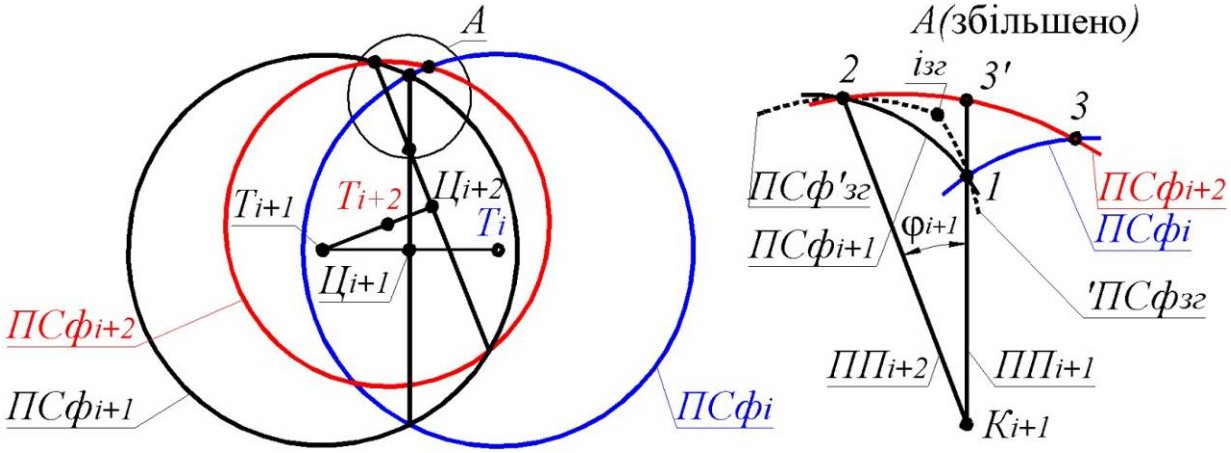


Рис. 5.9. Межі області розташування точки згущення

Точка i+1зг може бути призначена в межах двогранного кута ϕi+1, обмеженого ППi+1 і ППi+2, або за межами цього кута з боку ППi+1 (п. 5.2.1).

У першому випадку область розташування i+1зг – криволінійний трикутник (1,2,3′), обмежений дугами кіл, що належать ПСфi+1 і ПСфi+2 та відрізком, який належить ППi+1. В результаті призначення i+1зг отримаємо ламану звороту … - Ti-1 - T′i - ′Tзг - T′зг - T′i+2 - Ti+3 - … (рис. 5.10).

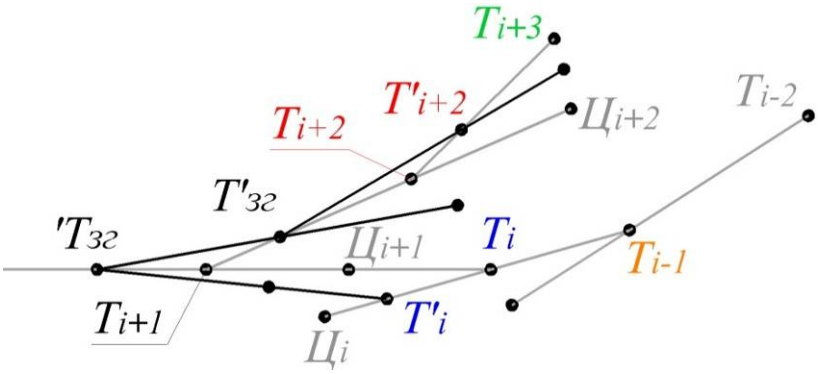


Рис. 5.10. Ламана звороту, що отримана після призначення точки згущення

Тут точка T′i – центр ПСф′i(i-1, i, i+1, i+1зг); ′Tсг – центр ′ПСфзг(i, i+1, i+1зг, i+2); T′зг – центр ПСф′зг(i+1, i+1зг, i+2, i+3); T′i+2 – центр ПСф′i+2(i+1зг, i+2, i+3, i+4).

Пояснимо розташування відносно початкової ламаної звороту центрів ПСф, отриманих в результаті призначення i+1зг.

Вісь ПК (′Тзг, Тзг′) визначається положенням точки i+1зг на перетині дуг ′ПСфзг і ПСф′зг і навпаки – розташування (′Тзг, Тзг′) визначає положення i+1зг.

Розташування ПСф′зг між ПСфi+1 і ПСфi+2 в пучку сфер, що перетинаються по ПКi+2 (рис. 5.9), означає співвідношення радіусів RПСфi+1 > RПСф′зг > RПСфi+2. Це співвідношення визначає розташування точки Т′зг в межах відрізка [Тi+1, Тi+2].

Розташування точки ′Тзг за межами відрізка [Тi, Ці+1] визначено призначенням i+1зг за межами ПСфi+1 і співвідношенням радіусів сфер, що перетинаються по ПКi+1 – RПСф′зг > RПСфi+1.

Точка i+1зг розташована за межами ПСфi. При цьому вона належить ділянці точкового ряду, на якому радіуси прилеглих сфер менше, ніж радіус ПСфi. З цього випливає, що ПСф′i розташована в пучку сфер, які перетинаються по ПКi (рис. 5.11), а точка Т′i розташована за межами [Тi-1, Тi].

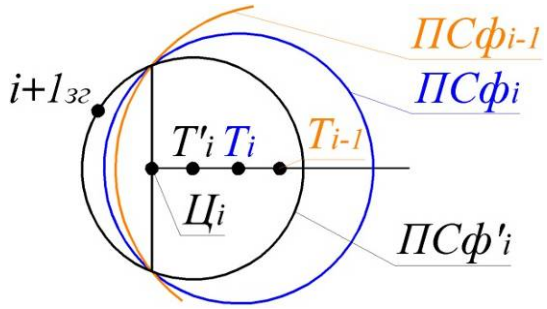


Рис. 5.11. Пучок сфер, отриманих після призначення точки згущення

Аналогічно, розташування i+1зг щодо ПСфi+2 визначає приналежність точки Т′i+2 відрізку [Тi+2, Тi+3].

Зміна положення точок ′Тзг і Т′зг тягне автоматичну зміну положень Т′i і Т′i+2. При цьому отримана ламана звороту не повинна визначати додаткових особливих ділянок ДПК.

Переміщення точки Т′зг по прямій (Тi+1, Тi+2) в напрямі Тi+2 (рис. 5.10) відповідає переміщенню точки i+1зг по дузі ′ПСфзг від вершини 1 криволінійного трикутника (рис. 5.9). При цьому радіус ПСф′i+2 зменшується, а точка Т′i+2 наближається до Тi+2. Одночасно точка Т′i віддаляється від Тi, а радіус ПСф′i збільшується. Крайнім є положення, коли

точки T′зг , T′i+2 та Ti+2 збігаються.

Подальше переміщення T′зг за точку Ti+2 призведе до формування ділянки ламаної звороту ′ Tзг – T′зг – T′i+2 – Ti+3 у вигляді петлі (рис. 5.12) і виникнення двох додаткових ділянок зміни ходу ДПК. Переміщення точки T′ зг в напрямі Ti+1 обмежено становищем, коли T′i+2 ≡ Ti+3 або коли T′зг ≡ Ti +1, а T′i ≡ Ti.

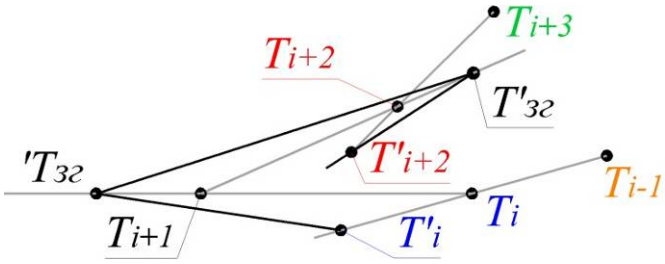


Рис. 5.12. Ламана звороту, що відповідає ДПК з двома ділянками зміни ходу

При переміщенні точки T′зг від відрізка [Ti, Ti+1] (рис. 5.10) точка i+ 1зг наближається до ППi+1 (рис. 5.9) і могла б досягти її в разі нескінченно великої відстані |Ti+1,′ Tсг |. Одночасно збільшується відстань |Ti, T′i| і зменшується |T′i+2, Ti+3|. Таким чином, віддалення точки ′ Tзг від Ti+1 обмежене збігом точок T′i+2 і Ti+3. Переміщення ′ Tзг в напрямі відрізка [Ti, Ti+1] обмежене збігом з точкою Ti+1. У цьому випадку також відбудуться збіги: T′i ≡ Ti та T′i+2 ≡ Ti+2.

Проведений аналіз доводить існування діапазону положень осі (′ Tзг, T′ зг), при якому центри ПСф розташовуються, як показано на рис. 5.10: T′i і ′ Tзг за межами відрізків [Ti-1, Ti] і [Ti, Ti+1], а T′зг і T′i+2 – всередині відрізків [Ti+1, Ti+2] і [Ti+2, Ti+3] відповідно.

Отримана ламана звороту визначає особливу ділянку (i+1, i+1зг), на якій відбувається зміна ходу ДПК, а також монотонні ділянки:

- … i+1, i+1зг з характеристиками l1;
- i+1, i+1зг … з характеристиками l5.

Якщо точка ′ Tзг призначається в межах відрізка [Цi+1, Ti+1], то i+1зг розташовується за межами криволінійного трикутника (1,2,3′) всередині ПСфi+1. У цьому випадку точка T′i+2 розташовується за межами відрізка [Ti +2, Ti+3] і отримуємо ділянку ламаної звороту, подібну до тієї, що зображена на рис. 5.12. Тому вісь ПК (′ Tзг, T′зг) не може перетинати відрізок [Цi+1, Ti+

1].

При визначенні умов формування ламаної звороту, що визначає розташування i+1зг в межах (1,2,3′), наведено докладний аналіз залежності між положенням точки згущення щодо вихідних ПСф і положенням осі ПК (′ Тсг, Т′сг) щодо ланок вихідної ламаної звороту. Надалі такий детальний аналіз викладатися не буде, а будуть відразу показані залежності, визначені на його підставі.

Розташування i+1зг за межами двогранного кута ϕ_{i+1} визначається призначенням точки ′ Тзг праворуч від точки Ці+1. Якщо точка ′ Тзг призначена в межах відрізка [Ці+1, Ті], то отримаємо ламану звороту, зображену на рис. 5.13.

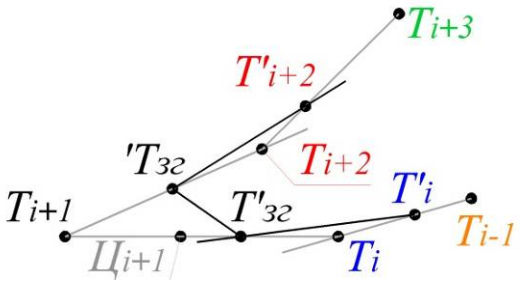


Рис. 5.13. Ламана звороту після згущення особливої ділянки ДПК

На основі такої ламаної звороту можливо сформувати ДПК, що складається з двох монотонних частин. Точка зміни ходу буде призначена в межах ділянки (i+1сг, i+2).

Положення точки ′ Тзг в межах відрізка [Ці+1, Ті] обмежено умовою розташування точки Т′і в межах [Ті-1, Ті]. При наближенні Т′і до Ці+1 точка Т′і наближається до Ті-1 і не повинна її подолати.

Призначення ′ Тсг за межами відрізка [Ті, Ті+1] з боку Ті визначає положення точки Т′і за межами [Ті-1, Ті] з боку Ті. В цьому випадку отримаємо додаткову особливу ділянку ДПК, на якій порушується закономірність зміни радіусів прилеглих сфер:

RПСфі-1 > RПСф′і < R′ ПСфзг.

Розглянутий приклад демонструє, як тип монотонних ділянок, що стикуються, визначає локалізацію вихідної області розташування ділянки зміни ходу ДПК. Характеристики локалізованої області однозначно визначаються вихідною ламаною звороту. Положення точки згущення особливої ділянки і характеристики отриманої ДПК контролюються положенням центрів ПСф, отриманих в результаті згущення.

Полярний торс, що визначає ДПК, яка складається з двох монотонних частин з характеристиками l1 – l7, формується на основі ГПП, що зображена

на рис. 5.14 .

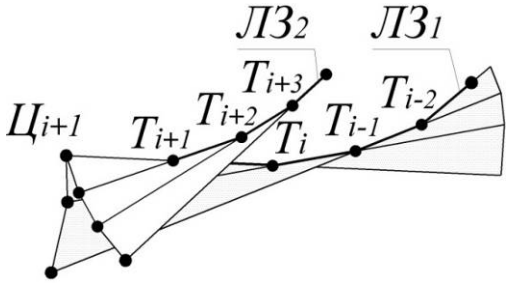


Рис. 5.14. Формування полярного торса з ребром звороту, що містить вершину вістря

Відсік ДПП з ламаною звороту … Ti-1, T′i (ЛЗ1), який визначає ДПК l1, досліджений в попередньому прикладі (ДПК l1 – l5). Другий відсік ГПП з ламаною звороту Ti+1, Ti+2, … (ЛЗ2) визначає ДПК l7 (лівий хід, зменшення радіусів стичних сфер, збільшення радіусів кривини). Ця ЛЗ2 аналогічна тій, на основі якої формується ДПК l5. Різниця полягає в тому, що тепер на основі ЛЗ2 формується порожнина полярного торса, з якої чверть нормальної площини скочується. Наслідком є відмінність в розташуванні центрів ПК щодо відповідних ланок ламаної звороту у ГПП l7 і ГПП l5. Для l7 центри ПК розташовані з боку центру ПСф з меншим номером.

5.2.2.2 Згущення особливої ділянки ДПК на основі формування ребер звороту однакового ходу

Якщо частина ДПК l1 стикується з частиною, якій відповідає ребро звороту правого ходу, то зміна ходу відбувається при стикуванні l1 – l2 і l1 – l4. Ребра звороту полярних торсів цих кривих мають точку перегину [402]. ГПП, на основі якої формується ДПК l1 – l2 зображена на рис. 5.15.

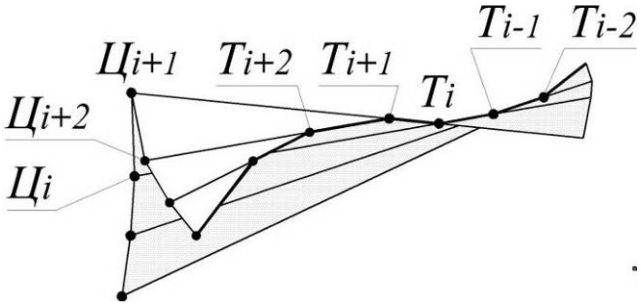


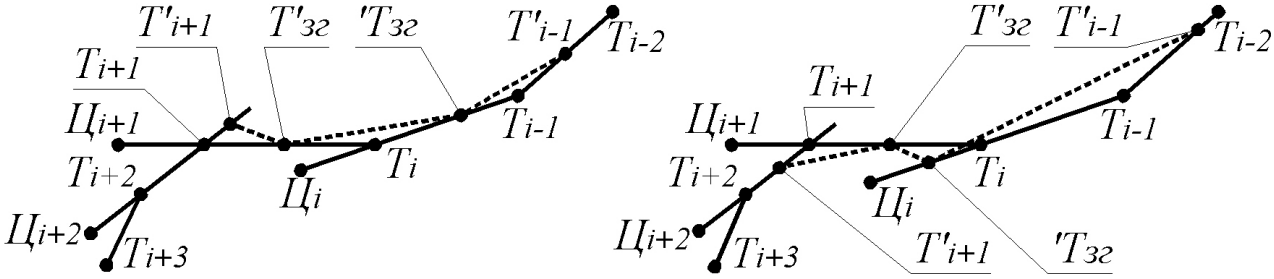
Рис. 5.15. Формування полярного торса з ребром звороту, що містить точку перегину

Відсік ГПП з ламаної звороту … Ti+1 (ЛЗ1) визначається вихідним точковим рядом … i+2. На основі цієї частини точкового ряду формується ДПК l1. Ламана звороту Ti, … (ЛЗ2) визначається розташуванням вихідних точок на ділянці i… . На основі цієї частини точкового ряду формується ДПК l2. Криву l2 можна розглядати як траєкторію руху точки, яка належить

нормальній площині, що скачується з відсіку полярного торса.

Ділянка ДПК (i…i+2) є особливою – точка зміни ходу може бути призначена або на ділянці (i, i+1) або на ділянці (i+1, i+2). Особливій ділянці ДПК відповідає ланка ламаної звороту [Ti, Ti+1]. На основі цієї ланки визначається точка перегину ребра звороту. Частини ламаної звороту ЛЗ1 і ЛЗ2 розташовуються по різні боки площини, що проходить через пряму (Ti, Ti+1) перпендикулярно площині Pi. Збереження в процесі згущень цієї особливості ламаної звороту – необхідна умова формування особливої точки ДПК l1 – l2.

Розташування осей ПК, отриманих в результаті призначення точки згущення iзг в межах двогранного кута ϕi показано на рис. 5.16, а.



а) б)

Рис. 5.16. Ламана звороту згущеної ДПК

Ланка ламаної звороту [T′зг, T′i+1] визначає особливу ділянку ДПК iзг…i+2. Точка зміни ходу ДПК може бути призначена в границях ділянки (iзг, i+1) або (i+1, i+2).

При переміщенні точки ′ Tзг по прямій (Ti-1, Ti) в напрямі Ti-1, точка T ′i-1 переміщується по прямій (Ti-2, Ti-1) до цієї ж точки. Крайнім є положення, коли три точки збігаються: ′ Tзг ≡ Ti-1 ≡ T′i-1. Аналогічно переміщення точки T′зг до Ti+1 визначає наближення до цієї ж точки і точки T′i+1, аж до збігу трьох точок.

Зазначена залежність розташування центрів ПСф T′i-1, ′ Tзг, T′зг та T′i +1 дозволяє стверджувати, що існує діапазон розташування осі ПК (′ Tзг, T′зг), при якому:

- точки T′i-1, ′ Tзг, T′зг належать відрізкам [Ti-2, Ti-1], [Ti-1, Ti], [Ti, Ti +1] відповідно;

- точка T′i+1 розташована на прямій (Ti+1, Ti+2), за межами відрізка [Ti+1, Ti+2] з боку Ti+1.

Отримана ламана звороту складається з частин ... Ti-2 - T′i-1 - ′ Tзг -T′ зг - T′i+1 та T′зг - T′i+1 - Ti+2 - ..., зістикованих по ланці [T′зг, T′i+1]. На основі такої ламаної можливе формування ребра звороту, що складається з двох частин правого ходу, зістикованих в точці перегину.

В результаті переміщення точки ′ Tзг в напрямі Ti точка T′i-1 наближається до Ti-2, а T′i+1 наближається до відрізка [Ti+1, Ti+2]. Після виходу ′ Tзг за границі [Ti-1, Ti] точка T′i+1 виявиться всередині [Ti+1, Ti+2] (рис. 5.16, б). Отримана ламана звороту складається з частин ... Ti-2 - T′i-1 -′ Tсг - T′сг та ′ Tсг - T′сг - T′i+1 -Ti+2 - ..., кожна з яких визначає ребро звороту правого ходу. Частини стикуються по ланці [′ Tсг, T′сг], яка визначає розташування точки згущення iзг за межами двогранного кута ϕi. На основі такої ламаної звороту можливе формування ДПК, що складається з двох монотонних частин правого і лівого ходу. Точка зміни ходу ДПК, може бути сформована в межах ділянки (i, iзг) або (iзг, i+1).

Локалізація особливої ділянки ДПК в рівній мірі залежить від призначення точок згущення на ділянках (i, i+1) та (i, i+2). Точка i+1зг визначається положенням осі ПК (′ Tзг, T′зг) щодо ланок вихідної ламаної звороту [Ti, Ti+1] та [Ti+1, Ti+2] (рис. 5.17). Залежно від розташування ланки [′ Tзг, T′зг] можна отримати два варіанти поділу ДПК на монотонні частини l1 та l2. Належність точки ′ Tзг вихідній ланці [Ti, Ti+1] є необхідною умовою формування ДПК з єдиною особливою точкою. Якщо точка T′зг призначається в межах ланки [Ti+1, Ti+2], то отримана ламана звороту визначає i+1зг в межах двогранного кута ϕi+1, обмеженого ППi+1 і ППi+2. У цьому випадку точка зміни ходу ДПК може бути призначена в межах ділянки (i, i+1) або (i+1, i+1зг).

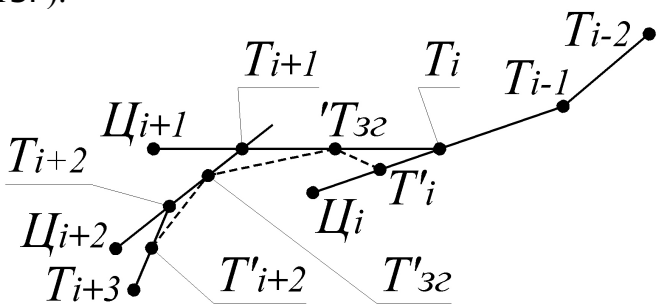


Рис. 5.17. Ламана звороту згущеної ДПК

Призначення T′зг за межами ланки [Ti+1, Ti+2] з боку точки Ti+1 визначає положення i+1зг за межами ϕi+1. В цьому випадку особлива

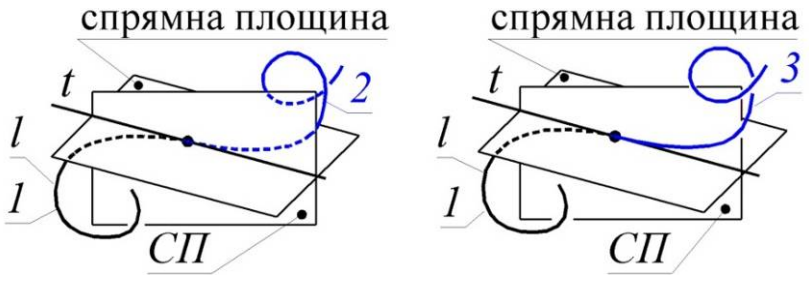
ділянка ДПК – (i+1, i+1зг) або (i+1зг, i+2).

Можливість призначення особливої точки в межах однієї з двох вихідних ділянок ДПК є наслідком симетричного розташування ЛЗ1 і ЛЗ2 щодо ланки [Ti, Ti+1], яка визначає особливу ділянку ДПК. Таке розташування ланок характерно для ламаних, які представляють ребро звороту, яке зістиковано з ділянок одного ходу.

5.3 Формування ділянки ДПК, що містить точку перегину

Точкою перегину просторової кривої лінії l будемо вважати точку, в якій спрям на площина перетинає криву [138].

Розташування частин кривої l, розділених точкою перегину, щодо основного тригранника в цій точці, визначається ходом кривої. Якщо стикуються частини 1 і 2 кривої l різного ходу, то вони розташовуються по різні боки стичної площини (СП) в точці перегину (рис. 5.18, а). Якщо хід частин 1 і 3 кривої l збігається (частину 3 можна отримати поворотом частини 1 щодо бінормалі в особливій точці), то ці частини розташовуються по одну сторону від СП [104] (рис. 5.18, б).



а) б)

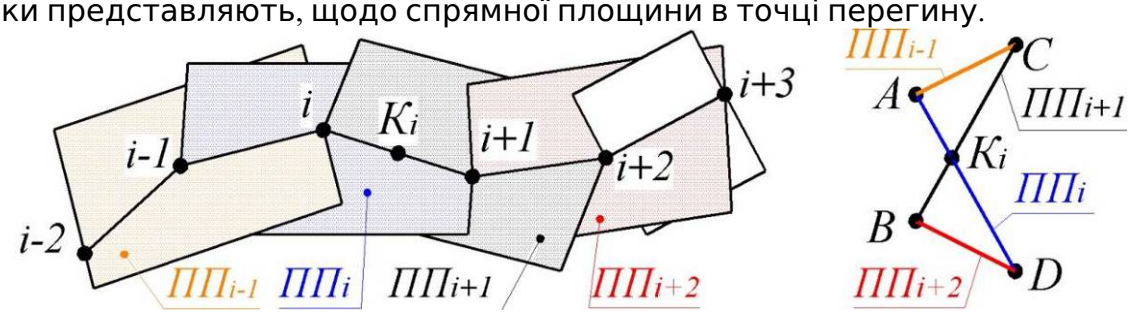
Рис. 5.18. Стикування частин кривої лінії в точці перегину

У точці перегину можуть стикуватися монотонні криві з будь-яким поєднанням геометричних характеристик. Регулярність зміни кривини уздовж кривої можливо забезпечити, коли значення радіуса кривини і радіуса стичної сфери в точці перегину нескінченно велике. ДПК з зазначеними характеристиками можна сформувати на основі точкового ряду, уздовж якого значення радіусів прилеглих кіл і сфер зростають в напрямі особливої ділянки.

5.3.1 Формування ДПК постійного ходу в околі точки перегину

Вихідний точковий ряд, який визначає ДПК, що складається з монотонних частин l3 і l1, зображено на рис. 5.19, а. Частини вихідного точкового ряду …, i-2, i-1 (ДПК з характеристиками l3) та i+2, i+3,… (ДПК с характеристиками l1) розташовуються по різні боки площин, що проходять через хорду [i, i+1] перпендикулярно ППi або ППi+1. Таке розташування вихідних точок відповідає розташуванню монотонних частин ДПК, які ці

точки представляють, щодо спрямної площини в точці перегину.



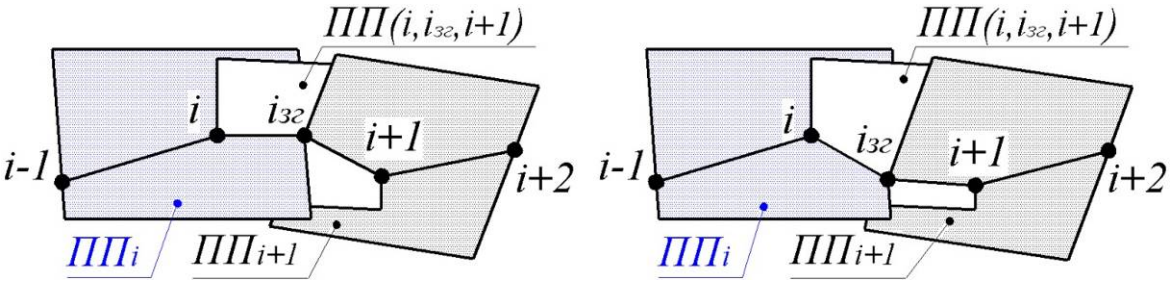
а) б)

Рис. 5.19. Розташування прилеглих площин в околі точки перегину

Криві l3 і l1 правого ходу і відповідні їм частини точкового ряду розташовуються по одну сторону ППi і ППi+1. Таке розташування вихідних точок відповідає розташуванню частин ДПК однакового ходу, щодо стичної площини в точці перегину.

Положення вихідних точок вказує на стиковку монотонних частин ДПК в точці перегину, яку можливо призначити на ділянці (i, i+1).

Прямі, за якими площина Pi перетинає ПП, що визначають межі прилеглого тетраедра особливої ділянки, обмежують два трикутника (рис. 5. 19, б). Такий поділ області розташування точки згущення викликано тим, що прилеглий тетраедр розпадається на два відкритих тригранника з вершинами i та i+1 і спільним ребром (i, i+1). Точка згущення iзг може бути призначена в межах трикутника A,Ki,C або B,Ki,D. У першому випадку отримаємо ДПК з особливою ділянкою (iзг, i+1) (рис. 5.20, а). У другому випадку особливою ділянкою буде (i, iсг) (рис. 5.20,б).



а) б)

Рис. 5.20. Варіанти згущення особливої ділянки ДПК

Частина вихідного точкового ряду …i+1 визначає відсік ГПП з ламаної звороту …, Ti-1, Ti (рис. 5.21). На його основі формується полярний торс, з якого скачується чверть нормальної площини. Точки цієї чверті переміщуються по монотонним кривим l3.

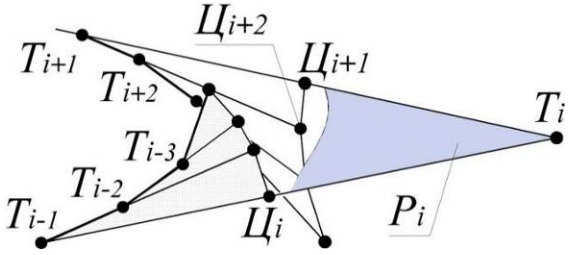
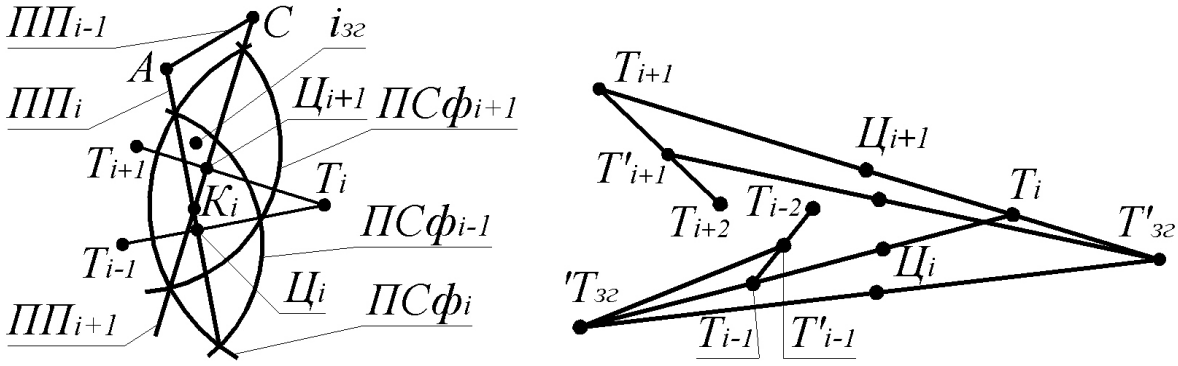


Рис. 5.21. Конфігурація ГПП, що визначає ділянку перегину

ДПК постійного ходу

Відсік ГПП з ламаної звороту Ti, Ti+1, … визначається точковим рядом i…, який представляє ДПК l1. На основі цього відсіку формується полярний торс, на який накочується чверть нормальної площини. Монотонні частини ДПК формуються на основі ламаних звороту по алгоритмам, розробленим в розділах 3 і 4.

Положення точки згущення особливої ділянки ДПК (i, i+1) визначається на основі ланок ламаної звороту Ti-1 - Ti - Ti+1, які належать площині Pi. Кола, за якими площину Pi перетинають вихідні ПСфi-1, ПСфi, ПСфi+1, зображені на рис. 5.22, а.



а) б)

Рис. 5.22. Формування ламаної звороту, що відповідає ділянці перегину ДПК

Середина хорди [i, i+1] – точка Ki розташовується в межах кута Ti-1, Ti, Ti+1. Таке розташування хорди є необхідною умовою формування ділянки, що містить точку перегину ДПК.

Положення iзг в межах трикутника A,Ki,C уточнюється виходячи з вимоги збільшення радіусів ПК і ПСф, одержуваних в результаті згущення особливої ділянки. Призначення точки згущення всередині ПСфi-1 забезпечує співвідношення радіусів:

$$R\ '\ ПСфзг(i\text{-}1,\ i,\ iзг,\ i\text{+}1) > R\ ПСфi\text{-}1;$$

$$R\ ПСф'зг(i,\ iзг,\ i\text{+}1,\ i\text{+}2) > R\ ПСфi;$$

$$R\ ПКзг(i,\ iзг,\ i\text{+}1) > R\ ПКi.$$

Щоб отримати ДПК з особливою ділянкою (i, iзг), необхідно призначити iзг в межах криволінійного трикутника, обмеженого ППi, ППi+1 та ПСфi+1. Призначенню iзг в межах трикутника A,Ki,C відповідає положення центру ПСф′зг (точка T′зг) за межами ланки вихідної ламаної звороту [Ti, Ti+1] (рис. 5.22, б). Призначення центру ′ ПСфзг (точка ′ Tзг) за межами [Ti-1, Ti] визначає розташування iзг всередині ПСфi-1.

Віддалення точок ′Тзг і Т′зг від ланок вихідної ламаної звороту збільшує значення радіусів ′ПСфзг та ПСф′зг. Одночасно це призводить до зменшення радіусів ПСф′i-1(i-2, i-1, i, iзг) і ПСф′i+1(iзг, i+1, i+2, i+3). Збільшення відстані між ′Тзг та Ti обмежено умовою розташування центру ПСф′i+1 (точка Т′i+1) в межах [Ti+1, Ti+2]. Збільшення відстані між ′Тзг та Ti-1 обмежено розташуванням центру ПСф′i-1 – точки Т′i-1 в межах [Ti-1, Ti-2].

5.3.2 Формування ДПК в околі точки перегину та зміни ходу

Наявність у ДПК ділянки перегину з одночасною зміною ходу визначається виходячи з розташування вихідних ПП (рис. 5.23).

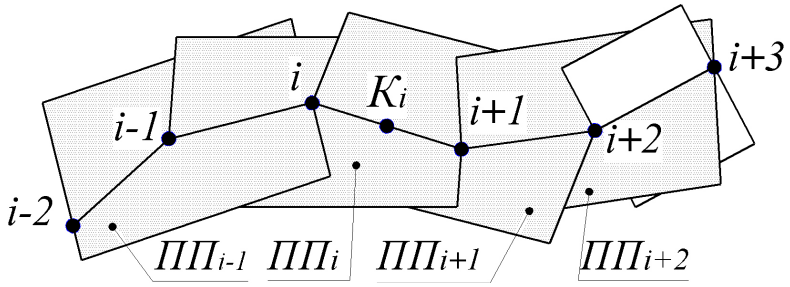


Рис. 5.23. Розташування прилеглих площин в околі особливої ділянки

Так само, як і у ДПК постійного ходу, наявність точки перегину на ділянці (i, i+1) обумовлено розташуванням частин точкового ряду …i та i+1… по різні боки площини, що проходить через пряму (i, i+1) перпендикулярно ППi. Зміна ходу ДПК на ділянці (i-1…i+1) визначена розташуванням частин точкового ряду по різні боки ППi+1.

За сукупністю зазначених ознак точка перегину, в якій ДПК змінює хід, може призначатися на вихідній ділянці (i, i+1). Тип монотонних кривих, що стикуються, визначається виходячи з динаміки зміни радіусів прилеглих кіл і сфер уздовж відповідних ділянок точкового ряду.

Як приклад розглянемо ГПП, задану точковим рядом, який належить ДПК l3 – l5 (рис. 5.24).

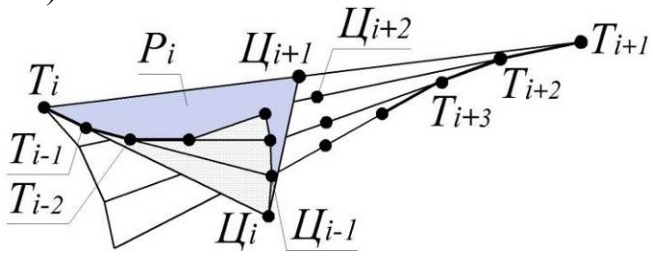


Рис. 5.24. Конфігурація ГПП, що визначає ділянку перегину з одночасною зміною ходу ДПК

Відсік ГПП з ламаної звороту …, Ti-1, Ti, заданий послідовністю точок …,i, i+1, визначає ДПК правого ходу з характеристиками l3.

Відсік ДПП з ламаної звороту Ti, Ti+1, …, заданий послідовністю точок i, i+1,…, представляє полярний торс, на який накочується чверть нормальної площині. Точки, що належать цій чверті, переміщуються по кривим, уздовж яких радіуси кривини зменшуються. Розташування центрів прилеглих сфер і центрів прилеглих кіл на відповідних осях ПК визначають лівий хід і зменшення радіусів стичних сфер уздовж ДПК. Сукупність перерахованих характеристик відповідає ДПК l5.

При зворотній нумерації точкового ряду, зображена на рис. 5.23 ГПП відповідає ДПК l7 – l1.

Згущення ділянки перегину ДПК l3 – l5 аналогічно згущенню ділянки перегину ДПК l3 – l1.

Розглянуті приклади дозволяють сформулювати умови формування ДПК в околі точки перегину.

1. В точці перегину можуть стикуватися ДПК, уздовж яких значення кривини зростають в різних напрямах. Наприклад, частина ДПК з характеристиками l1 може стикуватися з частинами l2, l3, l6 та l7.

2. Середина хорди СЛЛ, яка відповідає особливій ділянці, повинна розташовуватися в межах відповідної грані ГПП. Наприклад, для хорди [i, i+1] точка Ki повинна належати відсіку площини Pi, який обмежений кутом Ці, Ti, Ці+1.

3. Точка згущення призначається на особливій ділянці виходячи з умови збереження монотонності зміни дискретних характеристик уздовж ділянок ДПК, що стикуються. Це означає, що в результаті призначення осі ПК, що визначає положення точки згущення на особливій ділянці (i, i+1), центр ПСф (i-2, i-1, i, iзг) повинен належати ланці ламаної звороту, обмеженій центрами ПСфi-2 та ПСфi-1, а центр ПСф(iзг, i+1, i+2, i+3) – розташовується на ланці, обмеженій центрами ПСфi+1 та ПСфi+2.

Відзначимо, що альтернативою формуванню ділянки ДПК з точкою перегину є формування ділянки, уздовж якої значення скруту стрімко змінюються. При русі точки вздовж такої ділянки кривої лінії стична площина до кривої в цій точці зробить поворот близький до 360° відносно дотичної прямої.

У цьому розділі розглянуто особливості згущення точкового ряду, розташованого на кривій лінії в околі точок перегину, зміни ходу, зміни напряму зростання радіусів стичних кіл або сфер. Аналіз закономірностей формування ділянок стикування монотонних частин ДПК з різним поєднанням характеристик дозволяє сформулювати твердження:

Твердження 5.1 Область можливого розташування ділянки ДПК, що містить особливу точку, складається з двох частин, конфігурація кожної з яких відповідає типу однієї з двох монотонних ДПК, що стикуються в особливій точці.

Умова збереження початкової конфігурації області розташування особливої ділянки і відповідній їй частині ламаної звороту ГПП лежить в основі алгоритму згущення ДПК, що містить особливі точки.

5.4 Алгоритм згущення особливої ділянки ДПК

1. На підставі розташування уздовж точкового ряду ПП визначаються ділянки ДПК, що містять точки перегину і зміни ходу.

2. Виходячи з динаміки зміни уздовж точкового ряду значень радіусів ПК і ПСф визначається:

- наявність у ДПК особливих точок, які не є точками перегину або зміни ходу кривої;

- тип монотонних ДПК, які стикуються в особливих точках, включаючи точки перегину і зміни ходу.

3. Проводиться аналіз взаємного розташування послідовних ПСф. За результатами аналізу формується ламана звороту ГПП, яка визначає особливі ділянки ДПК, і визначається область можливого розташування ДПК в околі особливої точки.

4. Призначається напрям локалізації особливої ділянки в межах її вихідних границь і визначається відповідна частина області можливого розташування точки згущення.

5. Призначається точка згущення особливої ділянки. Основний критерій вибору положення точки згущення – локалізація області розташування особливої точки і збереження вихідного поєднання дискретних характеристик монотонних частин ДПК. Властивості отриманої ДПК контролюються через характеристики ламаної звороту ГПП, яку задає точковий ряд, що формується.

У процесі згущення особливої ділянки область її можливого розташування послідовно локалізується в межи вироджуючись в точку. Особливу ділянку ДПК будемо вважати сформованою, коли область її розташування стає менше заданої абсолютної похибки формування ДПК.

5.5 Формування особливих ділянок ДПК, у вузлах якої призначено положення дотичних прямих

Розглянуті в розділі умови згущення особливих ділянок ДПК засновані на визначенні областей, обмежених прилеглими площинами і сферами. В результаті призначення у вихідних точках ДПК дотичних прямих ці області локалізуються. Тепер вони обмежені дотичними площинами і сферами. Умови та алгоритми згущення ДПК на основі вихідного точкового ряду і точкового ряду з визначеним положенням дотичних аналогічні.

Задача зводиться до визначення положення дотичних прямих у вузлах, що обмежують особливі ділянки ДПК, при яких конфігурація дотичних тетраедрів і сферичних тригранників відповідає типу монотонних частин ДПК, що стикуються.

Дотичні прямі в точках особливої ділянки будемо визначати як лінії перетину дотичних площин (ДП). Якщо в особливій точці не відбувається зміни ходу ДПК, то умови призначення ДП на особливій ділянці такі ж, як і для монотонних частин (розділ 4). На ділянці зміни ходу схема призначення ДП має особливості, які розглянемо на прикладі ДПК, зображеної на рис. 5.25. Розташування ПП визначає правий хід кривої, яку представляє точковий ряд …, i+1, i+2 і лівий хід кривої, яку представляє точковий ряд i, i+1,… Точка зміни ходу може бути призначена на ділянці (i-1, i) або (i, i+1).

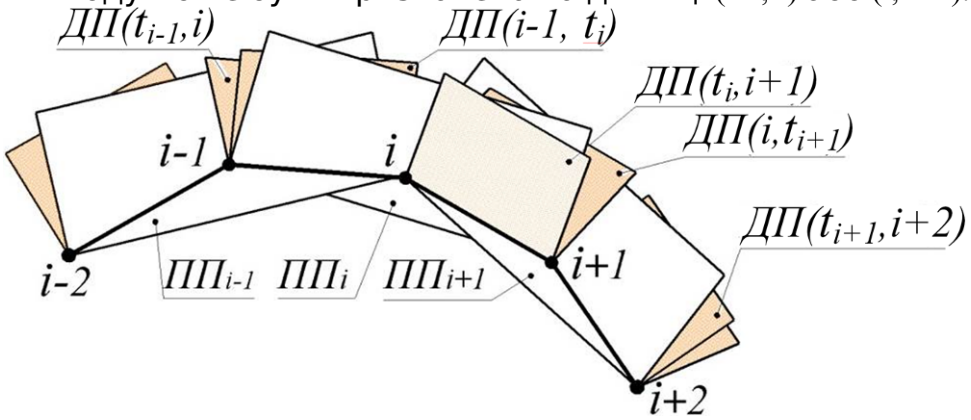


Рис. 5.25. Розташування дотичних площин в околі точки зміни ходу

Якщо прийнято рішення формувати особливу точку на ділянці (i, i+1), то положення ДП в точках …, i-1, i призначається виходячи з динаміки зміни значень дискретного скруту вздовж частини ДПК правого ходу. При цьому положення …, ДП(ti-1, i), ДП(i-1, ti) призначається в межах двогранних кутів, обмежених відповідними ПП (п. 4.2). Площина ДП(ti, i+1) призначається за межами двогранного кута φi, обмеженого ППi і ППi+1 (рис. 5.25). Положення ДП(ti, i+1) визначається проходженням через пряму (i, i+1) і кутом wi між цією площиною і ДП(i-1, ti). Величина wi визначається зі співвідношення:

де wi-1 – величина кута між ДП(i-2, ti-1) та ДП(ti-1, i).

Положення ДП(i, ti+1) і подальших площин, дотичних з ДПК в точках i +1, i+2,…, призначається в межах двогранних кутів, обмежених відповідними ПП за схемою, запропонованою в п. 4.2.

В результаті отримуємо послідовність ДП, взаємне розташування яких повторює розташування вихідних ПП як уздовж монотонних частин ДПК так і в околі особливої ділянки.

Точка згущення особливої ділянки (i, i+1) призначається в межах двогранного кута ψi, обмеженого ДП(ti, i+1) і ДП(i, ti+1). Конкретне положення iзг визначається на основі ГППN, що складається з відсіків перпендикулярних (Pi) і нормальних (Ni) площин.

Якщо особлива точка формується на ділянці (i-1, i), то, виходячи з правого ходу кривої, призначається положення площин, дотичних з ДПК в точках …, i-2, i-1. В цьому випадку ДП(i-1, ti) призначається за межами двогранного кута φi. Її положення визначається проходженням через пряму (i -1, i) і кутом wi між цією площиною і ДП(ti, i+1).

Висновки по п'ятому розділу

1. Дослідження, проведені в розділі, вирішують задачу моделювання ДПК на ділянках, які містять особливі точки – точки, в яких змінюється закономірність зміни уздовж кривої її характеристик. Це можуть бути точки перегину, зміни ходу, зміни напряму зростання вздовж кривої значень радіусів стичних кіл і сфер. Запропоновані схеми згущення особливих ділянок ДПК засновані на формуванні відповідних відсіків полярних торсів і на визначенні меж областей можливого розташування ділянок.

Основною вимогою до згущення особливої ділянки є запобігання неконтрольованого виникнення додаткових ділянок, що містять особливі точки.

2. Запропоновано універсальний критерій наявності особливої точки на ділянках ДПК. Область розташування особливої ділянки розділена на дві області, які мають спільну границю. Характеристики кожної з цих областей відповідають властивостям однієї з двох монотонних кривих ліній, які стикуються в особливій точці.

Критерій дозволяє визначати ділянки, на яких ДПК обов'язково містить особливу точку, класифікувати цю точку і згущувати точковий ряд виходячи з характеристик кривої в околі особливої ділянки.

3. Запропоновано схему згущення особливої ділянки ДПК, яка забезпечує контроль її послідовної локалізації. Точка згущення заміщає одну з вихідних точок – меж особливої ділянки, і для подальшого згущення стає її новою межею. Особлива ділянка, зменшуючись в розмірах, зміщується в бік однієї з монотонних частин ДПК, в межі вироджуючись в особливу точку. При цьому зберігається закономірність зміни дискретних характеристик уздовж частин точкового ряду, які розділені особливою ділянкою ДПК.

4. Досліджено взаємозв'язок між розташуванням вздовж точкового ряду прилеглих площин і наявністю у ДПК ділянок, що містять точки перегину або зміни ходу. Область можливого розташування особливої ділянки складається з двох відкритих тригранників, обмежених послідовними прилеглими площинами. Особлива точка може бути призначена в межах одного з них.

ДПК містить точку зміни ходу, якщо відкриті тригранники дотикаються по спільній прилеглій площині. Якщо тригранники дотикаються по прямій лінії, то ДПК містить точку перегину. Призначення точки згущення в межах будь-якого з тригранників забезпечує локалізацію особливої ділянки і області її розташування. Вибір тригранника, в межах якого призначається точка згущення, визначає до якої з ділянок згущеної ДПК буде належати особлива точка.

Формування особливої ділянки виходячи з розташування прилеглих площин дозволяє контролювати стикування частин ДПК, які формуються як криві постійного ходу. При цьому не гарантується запобігання виникненню додаткових особливих ділянок, що містять точки зміни напряму зростання вздовж ДПК радіусів стичних кіл або сфер.

5. Встановлено залежність між розташуванням вздовж точкового ряду прилеглих сфер і наявністю ділянок, що містять точки зміни напряму зростання вздовж ДПК радіусів стичних кіл або сфер. Середня з трьох прилеглих сфер, що обмежують область розташування особливої ділянки, розділяє область на два сферичних тригранника. Локалізація особливої ділянки контролюється через вибір сферичного тригранника, в межах якого призначається точка згущення. Згущення особливої ділянки в межах сферичних тригранників не забезпечує контроль виникнення ділянок, що містять точки перегину і зміни ходу ДПК.

6. Встановлені залежності між характеристиками ДПК і межами області розташування точки стикування її монотонних частин дозволили контролювати локалізацію ділянок, в межах яких в різних поєднаннях відбувається перегин, зміна ходу і зростання вздовж кривої радіусів стичних кіл і сфер. Область розташування особливої ділянки отримуємо в перетині тетраедрів, обмежених прилеглими площинами, і сферичних тригранників, обмежених прилеглими сферами.

Згущення точкового ряду в межах прилеглих тетраедрів дозволяє контролювати локалізацію ділянок, які містять точку перегину або зміни ходу кривої. Призначення точок згущення в межах сферичних тригранників гарантує монотонність зміни радіусів стичних кіл і сфер уздовж частин ДПК, зістикованих в особливій точці.

Контроль локалізації області перетину тетраедрів і сферичних тригранників запобігає виникненню додаткових особливих ділянок ДПК і забезпечує концентрацію зміни закономірності зростання вздовж кривої значень різних характеристик в одній особливій точці.

7. Дослідження взаємозв'язку між конфігурацією точкового ряду і розташуванням ланок ламаної звороту гранної полярної поверхні показало, що кожній особливій ділянці ДПК відповідає особлива ділянка ламаної звороту.

Конфігурація вихідної ламаної звороту дозволяє визначати:

- ділянку ДПК, яка містить особливу точку;
- наявність або відсутність перегину або зміни ходу ДПК в особливій точці;
- тип монотонних частин ДПК, які стикуються в особливій точці.

8. Запропоновано схему призначення положення прямих, дотичних до ДПК в точках, що обмежують її особливу ділянку, при яких зберігаються властивості вихідної ДПК, що задані конфігурацією вихідного точкового ряду. Призначення дотичних прямих дозволяє локалізувати область розташування особливої ділянки і призначати особливу точку в межах дотичних тетраедрів і тригранників дотичних сфер на основі гранної поверхні нормальних площин.

Локалізація області розташування особливої ділянки зменшує число згущень, необхідних для забезпечення заданої точності визначення положення особливої точки.

9. Способи згущення особливих ділянок дають можливість моделювати на основі точкового ряду довільної конфігурації ДПК, що складається з монотонних частин зістикованих в особливих точках. Контроль незапланованого виникнення особливих ділянок забезпечує формування ДПК, у якої число монотонних частин мінімально виходячи з конфігурації вихідного точкового ряду.

Основні результати досліджень, проведених в п'ятому розділі, опубліковані в роботах – [77, 104, 401, 402].

Використані в розділі результати досліджень інших авторів опубліковані в роботах – [138, 315].

РОЗДІЛ 6
МОДЕЛЮВАННЯ ПЛОСКОЇ ДПК ІЗ ЗАКОНОМІРНОЮ ЗМІНОЮ КРИВИНИ

Плоску криву лінію можна розглядати як особливий випадок кривої, в точках якої значення скруту дорівнюють нулю, а стичні сфери нескінченно великі [71]. Таким чином, з трьох характеристик, що визначають монотонність кривої (п. 2.2) уздовж плоскої лінії змінюється тільки кривина. Гладку плоску криву, уздовж якої значення кривини монотонно зростають або зменшуються, називають монотонною [138].

Моделювання ДПК з закономірною зміною кривини вимагає розв'язку задач:

- визначення області можливого розташування монотонних частин ДПК;
- призначення положень центрів кривини, які відповідають точкам монотонної ДПК;
- згущення точкового ряду, що представляє криву з монотонною зміною кривини;
- згущення особливих ділянок ДПК, що містять точки перегину або точки зміни напряму зростання кривини уздовж кривої.

6.1 Область можливого розташування монотонної ДПК

Точки, що належать кривій лінії, визначають стичні і прилеглі кола. Розглянемо їх розташування відносно кривої лінії, уздовж якої радіуси кривини монотонно зростають.

Коло, яке стичне з кривою в точці i, розділяє монотонну криву на дві частини (рис. 6.1). Частина кривої, в точках якої радіуси кривини менше, ніж радіус СКi (Ri), розташовується всередині неї. Інша частина кривої розташована за межами СКi [138].

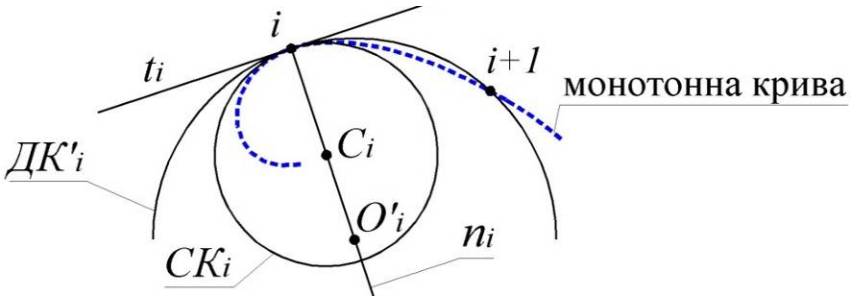


Рис. 6.1. Розташування стичних і дотичних кіл

щодо монотонної кривої

Точка i, дотична ti і ще одна точка, що належить кривій, визначають дотичне коло. Точка кривої i+1, що знаходиться за межами СКi, визначає ДК′i(i, ti; i+1), радіус якого більше Ri. Розташування СКi всередині ДК′i означає, що частина кривої (i, i+1) знаходиться всередині ДК′i.

Точка i-1, що належить кривій і розташована всередині СКi, визначає ′ ДКi(i-1; i, ti), радіус якого менше Ri. Частина кривої (i-1, i) розташовується зовні ′ ДКi.

Точки i-1, i, i+1 визначають прилегле коло ПКi. Розглянемо це коло як результат трансформації ДК′i, коли точка i-1 переміщується по кривій в напряму зменшення радіусів кривини.

Коли відстань hi=|i-1, i| нескінченно мала, ПКi збігається з ′ ДКi. У міру збільшення hi-1 радіус ПКi зменшується залишаючись більше, ніж радіус ′ ДКi. З цього випливає, що частина кривої (i-1, i), в точках якої радіуси кривини менше Ri, розташована зовні ПКi. Частина кривої (i, i+1), в точках якої радіуси кривини перевищують Ri, розташована всередині ПКi (рис. 6.2). Точки, призначені на монотонній кривій, задають прилеглі і дотичні кола, радіуси яких монотонно зростають уздовж точкового ряду [73]:

…<R ПКi-1>R ДК′i-1>R ′ДКi<R ПКi<R ДК′i<R ′ДКi+1<R ПКi+1<… (6.1)

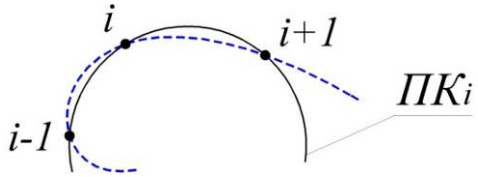


Рис. 6.2. Розташування монотонної кривої відносно ПК

Зростання радіусів ПК і ДК обумовлено їх розташуванням відносно відповідних СК і ділянок кривої.

Послідовність ПК обмежує область, в межах якої розташовані монотонні криві, що інтерполюють точковий ряд. Для ділянки (i, i+1) цю область обмежують ПКi і ПКi+1 (рис. 6.3). Монотонне зростання вздовж точкового ряду радіусів ПК – необхідна умова формування на його основі монотонної ДПК.

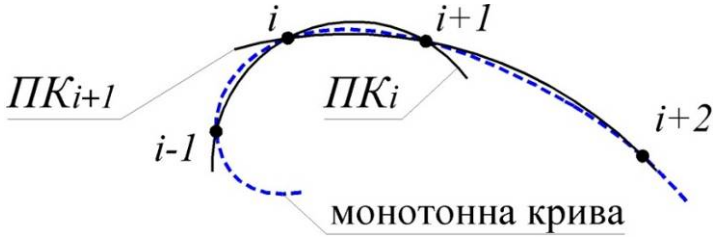


Рис. 6.3. Вихідна область розташування ділянки монотонної кривої

Якщо відомо положення дотичних ti і ti+1, то область розташування ділянки монотонної кривої лінії обмежують ДK′i та ′ДKi+1.

Найбільш точна оцінка області розташування ділянки монотонної кривої можлива, якщо для точок i та i+1 відомо положення центрів кривини Ci та Ci+1. Нижню (найменш віддалену від хорди [i, i+1]) межу області становить дуга CKi і дуга Колаi+1, яке одночасно дотичне до кривої в точці i +1, та до CKi – в деякій точці A (рис. 6.4). Верхню межу становлять дуга CKi +1 і дуга Колаi, яке торкається до кривої в точці i, а до CKi+1 – в деякій точці B.

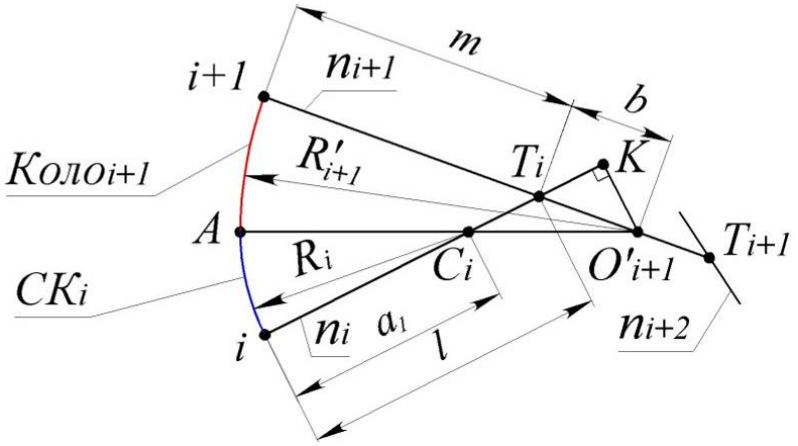


Рис. 6.4. Нижня межа області розташування ділянки монотонної кривої

Покажемо спосіб визначення меж області розташування ділянки монотонної кривої [110].

Вихідними даними для визначення нижньої межі області є положення нормалей кривої ni та ni+1 в точках i та i+1, а також положення центру кривини Ci.

Задача зводиться до визначення положення центру Колаi+1 (точка Oi+1). Введемо позначення, які будуть використані при розв′язанні задачі: Ti ≡ ni×ni+1 – точка перетину нормалей ni та ni+1; Ti+1 ≡ ni+1×ni+2; b=|Ti, Ti+1|; a1=|Ci, Ti|; m=|i+1, Ti|; Si – площа трикутника Ci, Ti, Ti+1.

Положення центру Колаi в межах відрізка [Ti, Ti+1] однозначно визначається співвідношенням:

. (6.2)

Виходячи з торкання дуг i - A та A - i+1:

. (6.3)

З трикутника Ci, Oi+1, K:

. (6.4)

Довжину відрізка [Ti, K] визначимо як катет трикутника Ti, K, Oi+1:

,

а довжину [K, Oi+1] виразимо через площу трикутника Ci, Oi+1, Ti (S1)
:

.

Виразивши S1M Si, отримаємо (6.4) у вигляді:

. (6.5)

Підставивши (6.3) в (6.5), після перетворень отримуємо:

. (6.6)

Задача визначення верхньої межі області розташування ділянки монотонної кривої зводиться до розрахунку координат центру Колаі (точка Oi). Вихідними даними для розв'язання задачі є положення нормалей ni-1, ni, ni+1 та центру кривини Ci+1.

Положення Oi в межах відрізка [Ti-1, Ti] (рис. 6.5) визначається співвідношенням:

,

де a=|Ti-1, Ti|.

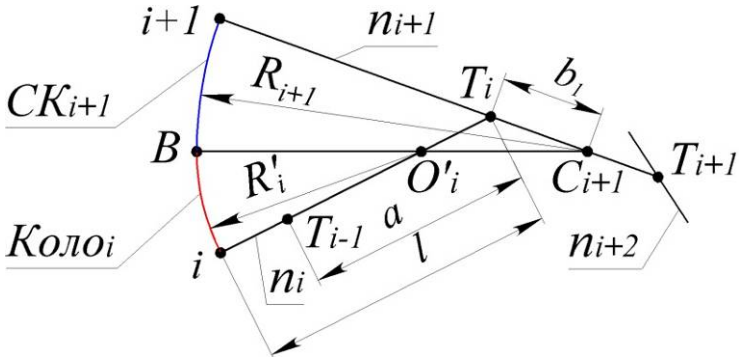


Рис. 6.5. Верхня межа області розташування ділянки

монотонної кривої

В результаті підстановок, аналогічних зробленим при виведенні (6.6), отримуємо:

,

де l=|i, Ti|, a=|Ti-1, Ti|, b1=|Ti, Ci+1|, Si+1 – площа трикутника Ti-1, Ti, Ci+1.

При заданому положенні нормалей ni, ni+1 та центру кривини Ci+1 радіус Колаi є максимальним з можливих радіусів кривини монотонної кривої в точці i. Аналогічно положення Ci визначає мінімальний з можливих радіус кривини в точці i+1 – .

Лінії, що обмежують область можливого розташування монотонної кривої, визначають діапазон можливих значень її довжини. Довжина ділянки кривої (i, i+1) не може перевищувати довжину коробової лінії i – B – i+1 та не може бути менше, ніж довжина i – A – i+1.

6.2 Призначення геометричних характеристик в точках вихідної ДПК

Формування монотонної ДПК будемо розглядати на прикладі згущення точкового ряду, уздовж якого радіуси ПК зростають.

Положення нормалей і центрів кривини призначаються виходячи з умови існування області можливого розташування монотонної кривої, яка інтерполює точковий ряд і має в його точках призначені нами характеристики. Наявність такої області контролюватимемо розташуванням нормалей і центрів кривини відносно центрів ПК.

Центри ПК … Ці-1, Ці, Ці+1, … розташовані на перетині прямих, проведених перпендикулярно хордам СЛЛ через середини цих хорд (рис. 6.6).

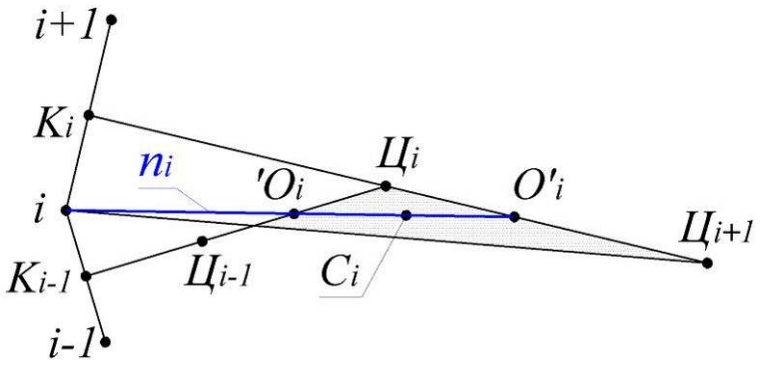


Рис. 6.6. Вихідна область розташування i-го центру кривини

Нормаль ni повинна перетинати відрізки [Ці-1, Ці] та [Ці, Ці+1] (п. 6.1). Отже, діапазон розташування ni обмежений прямою (i, Ці) і тією з прямих (i, Ці-1) або (i, Ці+1), яка становить з (i, Ці) менший кут [103].

Діапазон розташування центру кривини Ci обмежений центрами ′ДКi та ДК′i – точками перетину ni з прямими (Ki-1, Ці) та (Ki, Ці), де Ki-1, Ki – точки розташовані в центрі відрізків [i-1, i], [i, i+1] відповідно. Якщо Ci збігається з межею діапазону, то відповідна ділянка ДПК буде дугою кола. Наприклад, при Ci ≡ O′i ділянка ДПК (i, i+1) буде дугою ДК′i. У разі, коли крайнє положення займає нормаль, діапазон розташування центру кривини

вироджується в центр відповідного ПК. Наприклад, якщо ni проходить через Цi, то ця точка є єдиним варіантом i-го центру кривини монотонної ДПК. У цьому випадку ділянки ДПК (i-1, i) та (i, i+1) належать ПКi.

Вихідна область розташування Ci – трикутник, обмежений прямими (Ki-1, Цi), (Ki, Цi+1) і однією з прямих (i, Цi+1) або (i, Цi-1). Ця область визначена виходячи з положення п'яти послідовних точок вихідного точкового ряду – i-2,…,i+2. Для остаточного призначення характеристик ДПК необхідно враховувати конфігурацію всього точкового ряду.

6.2.1 Призначення положення нормалей

З умови (6.1) випливає, що точка перетину нормалей Ti ≡ ni×ni+1 відносно прямої (Ki, Цi) повинна розташовуватися з того же боку, що і точка i+1 (рис. 6.7). Зазначене розташування нормалей є необхідною умовою формування ДПК, уздовж якої радіуси кривини монотонної зростають.

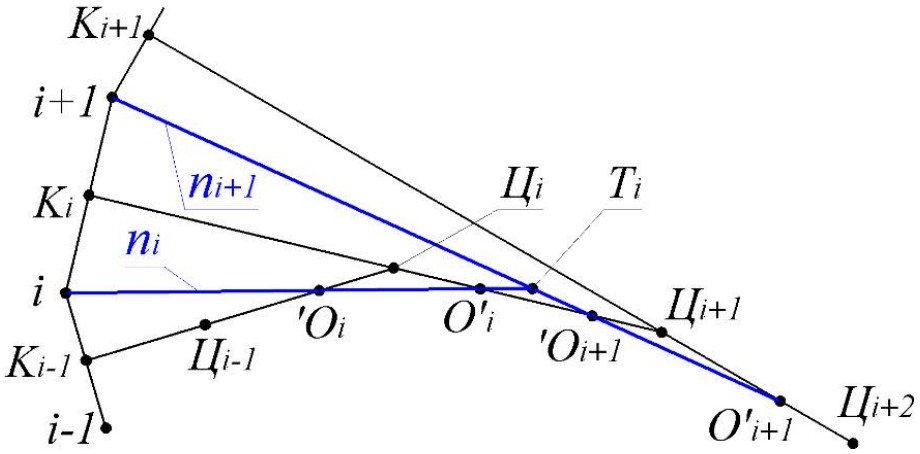


Рис. 6.7. Взаємне розташування нормалей монотонної ДПК

Взаємне розташування нормалей зручно контролювати співвідношенням довжин відрізків:

$$|Цi, O'i| \le | Цi, {}' Oi+1|.$$

Рівність зазначених відрізків означає, що точка Ti належить прямій (Ki, Цi). В цьому випадку ділянка ДПК (i, i+1) формується дугою кола з центром Ti.

При призначенні в початкових точках ДПК попереднього положення нормалей будемо прагнути до рівномірного розташування центрів ДК в межах відрізка, обмеженого центрами відповідних ПК.

Покажемо варіант схеми призначення таких положень нормалей.

1. Призначаємо попереднє положення ni, при якому точка ′Oi ≡ ni × (Ki -1, Цi) розділяє відрізок [Цi-1, Цi] в співвідношенні

$$|O'i, Цi| : |Цi-1, Цi| = 1:3.$$

2. Визначаємо точку ′Oi+1, в якій ni перетинає пряму (Ki, Цi). Якщо величина відношення довжин відрізків |Цi, ′Oi+1|:|′Oi+1, Цi+1| не перевищує 1: 2, то положення ni вважаємо остаточно визначеним. В іншому випадку призначаємо остаточне положення ni, при якому точка ′Oi+1 розділяє відрізок [Цi, Цi+1] у відношенні 1:3.

Призначивши за вказаною схемою положення нормалей у всіх точках вихідної ДПК, отримаємо послідовність ДК, радіуси яких відповідають умові (6.1).

6.2.2 Призначення центрів кривини

Призначивши у вихідних точках положення нормалей і центрів кривини, ми задаємо початкові дані для формування еволюти ДПК – геометричного місця її центрів кривини. Характеристики ДПК будемо призначати виходячи з властивостей еволюти монотонної кривої [71]:

- еволюта є опуклою кривою лінією, яка не містить точок перегину і точок звороту;

- нормалі кривої лінії є дотичними її еволюти у відповідних центрах кривини;

- довжина будь-якої ділянки еволюти дорівнює різниці значень радіусів кривини в точках, що обмежують відповідну ділянку вихідної кривої.

Нормалі, призначені в початкових точках ДПК і хорди, що з'єднують центри кривини, які належать цим нормалям, обмежують послідовність трикутників (рис. 6.8). Будемо називати ці трикутники базисними (БТ). Ланцюжок БТ однозначно визначається центрами кривини і є областю можливого розташування еволюти ДПК [366].

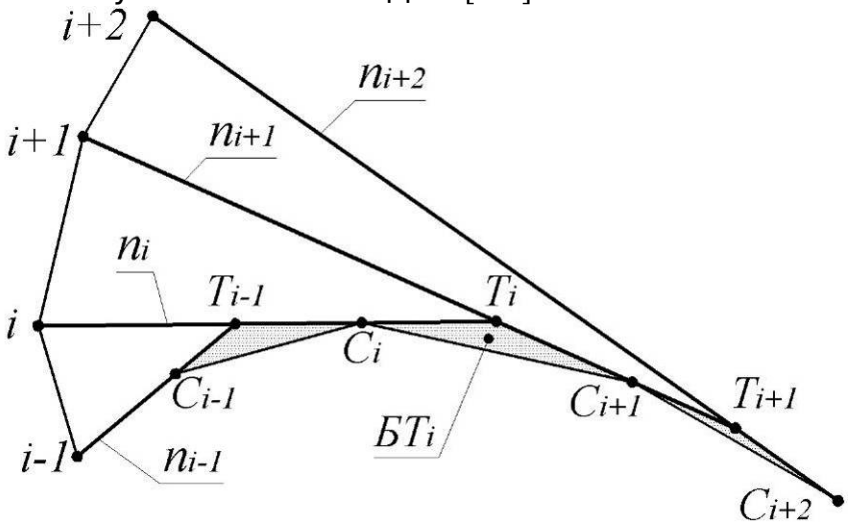


Рис. 6.8. Область розташування еволюти ДПК

Виходячи з вимог до еволюти монотонної кривої i-й БТ (БТi) повинен відповідати умові:

$$|Ci,\ Ci+1| \le Ri+1 - Ri \le |Ci,\ Ti| + |Ci+1,\ Ti|, \qquad (6.7)$$

Співвідношення $R_{i+1}-R_i \le |C_i,T_i| + |C_{i+1},T_i|$ забезпечується розташуванням нормалей n_i та n_{i+1}, при якому точки $i+1$ та T_i знаходяться по один бік прямої $(K_i,Ц_i)$. Призначення такого положення нормалей можливо для всіх ДПК, заданих точковим рядом, уздовж якого радіуси ПК змінюються монотонно. Можливість виконання умови $|C_i,C_{i+1}| \le R_{i+1}-R_i$ вимагає перевірки.

Збільшення значення R_{i+1} і зменшення R_i призводить до збільшення величини $R_{i+1} - R_i - |C_i,C_{i+1}|$. Зазначена величина буде максимальною при збігу центрів кривини з центрами ПК: $C_i \equiv Ц_{i-1}$, $C_{i+1} \equiv Ц_{i+2}$. Тому в якості критерію можливості виконання умови (6.7) можна використовувати величину:

. (6.8)

Якщо , то існує можливість призначення положень C_i та C_{i+1}, при яких виконується умова (6.7). В цьому випадку ділянка ДПК буде формуватися виходячи з умови регулярного і монотонного зростання радіусів кривини уздовж кривої.

Рівність нулю означає, що $ПК_{i-1}$ і $ПК_{i-2}$ мають точку дотику, яка розташовується між точками i та $i+1$. У цьому випадку частина монотонної ДПК $i-1 \ldots i+2$ може бути сформована тільки як коробова лінія, що складається з дуг $ПК_{i-1}$ і $ПК_{i+2}$.

Якщо , то формування монотонної ДПК на ділянці $(i, i+1)$ неможливо.

Після призначення у вихідних точках нормалей положення центрів кривини, що їм належать, визначається виходячи з умови (6.7).

Розглянемо варіант призначення цих положень [101].

1. Для кожної ділянки ДПК визначається ділянка еволюти мінімальної довжини. Для ділянки $(i, i+1)$ такою еволютою є відрізок $[C'_i, C'_{i+1}]$ (рис. 6.9), межі якого визначають умови:

де – величина різниці значень радіусів кривини ДПК в точках $i+1$ та i.

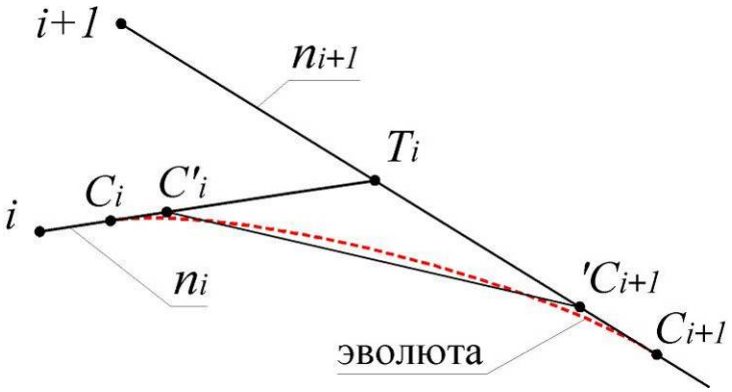


Рис. 6.9. Еволюта ділянки ДПК

Еволюта [C′i, ′Ci+1] визначає i-у ділянку ДПК як коробову лінію, що складається з двох дуг кіл. Призначення i-го центру кривини в межах відрізка [i, C′i], i+1-го центру кривини за межами відрізка [i+1, ′Ci+1] дає можливість формувати ділянку еволюти у вигляді гладкої опуклою лінії.

Відрізок [C′i, ′Ci+1] можна задати визначивши його положення щодо трикутника A,′ Oi+1,Ti (рис. 6.10).

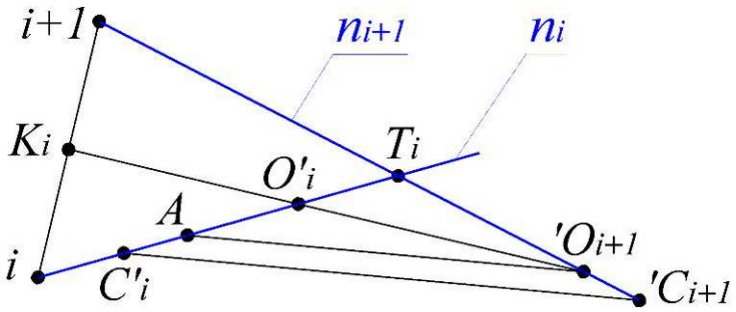


Рис. 6.10. Визначення мінімальної еволюти ділянки ДПК

Точка A призначається на прямій ni виходячи з рівності довжин відрізків |A,Ti | = |′ Oi+1,Ti |. Положення відрізка [C′i, ′Ci+1] відносно трикутника A,′ Oi+1,Ti можна визначити за допомогою коефіцієнта:

.

Положення точок C′i та ′Ci+1 однозначно визначається значенням

де величина дорівнює різниці довжин еволюти [C′i, ′Ci+1] і відрізка [A,′ Oi+1].

2. Після визначення мінімальних еволют для кожної ділянки ДПК отримуємо послідовність відрізків …, [C′i-1, ′Ci], [C′i, ′Ci+1], … . Задача формування еволюти монотонної ДПК має розв’язок, якщо зазначені відрізки не перетинаються (рис. 6.11).

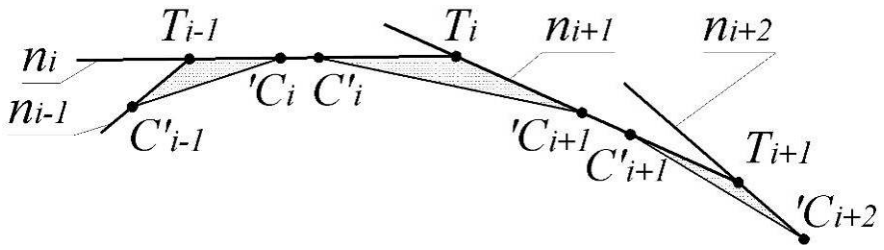


Рис. 6.11. Послідовність мінімальних БТ

У цьому випадку на кожній нормалі ДПК, призначеної у вихідній точці , положення точок C′i і ′Ci визначає співвідношення довжин відрізків:

$$|i,'Ci| \le |i,C'i|. \qquad (6.9)$$

Якщо відрізки, що визначають мінімальні еволюти сусідніх ділянок, перетинаються, то виконання умови (6.9) можна забезпечити корегуванням положення відповідних нормалей. Схему такого корегування розглянемо на прикладі нормалі ni.

Нехай положення нормалей ni-1, ni, ni+1 визначає перетин відрізків [C′i-1, ′Ci] та [C′i, ′Ci+1] (рис. 6.12).

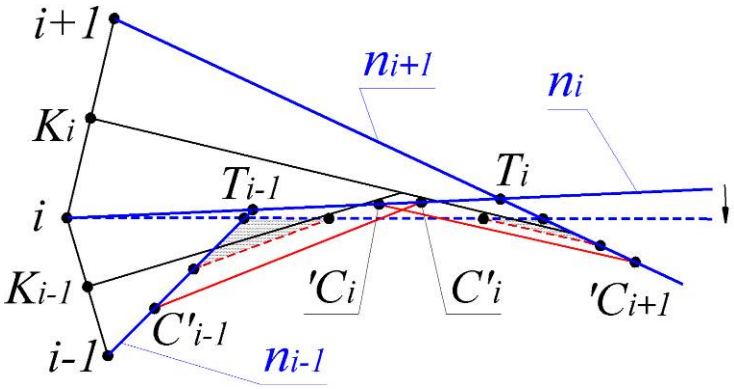


Рис. 6.12. Корегування положення нормалі ДПК

Поворот ni відносно точки i за годинниковою стрілкою при незмінному положенні ni-1 і ni+1, призводить до зменшення відстані | i, Ti-1| і збільшення |i, Ti|. Одночасно зменшуються розміри відрізків [Ai-1,′ Oi] та [Ai,′ Oi+1] і величини Δ, на які довжину цих відрізків перевищує довжина відповідної

мінімальної еволюти. В результаті відстані | i-1,C′i-1| та | i, C′i| збільшуються, а | i,′ Ci| та | i+1,′ Ci+1| зменшуються. На рис. 6.12 мінімальні БТi-1 і БТi, отримані після повороту ni, зафарбовані.

Максимальному повороту ni відповідає положення, коли ця нормаль проходить через точку Ці-1 або Ці+1. У цьому випадку довжина мінімальної еволюти відповідної ділянки ДПК буде дорівнювати нулю. Очевидно, що корегування положення нормалей дозволяє домогтися виконання умови (6.3) уздовж всієї ДПК.

Величину відношення

можна використовувати в якості критерію швидкості зміни значень кривини уздовж ділянки ДПК. Положення нормалей, при якому значення Ki у всіх точках монотонної ДПК рівні будемо вважати оптимальним.

3. Точки ′ Ci і C′i обмежують діапазон можливого положення i-го центру кривини монотонної ДПК. Після призначення для кожної вихідної точки ДПК положення центру кривини отримуємо послідовність БТ, що відповідають умові (6.7). Характеристики БТ дозволяють формувати еволюту , яка задає монотонну ДПК, локально в межах кожного з БТ.

6.3 Згущення монотонної ДПК

Після призначення у вихідних точках центрів кривини згущення ДПК може здійснюватися локально по окремих ділянках і в довільній послідовності [99]. Умовою призначення точки згущення є існування області можливого розташування монотонної кривої лінії, яка інтерполює точковий ряд, що формується, і має в його точках призначені характеристики. Кожен крок згущення передбачає послідовне визначення положення нормалі, центру кривини і точки згущення. Кожен із зазначених елементів призначається в межах відповідного діапазону, межі якого визначаються виходячи з характеристик вихідної ДПК.

6.3.1 Визначення положення нормалі ДПК в точці згущення

Призначивши нормаль nсг, що відповідає точці згущення i-ої ділянки ДПК (iзг) і центр кривини (Сзг), розташований на цій нормалі, отримуємо два нових БТ – Ci,Сзг,T1 (′БТзг) та Сзг,Ci+1,T2 (БТ ′зг).

З умови розташування ділянки еволюти ДПК в межах ′БТзг і БТ ′зг випливає [100] (рис. 6.13):

$$|Ci,Ссг| + |Ссг,Ci+1| \le Ri+1-Ri \le |Ci,T1| + |T1,T2| + |T2,Ci+1|. \qquad (6.10)$$

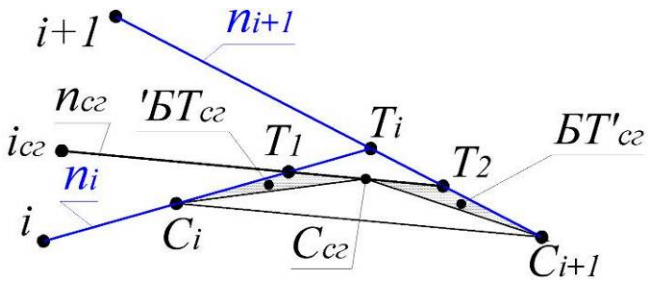


Рис. 6.13. Згущення ділянки ДПК

Визначимо межі діапазону розташування нормалі nзг відповідно до умови (6.10). При цьому будемо вимагати, щоб nзг була паралельна прямій (Ci,Ci+1).

Зазначене обмеження коректно, так як ділянка еволюти (Ci,Ci+1) – опукла крива, яка не містить особливих точок. Це гарантує наявність в одній з точок ділянки еволюти дотичній, яка паралельна хорді [Ci,Ci+1].

Положення nзг, коли відстань між нормаллю і прямою (Ci,Ci+1) мінімально, визначається співвідношеннями:

(6.11)

Виходячи з (6.11) і подібності трикутників Ci,Ci+1,Ti та T1,T2,Ti мінімальну відстань між nзг і (Ci,Ci+1) (hmin) можна виразити через параметри вихідного БТ:

,

де S – площа БТi, a = |Ci,Ti |, b = |Ci+1,Ti|, c = |Ci,Ci+1|.

У разі, коли відстань між nзг і (Ci,Ci+1) дорівнює hmin, ламана Ci – T1 – – T2 – Ci+1 є єдиним варіантом еволюти ділянки ДПК (i, i+1) і ця ділянка – коробова лінія, що складається двох дуг кіл з центрами в точках T1 та T2.

Максимально можлива відстань (hmax) між nзг і (Ci,Ci+1) дорівнює висоті трикутника Ci,Ci+1,Ссг, сторони якого визначаються співвідношеннями:

Віддалення точки Сзг від прямої (Ci,Ci+1) не може перевищувати величину hmax, яку можна розрахувати за формулою:

.

Якщо відстань від точки Сзг до прямої (Ci,Ci+1) дорівнює hmax, то ділянка ДПК (i, i+1) є коробовою лінією, що складається з трьох дуг кіл з центрами в точках Ci, Сзг, Ci+1.

Призначення nсг, відстань якої від (Ci, Ci+1) знаходиться в діапазоні hmin <hсг <hmax дозволяє формувати ділянку еволюти у вигляді гладкої опуклою лінії. Така еволюта задає евольвенту з регулярною і монотонною зміною кривини.

6.3.2 Призначення положення центру кривини ДПК, який відповідає точці згущення

Після призначення положення нормалі nзг на ній визначається діапазон можливого розташування центру кривини Сзг [111]. Це відрізок [C1, C2], де C1 – положення точки Сзг, при якому радіус кривини (Rзг) в точці згущення мінімальний; C2 – положення центру кривини, при якому Rзг максимальний.

Положення точок C1 і C2 визначається виходячи з умови |Ci, Ссг| + | Ссг, Ci+1| = Ri+1 - Ri. Виконання умови означає, що еволюта ділянки ДПК – ламана лінія Ci – Сзг – Ci+1, а геометричне місце положень точки Сзг – еліпс з фокусами в точках Ci, Ci+1 і довжиною великої осі, що дорівнює Ri+1 - Ri [72]. У прямокутній системі декартових координат з початком в центрі відрізка [Ci,Ci+1] і додатним напрямом осі абсцис, що збігаються з вектором

.3 , цей еліпс визначається рівнянням:

.

При різних положеннях нормалі nзг межі діапазону [C1, C2] отримуємо в перетині нормалі і еліпса (рис. 6.14).

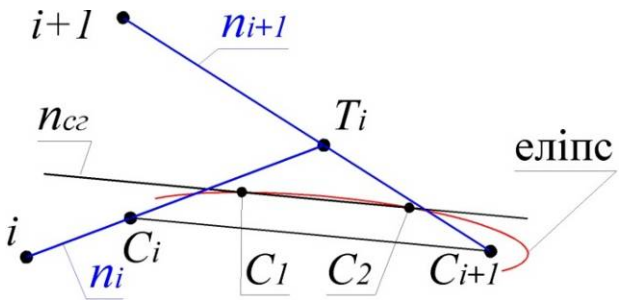


Рис. 6.14. Визначення діапазону розташування центру кривини

Якщо точки С1 або С2 виявляються за межами БТi, то межею діапазону розташування Сзг є точка Т1 або Т2 відповідно.

Задача формування монотонної ДПК має розв'язок при призначенні центру кривини в будь-якій точці відрізка [С1, С2]. Якщо це не суперечить додатковим умовам, які накладаються на ДПК, що формується, то Сзг призначається в центрі [С1,С2].

6.3.3 Визначення положення точки згущення

Діапазон розташування точки згущення iзг визначається на нормалі nзг виходячи з призначеного положення центру кривини Сзг. Цей діапазон визначається максимальним і мінімальним значеннями, які може приймати радіус кривини ДПК в точці згущення [367]:

. (6.12)

Розташування еволюти ДПК в межах 'БТзг і БТ 'зг означає:

(6.13)

Виходячи з (6.13) в якості нижньої межі діапазону (6.12) .3 призначається більша з величин $R_i + |C_i, C_{зг}|$ або $R_{i+1} - |C_{зг}, T_2| - |T_2, C_{i+1}|$. Верхня межа діапазону дорівнює меншій з величин $R_i + |C_i, T_1| + |T_1, C_{зг}|$ або $R_{i+1} - |C_{i+1}, C_{зг}|$.

Визначимо співвідношення величин, з яких вибираються значення

і .

Якщо центр кривини займає крайнє положення Ссг ≡ С2, то величини Ri + |Ci,Сзг| і Ri+1 - |Ci+1,Сзг| рівні. Очевидно, що тоді |Ci+1,Сзг| < |Ci+1,Т2| + |Т2,Сзг| (рис. 6.13), а значить і

Ri+|Ci,Ссг| > Ri+1 - (|Ci+1,Т2|+|Т2,Сзг|). (6.14)

При переміщенні Сзг від С2 в напрямі С1 відстань |Т2,Сзг| збільшується швидше, ніж |Ci,Ссг|. Це означає, що співвідношення (6.14)

зберігається, а значення .

Аналогічні міркування доводять:

.

Виходячи зі співвідношень |Ci,Сзг| < |Ci,С2|, |Ci+1,Сзг| > |Ci+1,С2| та Ri + |Ci,Срг| = Ri+1 - |Ci+1,С2| можна стверджувати, що діапазон (6.12) існує за умови призначення нормалі nзг і центру кривини Сзг в межах діапазонів їх можливого розташування.

Значення радіуса кривини в точці згущення призначається рівним

. Положення точки згущення визначаємо відклавши від Сзг відрізок, довжина якого дорівнює Rзг.

Формування монотонної ДПК можливо при відповідності характеристик БТ, які задають її еволюту, вимозі (6.7). Умовою формування послідовності вихідних БТ є виконання вимоги |Ці-1,Ці+2| ≤ RПОі+2 - RПОі-1 для кожної ділянки (i,i+1) вихідної ДПК. Відповідність вимозі (6.7) форми і розташування БТ, які будуть одержані в процесі подальших згущень, забезпечує схема призначення точки згущення.

Збереження заданих параметрів БТ, що формуються в процесі будь-якої кількості згущень, доводить справедливість твердження 6.1.

Твердження 6.1 Послідовне призначення нормалей, центрів кривини і точок згущення в межах діапазонів, що враховують область можливого розв'язку задачі, гарантує формування точкового ряду, який можливо інтерполювати монотонною кривою лінією.

6.4 Алгоритм згущення монотонної ДПК

1. Вихідний точковий ряд розділяється на частини, уздовж яких радіуси послідовних ПК зростають або зменшуються. Кожна з таких частин точкового ряду задає монотонну ДПК.

2. Для кожної ділянки (i, i+1) монотонної ДПК визначається співвідношення між відстанню |Ці-1, Ці+2| та різницею величин радіусів ПКі-1 і ПКі+2. У разі невідповідності між знаком співвідношення і напрямом зростання вздовж точкового ряду радіусів ПК відповідна ділянка ДПК буде формуватися як така, що містить особливу точку.

3. Для кожної вихідної точки визначається діапазон розташування нормалі монотонної ДПК, в межах якого призначається положення нормалі. Положення центрів кривини призначається в межах відрізків, що належать відповідним нормалям, та розраховуються відповідно до умови (6.7).

4. Проводиться локальне згущення ділянок ДПК. Точка згущення призначається в межах діапазону, який визначається положенням нормалі і центру кривини, попередньо призначених для точки згущення, а також нормалями і центрами кривини, які призначені у вихідних точках, що обмежують ділянку, яка згущується. ДПК вважається сформованою, коли діапазони розташування точки згущення на всіх її ділянках стають менше заданої точності дискретної інтерполяції.

Формування ДПК, уздовж якої радіуси кривини монотонно зростають, розглянемо на прикладі згущення точкового ряду, призначеного на параболі,

яка задана рівнянням [404].

Дискретні характеристики вихідного точкового ряду наведені в таблиці 6.1.

Таблиця 6.1.

Характеристики вихідного точкового ряду

i	Координати точки, мм		Довжина хорди СЛЛ hi, мм	Радіус ПК RПКi, мм	Діапазон розташування нормалі Δni, °
	x	y			
1	30	3	31,32	-	-
2	60	12	33,54	188,58	1,074
3	90	27	36,62	238,73	1,074
4	120	48	84,85	348,37	1,386
5	180	108	103,23	570,09	2,727
6	240	192	123,55	1002,64	2,244
7	300	300	-	-	-

Наведені в шостій колонці таблиці значення діапазонів розташування нормалей ДПК визначаються найменшим з кутів між прямою (i, Цi) і однією з прямих (i, Цi-1) або (i, Цi+1) (рис. 6.6). Наприклад, для четвертої точки ДПК діапазон Δn4 дорівнює куту Ц4, 4, Ц5.

Положення кожної з нормалей задає співвідношення довжин відрізків:

,

де O′i – точка перетину нормалі ni з прямою (Ki,Цi) (рис. 6.7).

Значення коефіцієнтів для нормалей, призначених у вихідних точках, наведені в таблиці 6.2.

Таблиця 6.2.

Значення коефіцієнтів, що визначають положення нормалей ДПК

i	1	2	3	4	5	6	7
	0,250	0,343	0,192	0,213	0,301	0,176	-

Положення нормалі n7 в останній, сьомий точці ДПК визначається співвідношенням довжин відрізків: |Ц6, Ц7| = |Ц6, N6|, де N7 ≡ n7 × (K6, Ц6).

Після призначення у вихідних точках нормалей отримуємо ДПК, характеристики якої наведені в таблиці 6.3.

Таблиця 6.3.

Характеристики вихідної ДПК

i	Радіус ДК, мм		Довжини ланок міні-бітної еволюти, мм		Радіус кривини ДПК Ri, мм	Радіус кривини параболи , мм
	R′ДКi	R ДК′i	|′Ci,C′i|	|C′i,′Ci+1|		
1	-	166,74	-	17,32	154,13	159,09
2	176,10	201,94	23,27	217,15	184,56	187,40
3	218,66	260,65	27,17	26,04	239,79	237,90

4	319,22	384,88	78,97	138,58	350,61	355,03
5	468,62	693,55	159,84	165,50	569,53	571,71
6	837,83	1200,0	332,30	569,33	986,86	1007,55
7	1422,14	-	-	-	1781,15	1677,05

Парабола, на якій був призначений вихідний точковий ряд, є одним з варіантів монотонної кривої, якою можливо його інтерполювати. У сьомий колонці таблиці для порівняння наведені значення радіусів кривини вихідної параболи в точках ДПК.

Перший крок згущення ДПК покажемо на прикладі третьої вихідної ділянки. Можливість формування монотонної ДПК в межах ділянки (3,4) визначається виконанням співвідношення:

Діапазон розташування нормалі ДПК в точці згущення визначається мінімальною $h1=0,887$ мм і максимальною $h2=1,258$ мм відстанню між нормаллю і основою БТ3. Після призначення положення нормалі по центру зазначеного діапазону на ній визначено діапазон розташування центру кривини ДПК в точці згущення: $|C1, C2| = 9,873$. Призначені положення нормалі і центру кривини, що відповідають точці згущення, визначили діапазон її

можливого розташування, величина якого дорівнює мм.

Після призначення за аналогічною схемою точок згущення інших ділянок отримана ДПК, характеристики якої представлені в таблиці 6.4.

Таблиця 6.4.

Характеристики згущеної ДПК

i	Координати точки, мм		Довжина хорди СЛЛ h_i, мм	Радіус ПК $R_{ПКi}$, мм	Радіус ДК, мм		Радіус кривини ДПК R_i, мм
	x	y			$R'_{ДКi}$	$R_{ДК'i}$	
1	30	3	7,32	-	-	153,27	154,13
2	44,2	6,5	8,36	167,13	161,14	173,61	165,84
3	60	12	7,74	187,53	182,48	196,5	184,56
4	74,1	18,3	9,05	212,79	205,80	221,59	212,81
5	90	27	8,66	237,99	231,11	247,40	239,79
6	104,5	36,4	9,66	266,25	258,71	277,96	266,26
7	120	48	19,00	352,14	342,08	358,21	350,61
8	148,3	73,4	23,48	428,94	392,05	474,50	426,13
9	180	108	22,57	564,34	519,17	626,10	569,53
10	207,7	143,7	29,07	741,47	704,36	800,27	741,70
11	240	192	26,03	949,93	887,12	1087,21	986,86
12	266,4	236,9	35,76	1448,43	1367,221	1666,43	1438,99
13	300	300	-	-	1694,45	-	1781,15

6.5 Формування ділянок ДПК, що містять особливі точки

Монотонні частини плоскої кривої можуть стикуватися в точках перегину і в точках зміни збільшення – зменшення або зменшення – збільшення уздовж кривої значень кривини. Особливі ділянки будемо формувати виходячи з умови наявності у ДПК мінімального числа особливих точок і регулярності значень кривини в них.

6.5.1 Згущення ДПК в околі точки перегину

У точці перегину стикуються опуклі і увігнуті частини кривої. Відповідно, еволюта розділена на дві гілки, розташовані по різні боки відносно кривої. У разі, коли точка перегину є точкою спрямлення, нормаль кривої в точці перегину служить асимптотою для еволюти [71].

Точковий ряд, що належить кривій лінії, яка містить точку перегину, розділений на дві частини. Ці частини розташовані по різні боки відносно прямої (i, i+1), що проходить через точки, які обмежують ділянку (рис. 6.15).

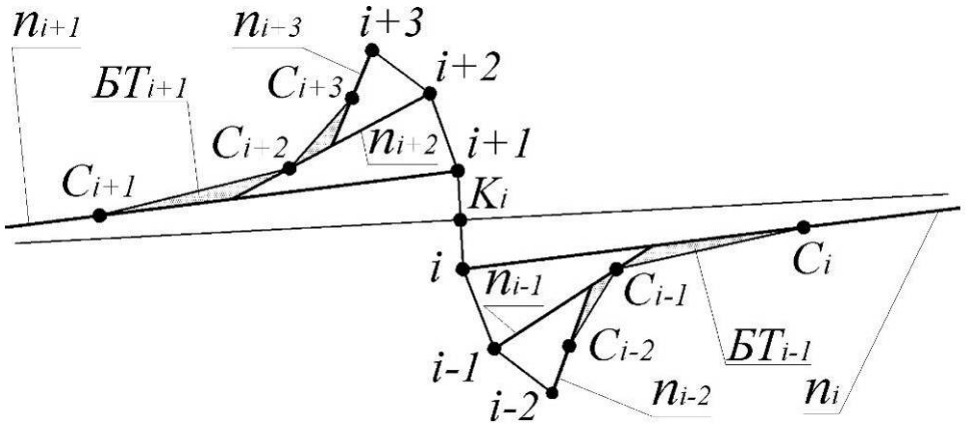


Рис. 6.15. ДПК в околі точки перегину

У разі, коли радіуси ПК зростають уздовж точкового ряду в напрямі особливої ділянки, остання може формуватися як та, що містить точку спрямлення. Послідовності БТ, які задають еволюту кожної з монотонних частин ДПК, формуються по різні боки прямої (i, i+1), а радіуси кривини Ri та Ri+1, які призначені в точках, що обмежують особливу ділянку, максимальні для кожної з частин точкового ряду.

Задача має розв’язок при виконанні умов [104]:

- значення радіусів кривини, призначених в точках опуклої і увігнутої частин ДПК, зростають в напрямі особливої ділянки;
- кола, стичні з ДПК в точках, що обмежують особливу ділянку (СКi та СКi+1), не перетинаються;
- точки перетину дотичних прямих зі стичними колами: Mi = ti× СКi+1 і Mi+1 = ti+1× СКi розташовуються по різні сторони щодо прямої (i, i+1) (рис. 6.16).

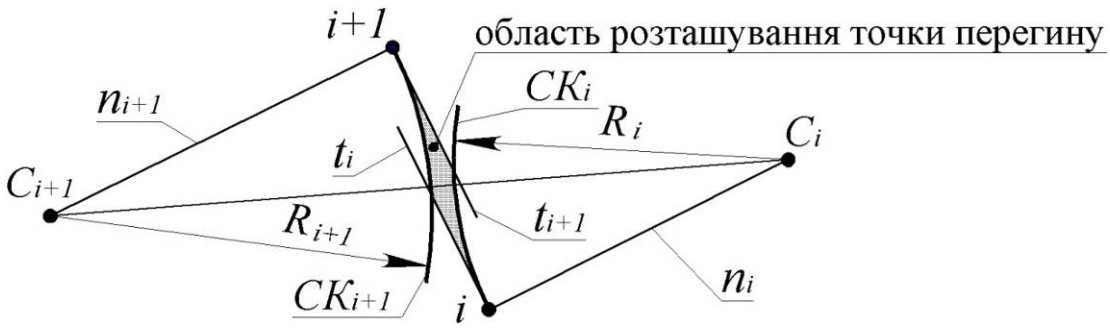


Рис. 6.16. Вихідна область розташування точки перегину

Зазначені умови визначають вихідну область можливого розташування точки перегину (точка Е). Область обмежена відрізками прямих ti, ti+1 і дугами кіл СКi, СКi+1. На рис. 6.16 зазначена область зафарбована.

Діапазон можливого напряму нормалі ДПК в точці перегину (пЕ) визначає кут, обмежений прямими, одна з яких проходить через центри кривини ДПК Ci та Ci+1, а інша перпендикулярна прямій, яка одночасно торкається СКi та СКi+1. Після призначення напряму нормалі пЕ діапазон її можливого розташування обмежений прямими ′пЕ і п′Е, які паралельні пЕ та проходять через центри кривини Ci і Ci+1 відповідно. Можливе положення дотичної в точці перегину (tЕ), обмежено прямими ′tЕ та t′Е, які торкаються з СКi і СКi+1 відповідно (рис. 6.17). Призначення точки перегину в межах прямокутника, обмеженого прямими ′пЕ, п′Е, ′tЕ, t′Е, дозволяє формувати ДПК з регулярною зміною кривини, що складається з опуклої та увігнутої монотонних частин.

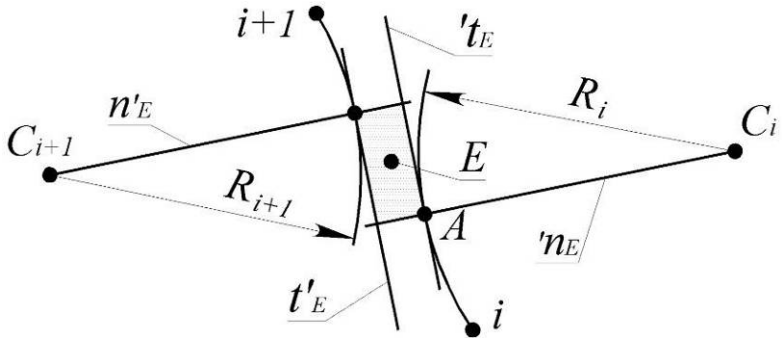


Рис. 6.17. Уточнена область розташування точки перегину

У разі призначення точки перегину на прямій ′пЕ ділянка ДПК (i, Е) буде сформована дугою СКi. Аналогічно, при призначенні точки Е на п′Е дугою СКi+1 буде сформовано ділянку (Е, i+1). Якщо точка перегину належить прямій ′tЕ, то ділянка ДПК (i, Е) складається з відрізка [А, Е] цієї прямої і дуги [i, А] кола СКi (рис. 6.17). Призначення точки Е на прямій ′tЕ означає формування ділянки (Е, i+1) відрізком t′Е і дугою СКi+1. У всіх розглянутих варіантах регулярність значень кривини в особливій точці порушується.

При призначенні точки перегину за межами чотирикутника, обмеженого ′пЕ, п′Е, ′tЕ, t′Е, забезпечити монотонність опуклої і увігнутої

частин ДПК неможливо.

Після призначення точки перегину і нормалі ДПК в цій точці опукла і увігнута частини кривої формуються окремо, виходячи з умови забезпечення нескінченно великого радіуса кривини в точці їх стикування.

Розглянемо варіант схеми призначення точки згущення iзг на ділянці (i, E). Можливий напрям нормалі ДПК в точці згущення (пзг) обмежена положеннями, коли пзг паралельна пi або пE. Призначимо пзг перпендикулярно прямій (i, E) (рис. 6.18).

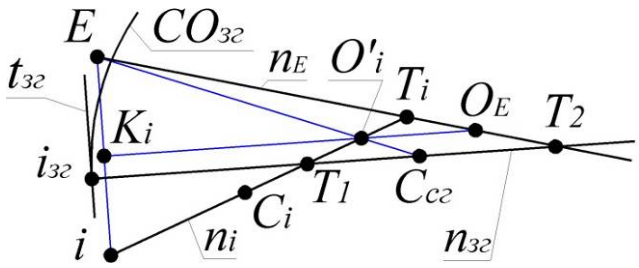


Рис. 6.18. Згущення ділянки, що містить точку перегину

Умова зростання радіусів кривини уздовж ділянки ДПК (i, iзг) вимагає, щоб пзг перетинала пi в межах відрізка [Ci, O′i]. Призначимо точку T1= пi× пзг по центру зазначеного відрізка. Вихідний діапазон можливого розташування центру кривини Сзг – відрізок [T1, T2], де T2=пзг× пE. Призначимо Сзг на перетині прямих пзг та (E, O′i).

Зростання радіусів кривини уздовж ділянки (i, iсзг) вимагає виконання співвідношення:

$$|i, Ci|+|Ci, Ccг| < |Ccг, icг| < |i, T1|+|T1, Ccг|.$$

Зростання радіусів кривини уздовж (iзг, E) вимагає, щоб точка E розташовувалася за межами кола, стичного з ДПК в точці iзг. Отже, радіус кривини Rзг = |Сзг, iзг| повинен бути менше відстані |Сзг, E|.

Доведемо, що

$$|Сзг, E| > |i, T1|+|T1, Сзг|. \qquad (6.15)$$

Позначимо довжину відрізків |O′i, E| = |O′i, i| = a. Тоді |Сзг, E| = a + |Сзг, O′i|, а |i, T1| + |T1, Сзг| = a+(|Сзг, T1|-|T1, O′i|). З трикутника T1,O′i,Сзг очевидно, що |Сзг, O′i| > |Сзг, T1| - |T1, O′i|, а значить справедливість нерівності (6.15) доведено.

З цього випливає, що діапазон можливого положення iзг отримуємо відклавши на нормалі пзг від точки Сзг відрізки, довжина яких дорівнює |i, Ci |+|Ci, Сзг| та |i, T1|+|T1, Сзг|.

Після призначення точки iзг умови згущення ділянки [iсг, E] аналогічні розглянутим вище для вихідної ділянки [i, E].

В результаті послідовних згущень особливої ділянки точки згущення наближаються до точки перегину, а відповідні їм центри кривини наближаються до нормалі пE, в межі віддаляючись в нескінченність.

Формування особливої ділянки будемо вважати завершеним, коли відстань від чергової точи згущення до дотичній tE стане менше заданої похибки дискретної інтерполяції.

6.5.2 Згущення ДПК в околі точки зміни напряму зростання вздовж кривої значень кривини

Схема згущення особливих ділянок ґрунтується на будові кривої лінії в околі особливої точки. У точці екстремуму кривини еволюта кривої завжди має точку звороту [71]. У точці максимального викривлення кривої, в якій радіус кривини мінімальний, еволюта утворює загострення, звернене до вихідної кривої. У точці, де радіус кривини досягає максимуму, загострення еволюти звернуто від вихідної кривої.

Точковий ряд, що належить кривій лінії, яка містить точку зміни збільшення - зменшення радіусів кривини, розділений на частини, уздовж яких радіуси ПК зростають і зменшуються відповідно. Особлива точка належить частині ДПК i-1 … i+1, якій відповідає ПК найбільшого радіуса – ПК(i-1, i, i+1). Ламана … Ci-1, Ci, Ci+1, … що з'єднує центри стичних кіл, утворює в точці Ci загострення, подібне загостренню еволюти ДПК в точці звороту (рис. 6.19).

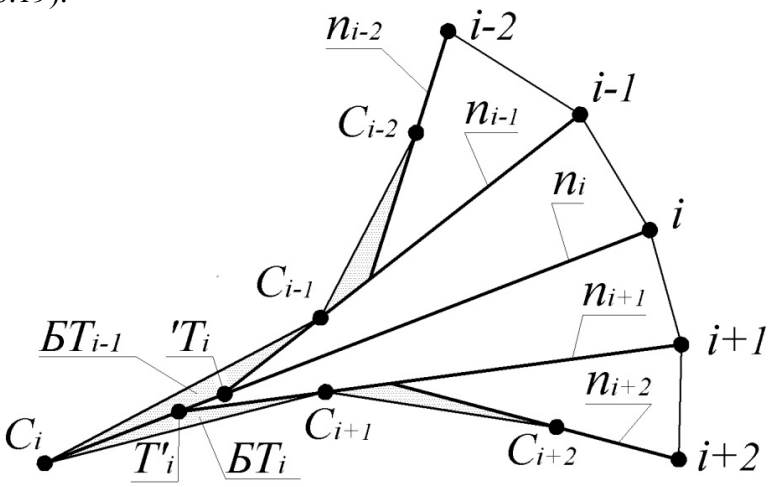


Рис. 6.19. Ділянка ДПК, що містить точку зміни збільшення - зменшення радіусів кривини

Нормалі та центри кривини в точках i-1 та i+1 призначаються виходячи із зростання радіусів кривини уздовж частини ДПК …, i-2, i-1 і їх зменшення уздовж частини i+1, i+2, … . Після цього діапазон розташування нормалі пi обмежено її проходженням через центри ДК′i-1(i-1, ti-1, i) та ′ДКi+1(i, i+1, ti+1). Значення радіуса кривини Ri повинно перевищувати довжину відрізків |i, ′Ti| та |i, T′i|, де ′Ti ≡ пi-1× пi, T′i ≡ пi× пi+1.

У разі вибору точки i в якості особливої, частини ДПК …, i-1, i та i, i+1, … формуються окремо на основі двох ланцюжків БТ, які визначаються послідовностями центрів кривини …,Ci-1, Ci та Ci, Ci+1, … . Базисні трикутники, що відповідають граничним ділянкам монотонних частин ДПК,

стикаються сторонами, які належать нормалі в особливій точці.

При необхідності, з метою вирівнювання динаміки зміни кривини в околі особливої точки, остання може призначатися в межах вихідної ділянки (i-1, i) або (i, i+1). У цьому випадку особливу точку ДПК можна поєднати з вершиною еліпса, який визначається проходженням через точки i-2, i-1, i, i+1, i+2. Тоді нормаллю ДПК в особливій точці призначається нормаль еліпса, а радіус кривини призначається рівним або більшим за радіус кривини еліпса в відповідній точці. Положення нормалей і радіусів кривини в точках монотонних частин ДПК призначаються з урахуванням вже призначених нормалі і радіуса кривини в особливій точці.

Схема призначення точки зміни зменшення - збільшення радіусів кривини і характеристик ДПК в ній аналогічна розглянутої вище. Ламана, що з'єднує центри стичних кіл, які розташовані в околі особливої точки, утворює вістря, спрямоване в бік ДПК (рис. 6.20).

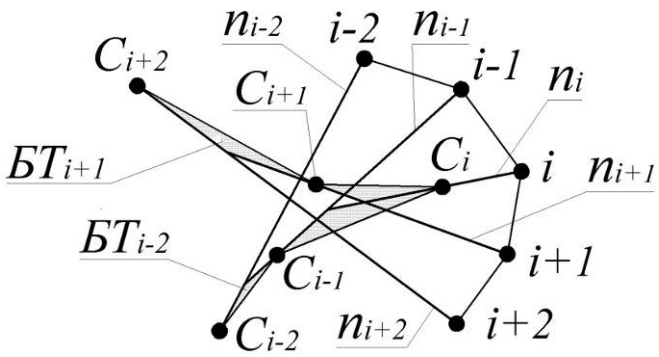


Рис. 6.20. Ділянка ДПК, що містить точку зміни зменшення - збільшення радіусів кривини

Центр кривини, що відповідає особливій точці, призначається в межах відрізка, який обмежений особливою точкою і ближньою з точок перетину нормалей, призначених в особливій точці, і в початкових точках, що обмежують особливу ділянку.

Висновки по шостому розділу

1. В результаті досліджень, проведених в розділі, розв’язано задачу моделювання плоскої ДПК на основі точкового ряду довільної конфігурації. ДПК формується по частинах, уздовж яких можливо забезпечити монотонну зміну значень кривини. Монотонні частини стикуються в особливих точках – точках перегину і точках, в яких значення кривини досягає екстремуму.

2. Монотонні частини ДПК і ділянки, що містять особливі точки, визначаються і класифікуються виходячи з розмірів і взаємного розташування прилеглих кіл. Центри прилеглих кіл, які визначаються точками, що належать опуклій і увігнутій частинам кривої, розташовані по різні боки супровідної ламаної лінії, а динаміка зміни радіусів прилеглих кіл уздовж точкового ряду відповідає напряму зростання вздовж ДПК радіусів кривини. Ділянки ДПК, на яких відбувається зміна закономірності розташування центрів або зміна розмірів прилеглих кіл, обов'язково містять особливі точки.

3. Діапазони розташування нормалей і центрів кривини в точках монотонної ДПК визначаються виходячи з умови рівності довжини еволюти і різниці значень радіусів кривини, що відповідають її граничним точкам. Нормалі, призначені у вихідних точках, і відрізки, що з'єднують центри кривини, призначені на нормалях, обмежують послідовність базисних трикутників, яка є областю можливого розташування еволюти ДПК. Можливість формування монотонної ДПК на кожній з її ділянок контролюється співвідношенням довжин сторін базисного трикутника, при якому може бути забезпечена задана довжина розташованої всередині нього ділянки еволюти.

4. Алгоритм згущення точкового ряду заснований на контролі властивостей еволюти ДПК, що формується. На кожному кроці згущення послідовно призначається положення нормалі, що відповідає точці згущення, центру кривини, що належить цій нормалі, а потім і самої точки згущення. Призначення кожного із зазначених елементів в межах відповідного діапазону забезпечує задане співвідношення довжин сторін базисних трикутників, що отримуються в результаті згущення.

Запропонований алгоритм дозволяє згущувати ділянки ДПК локально, в довільній послідовності та з призначенням в межах кожної вихідної ділянки точок згущення, кількість яких забезпечує задану точність інтерполяції.

5. Область можливого розташування монотонної ДПК визначається характеристиками, які задані в її точках. Межі розташування кожної ділянки складають дуги прилеглих, дотичних або стичних кіл, які відповідають граничним точкам ділянки. Призначення в точках ДПК кожної з фіксованих характеристик призводить до локалізації області її можливого розташування.

Контроль розмірів області розташування ДПК дозволяє визначити кількість кроків згущення, яка необхідна для забезпечення заданої точності інтерполяції.

6. Згущення ДПК в околі точок перегину і точок зміни напряму зростання вздовж кривої значень кривини супроводжується формуванням двох ланцюгів базисних трикутників, кожний з яких обмежує область можливого розташування еволюти однієї з монотонних частин ДПК. Контроль конфігурації і розташування базисних трикутників відносно нормалей, призначених в особливих точках ДПК, забезпечує формування точкового ряду, який можливо інтерполювати регулярною кривою лінією.

Основні результати досліджень, проведених в шостому розділі, опубліковані в роботах – [73, 99-101, 103, 104, 110, 111, 366, 367, 404].

Використані в розділі результати досліджень інших авторів опубліковані в роботах – [71, 72, 138].

РОЗДІЛ 7
РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ З ВИКОРИСТАННЯМ МЕТОДУ МОДЕЛЮВАННЯ ОБВОДІВ В ПРОСТОРІ МОЖЛИВОГО РОЗТАШУВАННЯ МОНОТОННИХ КРИВИХ

Основна сфера практичного застосування методу – формування моделей поверхонь, заданих масивом точок. Модель формується в CAD-системі на основі лінійчатого каркаса. Її створення включає наступні етапи [87].

1. З вихідного масиву точок виділяються точкові ряди, що представляють плоскі або просторові криві лінії.

2. На основі кожного вихідного точкового ряду формується згущений точковий ряд, який представляє лінійний елемент каркаса.

3. Формуються обводи, які інтерполюють згущені точкові ряди. Обводи складаються з ділянок безперервних кривих ліній, формування яких забезпечує CAD-система.

4. Модель створюється з використанням функцій CAD-системи на основі лінійчатого каркаса, що складається з сформованих обводів.

Комп'ютерна модель поверхні використовується в якості вихідних даних для автоматизованого створення програми по обробці виробу на верстаті з числовим програмним управлінням (ЧПУ).

У розділі розв'язуються задачі, спрямовані на моделювання поверхонь з використанням нашого методу:

- забезпечення заданої точності формування обводу, який представляє криву лінію з монотонною зміною геометричних характеристик;
- згущення вихідного каркаса, що представляє поверхню, через формування додаткових лінійних елементів;
- створення моделей реальних виробів, обмежених складними функціональними поверхнями для впровадження у виробничий процес.

7.1 Забезпечення заданої точності формування обводів

Точність, з якою сформовано обвід, оцінюється похибкою інтерполяції – відстанню від обводу до кривої лінії, якій належить точковий ряд [174, 312].

У разі, коли вихідна крива невідома, точне визначення похибки неможливо. Будемо оцінювати похибку на підставі передбачуваних характеристик ДПК, вважаючи, що у випадку існування кривої лінії, що інтерполює вихідний точковий ряд, і у якій відсутні особливі точки, то такі точки відсутні у вихідній кривій.

Пропонується наступна схема формування обводу із забезпеченням заданої точності інтерполяції [95].

1. Вихідний точковий ряд розбивається на частини, які можливо інтерполювати монотонною кривою лінією.

2. Формуються монотонні ДПК, що інтерполюють частини вихідного точкового ряду. Згущення точкового ряду здійснюється до тих пір, поки

похибка дискретної інтерполяції не стане менше заданої величини. Цю похибку будемо оцінювати розмірами області можливого розташування ділянок ДПК.

3. Формується обвід, що складається з ділянок безперервних ліній, який інтерполює згущений точковий ряд. Похибку інтерполяції обводом будемо оцінювати відстанню від кривих, що складають його ділянки, до меж області можливого розташування відповідних ділянок ДПК.

7.1.1 Похибка дискретної інтерполяції

Максимальну абсолютну похибку формування монотонної ДПК (Δi) оцінюватимемо величиною, яку не може перевищувати відстань між будь-якими ДПК з однаковим поєднанням характеристик, заданих одним точковим рядом [266].

Абсолютна похибка дискретної інтерполяції плоскою монотонною ДПК визначається шириною області, всередині якої розташовуються всі криві лінії з монотонною зміною кривини, що інтерполюють точковий ряд [91]. Якщо ДПК задана тільки точковим рядом, то область її розташування обмежена послідовністю ПК. У цьому випадку ширина області на i-й дільниці ДПК визначається довжиною відрізка, обмеженого точками перетину прямої, яка проходить через середину хорди СЛЛ [i, i+1] перпендикулярно цій хорді, з ПКi та ПКi+1 (рис. 7.1).

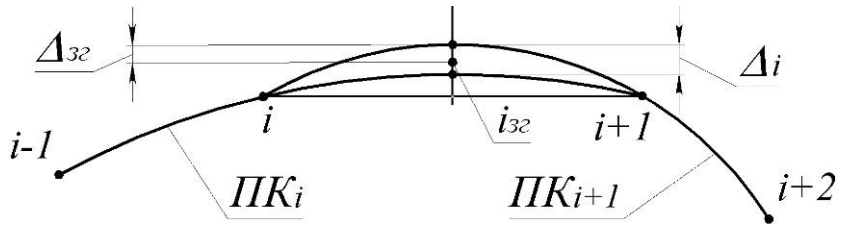


Рис. 7.1. Ширина області розташування ділянки монотонної ДПК

Якщо ДПК задана послідовністю точок, в яких визначені положення дотичних прямих і значення кривини кривої, то область обмежена коробовими лініями, що складаються з ділянок дотичних і стичних кіл (п. 6.1). В цьому випадку максимальна похибка формування ділянки оцінюється відстанню між прямими, паралельними хорді СЛЛ, які торкаються верхньої і нижньої меж області (рис. 7.2).

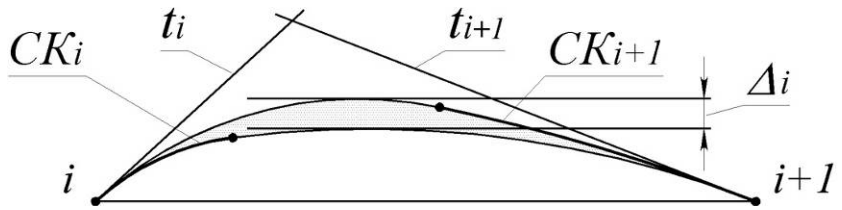


Рис. 7.2. Максимальна похибка формування ділянки ДПК, в точках якої задані стичні кола

У таблиці 7.1 наведені максимальні відстані між нижньою і верхньою межами областей розташування чотирьох ділянок плоскої ДПК, характеристики якої представлені в таблицях 6.1, 6.3.

Таблиця 7.1.

Абсолютна похибка формування плоскої ДПК

i	2	3	4	5
hi, мм	33,54	36,62	84,85	103,23
R ПКi, мм	188,58	238,73	348,37	570,09
, мм	0,1574	0,2217	1,0122	1,0119
, мм	1,4939	1,403	5,4087	4,6034
, мм	0,1028	0,1241	0,8164	0,9278

Максимальні відстані між дугами послідовних ПК для кожної з ділянок визначені .3 . Після призначення в точках ДПК положень дотичних прямих отримана послідовність трикутників, обмежених дотичними і хордами СЛЛ. На кожній з ділянок ДПК відстань між опуклими кривими лініями, що інтерполюють точковий ряд, не може перевищувати висоту відповідного трикутника, яка в таблиці 7.1 позначена .3 . В результаті призначення в точках ДПК положень стичних кіл отримані коробові лінії, що складаються з дуг дотичних і стичних кіл. Максимальні відстані між коробовими лініями на кожній з ділянок позначені .3 . Дані таблиці 7.1 показують, що значення .3 найбільш точно визначають розташування ділянок ДПК.

В результаті призначення на кожній з вихідних ділянок однієї точки згущення отримуємо ДПК, на ділянках якої значення .3 і .3 зменшуються приблизно у вісім разів.

На i-й дільниці просторової ДПК похибка оцінюється виходячи з розмірів сферичного тригранника, що обмежує область розташування ділянки (п. 2.4). Похибка не може перевищувати довжину більшого з відрізків, що з'єднують вершини криволінійного трикутника $(1, 2, 3)_i$, по якому тригранник перетинається площиною P_i, яка перпендикулярна хорді, що з'єднує межі ділянки і проходить через її середину (рис. 2.22).

Співвідношення значень похибки дискретної інтерполяції, отриманих різними способами оцінки, розглянемо на прикладі ділянок ДПК, характеристики якої представлені в таблицях 2.4, 2.7, 2.8. Таблиця 7.2 містить максимальні відстані між вершинами багатокутників, отриманих в результаті перетину площиною P_i відповідних прилеглих тетраедрів (.3

), дотичних тетраедрів (.3), тригранників прилеглих сфер ( ), тригранників дотичних сфер ( ).

Таблиця 7.2

Абсолютна похибка формування просторової ДПК

	i h i, мм	RПС фi, мм	, мм	, мм	мм	, мм	,
	553,0454	104,4359	13,1253	6,2784	1,1997	0,3408	
4	74,0209	95,28252	19,5391	8,8441	1,7344	0,5397	
5	45,7001	86,35848	12,6784	6,0121	1,1258	0,3202	
6	60,3773	77,28244	16,9878	8,5944	1,5393	0,4734	
7	36,4913	68,54189	9,0639	4,7718	0,8428	0,2789	

Похибка дискретної інтерполяції залежить від відстані між точками, що обмежують ділянку ДПК, і значеннями дискретних характеристик в цих точках. Значення похибки зменшуються зі зменшенням довжини відповідних хорд СЛЛ (hi). При рівних значеннях hi величина похибки менше на ділянках з меншими значеннями дискретного скруту і великими значеннями прилеглих та дотичних сфер.

Межи можливого розташування ділянок просторової монотонної ДПК найбільш точно визначаються тригранниками дотичних сфер. Для ДПК, яка представлена в таблиці 7.2, значення .3 приблизно в тридцять разів менше відповідних значень .3 .

В результаті згущення точкового ряду розміри геометричних образів, що обмежують область розташування ДПК, зменшуються в різних пропорціях. У таблиці 7.3 наведені розміри ПТ, ДТ, ТПСф, ТДСф, що визначають похибку дискретної інтерполяції на ділянках 9, 10, які отримані в межах вихідної ділянки 5 в результаті одного кроку згущення ДПК. Характеристики згущеної ДПК представлені в таблицях 3.5, 4.3.

Таблиця 7.3

Абсолютна похибка формування ділянок згущеної ДПК

	i h_i , мм	RПС фi, мм	мм	, , мм	мм	, мм	,
	23,1362	83,7122	3,2958	1,5087	0,1387	0,0384	
10	23,1362	79,2384	3,3361	1,5233	0,1402	0,0399	

Дані таблиці 7.3 показують зменшення в результаті одного кроку згущення значень .3 і приблизно в чотири рази, а значень і приблизно у вісім разів. Така пропорція зменшення значень похибки дискретної інтерполяції зберігається при наступних кроках

згущення і на всіх ділянках ДПК.

Відзначимо, що положення вихідної кривої лінії, на якій був призначений вихідний точковий ряд, в межах області можливого розташування монотонної ДПК невідомо. Похибка, з якою точковий ряд, що формується, представляє саме цю лінію, на кожній з ділянок не може перевищувати відстані від точки першого згущення до найбільш віддаленої межі області її можливого розташування. Для плоскої ДПК це відстань (Δзг) від точки першого згущення iзг до найбільш віддаленої від неї дуги відповідного ПК (рис. 7.1).

Похибка, з якою вихідну просторову криву на кожній з ділянок представляє згущена ДПК, не може перевищувати більшої з відстаней від точки першого згущення до вершини криволінійного трикутника, який обмежує область її розташування (рис. 7.3).

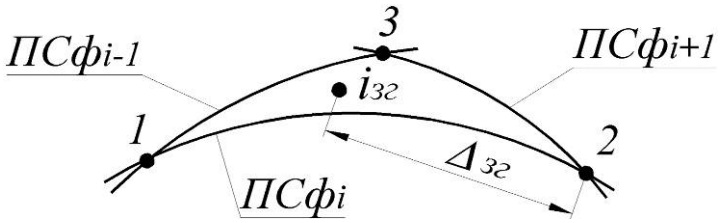


Рис. 7.3. Похибка представлення вихідної просторової кривої лінії

Наступні згущення не підвищують точність представлення вихідної кривої лінії. Її можна підвищити тільки за рахунок збільшення числа вихідних точок. Локалізація в процесі послідовних згущень області можливого розташування монотонної ДПК підвищує точність, з якою згущений точковий ряд представляє безліч кривих ліній, характеристики яких відповідають характеристикам вихідної кривої. В результаті згущення точкового ряду і призначення в його точках характеристик ДПК, область її можливого розташування локалізується. Відповідно зменшується похибка, з якою отримана ДПК задана. Найбільшу з абсолютних похибок формування ділянок вважатимемо максимальною похибкою формування всієї ДПК. Після того, як похибка стане менше призначеної величини, ДПК вважаємо сформованою, а згущений точковий ряд інтерполюється безперервним обводом.

Способи, що розробляються в розділі, орієнтовані на створення програмного забезпечення для автоматизованого моделювання обводів в CAD-системі з використанням інструментів API (Application Programming Interface). Будемо розглядати обводи, що складаються з ділянок ліній, які використовуються більшістю CAD-систем. Це пряма лінія, коло, B-сплайн. Обводи формуються в межах області можливого розташування ДПК. Виконання цієї умови забезпечує подання монотонної кривої лінії обводом з похибкою, яка не перевищує похибку дискретної інтерполяції.

Закономірності безперервної інтерполяції розглянемо на прикладі формування обводу в межах області розташування i-ої ділянки ДПК правого ходу, вздовж якої радіуси стичних кіл і сфер монотонно зменшуються.

7.1.2 Формування обводів з негладким стикуванням ланок

Найбільш простий спосіб формування просторового обводу полягає в заміні ділянок ДПК на дуги кіл, які є ребрами відповідних сферичних тригранників. Для i-ої ділянки ДПК це може бути дуга кола, по якому перетинаються ПСфi-1 та ПСфi+1, що обмежена точками i та i+1. Дуги кіл стикуються у вихідних точках зі зламом, формуючи просторовий обвід.

Похибка інтерполяції на кожній з ділянок оцінюється більшою з відстаней |1,3| або |2,3| між вершинами криволінійного трикутника, по якому площину Pi перетинає сферичний тригранник (рис. 7.3).

Інший спосіб інтерполяції з негладким стикуванням ланок обводу полягає в формуванні ламаної лінії. Площина, що проходить через пряму (i, i +1), перетинає сферичний тригранник по дугам двох кіл, обмежених точками i та i+1. При заміні ділянки ДПК ламаною лінією задача зводиться до того, щоб вписати ламану в простір між цими дугами.

У першому наближенні ламана складається з двох ланок i – A – i+1 (рис. 7.4). Точка A рівновіддалена від точок i та i+1 і належить більш віддаленій від відрізка [i, i+1] дузі кола. Якщо ланки ламаної не перетинають ближню до [i, i+1] дугу, то ламана сформована. В іншому випадку на більш віддаленій дузі призначається точка B1, рівновіддалена від точок i та A, а також точка B2, рівновіддалена від A та i+1. Отриманий варіант ламаної i – B1 – A – B2 – i+1 перевіряється на перетин з ближньою до [i, i+1] дугою кола.

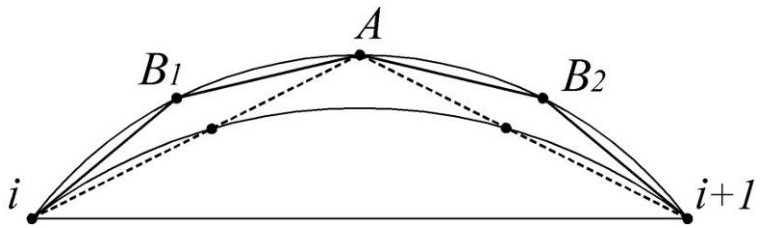


Рис. 7.4. Інтерполяція ділянки ДПК ламаною лінією

Запропоновану схему доцільно застосовувати для заміни ламаною лінією частин ДПК з незначним скрутом або плоских ДПК. При формуванні просторової ламаної лінії контроль за розташуванням її ланок в межах сферичного тригранника різко ускладнюється, а якість одержуваного розв’язку залишається низькою через нерегулярність зміни геометричних характеристик уздовж обводу.

Моделювання поверхонь з підвищеними динамічними якостями вимагає формування із заданою точністю гладких просторових обводів.

7.1.3 Формування обводів з гладким стикуванням ланок

Максимальну точність інтерполяції з використанням нашого методу забезпечує обвід, розташований в межах тригранників дотичних сфер. Таким обводом може бути коробова лінія кіл, що має у вихідних вузлових точках спільні дотичні з ДПК.

Розглянемо формування частини обводу в межах ТКСфi [109]. У першому наближенні обвід складається з двох дуг, розташованих на

(i, ti, i+1, ti+1) (рис. 7.5). Перша дуга належить , яке задано точкою i, дотичній до ДПК в цій точці ti та точкою А, що призначена на

в межах двогранного кута ψi.

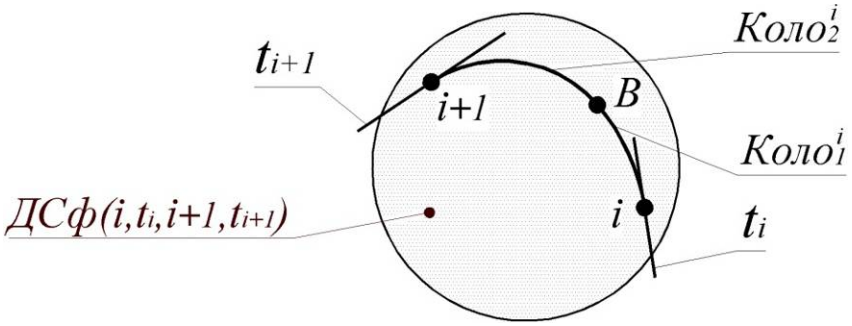


Рис. 7.5. Коробова лінія кіл, яка розташована на ДСф

Наприклад, точка А може бути призначена в центрі дуги [1,2] – стороні криволінійного трикутника (1,2,3)i, по якому ТКСфi перетинається площиною Pi (рис. 7.6).

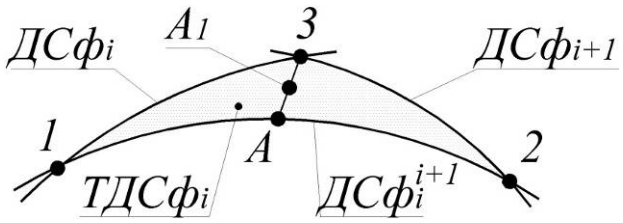


Рис. 7.6. Точка перетину і площини Pi

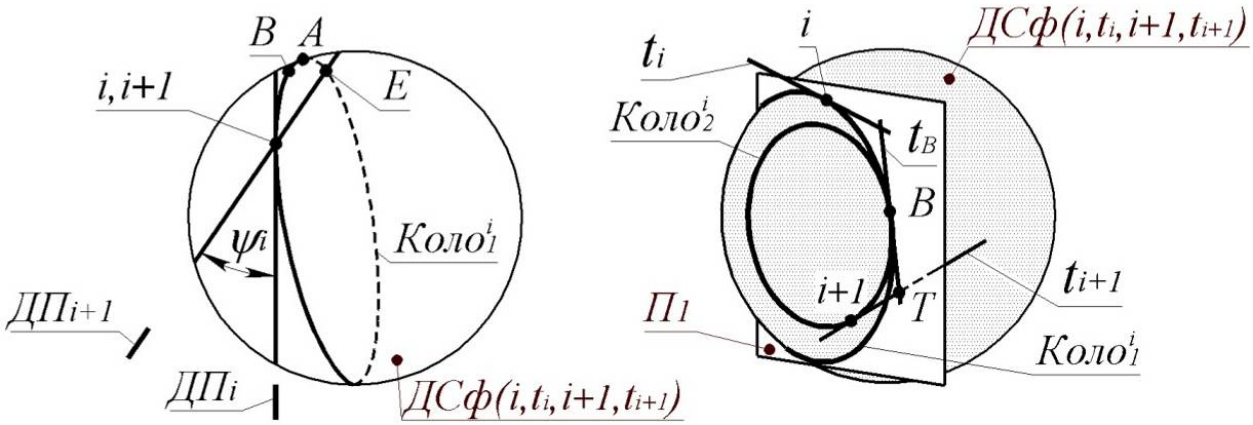
Друга дуга належить , яке задано точкою i+1, дотичною ti+1 та

точкою В, в якій торкаються та . Визначимо розташування і співвідношення радіусів цих кіл.

На рис. 7.7, а зображена при погляді, спрямованому вздовж прямої (i, i+1). Площини ДПi та ДПi+1 проекціюється на площину рисунка в

прямі лінії, що перетинаються під кутом ψi. торкається з ДПi в точці i та перетинається з ДПi+1 в точках i та Е. Повернемо площину ДПi+1 відносно дотичної ti+1 в напрямі, протилежному ходу ДПК. Точки перетину

ДПi+1 і будуть переміщатися назустріч одна одної віддаляючись від точок i та E відповідно. В крайньому положенні зазначені точки співпадуть з точкою B, яка визначає .



а) б)

Рис. 7.7. Визначення точки стикування ланок коробової лінії

З розглянутої схеми очевидно, що точка B, а значить і ланки коробової лінії i – B – i+1 розташовуються в межах двогранного кута ψi. Положення центру сфери щодо та визначає співвідношення радіусів цих кіл:

R > R . (7.1)

Точку B можна визначити як точку дотику і прямої tB, що проходить через точку (T) перетину дотичної ti+1 з площиною П1, в якій розташовано (рис. 7.7, б).

Похибка, з якою коробова i – B – i+1 замінює ділянку ДПК не перевищує відстань від точки A до вершин криволінійного трикутника (1,2,3) i.

Сформувавши ланки обводу, які замінять інші ділянки ДПК, отримуємо просторову коробову лінію, що інтерполює точковий ряд, який представляє монотонну криву лінію. Доведемо, що значення радіусів сфер, визначених суміжними дугами коробової лінії, монотонно зменшуються вздовж точкового ряду.

Ланки сформованої коробової лінії належать сферам:

…, .3 , $Сф_i$(,), .3 , $Сф_{i+1}$(,) , …, з яких можна виділити дві послідовності. Першу послідовність становлять сфери …, , , , …, що

визначаються вихідними точками та дотичними до ДПК в них. Монотонне спадання радіусів сфер цього ряду забезпечено при формуванні ДПК (розділ 4). Кожна з сфер другої послідовності – … Сфi(,), Сфi+1(,), … визначається двома ланками коробової лінії, які належать сусіднім вихідним сферам, дотичним до ДПК.

Співвідношення радіусів сфер першого і другого рядів розглянемо на прикладі послідовності – Сфi(,) – (рис. 7.8).

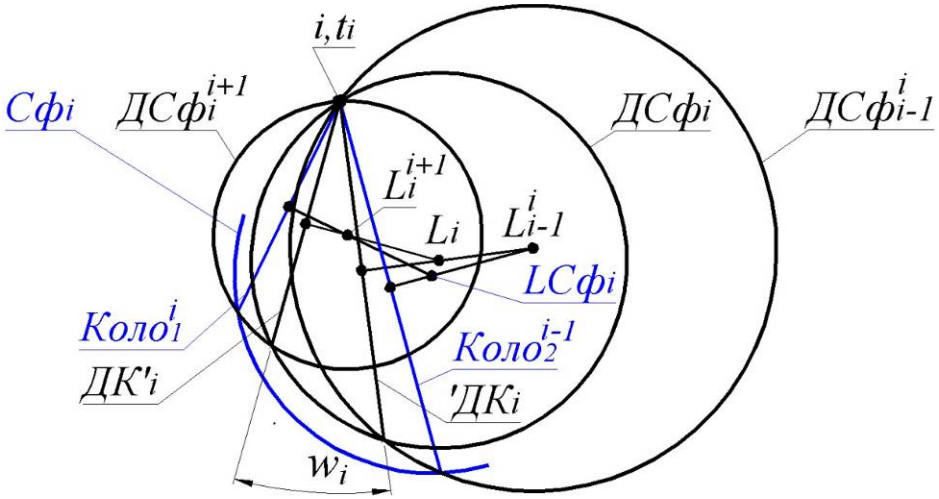


Рис. 7.8. Визначення співвідношення радіусів сфер

На рисунку показані сфери, що мають в точці i спільну дотичну ti, при погляді, спрямованому вздовж цієї дотичної. Це вихідні сфери (i -1, ti-1, i, ti), ДСфi(i-1, i, ti, i+1), (i, ti, i+1, ti+1) та Сфi(,). Кола, що належать сферам: 'ДКi(i-1, i, ti) ≡ ДСфi× , ДО'i(i, ti,i+1) ≡ ДСфi× , ≡ × Сфi, ≡ × Сфi проеціюються у відрізки прямих ліній.

повернуто навколо дотичної ti+1 в напрямі протилежному ходу ДПК відносно площині ДПi+1 (рис. 7.8). Це означає, що це коло розташовано за межами двогранного кута wi, який обмежено площинами кіл 'ДКi і ДК'i.

Аналогічно розташовується за межами wi, але по інший бік цього кута відносно . Відзначимо, що в послідовності – 'ДКi – ДК'i – кожні два сусідні кола належать одній сфері та розташовані по одну сторону від її центру. З цього випливає співвідношення

радіусів цих кіл:

$$R \quad > R\ 'ДКi > R\ ДК'i > R \quad . \qquad (7.2)$$

Співвідношення (7.1) і (7.2) визначають монотонне зменшення уздовж коробової лінії радіусів кіл, з яких складаються ланки:

$$\ldots > R \quad > R \quad > R \quad > R \quad > \ldots$$

Як видно з рис. 7.8 Сфi перетинає по і проходить через , яке розташовано за межами . При цьому R > R . З цього випливає, що Сфi(,) менше . Аналогічно з розташування та щодо та співвідношення радіусів цих кіл випливає, що Сфi більше .

Співвідношення розмірів сфер, які визначаються ланками інших ділянок обводу аналогічно розглянутому на ділянці (i-1 ... i+1) – радіуси сфер зменшуються вздовж обводу.

Таким чином, характеристики отриманої коробової лінії кіл відповідають характеристикам вихідної ДПК. Перерахуємо ці відповідності.

1. У кожній вузловій точці, що належить ДПК, коробова лінія має з нею спільну дотичну пряму.

2. Для всіх ланок коробової лінії поворот до суміщення з площиною наступної ланки відносно спільної для цих ланок дотичної, здійснюється в одному напрямі. Якщо напрям цього повороту прийняти за аналог ходу просторової кривої, то хід коробової лінії і ДПК збігаються.

3. Радіуси кіл, дуги яких складають коробову лінію, монотонно зменшуються вздовж неї. Напрям цього убування збігається з напрямом убування радіусів кривини уздовж ДПК.

4. Радіуси сфер, що визначаються кожними двома суміжними дугами, зменшуються вздовж коробової лінії в тому ж напрямі, в якому радіуси стичних сфер зменшуються вздовж ДПК.

Відповідність характеристик обводу і ДПК забезпечує їх розташування в межах однієї і тієї ж області простору, яка обмежена послідовністю тригранників дотичних сфер.

Основний недолік заміни монотонної кривої обводом, що складається з дуг кіл, полягає в концентрації зміни значень кривини і скруту в вузлових точках. Зменшити цю концентрацію можливо за рахунок збільшення числа дуг, що складають обвід. Розглянемо схему формування коробової лінії, що розташована у межах ТКСфi і складається з як завгодно великого числа дуг кіл.

1. Призначається точка А1, що розташована всередині криволінійного трикутника (1,2,3)i. Наприклад, в центрі відрізка [А,3] (рис. 7.6).

2. Через точку A1 паралельно прямій (i, i+1) проводиться дотична до обводу, що формується (tA). В результаті отримуємо дві нові сфери:

- Сф1, яка проходить через точки i, A1 та торкається з прямими ti, tA;
- Сф2, яка проходить через точки A1, i+1 та торкається з tA і ti+1.

3. Формуються коробові лінії, що складаються з двох дуг кіл кожна:

- лінія i – B1 – A1, яка належить Сф1;
- лінія A1 – B2 – i+1, яка належить Сф2.

Схема формування зазначених ліній аналогічна розглянутої вище для i – B – i+1.

4. В результаті сформована коробова лінія, що складається з чотирьох дуг, розташованих усередині ТКСфi. Дотик лінії з прямими ti і ti+1 забезпечує гладку стиковку її з частинами обводу, які формуються в межах попереднього і подальшого сферичних тригранників. За аналогічною схемою можливе подальше збільшення числа ланок обводу.

Формування ланок коробової лінії, що заміняють ділянку плоскої ДПК, уздовж якої радіуси кривини монотонно зростають, представлено на рис. 7.9.

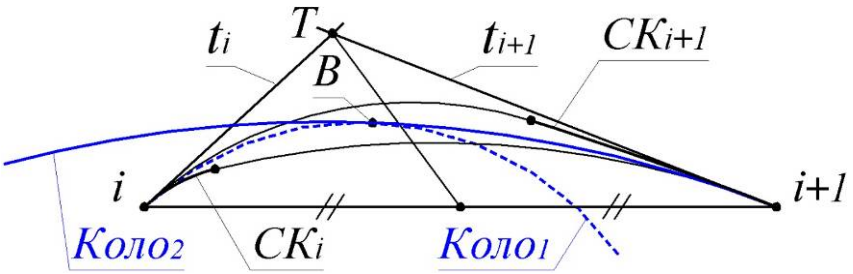


Рис. 7.9. Заміна ділянки плоскої ДПК на коробову лінію кіл

Коло, що визначає перша ланка (Коло1), задане дотиком з ДПК в точці i та проходженням через деяку точку, призначену в межах області розташування ДПК. Наприклад, ця точка може бути серединою відрізка, який обмежений точками перетину медіани базисного трикутника i, T, i+1 з межами області розташування монотонної ДПК.

Коло, якому належить друга ланка коробової лінії (Коло2), визначається дотиком з ДПК в точці i+1 і дотиком з Колом1 в деякій точці B. В результаті отримаємо кола з співвідношенням радіусів Ri < R Коло1 < R Коло2 < Ri+1, де Ri та Ri+1 –радіуси кривини ДПК в точках i та i+1. Сформувавши аналогічним чином дуги, які замінять інші ділянки ДПК, отримаємо коробову лінію, що інтерполює весь точковий ряд, уздовж якої радіуси ланок монотонно зростають.

Інший спосіб формування гладкого обводу – інтерполяція точкового ряду B-сплайном. Більшість CAD-систем дозволяють формувати кубічний неперіодичний B-сплайн [162, 213, 308]. У точках стикування ділянок цього сплайна автоматично забезпечується регулярність значень кривини і скруту.

Інтерполяція B-сплайном не забезпечує монотонність зміни уздовж обводу радіусів стичних кіл і сфер. Тому похибку інтерполяції неможна оцінювати виходячи з розмірів сферичних тригранників. У разі інтерполяції

точкового ряду, призначеного на кривій постійного ходу, хід В-сплайна збігається з ходом вихідної кривої. Тому похибку інтерполяції В-сплайном можна оцінювати розмірами прилеглих тетраедрів, що обмежують область можливого розташування кривих, хід яких збігається з ходом монотонної ДПК. Відхилення В-сплайна від ДПК на кожній з її ділянок не може перевищити відстань від хорди СЛЛ до найбільш віддаленої вершини прилеглого тетраедра.

Таким чином, представлення монотонної кривої лінії сплайном вимагає згущення ДПК до тих пір, поки висота найбільшого з прилеглих тетраедрів не стане менше заданої максимальної похибки інтерполяції. Число необхідних згущень точкового ряду буде в кілька разів більшим, ніж при заміні ДПК коробовою лінією кіл.

7.2 Коректність, стійкість і збіжність методу інтерполяції на основі області можливого розташування монотонної кривої

Точність розв’язку задачі залежить від коректності її постановки, а також стійкості і збіжності методу.

Задача поставлене коректно, якщо її розв’язок існує і є єдиним [216]. ВДГМ передбачає дискретне подання як вихідних даних, так і результату моделювання. На основі точкового ряду, отриманого в результаті дискретної інтерполяції, можливо сформувати безліч кривих ліній із заданими властивостями. Це означає, що розв’язок задачі не є єдиним. Отже, задачі дискретної інтерполяції належать до некоректних.

Для розв’язання з необхідною точністю некоректно поставлених задач використовуються методи регуляризації, які передбачають заміну вихідної задачі на задачу, поставлену коректно [347]. При цьому контролюється значення деякого критерію, що дозволяє оцінювати похибку, з якою отриманий розв’язок представляє розв’язок некоректно поставленої задачі. У разі, коли значення критерію дорівнює нулю, розв’язки обох задач збігаються .

Для нашого методу дискретної інтерполяції вихідну задачу замінює задача формування області можливого розташування монотонної кривої, що обмежена послідовністю сферичних тригранників [404]. Локалізація області відбувається в результаті згущення точкового ряду. Максимальний розмір перетину сферичного тригранника є критерієм, що дозволяє оцінювати похибку, з якою область розташування представляє ДПК. Коли розмір перетину стає нескінченно малим, область розташування вироджується в монотонну криву лінію.

Локалізація області, що обмежена послідовністю сферичних тригранників, контролюється положенням осей ПК (ρзг), які задають точки згущення. Положення ρзг однозначно визначається співвідношенням довжин відрізків, на які вона розділяє ланки вихідної ламаної звороту гранної полярної поверхні. Наприклад, для ρзг, що визначає положення точки згущення i-ої ділянки ДПК (рис. 3.19), такими співвідношеннями є:

;

де Ti-1, Ti, Ti+1 – центри вихідних ПСфi-1, ПСфi, ПСфi+1; , – центри ПСф, отриманих в результаті призначення iсг: ПСф(i-1, i, iзг, i+1) та ПСф(i, iзг, i+1, i+2) відповідно.

Якщо співвідношення заздалегідь призначені в межах діапазону їх можливих значень: $0 \le 'Ki \le 1, 0 \le K'i \le 1$, то сферичні тригранники, які будуть отримані в результаті послідовних згущень, визначені. Якщо при цьому призначена величина, яку не повинні перевищувати розміри сферичних тригранників, то задача формування області можливого розташування ДПК поставлена коректно.

Розв'язок є стійким, якщо мала зміна вихідних даних призводить до малої зміни отриманого розв'язку [174]. Для формування ДПК вихідними даними є положення вихідних точок, переміщення яких призводить до зміни розмірів сферичних тригранників. При будь-яких змінах конфігурації вихідного точкового ряду розміри сферичних тригранників залишаються обмеженими. Максимальне віддалення меж тригранника від відповідної хорди СЛЛ не може перевищити половину довжини цієї хорди. Формування ділянок ДПК в межах відповідних сферичних тригранників забезпечує стійкість методу.

Метод має збіжність, якщо кожна ітерація послідовно наближає проміжний розв'язок до точного. В результаті призначення кожної точки згущення відбувається заміна сферичного тригранника на два нових, розташованих в його межах. При цьому максимальна ширина тригранників згущення приблизно у вісім разів менше ширини вихідного тригранника. У межі, коли ширина області розташування кривої прагне до нульового значення, отримуємо точний розв'язок у вигляді безперервної безлічі точок. Збіжність методу забезпечується послідовною локалізацією області можливого розв'язку.

7.3 Формування дискретних сітчастих каркасів динамічних поверхонь на основі ДПК

Моделювання дискретно представлених поверхонь (ДПП) передбачає виділення точкових рядів з вихідного масиву точок і формування на їх основі ДПК. Сформовані ДПК утворюють каркас поверхні. Поверхні складної форми задають сітчастим каркасом, що складається з двох сімейств ліній, що перетинаються. При моделюванні в CAD-системі, лінії одного з сімейств використовуються в якості напрямних ліній кінематичної поверхні. Це можуть бути як плоскі, так і просторові криві лінії. Лінії другого сімейства використовуються в якості твірних ліній поверхні. Це, як правило, плоскі криві лінії. У разі моделювання динамічних поверхонь важливою вимогою є монотонна зміна значень геометричних характеристик уздовж ліній каркаса.

В даному пункті на прикладі каркаса, що складається з плоских ДПК, розглянемо задачі, спрямовані на підвищення точності, з якою каркас представляє динамічну поверхню:

- згущення точкового каркасу, під яким будемо розуміти формування ДПК, що не проходять через вихідні точки ДПП;
- призначення фіксованих геометричних характеристик поверхні в точках, що їй належать.

7.3.1 Згущення точкового каркасу

Розглянемо ДПП, задану точковим каркасом, який впорядкований на прямокутній в плані, рівномірній в двох напрямках сітці. Таке подання дозволяє виділити на поверхні два сімейства плоских ДПК, що перетинаються, які будемо називати вихідними. Кожне сімейство ДПК розташовується в паралельних горизонтально-проекціювальних площинах (рис. 7.10).

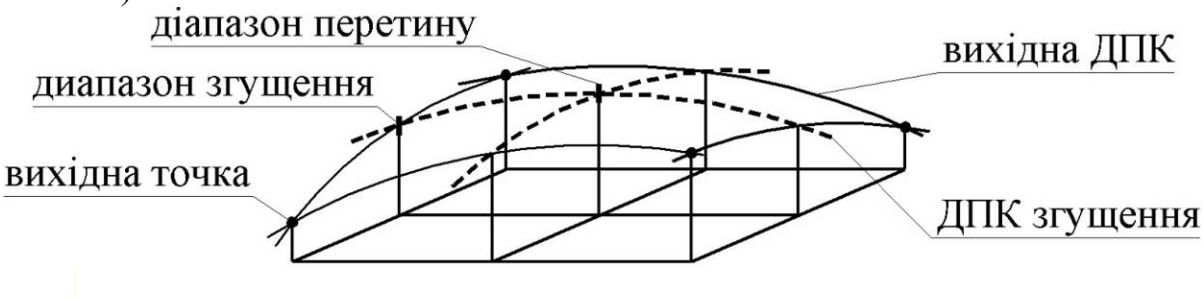


Рис. 7.10. Вихідний каркас поверхні

Згущення точкового каркасу здійснюється за наступною схемою [98].

1. Призначаються площини згущення, що паралельні площинам вихідних ДПК і розташовані на однаковій відстані від них. У цих площинах будуть формуватися ДПК згущення, задані точками згущення вихідних ДПК.

2. Визначаються горизонтально-проекціювальні прямі, за якими площини згущення перетинаються з площинами вихідних ДПК.

3. На кожній дільниці вихідної ДПК визначається діапазон розташування точки згущення. Це відрізок, обмежений точками перетину горизонтально-проекціювальної прямої з межами області розташування ділянки ДПК. Зазначені відрізки будемо називати діапазонами згущення.

4. В межах діапазонів згущення призначаються точки, що належать вихідним ДПК. У цих точках вихідні ДПК перетинаються з ДПК згущення. В результаті згущення вихідних ДПК число лінійних елементів каркасу подвоюється – між сусідніми ДПК кожної сім'ї розташовується ДПК згущення. Для завершення згущення вихідного точкового каркаса необхідно визначити положення точок, в яких ДПК згущення різних сімейств перетинаються між собою.

5. Визначаються прямі перетину площин, яким належать ДПК згущення різних сімейств. На зазначених прямих визначаються діапазони розташування точки перетину ДПК. Для цього на прямій перетину

визначаються два діапазони розташування точки згущення – для ДПК першого та другого сімейства. Це відрізки, що обмежені точками, які належать межам області розташування ділянки ДПК згущення. Накладення відрізків визначає діапазон, в межах якого призначається точка перетину ДПК згущення.

У разі, коли розташування вихідних точок не дозволяє виділити з їх масиву плоскі точкові ряди, завдання згущення точкового каркаса може розв'язуватися за наступною схемою.

1. З вихідного масиву виділяються точкові ряди, що представляють просторові ДПК. Ці ДПК доцільно розташовувати уздовж передбачуваних ліній струму середовища уздовж ДПП.

2. Формуються послідовності сферичних тригранників, які обмежують область можливого розташування монотонних частин ДПК.

3. Області розташування просторових ДПК перетинаються сімействами паралельних площин. У кожній площині отримуємо послідовність криволінійних трикутників – перетинів сферичних тригранників, що обмежують ділянки різних ДПК. Точки згущення просторової ДПК призначаються в межах криволінійних трикутників, які належать площинам різних сімейств.

4. Точки згущення різних просторових ДПК, що розташовані в одній площині, задають плоску ДПК. Плоскі ДПК формуються виходячи з умови монотонної зміни значень кривини уздовж їх частин при мінімальному числі особливих точок [296]. В результаті згущення плоских ДПК отримуємо точки , які задають просторові ДПК згущення.

Запропонована схема згущення ДПП дозволяє:

- на стадії аналізу вихідного масиву точок визначити можливість формування на його основі сітчастого каркаса динамічної поверхні;

- визначити діапазони можливого положення точок згущення і вибрати оптимальний за умовами поставленої задачі розв'язок.

7.3.2 Формування геометричних характеристик у вузлах дискретно представленої поверхні

Для формування характеристик ДПП ми будемо використовувати два сімейства плоских ДПК, що їй належать, які проекціюються на горизонтальну площину в прямокутну сітку.

Нехай ДПП задана точковим каркасом, з якого можливо виділити два сімейства плоских ДПК. Розглянемо формування дотичної площини і індикатриси Дюпена, що в ній розташована, для вихідної точки ДПП $M_{i;j}$ [108].

Локальні характеристики ДПП будемо визначати виходячи з умови монотонної зміни значень кривини уздовж ДПК, які перетинаються у вихідному вузлі. Для вузла $M_{i;j}$ це криві, представлені точковим рядом … $M_{i-1;j}$, $M_{i;j}$, $M_{i+1;j}$ … та … $M_{i;j-1}$, $M_{i;j}$, $M_{i;j+1}$ …. Позначимо їх ДПК$_i$ та ДПК$_j$, відповідно (рис. 7.11). При необхідності можна використовувати інші

плоскі ДПК. Наприклад, це можуть бути криві, що представлені точковим рядом … Mi-1;j-1, Mi;j, Mi+1;j+1 … або … Mi-2;j-2, Mi;j, Mi+2;j+2 …

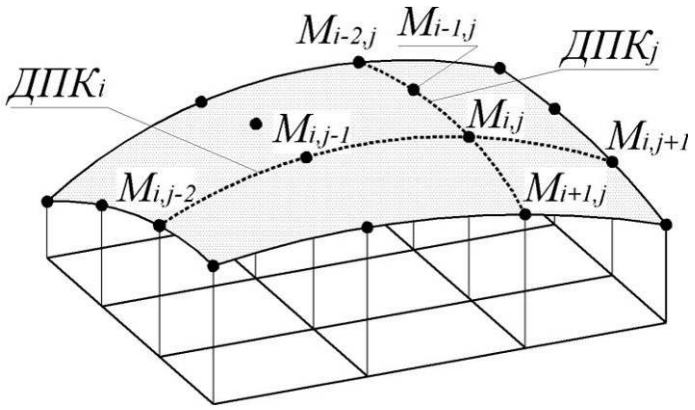


Рис. 7.11. Виділення з вихідного масиву точок двох сімейств ДПК

В результаті аналізу точкових рядів визначаються характеристики заданих ними ДПК у вихідних точках. Для точки Mi;j це положення дотичних (ti, tj) і значення радіусів кривини (Ri, Rj) вихідних ДПКi та ДПКj відповідно. Прямі ti та tj визначають положення дотичної площини (Pi,j) ДПП (рис. 7.12).

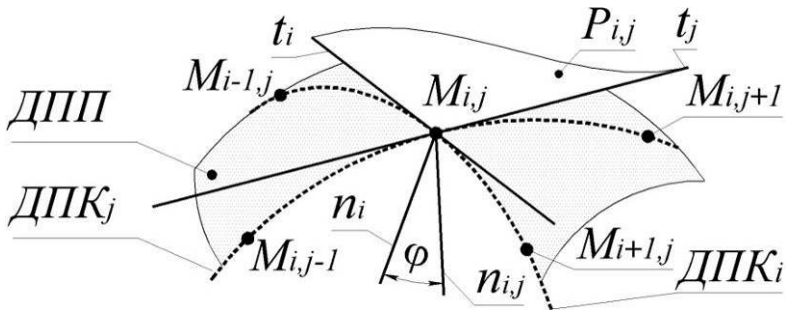


Рис. 7.12. Положення дотичної площини в точці ДПП

Призначення дотичних площин задає положення дотичних прямих в даній точці для всіх кривих, розташованих на поверхні. Тепер будь-які ДПК, задані точками поверхні, можуть формуватися як обводи першого порядку фіксації.

Значення радіусів кривини ліній, що належать поверхні, в точці їх перетину різні. Ці значення можна узгодити, сформувавши у вузлах ДПП індикатриси Дюпена. Індикатриса Дюпена характеризує викривленість поверхні в даній точці і являє собою центральну криву другого порядку. Точки індикатриси отримують відкладаючи в дотичній площині від точки поверхні в напрямі дотичних прямих, відрізки, рівні квадратним кореням значень радіусів кривини відповідних нормальних перетинів поверхні [71].

Розглянемо задачу формування індикатриси Дюпена в вихідному вузлі ДПП Mi;j вважаючи цю точку еліптичною. У такій точці індикатрисою є еліпс (рис. 7.13). Еліпс на площині може бути визначений положенням центру і трьох точок, які йому належать. Щоб задати три точки, які належать

індикатрисі, досить визначити в вузлі Mi;j значення радіусів кривини двох нормальних перетинів поверхні. Нормаль поверхні ni,j визначається положенням дотичної площини Pi,j. Для визначення точок, які належать індикатрисі, можна використовувати площини, які задає нормаль ni,j та дотичні ti і tj. Позначимо ці нормальні площині Ni та Nj, а радіуси кривини в

вузлі Mi;j відповідних нормальних перетинів – та відповідно.

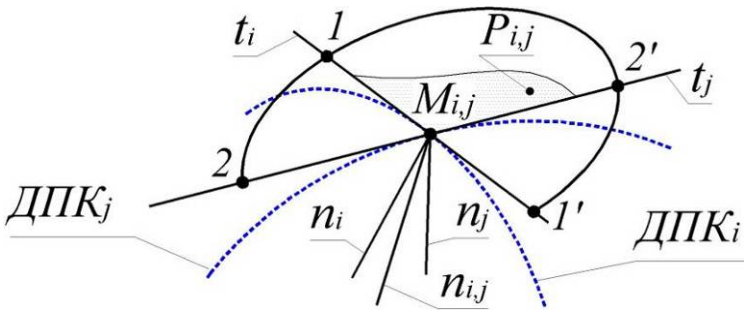


Рис. 7.13. Формування індикатриси Дюпена в точці ДПП

Після визначення положення площини нормального перетину значення його радіуса кривини в вузлі Mi;j визначається значенням радіуса кривини будь-якої кривої, яка розташована на поверхні, і має в цьому вузлі спільну дотичну з лінією перетину. Наприклад, для площини Ni:

,

де φ – кут між нормаллю поверхні ni,j і нормаллю ДПКi ni, (рис. 7.13); Ri – радіус кривини ДПКi в вузлі Mi;j.

Радіус кривини перетину Nj – визначається аналогічно, за значенням радіуса кривини ДПКj в вузлі Mi;j – Rj. Відклавши на прямій ti

відрізки [Mi;j, 1] і [Mi;j, 1′], довжина яких дорівнює , а на прямій tj

відрізки [Mi;j, 2] і [Mi;j, 2′], довжина яких дорівнює , отримуємо точки, які визначають індикатрису.

Отримані індикатриси Дюпена задають у вихідних вузлах ДПП головні напрями на поверхні і значення головних кривин. Ці параметри дозволяють визначити у вузлі значення нормальної кривини ліній різних напрямів, які належать поверхні [71]:

,

де k′ – кривина довільного нормального перетину; k1, k2 – головні кривини;

γ – кут між напрямом нормального перетину і головним напрямом.

Значення кривини нормального перетину дозволяє визначити кривину різних кривих ліній, які належать поверхні, і мають в даному вузлі спільну

дотичну з лінією нормального перетину. Тепер з'являється можливість формувати різні плоскі і просторові ДПК, які належать поверхні, як обводи другого порядку фіксації.

7.4 Моделювання поверхонь з підвищеними динамічними характеристиками

Запропонований в дисертаційному дослідженні метод випробуваний при моделюванні динамічних поверхонь, що обмежують вироби, функціональне призначення яких – взаємодія з середовищем. Це моделі робочих коліс турбокомпресора, які створені для ливарної компанії «Мелт», ТОВ «Мелітопольський завод турбокомпресорів», ПП «Таврія Турбо плюс»; модель робочого колеса відцентрового гідронасосу, що створена для НПК «Спеціальні гідравлічні машини»; модель ножа ротаційної фрези для розпушування ґрунту, що прийнята до впровадження НТК «Роста».

Застосування нашого методу при проектуванні динамічних поверхонь розглянемо на прикладі створення моделі робочого колеса турбокомпресора вісерадіального типу для ТОВ «Мелітопольський завод турбокомпресорів».

Необхідність створення моделі в CAD-системі викликана рішенням керівництва підприємства про самостійне виготовлення робочого колеса з використанням верстатів з числовим програмним управлінням. Раніше робочі колеса закуповувалися на підприємствах Російської федерації.

Робоче колесо виготовляється литтям і являє собою маточину з лопатками. Вихідні дані для проектування геометричної моделі робочого колеса взяті з кресленика, створеного для перевірки якості готового виробу на одному з підприємств СРСР.

Кресленик містить табличні дані, що визначають упорядкований масив з 77 точок, які належать поверхні лопатки. Маточина задана віссю обертання і твірною лінією, що складається з гладко зістикованих двох дуг кіл і одного відрізка прямої лінії.

Необхідні функціональні властивості робочих поверхонь турбокомпресора забезпечуються геометричними властивостями лінійних елементів каркаса, що задає поверхню [92, 126, 175]. Цими властивостями є регулярна зміна значень кривини і скруту при мінімальному за умовами задачі числі особливих точок: точок перегину, зміни ходу, зміни напряму зростання значень кривини і скруту вздовж кривої.

Модель поверхні лопатки сформована на основі каркаса, що складається з одинадцяти плоских перетинів, і двох просторових напрямних кривих ліній [97] (рис. 7.14).

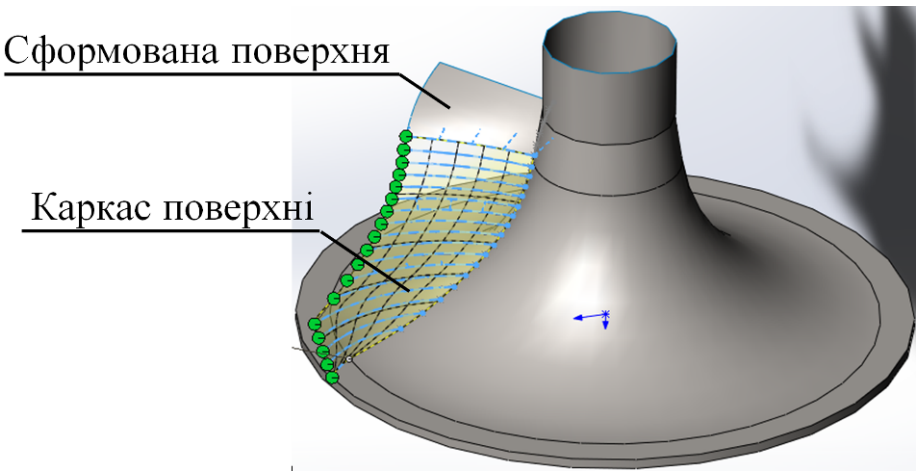


Рис. 7.14. Модель поверхні лопатки турбокомпресора

Кожен плоский перетин спочатку представлено сімома точками, виділеними з вихідного масиву. Аналіз вихідних точкових рядів показав аналогічну динаміку зміни значень радіусів ПК уздовж кожного з них. Дискретні характеристики вихідного точкового ряду, що представляє четвертий перетин поверхні лопатки наведені в таблиці 7.4.

Таблиця 7.4

Характеристики вихідної ДПК, яка задає перетин лопатки

i	1	2	3	4	5	6	7
hi, мм	4,92	4,98	5,01	5,04	5,08	5,12	-
R ПКi, мм	-	23,65	29,18	40,37	65,74	160,08	-
, мм	-	0,02837	0,02982	0,03017	0,02864	-	-

Максимальна похибка, з якою вихідний точковий ряд представляє

монотонну ДПК ( ), становить 3,017*10-2 мм. Зазначена похибка визначається шириною смуги, яка обмежена послідовністю прилеглих кіл, заданих точковим рядом.

В результаті згущення отримано точковий ряд, що складається з двадцяти п'яти точок, які представляють горизонтальний перетин поверхні лопатки. В отриманих точках призначені положення стичних кіл ДПК та

визначена область можливого розташування монотонної кривої . У таблиці 7.5 наведені дискретні характеристики частини згущеної ДПК, яка обмежена вихідними точками 4 та 5.

Таблиця 7.5

Характеристики ділянок згущеної ДПК

i	13	14	15	16	17
hi, мм	1,2654	1,2654	1,2653	1,2653	-
Ri, мм	41,1643	50,0817	58,8764	62,6673	66,1838
R′ДКi, мм	38,7642	47,1143	55,2548	61,4376	65,1438
R ДК′i, мм	44,2413	52,9753	60,1037	63,8214	67,8746

·10-4, мм	4,7213	4,7044	4,6873	4,6721	-

Після згущення всього точкового ряду зазначені вихідні точки отримали номери 13 та 17 відповідно. Значення похибки, з якою точковий ряд представляє ділянки монотонної ДПК, знаходяться в діапазоні від 2·10-4 мм до 5·10-4 мм. Точки отриманої ДПК інтерпольовані коробовою лінією кіл.

Сформовані одинадцять обводів, кожен з яких інтерполює точковий ряд, що складається з двадцяти п'яти вузлів, які належать горизонтальній площині, складають сімейство твірних ліній каркаса моделі поверхні лопатки .

Напрямні лінії каркаса сформовані на основі просторових точкових рядів, що спочатку складаються з одинадцяти точок, які розташовані на маточині і кромці лопатки. Похибка, з якою вихідний точкових ряд представляє монотонну криву, визначається розмірами ТПСф. В результаті двох послідовних згущень отримані точкові ряди, що складаються з сорока однієї точки, які задають просторові ДПК правого ходу, вздовж яких радіуси стичних кіл і сфер монотонно зменшуються. У вихідних точках і точках згущення призначено положення прямих, дотичних до ДПК, визначені ТДСф , що обмежують область її можливого розташування.

Дискретні характеристики вихідної ДПК, яка задає кромку лопатки, наведені в таблиці 7.6.

Таблиця 7.6

Характеристики вихідної ДПК, яка задає кромку лопатки

i	hi, мм	RПКi, мм	RПСфi, мм	·10-3, рад/мм	·10-2, мм
1	2	3	4	5	6
1	15,0417	-	-	-	-
2	14,8015	172,1322	180,1142	8,3932	4,4950
3	4,5685	128,2846	134,1271	9,3685	4,6181
4	14,3440	101, 1366	106,2089	10,3821	4,5120
5	14,1301	81,5213	86,7373	11,5977	4,5625
6	13,9284	47,0443	71, 1858	13,2114	4,7401
1	2	3	4	5	6
7	13,7403	54,2962	58,1058	14,7581	4,7462
8	13,5679	43,6743	49,8639	15,9757	4,6511
9	13,4145	37,6400	42,0439	17,6599	4,6977
10	13,2819	35,2688	-	18,9829	4,7691
11	-	-	-	-	-

У таблиці 7.7 наведені дискретні характеристики частини згущеної ДПК, яка обмежена вихідними точками 7 та 8. Після згущення всього точкового ряду зазначені вихідні точки отримали номери 25 та 29 відповідно.

Абсолютна похибка формування монотонної просторової ДПК ( ) оцінюється максимальною відстанню між ребрами ТДСф, що обмежують

область розташування її ділянок. Максимальна абсолютна похибка формування ДПК визначена розмірами ТДСф28 і дорівнює 1,8528*10-4 мм.

Таблиця 7.7

Характеристики ділянки згущеної ДПК, яка задає кромку лопатки

i	hi, мм	RДСфi, мм	·10-3, рад/мм	·10-4, мм
25	3,4812	57,9016	15,3066	1,8489
26	3,4812	55,8213	15,7142	1,8497
27	3,4813	53,8987	16,1157	1,8507
28	3,4813	52,0308	16,5742	1,8528
29	-	50,1437	16,9349	-

Отримані точкові ряди інтерпольовані просторовою коробовою лінією кіл. Похибка, з якою обвід представляє просторову монотонну криву, оцінюється похибкою дискретної інтерполяції.

Обводи, що представляють напрямні і твірні лінії каркаса, імпортовані в CAD-систему SolidWorks і за допомогою функції CAD-системи «Поверхность по сечениям» отримана модель робочої поверхні лопатки [94]. Після формування поверхонь лопаток робочого колеса була створена модель міжлопаткового каналу.

Міжлопатковий канал, в якому відбуваються основні енергетичні перетворення, обмежують поверхні лопаток, маточини і кришки компресора. Моделі поверхонь маточини і кришки компресора отримані за допомогою функцій CAD-системи SolidWorks «Повернутая поверхность». Твірна лінія, яка задає поверхню обертання, вказується у вікні «Property Manager». Це крива, що складається з дуг двох кіл та відрізка прямої, положення і розміри яких взяті з кресленика деталі.

На підставі створеної геометричної моделі виконаний газодинамічний аналіз міжлопаткового каналу (рис. 7.15). Аналіз проведено за допомогою модуля SolidWorks Flow Simulation. Вихідними параметрами потоку є: тиск на вході (0,8 атм) і виході (1,64 атм), швидкість потоку на вході (90 м/с) і виході (205 м/с).

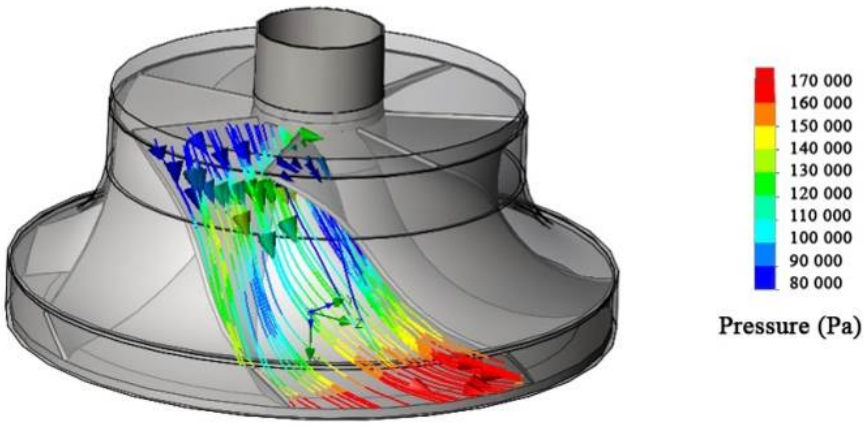


Рис. 7.15. Газодинамічний аналіз міжлопаткового каналу

Аналіз вихідної моделі робочого колеса показав, що в середній частині міжлопаткового каналу тиск газу зменшується до 4%. Зменшення тиску може бути викликане нерівномірним графіком площ нормальних перетинів міжлопаткового каналу.

При проектуванні поверхонь, що обмежують міжлопатковий канал, доцільно забезпечити монотонну зміну площ нормальних перетинів уздовж осі каналу. Рекомендується використання прямолінійних або параболічних графіків зміни площ нормальних перетинів [152]. Виконання цієї вимоги сприяє плавному наростанню тиску газу уздовж каналу і зниженню енергетичних втрат, пов'язаних з виникненням завихрень всередині потоку.

Для перевірки відповідності отриманої моделі вимогам, пред'явленим до поверхонь каналів, визначено площі дев'яти нормальних перетинів міжлопаткового каналу і побудований графік їх зміни уздовж осьової лінії [93]. По осі абсцис графіка відкладені довжини ділянок осьової лінії (l), а по осі ординат – площі відповідних перетинів (S) (рис. 7.16).

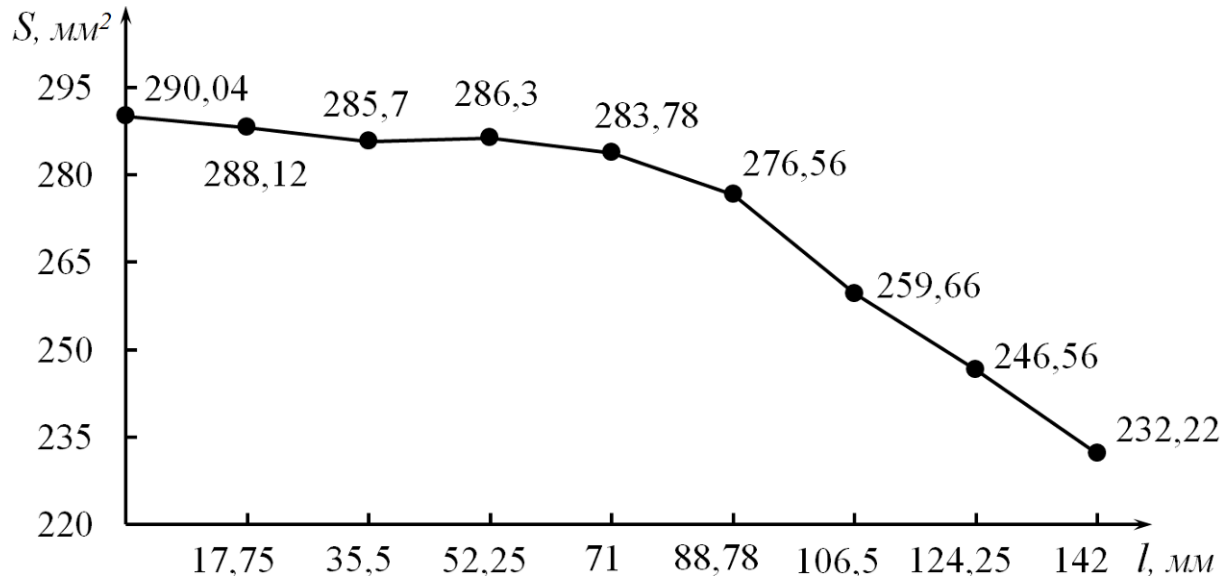


Рис. 7.16. Вихідний графік зміни площ нормальних перетинів уздовж осьової лінії каналу

Вихідними даними для формування осьової лінії каналу послужили дві лінії струму частинок середовища всередині каналу, що проходять через центри ваги вхідного і вихідного перерізів. Лінії струму отримані в автоматичному режимі за допомогою функцій FlowWorks.

Кожна з ліній струму була розділена на вісім рівних частин точками, пронумерованими від вхідного до вихідного перерізів каналу. Точки з однаковими номерами з'єднані відрізками, в межах яких призначені точки, які будемо вважати приналежними осьовій лінії міжлопаткового каналу. Точка осьової лінії, яка належить першому відрізку, призначається в центрі ваги вхідного перерізу каналу (рис. 7.17). При переході до кожного наступного відрізку, що з'єднує лінії струму, точка осьової лінії зміщується в

бік лінії струму, яка проходить через центр ваги вихідного перерізу каналу, на 1/8 довжини відрізка. Таким чином, другий відрізок поділяється віссю каналу в пропорції 1:7, п'ятий відрізок – в пропорції 1:1, а точка осьової лінії, що належить дев'ятому відрізку, збігається з центром ваги вихідного перерізу . В результаті отримані дев'ять точок, які задають просторову ДПК, що проходить через центри ваги вхідного і вихідного перерізів і рівномірно віддалену від ліній струму.



Рис. 7.17. Формування осьової лінії міжлопаткового каналу

Довжина осьової лінії каналу визначена як середнє арифметичне від довжини двох ліній струму, що проходять через центри ваги вхідного і вихідного перерізів. Довжина осьової лінії склала 142,1 мм.

Нормальні перерізи отримані в результаті перетину моделі міжлопаткового каналу нормальними площинами ДПК, яку задають дев'ять точок, розташованих на осьовій лінії. За допомогою функцій системи SolidWorks визначені площі цих перерізів: вхідного, семи проміжних і вихідного, які склали 290,04 мм2, 288,12 мм2, 285,70 мм2, 286,30 мм2, 283,78 мм2, 276,56 мм2, 259,66 мм2, 246,56 мм2 та 232,22 мм2 відповідно.

Конфігурація графіка зміни площ нормальних перерізів каналу показує, що значення площ трьох нормальних перерізів (286,30 мм2, 283,78 мм2, 276, 56 мм) визначають наявність двох точок перегину. Для забезпечення опуклого графіка призначені нові площі трьох середніх з дев'яти перерізів каналу. Змінені площі перерізів склали 281,38 мм2, 275,88 мм2 і 268,16 мм2. Отриманий графік зміни площ нормальних перерізів каналу близький до параболи (рис. 7.18).

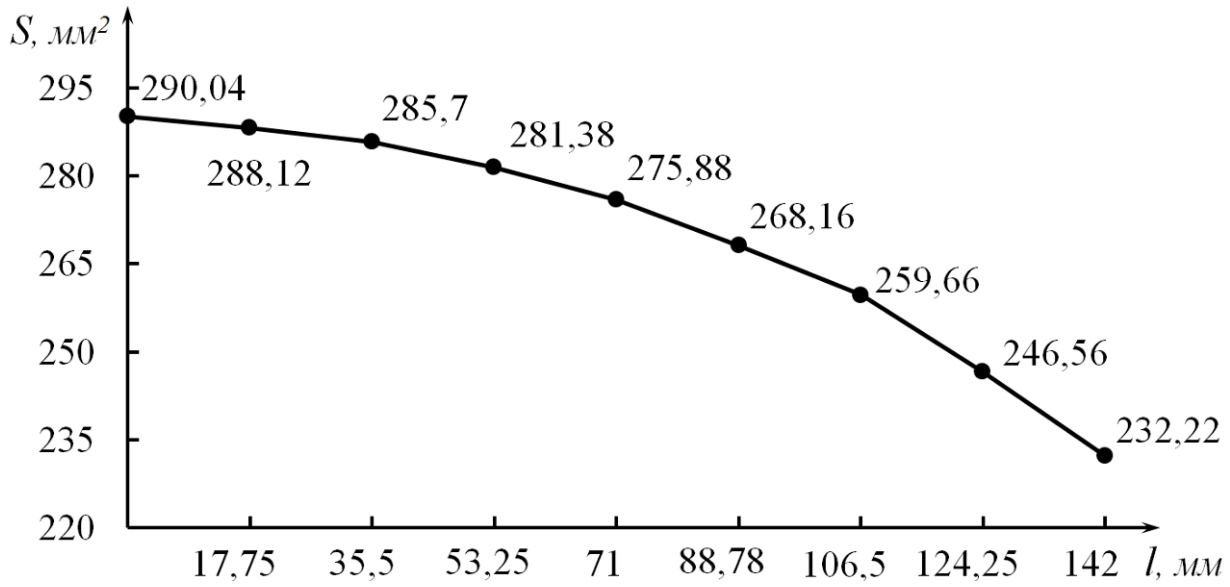


Рис. 7.18. Скоригований графік зміни площ нормальних перетинів уздовж осьової лінії каналу

Коригування форми трьох проміжних перерізів проведено за рахунок зміни форми маточини робочого колеса. Робочі поверхні лопаток не корегувалися.

Коригування поверхні маточини виконано за рахунок зміни форми твірної лінії поверхні обертання. Змінена твірна сформована на основі плоскої ДПК, уздовж якої монотонно змінюються значення кривини. ДПК задана дев'ятьма вихідними точками, в яких твірна лінія поверхні маточини перетинається площинами нормальних перерізів поверхні каналу. Нумерація вихідних точок ДПК відповідає нумерації нормальних перерізів, починаючи з вхідного. Положення шести точок 1-3 і 7-9 призначені на межі відповідного нормального перерізу каналу. Ці межі належать вихідній поверхні маточини робочого колеса.

Положення точок 4-6 визначено виходячи з величини, на яку змінюється площа відповідного перерізу в результаті оптимізації. Визначення положення такої точки розглянемо на прикладі точки 4, яка призначається на межі нормального перерізу, вихідна площа якого становила 283,78 мм2, а після оптимізації становить 275,88 мм2.

Спосіб визначення нової межі зміненого нормального перерізу показано на рис. 7.19.

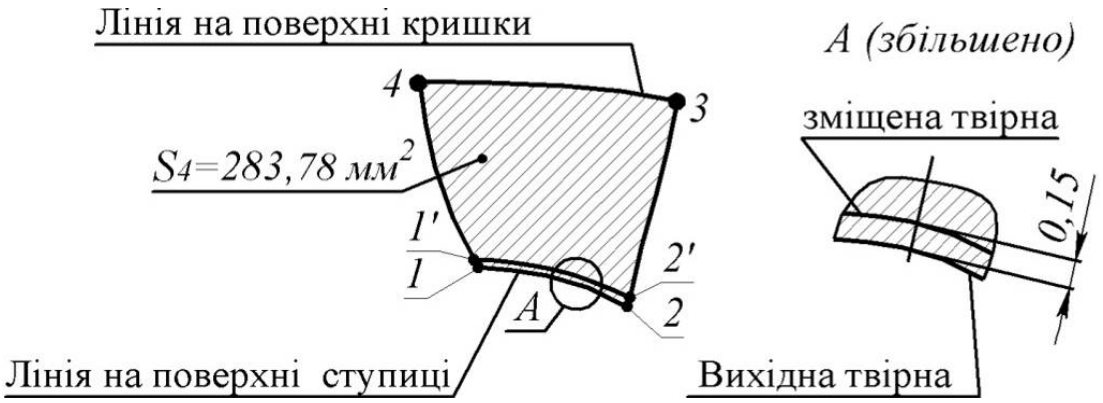


Рис. 7.19. Коригування площі перерізу каналу

Коригування площі перерізу здійснена за рахунок заміни межі перерізу , яка належить маточині. На рис. 7.19 це межа 1-2. Формування нової межі перерізу 1′-2′ здійснюється за допомогою функцій CAD-системи SolidWorks «Еквидистанта» і «Характеристики сечения». Площа області, яку лінія 1′-2′ відсікає від вихідного перерізу (криволінійний чотирикутник 1-2-2′-1′), дорівнює різниці площ вихідного і оптимізованого перерізів ΔS=7,9 мм2. Положення четвертої вихідної точки ДПК визначається в результаті перетину межи 1′-2′ та площини, в якій формується ДПК, яка задає твірну лінію поверхні маточини.

На основі точкового ряду, що складається з 9 точок, сформована плоска монотонна ДПК, яка складається з 99 точок. Отримані точки інтерпольовані B-сплайном, який розташовано в межах послідовності базисних трикутників, обмежених хордами СЛЛ і дотичними до ДПК. Максимальна абсолютна похибка, з якою B-сплайн замінює монотонну ДПК, не перевищує 4,2*10-3 мм.

Оптимізована поверхня маточини робочого колеса забезпечує плавну зміну площ нормальних перерізів уздовж каналу. При цьому значення площ в дев'яти контрольних перерізах відповідають графіку зміни площ, який представлений на рис. 7.18.

На основі отриманих поверхонь була створена оптимізована модель робочого колеса. Повторний аналіз потоку в міжлопатковому каналі показав вирівнювання тиску потоку уздовж каналу (рис. 7.20).

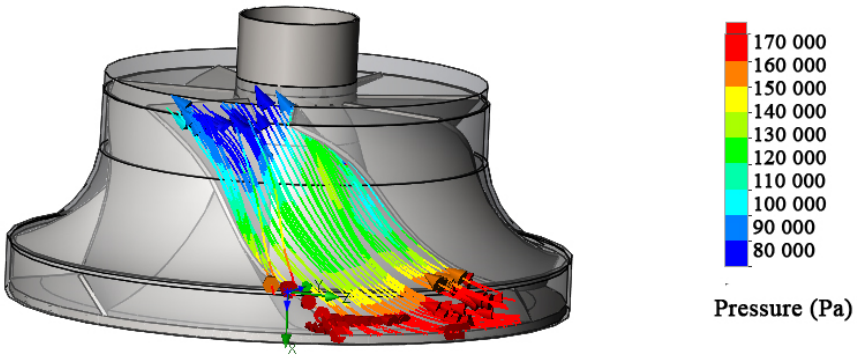


Рис. 7.20. Газодинамічний аналіз міжлопаткового каналу

На основі отриманих каркасів маточини і лопаток створена CAD-модель робочого колеса компресора. Отримана модель використана в якості вихідних даних для створення в CAM-системі PowerMill програми для обробки поверхонь робочого колеса на станку з ЧПУ.

Імпорт моделі виробу з CAD-системи SolidWorks в CAM-систему PowerMill здійснюється за допомогою прямих трансляторів або через нейтральні формати iges, x_b, step, sat та інші. Керуюча програма для обробки виробу на верстаті з ЧПУ створюється за допомогою стандартних функцій CAM-системи.

Поверхня робочого колеса турбокомпресора обробляється на п'ятикоординатному верстаті моделі DMU50v в автоматичному режимі при мінімальному втручанні оператора. Спеціальний модуль CAM-системи дозволяє виконувати постпроцесування керуючої програми в коді зазначеного верстата.

На рис. 7.21 показано момент обробки робочого колеса турбокомпресора.



Рис. 7.21. Обробка робочого колеса турбокомпресора

Заключним етапом підготовки до виготовлення робочого колеса є створення його ливарної форми. Робоче колесо, оброблене на верстаті з ЧПУ,

використовується для виготовлення «зворотної» моделі з двокомпонентного силікону. Ливарна майстер-модель, що виготовлена з гіпсу на основі силіконової моделі робочого колеса, показана на рис. 7.22.

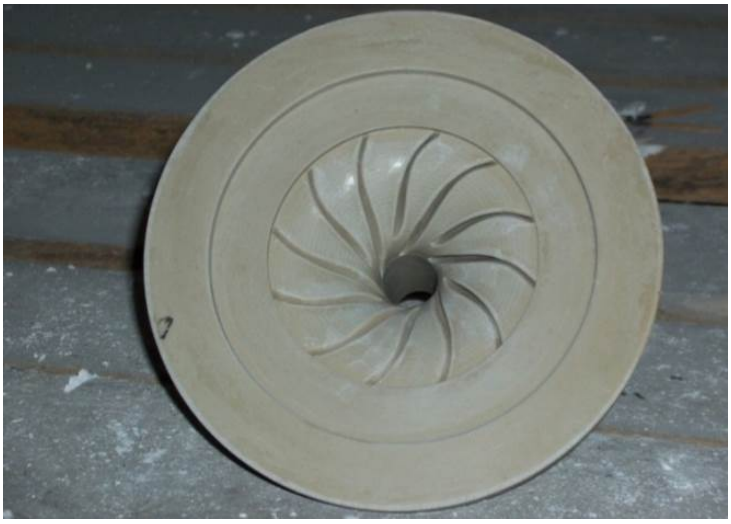


Рис. 7.22. Ливарна форма робочого колеса турбокомпресора

Після виготовлення робочого колеса виконується складання турбокомпресора і його випробування на стенді типу «замкнутий контур». Стенд випробувань забезпечує моделювання різних режимів роботи турбокомпресорів. Випробування показали збільшення продуктивності на 2,5 -3,0% у порівнянні з роботою турбокомпресорів, укомплектованих покупними робочими колесами.

На прикладі формування поверхонь робочого колеса турбокомпресора вісерадіального типу представлено методику моделювання, з використанням розробленого в дисертації методу, поверхонь з підвищеними динамічними характеристиками. Методика передбачає наступні етапи.

1. З вихідного масиву точок виділяються точкові ряди, що задають плоскі або просторові ДПК – вихідні дані для формування лінійних елементів каркасу поверхні.
2. Отримані ДПК розбиваються на частини, на основі яких можливо сформувати монотонні криві. У вихідних точках призначаються характеристики ДПК (положення елементів основних тригранників, значення кривини, скруту, радіусів стичних сфер), при яких можливе формування монотонної кривої. Монотонні частини ДПК формуються окремо.
3. На підставі вихідних точок і призначених в них геометричних характеристик визначається область розташування монотонних кривих ліній, якими можливо інтерполювати точковий ряд.
4. За допомогою програмного забезпечення, розробленого в системі комп'ютерної алгебри Maple, здійснюється згущення точкового ряду. Згущення здійснюється до тих пір, поки ширина області можливого розташування монотонної ДПК не стане менше заданої максимальної похибки формування лінійних елементів каркасу поверхні.
5. В системі тривимірного параметричного моделювання SolidWorks на основі отриманих ДПК формуються гладкі обводи, що складаються з ділянок безперервних кривих: кіл або В-сплайнів. Обвід формується виходячи з допустимої абсолютної похибки , яка визначається відстанню від ділянок обводу до меж області можливого розташування

ДПК.

6. Обводи використовуються в якості лінійних елементів каркасу поверхні. За допомогою стандартних функцій SolidWorks на основі каркаса формується комп'ютерна модель виробу. Задані геометричні характеристики кривих, які із заданою точністю представляють лінійні елементи каркаса, забезпечують необхідні функціональні якості поверхні.

Для автоматизації формування ліній в CAD-системі SolidWorks створено програмне забезпечення. Програма розроблена в середовищі Delphi 10.2 з використанням інструменту API (Application Program Interface). Вихідними даними для роботи програми є текстові файли з координатами точок, які розраховані в Maple. Обвід, який інтерполює вихідний точковий ряд, створюється в автоматизованому режимі. Використання програмного забезпечення дає можливість створювати в CAD-системі SolidWorks обвід, що складається з як завгодно великого числа ділянок.

Висновки по сьомому розділу

В результаті досліджень, проведених в розділі, отримані наступні результати.

1. Запропоновано спосіб оцінки максимальної абсолютної похибки формування монотонної ДПК. Похибка оцінюється виходячи з розмірів прилеглих або дотичних тетраедрів і сферичних тригранників, які обмежують область можливого розташування ділянок ДПК. Запропонований спосіб дозволяє оцінити:

- точність, з якою ДПК, що формується, представляє вихідну криву лінію, на якій був призначений вихідний точковий ряд;
- точність, з якою отримана ДПК представляє будь-яку монотонну криву, що інтерполює точковий ряд, отриманий в результаті згущення.

Оцінка максимальної абсолютної похибки дозволяє визначити мінімальне число кроків згущення вихідного точкового ряду, необхідних для формування ДПК, ширина області можливого розташування якої не перевищує величину заданої похибки інтерполяції.

2. Розроблено способи, що дозволяють сформувати обвід, який із заданою точністю замінює монотонну ДПК. Обвід може бути сформовано у вигляді супровідної ламаної лінії, коробової лінії кіл, кубічного неперіодичного B-сплайна. Формування обводів в межах області можливого розташування ДПК гарантує заміну монотонної кривої лінії обводом з похибкою, яка не перевищує похибку формування монотонної ДПК.

3. Проведений аналіз дозволяє зробити висновок про стійкість і збіжність розробленого методу. Стійкість методу до зміни вихідних умов забезпечує формування ДПК по монотонним частинам. Відстань від хорд СЛЛ до меж області розташування кривої не може перевищувати половину довжини хорди. Послідовна локалізація області розташування кривої гарантує збіжність процесу моделювання. Призначення кожної точки згущення наближає межі області до точного розв’язку – монотонної кривої лінії із заданим поєднанням характеристик.

4. На основі запропонованих алгоритмів розроблено програмне забезпечення для формування обводів в CAD-системі SolidWorks. Програма забезпечує формування в автоматизованому режимі обводів з заданими геометричними характеристиками, які інтерполюють як завгодно велику кількість точок. Автоматизація формування обводів дозволяє моделювати на основі вихідного масиву точок вироби, обмежені складними функціональними поверхнями.

5. За допомогою розробленого методу формування ДПК розв’язані позиційні задачі:

- визначення точки перетину двох ДПК;
- формування індикатриси Дюпена в точці дискретно представленої поверхні.

Отримані розв’язки дозволяють:

- формувати на основі масиву точок дискретний сітчастий каркас, елементами якого є ДПК;

- призначати узгоджені характеристики ДПК, що належать різним сімействам ліній каркаса, в точках їх перетину.

6. На прикладі створення в CAD-системі SolidWorks моделі робочого колеса турбокомпресора вісерадіального типу запропонована методика проектування поверхонь з підвищеними динамічними характеристиками. Поверхні моделюються на основі каркаса, лінійні елементи якого задають згущені ДПК, які інтерполюють точкові ряди, виділені з масиву точок, що належать поверхні. Функціональні якості поверхні забезпечують задані геометричні характеристики ДПК – постійний хід, монотонна зміна вздовж кривої значень кривини і радіусів стичних сфер.

Крім розглянутого прикладу з використанням методу моделювання обводів в просторі можливого розташування монотонних кривих, створені та впроваджені у виробничий процес моделі робочого колеса відцентрового гідронасоса і ножа ротаційної фрези для розпушування ґрунту.

Основні результати досліджень, проведених в сьомому розділі, опубліковані в роботах – [87, 91-95, 97, 98, 108, 109, 296, 404].

Використані в розділі результати досліджень інших авторів опубліковані в роботах – [71, 126, 152, 162, 174, 175, 213, 216, 266, 308, 312, 347].

ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі вирішена важлива науково-прикладна проблема формування обводів точкових рядів довільної конфігурації, які із заданою точністю представляють криві лінії з відомими геометричними властивостями. З цією метою розроблені теоретичні основи нового методу варіативного дискретного геометричного моделювання ДПК постійного ходу з монотонною зміною радіусів кривини і дотичних сфер на основі області їх можливого розташування. Метод характеризується простотою розрахунків, можливістю локальної корекції одержуваного розв’язку і контролю виникнення осциляції кривої, що формується, та графіків її геометричних характеристик.

Значення для науки отриманих в дослідженні результатів полягає в розробці теоретичних і методологічних основ моделювання обводів точкових рядів довільної конфігурації в просторі можливого розташування кривих ліній з заданим поєднанням геометричних характеристик, що є подальшим розвитком варіативного дискретного геометричного моделювання геометричних образів за заданими умовами.

Використання отриманих результатів у наукових дослідженнях доцільно при розробці нових методів геометричного моделювання кривих ліній та поверхонь з заданими диференціально-геометричними характеристиками.

Значення для практики отриманих результатів полягає в наданні конструктору ефективного інструменту моделювання кривих ліній та поверхонь з заданими геометричними і функціональними характеристиками.

Використання отриманих результатів доцільно при вирішенні завдань зворотного інжинірингу та при конструюванні поверхонь, до аеро- і гідродинамічних якостей яких пред'являються підвищені вимоги.

Проведені дослідження дозволяють зробити наступні основні висновки .

1. Розвиток теоретичних основ та практичне застосування геометричного моделювання кривих ліній та поверхонь вимагає розв’язку задачі інтерполяції точкових рядів довільної конфігурації при забезпеченні регулярності значень кривини, скруту і одночасного контролю за виникненням особливих точок у інтерполюючої кривої. Відомі методи геометричного моделювання не забезпечують розв’язку поставленого завдання.

Таким чином, розробка методу варіативного дискретного геометричного моделювання точкових рядів, що складаються з як завгодно великої кількості точок, які належать кривій з заданими геометричними властивостями, і подальшої інтерполяції отриманого точкового ряду обводом , який з заданою точністю замінює ДПК, є затребуваною і актуальною.

2. В результаті аналізу залежностей між властивостями кривої лінії і конфігурацією точкового ряду, який їй належить, запропонована система дискретних характеристик - аналогів стичних площин, скруту, стичних кіл і

сфер безперервної кривої лінії. Дискретні характеристики визначаються площинами, колами і сферами, які задані умовою проходження через послідовність точок, що належать кривій. Доведено, що для монотонної кривої постійного ходу, вздовж якої радіуси стичних кіл і сфер монотонно зростають або зменшуються, виконуються умови:

- напрям зростання вздовж точкового ряду значень дискретних характеристик збігається з напрямом зростання відповідних значень геометричних характеристик уздовж вихідної кривої;

- дискретні аналоги стичних площин, кіл і сфер обмежують область простору, в межах якої розташована вихідна крива лінія;

- значення геометричних характеристик в точках вихідної кривої знаходяться в межах діапазонів, які обмежені значеннями відповідних дискретних характеристик точкового ряду.

На підставі встановлених залежностей запропоновано спосіб аналізу вихідного точкового ряду, який дозволяє:

- визначати частини точкового ряду, які можливо інтерполювати монотонною кривою лінією і класифікувати цю криву лінію виходячи з поєднання закономірностей зміни уздовж неї геометричних характеристик;

- призначати у вихідних точках фіксовані положення елементів основних тригранників, а також значення кривини, скруту, радіусів стичних сфер, при яких задача інтерполяції точкового ряду монотонною кривою лінією має розв’язок;

- визначати область можливого розташування монотонної ДПК, яка відповідає сукупності вихідних даних, що її задають.

3. Запропоновано загальну схему формування просторових і плоских ДПК. Крива формується згущенням вихідного точкового ряду по частинам, які можливо інтерполювати монотонною кривою. Необхідною умовою моделювання кривої є попередній аналіз вихідного точкового ряду, в результаті якого визначаються і класифікуються монотонні частини ДПК, а також ділянки, що містять особливі точки.

Запропонована схема є універсальною. Її можна застосовувати для формування ДПК на основі вихідного точкового ряду будь-якої конфігурації і якій складається з як завгодно великої кількості точок.

4. Встановлені однозначні відповідності між сукупністю характеристик , що визначають монотонність кривої лінії, і взаємним розташуванням їх дискретних аналогів дозволили формувати ДПК у вигляді послідовності замкнутих геометричних образів, які обмежують область можливого розташування її ділянок. Для ДПК постійного ходу область розташування обмежена послідовністю тетраедрів, грані яких належать аналогам стичних площин. Монотонна ДПК розташована в межах послідовності сферичних тригранників, обмежених аналогами стичних сфер.

Доведено, що призначення точок згущення в межах області розташування відповідних ділянок забезпечує формування точкового ряду, який належить монотонній ДПК. І навпаки, призначення точки згущення за межами області розташування обов'язково призводить до наявності

особливих точок у кривої лінії, яка інтерполює отриманий точковий ряд.

Способи формування ДПК різних порядків фіксації, засновані на контролі області її можливого розташування, включають алгоритми, які дозволяють згущувати точкові ряди, розташовані на кривих постійного ходу, кривих з монотонною зміною кривини, скруту, радіусів стичних сфер. Кожній умові, яка накладаються на ДПК що формується, відповідає своя окрема область простору. Область остаточного розв’язку отримуємо в перетині областей, відповідних сукупності умов формування ДПК.

Запропонований підхід забезпечує локальність моделювання, покроковий контроль і можливість коригування одержуваного розв’язку, контроль за виникненням особливих точок.

5. В результаті дослідження конфігурації полярних торсів монотонних кривих ліній і їх ребер звороту розроблено спосіб формування ДПК на основі гранної полярної поверхні – дискретного аналога полярного торса. Аналіз кутових і метричних характеристик аналога ребра звороту – ламаної звороту, яка розташована на перетині граней гранної полярної поверхні, дає найбільш повну комплексну оцінку властивостей ДПК, що формується. Через характеристики ламаної звороту контролюються всі дискретні характеристики і тип монотонних частин ДПК, область її можливого розташування і ділянки, що містять особливі точки.

Згущення ДПК на основі формування її ламаної звороту дозволяє спростити геометричну схему моделювання звівши її до розв’язку задач на перетин прямих ліній і площин.

6. На підставі аналізу характеристик ребер звороту полярних торсів кривих ліній, що містять особливі точки, запропоновані способи визначення, класифікації та згущення ділянок ДПК, які містять точки стикування її монотонних частин. Ділянки, які обов'язково містять особливі точки, визначаються виходячи з конфігурації ламаної звороту гранної полярної поверхні. Алгоритм згущення точкового ряду в околі особливої ділянки забезпечує запобігання неконтрольованого виникнення додаткових особливих ділянок.

Способи згущення особливих ділянок спільно зі способами згущення монотонних частин ДПК вирішують задачу її формування на основі будь-якого точкового ряду.

7. Визначення меж області можливого розташування ДПК дозволило контролювати точність, з якою точковий ряд представляє криву лінію з заданими геометричними властивостями. Абсолютна похибка дискретної інтерполяції оцінюється на кожній ділянці ДПК як максимально можлива відстань між монотонними кривими лініями з заданим поєднанням характеристик, які інтерполюють точковий ряд. Оцінка абсолютної похибки дозволяє визначити мінімальну кількість необхідних згущень ДПК на кожній з її вихідних ділянок, після чого сформований точковий ряд може бути інтерпольовано обводом.

8. Задану точність інтерполяції точкового ряду обводом забезпечує його формування в межах області можливого розташування монотонних

частин ДПК. При формуванні обводу хордами супровідної ламаної лінії або В-сплайном точність інтерполяції оцінюється розмірами області розташування ДПК постійного ходу. Найменшу похибку інтерполяції забезпечує спосіб формування коробової лінії кіл, яка є дотичною з монотонною ДПК у вихідних точках. Зростання радіусів кіл, що складають ланки коробової лінії, в тому ж напрямі, в якому уздовж ДПК зростають радіуси кривини, дозволяє оцінювати похибку інтерполяції розмірами області простору, обмеженого послідовністю сфер, дотичних з ДПК.

Інтерполяція з заданою точністю точкових рядів обводами, що складаються з ділянок кривих ліній, формування яких забезпечують бібліотеки CAD-систем, дозволяє створювати на основі алгоритмів згущення ДПК комп'ютерні моделі кривих ліній.

9. На основі розробленого в дисертаційному дослідженні методу розв’язані задачі визначення точки перетину двох ДПК і формування індикатрис Дюпена в точках дискретно представленої поверхні. Отримані розв’язки дозволили формувати на основі вихідного масиву точок дискретний сітчастий каркас поверхні, лінійні елементи якого задають ДПК. Функціональні якості поверхні забезпечують характеристики згущених ДПК, значення яких узгоджені з заданими у вихідних точках характеристиками поверхні.

10. На основі розроблених алгоритмів створено програмне забезпечення по формуванню лінійних елементів каркасу поверхні. Програмне забезпечення прийнято до впровадження:

- на ливарній компанії «Мелт», ТОВ «Мелітопольський завод турбокомпресорів», приватному підприємстві «Таврія Турбо Плюс» при проектуванні поверхонь робочих коліс турбокомпресора;

- на науково-виробничій комерційній фірмі «Спеціальні гідравлічні машини» при проектуванні функціональних поверхонь робочого колеса відцентрового одноступінчатого насоса СЦН 75/70;

- на науково-виробничій компанії «РОСТА» при проектуванні функціональної поверхні ножа для розпушування ґрунту в пристовбурних смугах саду;

- на науково-виробничому підприємстві «Центр САПР» при створенні програмних модулів для моделювання поверхонь, заданих каркасом, для пакетів твердотілого параметричного моделювання.

Робочий орган для розпушування ґрунту, виготовлений науково-виробничою компанією «РОСТА», пройшов польові випробування на базі ТОВ «ЛАНА». Випробування показали, що застосування робочого органу, виготовленого з використанням розробленого методу, призводить до поліпшення показників структури ґрунту, отриманого в результаті обробки, та зменшення витрат палива на обробку еталонної ділянки.

11. За результатами досліджень отримано патент України на корисну модель №91024 «Спосіб моделювання лінійних елементів каркасу складних поверхонь, які обмежують технічні вироби, які взаємодіють із середовищем», бюл. № 12 від 25.06.2014.

Достовірність отриманих в роботі теоретичних результатів підтверджується тестовими прикладами, перевірочними розрахунками вирішених практичних завдань, актами про впровадження результатів дослідження.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Абианц В.Х. Теория авиационных газовых турбин / В.Х. Абианц. – М.: Машиностроение, 1979. – 246 с.
2. Авдоньев Е.Я. Конструирование линий и поверхностей по наперед заданным геометрическим условиям / Е.Я. Авдоньев // Прикладная геометрия и инженерная графика . - К., 1971. - вып. 13. - с. 65-68.
3. Авдоньев Е.Я. Конструирование поверхностей, проходящих через п заданных линий / Е.Я. Авдоньев // Прикладная геометрия и инженерная графика. - К., 1980. - вып. 29. - с. 58-61.
4. Авдоньев Е.Я. Математическая модель корпусной поверхности / Е.Я. Авдоньев // Прикладная геометрия и инженерная графика. - К., 1979. - вып. 28. - с. 46-49.
5. Авдоньев Е.Я. Схема автоматизированной системы конструирования и изготовления поверхностей сложных технических форм / Прикладная геометрия и инженерная графика. - К., 1981. - вып. 31. - с. 46-48.
6. Алберг Д. Теория сплайнов и ее приложения / Д. Алберг, Э. Нильсон, Д. Уолш. – М.: Мир, 1972. –316 с.
7. Аминов Ю.А. Дифференциальная геометрия и топология кривых / Аминов, Ю .А.. - М.: Наука, 1987. – 160 с.
8. Андреев Л.В. В мире оболочек / Андреев Л.В. - М.: Знание, 1986. – 176 с.
9. Анпилогова В.А. Алгоритм сглаживания дискретно заданной функции / В.А. Анпилогова, Ж.Г. Левина // Прикладная геометрия и инженерная графика. – К.: Будівельник, 1981. – Вып. 32. – С. 80–84.
10. Анпилогова В.А. Об аналитическом описании обвода 2-го порядка гладкости с фиксированными касательными / В.А. Анпилогова, Н.Г. Кухарчук // Прикладная геометрия и инженерная графика. - К., 1979. - вып. 28. - с. 50-53.
11. Антонов Е.К. Конструирование кинематической поверхности с образующей коробовой кривой переменного вида / Е.К. Антонов // Прикладная геометрия и инженерная графика. - К., 1965. - вып. 2. - с. 80-84.
12. Аронов Б.М. Методы оптимизации в процессах проектирования лопаток авиационных турбомашин: учебное пособие / Б.М. Аронов, В.П. Балтер. – М.: МАИ, 1992. – 68 с.
13. Аушева Н.М. Конструювання криволінійних обводів сегментами кривих п’ятого порядку / Н.М. Аушева, Р.Б. Берлынський // Прикл. геометрія і інж. графіка.- К.: КДТУБА, 2001.- Вип.69.- С.131-134.
14. Ахмедов Ю.Х. Автоматическая аппроксимация односвязных гиперповерхностей полиэдрами применительно к расчетам несущей способности оболочек покрытий: автореф. дис. канд. техн. наук. - К., 1985. - 16 с.
15. Аэродинамика автомобіля / Под ред. В.Г. Гухо; Пер. с нем.- М.: Машиностроение, 1987.- 424 с.
16. Бабаков В.В. О применении кривых 2-го порядка при проектировании и задании сложных поверхностей / В.В. Бабаков // Техн. естетика - 1966, № 5. - с.28-33; № 8 - с.26-30; № 9 - с.12-16; № 10 - с.12-16.
17. Бабаков В.В. Проектирование поверхностей кривыми второго порядка в самолетостроении / В.В. Бабаков - М.: Машиностроение, 1969. - 98 с.
18. Бадаев Ю.И. Вопросы геометрии кубической формы / Ю.И. Бадаев // Прикладная геометрия и инженерная графика. - К., 1984. - вып.38. - с.22-25.
19. Бадаев Ю.И. Метод обводов из кривых 3-го порядка в компьютерной геометрии / Ю.И. Бадаев // Автореф. дисс. … докт. техн. наук. – М.: МАДИ, 1990. –36 с.

20. Бадаев Ю.И. Определения классификации и расчет кривых третьего порядка на основе трехтканевых преобразований / Бадаев Ю.И. // Деп. В УКРНИ-ИНТИ №983-Ук 88 - К.: КПИ, 1988. - 61с.

21. Бадаев Ю.И. Специальные сплайны из полиномов третьей, четвертой и пятой степеней в геометрическом моделировании / Ю.И. Бадаев, А.М. Ковтун. - Одесса: Фенікс, 2011.- 316с.

22. Бадаев Ю.И. Автоматизированное конструирование криволинейных обводов с помощью окружностных сплайнов / Ю.И. Бадаев // Прикладная геометрия и инженерная графика. – К.: Будівельник, 1983. – Вып. 35. – С. 76–79.

23. Бадаев Ю.И. Метод обводов из кривых 3-го порядка в компьютерной геометрии: автореф. дис. на соискание учен. степени доктора техн. наук: спец: 05.01.01 / Ю.И. Бадаев. – М., 1990. – 36 с.

24. Бадаєв Ю.І. Сплайнові векторно-параметричні криві / Ю.І. Бадаєв, О.М. Ковтун // Прикл. геометрія і інж. графіка.- К.: КДТУБА, 2003.- Вип.72. - с.47-49.

25. Бадаева Н.И. Конструирование плоских обводов по заданному каркасу касательных с равномерно распределенной кривизной / Н.И. Бадаева // Прикладная геометрия и инженерная граф. - К., 1987. - вып. 44. - с. 53-54.

26. Бадаева Н.И. Моделирование окружностного сплайна по заданному каркасу точек / Н.И. Бадаева // Прикладная геометрия и инженерная графика. – К.: КНУБА, 2000. – Вип. 51. – С. 93–95.

27. Бадаєва Н.І. Евольвенти третього порядку / Н.І. Бадаєва // Прикл. геом. та інж. графіка. – К.: КНУБА, 2002. – Вип. 71. – С. 153–155.

28. Бадаєва Н.І. Моделювання динамічних обводів агрегатів, що працюють у руховому середовищі: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук: спец. 05. 01.01 / Н.І. Бадаєва. – К., 2001. – 17 с.

29. Бадаєв С.Ю. Інтегральні криві за заданим законом кривини / С.Ю. Бадаєв // Праці Таврійської державної агротехнічної академії. – Мелітополь, 2003. – Вип. 4: Прикладна геометрія та інженерна графіка, т. 18. – С. 132–134.

30. Бадаєв С.Ю. Криволінійний обвод за заданим законом кривини на основі колового сплайну / С.Ю. Бадаєв // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2002. – Вип. 71.– С. 172–177.

31. Бадаєв С.Ю. Криволінійний сегмент на основі інтегральної кривої / С.Ю. Бадаєв, С.О. Боровік // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2009. – Вип. 81. – С. 213-217.

32. Бадаєв С.Ю. Побудова сегмента клотоїди за заданими двома точками, дотичною та кривиною / С.Ю. Бадаєв // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Мелітополь: ТДАТУ, 2009. – Вип. 4, Т. 44. – С. 131-135.

33. Бадаєв С.Ю. Універсальний криволінійний обвод / С.Ю. Бадаєв // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2003. – Вип. 72. – С. 189–191.

34. Бадиєв М.М. Дискретні моделі різнотовщинних і складчастих безмоментних оболонок: автореф. дис. канд. техн. наук. – К., 1994. – 15 с.

35. Балюба И. Г. Конструирование кривых линий по заданным условиям / И.Н. Балюба, В.М. Верещага // Прикл. геом. и инж. Графика. – К., 1990. – Вып. 50. – С. 128–130 .

36. Балюба И.Г. Геометрическая сущность кривых Безье и их аналитическое представление / И.Г. Балюба // Зб. праць міжнародної науково-практичної конференції «Сучасні проблеми геометричного моделювання ». - Харків: ХІПБ МВС України, 1998. Ч. 1. - С. 178-182.

37. Балюба И.Г. Конструирование кривых линий по заданным условиям / И.Г. Балюба, В.М. Верещага // Прикладная геометрия и инженерная графика. – К.: Будівельник, 1990. – Вып. 50. – С. 128–130.

38. Балюба И.Г. Конструктивная геометрия многообразий на основе точечного исчисления. Автореф.дисс…докт.техн.наук. - К.: КГТУСА, 1995.-36 с.

39. Бауков А.В. Аналитическое описание поверхности лапы культиватора / А.В. Бауков, В.М. Найдыш, Л.В. Сергеев / Тр. Укр. с.-х. акад. 1971. - вып. 69. - с. 3-9.

40. Бауков А.В. Использование сетчатых номограмм в практике проектирования рыхлительных рабочих органов культиваторов / А.В. Бауков, В.М. Найдыш // Научн. тр. / Укр. с.-х. акад. 1971 - вып. 69. - с. 10-20.

41. Бахвалов Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – М.: Наука, 1987. – 598 с.

42. Безикович Я.С. Приближенные вычисления / Я.С. Безикович. – М. – Л.: ГИТТЛ, 1949. – 464 с.

43. Белицкая Н.Б. К вопросу построения аналитического описания линейного обвода на основе нелинейного программирования / Н.Б. Белицкая // Прикл. геом. и инж. графика. – К., 1980. – Вып. 29. – С. 38 – 40.

44. Березин И.С. Методы вычислений / И.С. Березин, Н.П. Жидков. – М.: Физматгиз, 1962. – т. 1, 464 с.

45. Боев С.А. Конструирование дискретных обводов и поверхностей с экстремальными дифференциально-геометрическими свойствами. Автореф. дис. ... канд. техн.наук.- К.: КИСИ, 1991.- 20 с.

46. Ботвіновська С.І. Теоретичні основи формоутворення в дискретному моделюванні об’єктів архітектури та дизайну: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня доктора техн. наук: спец. 05.01.01 / С.І. Ботвіновська – К., 2000. – 43 с.

47. Брустинов В.М. Геометрическое моделирование линейных обводов кузовных поверхностей методом дискретной интерполяции. Автореф. дис. канд.техн.наук.-К.: КИСИ, 1993.-22с.

48. Бубенников А.В. Начертательная геометрия / А.В. Бубенников. – М. : ВЗПИ, 1968. – 423 с.

49. Бурчак И.Н. Геометрическое моделирование сетчатых конструкций и сборных оболочек с учетом деформации упругого изгиба: автореф. дис. канд. техн. наук. - К., 1988. - 17 с.

50. Бурченко П.Н. О развертывающейся лемешно-отвальной поверхности скоростного корпуса / П.Н. Бурченко // Тр. / Всесоюзн. научно-исслед. ин-т механизации с.х. 1978 - т. 82. - с. 3-24.

51. Ванін В.В. Деякі питання моделювання кривими Безьє третього порядку / В.В. Ванін, Г.А. Вірченко // Праці Таврійської державної агротехнічної академії.- Мелітополь: ТДАТА, 2004.- Вип.4.- Т.23.- С.57-61.

52. Ванін В.В. Евольвентно-еволюні моделі в упорядкованих потоках: втореф. дис. … докт. техн. наук. – К.: КДТУБА, 1996. – 39 с.

53. Верещага В.М. Визначення поняття дискретного геометричного образа у варіаційному дискретному геометричному моделюванні / В.М. Верещага // Праці ТДАТУ. Прикладна геометрія та інженерна графіка. - 2011. - Вип. 4, Т. 51. - С.3-8.

54. Верещага В.М. Геометрические и вычислительные особенности задачи численного дифференцирования / В.М. Верещага // Тезисы докл. Междунар.научно-практ. конф. «Моделирование процессов и технологического оборудования в сельском хозяйстве», 17-19 августа 1994, Мелитополь ТГАТА - т.2 - с. 42.

55. Верещага В.М. Геометрическое моделирование кривых линий методами дискретной интерполяции / В.М. Верещага // Харьков: Полиграфист, 1995. -170 с.

56. Верещага В.М. Дискретна інтерполяція лінійних каркасів кузовних поверхонь / В.М. Верещага, В.М. Брустинов // Прикладна геометрія та інж.графіка. - К.,1994 - Вып.56 - с. 84-85.

57. Верещага В.М. Дискретное интегрирование / В.М. Верещага - Харьков: Полиграфист, 1995. - 47 с.

58. Верещага В.М. Дискретно-параметричний метод геометричного моделювання кривих ліній та поверхонь: дис. ... док-ра. техн. наук. - КДТУБА. - К, 1996. -320 с.

59. Верещага В.М. Методы дискретного дифференцирования на основе геометрических соотношений / В.М. Верещага // Прикладная геометрия и инженерная графика - К. 1996 - вып. 58 - с. 88-91.

60. Верещага В.М. Моделирование дискретно представленных поверхностей с учетом дифференциальных характеристик плоских сечений. / В.М. Верещага // Тезисы докл. Междунар. научно-практ. конф. «Моделирование процессов и технологического оборудования в сельском хозяйстве», 17-19 августа 1994, Мелитополь ТГАТА - т.2 - с. 43.

61. Верещага В.М. Формирование точечного каркаса поверхности на основе двумерной дискретной интерполяции. / В.М. Верещага // X Всесоюзный научно - методический семинар «Инженерная и машинная графика». Тезисы докладов. - Полтава, 1991 - с. 140.

62. Вірченко ГА. Проектування плоских обводів з використанням кривих Безьє третього порядку / Г.А. Вірченко // Прикл. геометрія і інж. графіка.- К.: КДТУБА, 2003.- Вип.72.- С.119-123.

63. Власюк А.Г. Модель несимметричной параметрической кривой с р конечных сумм в качестве эволюты / А.Г. Власюк // Труды Тарвической государственной агротехнической академии. – Мелитополь: ТГАТА, 1998. – Вып. 4, т. 4. – С. 30-33.

64. Власюк Г.Г. Криві скінчених сум у геометричному моделюванні просторових обводів: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня доктора техн. наук: спец. 05.01.01 / Г.Г. Власюк – К., 2000. – 33 с.

65. Власюк Г.Г. Модель параметричної кривої з еволютами у вигляді кривих скінчених сум / Г.Г. Власюк // Труды Тарвической государственной агротехнической академии. – Мелитополь: ТГАТА, 1998. – Вып. 4, т. 4. – С. 27-29.

66. Власюк Г.Г. Просторова крива скінчених сум, яка визначається на криволінійній поверхні / Г.Г. Власюк // Прикл. геометрія та інж. графіка. – К: КДТУБА, 1998. – Вып. 4. – С. 165-167.

67. Власюк Г.Г. Просторові симетричні вторинні криві скінчених сум, які визначені на криволінійній поверхні / Г.Г. Власюк // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – К: КПІ, 2000. – № 4. – С. 126-129.

68. Волков Е.А. Численные методы / Е.А. Волков. – 1982. – 256 с.

69. Воробкевич Р. И. Конструирование линий и поверхностей на основе специальных операций над функциями и тригонометрическими сплайнами. Автореф. дисс . ... канд. техн. наук. – К.: КИСИ, 1989. – 21 с.

70. Воронцов О.В. Конструирование сетчатых каркасов в задачах отведения поверхностных вод: автореф. дис. канд. техн. наук. - К., 1992.-16 с.

71. Выгодский М. Я. Дифференциальная геометрия / М.Я. Выгодский. – М. – Л.: ГИТТЛ, 1949. – 512 с.

72. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике / м. Я. Выгодский. — М. : Наука, 1964. – 870 с.

73. Гавриленко Е.А. Анализ дискретно представленной кривой на возможность контроля кривизны при ее конструировании / Е.А. Гавриленко // Прикл. геом. и инж. графика / Труды ТГАТА. – Мелитополь, 1998. – Вып. 4. – Т. 4 – с. 51–54.

74. Гавриленко Е.А. Визначення рівняння дотичного кола до прямої в барицентричних координатах / Е.А. Гавриленко // Прикл. геом. та інж. графіка, – К.: КДТУБА, 1997. – Вип. 61. – с. 211–212.

75. Гавриленко Е.А. Конструирование кривой с монотонным изменением кривизны / Е.А. Гавриленко // Мелитопольский ин-т мех. с. х., Мелитополь, 1994, – 11 с.; Деп. в ГНТБ Украины 20.04.94, №802 – Ук 94.

76. Гавриленко Е.А. Про можливість сгущення дискретно представленої кривої при умові монотонності зміни її кривини. / Е.А. Гавриленко // Прикл. геом. та інж. графіка . – К.: КДТУБА, 1994. – Вип. 56. – с. 126–127.

77. Гавриленко Е.А. Формирование ДПК на участках, содержащих особые точки / Е. А. Гавриленко, Ю. В. Холодняк // Сучасні проблеми моделювання: наук. фах. видання / Мелітоп. держ. пед. ун-т ім. Б. Хмельницького. – Мелітополь, 2018. – Вип. 12. – С. 53-57.

78. Гавриленко Е.А. Дискретное интерполирование плоских одномерных обводов с закономерным изменением кривизны : Дис... канд. техн. наук. // Таврическая гос. агротехническая академия. — Мелитополь, 2004. — 184с.

79. Гавриленко Е.А. Вариативное дискретное геометрическое моделирование одномерных обводов с заданными дифференциально геометрическими свойствами / Е. А. Гавриленко // Вісник Херсонського національного технічного університету / ХНТУ. – Херсон, 2015. – Вип. 3 (54). – С. 555-559.

80. Гавриленко Е.А. Вариативное дискретное геометрическое моделирование на основе пространственных угловых параметров дискретно представленной кривой второго порядка гладкости / Е. А. Гавриленко, А.В. Найдыш // Прикладна геометрія та інженерна графіка: міжвід. наук.-техн. збірник / КНУБА. – Київ, 2013. – Вип. 91. – С. 69-75.

81. Гавриленко Е.А. Вариативное дискретное геометрическое моделирование одномерных обводов на основе пространственных угловых параметров / Е. А. Гавриленко, А. В. Найдиш // Технические науки – от теории к практике: сб. статей ... науч.-практ. конф . (октябрь, 2013 г., Новосибирск) / НП «СибАК». – Новосибирск, 2013, № 26. – С.8-13.

82. Гавриленко Е.А. Вариативное дискретное геометрическое моделирование дискретно представленной кривой с закономерным изменением кручения / Е. А. Гавриленко // Научные итоги: достижения, проекты, гипотезы: матер. XIX-ой Междунар. науч.-практ. конф. (27 марта, 2014 г., Минеральные Воды) / СКФ БГТУ им. В.Г. Шухова. – Минеральные Воды, 2014. – № 19. – С. 155-157.

83. Гавриленко Е.А. Вариативное моделирование кривых с закономерным изменением дифференциально-геометрических характеристик / Е. А. Гавриленко, Ю. В. Холодняк // Науковий вісник Таврійського державного агротехнологічного університету: електрон. наук. фах. видання / ТДАТУ. – Мелітополь, 2016. – Вип. 6, т. 1. – С. 230-235.

84. Гавриленко Е.А. Визначення положення центрів кривини дискретно представленої кривої / Е. А. Гавриленко // Системні технології: регіон. межвуз. зб. наук. пр. / НМетАУ. Дніпропетровськ, 2011. – Вип. 5 (76). – С. 145-151.

85. Гавриленко Е. А. Дискретное геометрическое моделирование пространственных одномерных обводов по заданным условиям // Е. А. Гавриленко, Ю. А. Дмитриев // Динамика систем, механизмов и машин / Омский ГТУ. – № 1. – Омск, 2014. – С. 150-152.

86. Гавриленко Е. А. Дискретное моделирование одномерного пространственного обвода на основе области возможного расположения кривых с заданными геометрическими характеристиками / Е. А. Гавриленко, Ю. В. Холодняк, А. В. Найдыш // Вісник Херсонського національного технічного університету / ХНТУ. – Херсон, 2017. – №

3(62), т. 2. – С. 264-268.

87. Гавриленко Е. А. Информационная технология проектирования и изготовления рабочих колес турбокомпрессора / Е. А. Гавриленко, Ю. В. Холодняк, Ю. А. Дмитриев // Науковий вісник Таврійського державного агротехнологічного університету: електрон. наук. фах. видання / ТДАТУ. – Мелітополь, 2016. – Вип. 6, т. 2. – С. 52-62.

88. Гавриленко Е. А. Использование барицентрических координат при конструировании пространственной дискретно представленной кривой / Є. А. Гавриленко // Сучасні проблеми моделювання: наук. фах. видання / Мелітоп. держ. пед. ун-т ім. Б. Хмельницького. – Мелітополь, 2016. – Вип. 6. – С. 38-42.

89. Гавриленко Е. А. Моделирование кривой постоянного хода с монотонным изменением радиусов соприкасающихся окружностей и сфер / Е. А. Гавриленко, А. В. Найдыш, Ю. В. Холодняк, Ю. А. Дмитриев // Динамика систем, механизмов и машин / Омский ГТУ. – Омск, 2016. – № 1, Т. 4. – С. 135-138.

90. Гавриленко Е. А. Область возможного расположения пространственного одномерного обвода / Е. А. Гавриленко, Ю. В. Холодняк // Сучасні проблеми моделювання: наук. фах. видання / Мелітоп. держ. пед. ун-т ім. Б. Хмельницького. – Мелітополь, 2017. – Вип. 8. – С. 60-64.

91. Гавриленко Е. А. Определение абсолютной погрешности интерполяции кривой с заданными геометрическими свойствами / Е. А. Гавриленко, А. В. Найдыш, Ю. В . Холодняк // Строительство. Материаловедение. Машиностроение: сб. науч. трудов / Приднепров. гос. акад. стр-ва и архитектуры. – Днепр, 2017. – Вып. 101. – С. 72-79. – (Компьютерные системы и информационные технологии в образовании, науке и управлении).

92. Гавриленко Е. А. Разработка технологии формообразования и обработки динамических поверхностей / Е. А. Гавриленко, Ю. В. Холодняк, В. В. Кучеренко, А. А. Бездитный // Наукові нотатки: міжвузівський збірник / Луцький НТУ. – Луцьк, 2015. - С. 54-58.

93. Гавриленко Е. А. Расчет и моделирование сложных геометрических поверхностей / Ю. В. Холодняк, Е. А. Гавриленко, Ю. А. Дмитриев // Молодежь и Наука: модернизация и инновационное развитие страны: матер. III Междунар. науч.-практ. конф. (5-8 июня 2013 г., Пенза) / ПенГТУ. – Пенза, 2013. – С. 37-39.

94. Гавриленко Е. А. Технология компьютерного проектирования функциональных поверхностей технических изделий на основе массива точек / Е. А. Гавриленко, А. В. Найдыш, Ю. В. Холодняк // Строительство. Материаловедение. Машиностроение: сб. науч. трудов / Приднепров. гос. акад. стр-ва и архитектуры. – Днепр, 2016. – Вып. 94. – С. 24-29. – (Компьютерные системы и информационные технологии в образовании, науке и управлении).

95. Гавриленко Е. А. Точность дискретной интерполяции плоских дискретно представленных кривых / Е. А. Гавриленко, Ю. В. Холодняк // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету: наук. фах. видання / ТДАТУ. – Мелітополь, 2014. – Вип. 4: Прикладна геометрія та інженерна графіка, т. 58. – С. 23-28.

96. Гавриленко Е. А. Формирование геометрических характеристик монотонной кривой линии / Е. А. Гавриленко, Ю. В. Холодняк, В. А. Пахаренко // Вісник Херсонського національного технічного університету: наук. журнал / ХДТУ. – Херсон, 2016. – № 3(58). – С. 492-496.

97. Гавриленко Е. А. Формирование геометрической модели рабочего колеса турбокомпрессора / Е. А. Гавриленко, Ю. В. Холодняк // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету: наук. фах. видання / ТДАТУ. – Вип. 14, т. 2. – Мелітополь, 2014. – С. 48-53.

98. Гавриленко Е. А. Формирование дискретного сетчатого каркаса динамических поверхностей / Е. А. Гавриленко, Ю. В. Холодняк, А. В. Дубинина, С. О. Барышевский // Сучасні проблеми геометричного моделювання: збірник праць XVII Міжнародної науково-практичної конференції (02-05.06.2015р.) / Мелітоп. держ. пед. ун-т ім. Б. Хмельницького. – Мелітополь, 2015. – С. 44-48.

99. Гавриленко Е. А. Формирование плоских дискретно представленных кривых по заданным условиям / Е. А. Гавриленко, А. В. Найдыш, Ю. В. Холодняк // Научные итоги: достижения, проекты, гипотезы: матер. XVIII-ой Междунар. науч.-практ. конф. (28 ноября, 2013 г., Минеральные Воды) / СКФ БГТУ им. В.Г. Шухова. – Минеральные Воды, 2013. – № 18. – С. 139-142.

100. Гавриленко Е.А. Формирование плоских обводов заданного порядка гладкости / Є.А. Гавриленко // Прикладна геометрія та інженерна графіка: міжвід. наук.-техн. збірник / КНУБА. – Київ, 2012. – Вип. 90. – С. 74-78.

101. Гавриленко Є. А. Визначення границь діапазонів положення центрів кривини плоского обводу / Є. А. Гавриленко // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету: наук. фах. видання / ТДАТУ. – Мелітополь, 2012. – Вип. 4: Прикладна геометрія та інженерна графіка, т. 52. – С. 103-106.

102. Гавриленко Є. А. Визначення діапазонів геометричних характеристик монотонної дискретно представленої кривої / Є. А. Гавриленко, Ю. В. Холодняк // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету: наук. фах. видання / ТДАТУ. – Мелітополь, 2012. – Вип. 4: Прикладна геометрія та інженерна графіка, т. 54. – С. 38-42.

103. Гавриленко Є. А. Визначення діапазонів положення нормалей у вузлах ДПК з монотонною зміною кривини / Є. А. Гавриленко, В. В. Гнатушенко, В. М. Щербина // Системні технології: регіон. межвуз. зб. наук. пр. / НМетАУ. – Дніпропетровськ, 2012. – Вип. 5(82). – С. 43-47.

104. Гавриленко Є. А. Визначення області розташування точки перегину при моделюванні обводу другого порядку гладкості / Є. А. Гавриленко, Ю. В. Холодняк, В. І. Межуєв // Вісник Херсонського національного технічного університету / ХНТУ. – Херсон , 2014. – Вип. 3 (50). – С. 16-20.

105. Гавриленко Є. А. Визначення положення точки згущення при моделюванні монотонної дискретно представленої кривої / Є. А. Гавриленко // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету: наук. фах. видання / ТДАТУ. – Мелітополь, 2012. – Вип. 4: Прикладна геометрія та інженерна графіка, т. 53. – С. 29-33.

106. Гавриленко Є. А. Дискретне моделювання одновимірних просторових обводів першого порядку гладкості / Є. А. Гавриленко // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету: наук. фах. видання / ТДАТУ. – Мелітополь, 2013. – Вип. 4: Прикладна геометрія та інженерна графіка, т. 56. – С. 28-32.

107. Гавриленко Є. А. Дискретное геометрическое моделирование методом пространственных угловых параметров / Є. А. Гавриленко // Збірник тез доповідей XI Міжнародної науково-практичної конференції «Обухівські читання» (1-го березня 2016 року) / Національний університет біоресурсів і природокористування України. – Київ, 2016. – С. 20-21.

108. Гавриленко Є. А. Задача формування локальних геометричних характеристик у вузлах дискретно представленої поверхні / Є. А. Гавриленко, В. А. Дідур // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету: наук. фах. видання / ТДАТУ. – Мелітополь, 2012. – Вип. 4: Прикладна геометрія та інженерна графіка, т. 55. – С. 56-61.

109. Гавриленко Є. А. Програмна реалізація алгоритму моделювання одновимірних обводів по заданим геометричним умовам / Є. А. Гавриленко, Ю. В. Холодняк // Комп'ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво: наук. журн. / Луцький НТУ. – Вип. 13. – Луцьк, 2013. – С.4-9.

110. Гавриленко Є. А. Розрахунок граничних значень геометричних характеристик при дискретному геометричному моделюванні монотонної кривої / А. В Найдиш, Є. А. Гавриленко, В. Ф. Ялпачик // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету: наук. фах. видання / ТДАТУ. – Мелітополь: ТДАТУ, 2012. – Вип. 12, т. 5. – С. 192-196.

111. Гавриленко Є. А. Умови розташування стичних кіл при формуванні обводу з монотонною зміною кривини / Є. А. Гавриленко // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету: наук. фах. видання / ТДАТУ. – Мелітополь, 2011. – Вип. 4: Прикладна геометрія та інженерна графіка, т. 50. – С. 146-150.

112. Гавриленко Є. А. Формування просторової ДПК на основі прилягаючих кіл / Є. А. Гавриленко // Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. праць / МДПУ ім. Б. Хмельницького. – Мелітополь, 2014. – Вип. 3. – С. 39-42.

113. Галимов К.З. Теория оболочек сложной геометрии: методическое пособие [Текст] / К.З. Галимов, В.Н. Паймушин. - Издательство Казанского университета, 1972. - 164 с.

114. Геометрическое моделирование и машинная графика в САПР: Учебник/ В.Е. Михайленко, В.Н. Кислоокий, А.А. Лященко и др.- К.: Выща шк.,1991. - 374 с.

115. Гетьман А.Г. К вопросу проектирования линейчатого каркаса лемешно-отвальной поверхности по заданной верхней предельной траектории / А.Г. Гетьман // Прикладная геометрия и инженерная графика. - К., 1981 - вып. 31 - с. 91-93.

116. Гетьман А.Г. Численный метод построения геодезической линии на лемешно-отвальной поверхности / А.Г. Гетьман // Конструирование и технология производства сельскохозяйственных машин - К., 1981 - вып. II - с. 3-6.

117. Гилой В. Интерактивная машинная графика. Структура данных, алгоритмы, языки. / В. Гилой - М.: Мир, 1981.- 380 с.

118. Гирш А.Г. Критерии выбора способа конструирования обвода. / А.Г. Гирш // Автоматизация технологической подготовки производства на базе систем автоматизации проектирвания. - Омск, 1980 - с. 97-101.

119. Глаголев Н.А. Проективная геометрия / Н.А. Глаголев // Государственное издание «Высшая школа» - Москва, 1963. - С. 236-244.

120. Головаш О.С. Геометрическое моделирование поверхностей с учетом автоматизированного построения на них сетей из линий кривизны: автореф. дис. канд. техн. наук. - К., 1983. - 18 с.

121. Гончаров В Л. Теория интерполирования и приближения функций. - М.: ГИТТЛ, 1954. - 328 с.

122. Горягин Б.Ф. Касательные элементы в точечном описании / Б.Ф. Горягин // Прикладная геометрия и инженерная графика. Труды / ТГАТА - Вып.4, т.3. — Мелитополь: ТГАТА, 1998. - С. 93-95.

123. Горягин Б.Ф. Кривая 2-го порядка в точечном описании / Б.Ф. Горягин // Прикладная геометрия и инженерная графика. Труды / ТГАТА - Вып.4, т.4. - Мелитополь: ТГАТА, 1998. - С. 23-26.

124. Горячкин В.П. Проектирование разгибающихся поверхностей отвала. / В.П. Горячкин // Собр. соч. в 3-х томах: т. 2 - М.: Колос, 1965 - с. 401-415.

125. Горячкин В.П. Теория плуга. / В.П. Горячкин // Собр. соч. в 3-х томах: т. 2 - М .: Колос, 1965 - с. 104-314.

126. Гостелоу Дж. Аэродинамика решеток турбомашин / Дж. Гостелоу; [пер. с англ.]. – М.: Мир, 1987. – 392 с.

127. Грибов С.М. Дискретна геометрія інтерактивного конструювання кінематичних поверхонь на основі скінченних сум. Автореф. дис..докт.техн.наук.-К.:

КДТУБА, 1994.-48с.

128. Грибов С.Н. Аналитический аппарат кривых конечных сумм. – К.: КПИ, 1993. – 6 с. – Деп. в УкрИНТЭИ 01.03.93, 317 –Ук. 93.

129. Грибов С.Н. Геометрическая модель дискретно заданной кривой. Понятие кривой конечной суммы. – К.: КПИ, 1993. – 8 с. – Деп. в УкрИНТЭИ 01.03.93, 315 –Ук. 93.

130. Грибов С.Н. Построение состаной кривой из сегментов кривых и конечных сумм на основе биективного отображение отрезков проективних прямых. – К.: КПИ, 1993. – 13 с. – Деп. в ГНТБ Украины 19.05.93, 916 –Ук. 93.

131. Грибов С.Н. Семейство кривых конечных сумм и их геометрические свойства . – К.: КПИ, 1993. – 14 с. – Деп. в УкрИНТЭИ 01.03.93, 316 –Ук. 93.

132. Грибов С.Н. Суперпозиция плоских кривых конечных сумм. – К.: КПИ, 1993. – 10 с. – Деп. в ГНТБ Украины 19.05.93, 917 –Ук. 93.

133. Грибов С.Н. Управление формой составной кривой с помощью параметров трансформации кривой конечной суммы. – К.: КПИ, 1993. – 8 с. – Деп. в ГНТБ Украины 19.05.93, 918 –Ук. 93.

134. Грибов С.Н. Интерполяция плоских и пространственных точечных каркасов с помощью кривых конечных сумм / С.Н. Грибов. – К.: КПИ, 1993. – 14 с. – Деп. в ГНГБ Украины 14.07.93, №1493.

135. Григорьев В.А. Об изгибании поверхностей переноса. / В.А. Григорьев // Моск, авиац. ин-т, 1972 - вып. 246 - с. 105-109.

136. Грищенко В.Г. Дискретное моделирование поверхностей оболочек с учетом совокупности геометрических и статических формообразующих параметров: автореф. дис . канд. техн. наук.-К., 1985.-15 с.

137. Грищенко В.Г. Конструирование поверхностей оболочек с учетом различных факторов формообразования / В.Г. Грищенко // Прикладная геометрия и инженерная графика. - Киев: Будівельник, 1984. - Вып.37. – С. 30-31.

138. Громов М.Я. Начертательная геометрия. Часть вторая. Плоские кривые линии . Пространственные кривые линии. Поверхности / М.Я. Громов. – М.: ВЗПИ, 1954. – 279 с.

139. Громов М.Я. Пространственные кривые линии в ортогональных проекциях / М.Я. Громов. – М.: ВЗПИ, 1956.

140. Гячев Л.В. Теория лемешно-отвальной поверхности. / Л.В. Гячев // Азово-Черномор. ин-т механизации с.х. - Зерноград, 1961 - вып. 13 - 318 с.

141. Давиденко В.А. К вопросу конструирования поверхностей рабочих органов, воздействующих на почвенный пласт / В.А. Давиденко // Республиканская конференция по прикладной геометрии и инженерной графике. - К., 1976 - с. 78-79.

142. Давыдов Ю.В. Применение методов специального контура для аппроксимации аэродинамического профиля произвольной формы / Ю.В. Давыдов, В.А. Осипов // Известия высш. учеб. заведений. Авиац. техника, 1974 - № I - с. 62-67.

143. Давыдов Ю.В. Уравнение одной поверхности зависимых сечений / Ю.В. Давыдов // Темат. сб. .научн. тр./Моск. авиац. ин-т. 1976 - вып.349 - с. 32-34.

144. Даниловская Н.А. Дискретное моделирование поверхностей сводов-оболочек: дис. ... канд. техн. наук. - К., 1986.- 137 с.

145. Дейч М.Е. Лемнискатный метод построения профилей дозвуковых решеток / М.Е. Дейч, Г.А. Филиппов, В.И. Науман I Теплоенергетика. – 1964. – № 7. – С. 74-78.

146. Демидович Б.Д. Основы вычислительной математики / Б.Д. Демидович, И.А. Марон. – М.: Наука, 1966. – 644 с.

147. Денисов В.А. Визначення доцільних обсягів використання енергозберігаючих технологій в житлово-комунальному господарстві / В.А. Денисов // Проблеми загальної енергетики: науковий збірник, Інститут загальної енергетики НАН України, - К.: 2012, вип

. 2 (29), с. 41-50.

148. Джалолов Т.В. Построение составных гладкосопряженных поверхностей по заданному дискретному линейному каркасу / Т.В. Джалолов // Прикладная геометрия и инженерная графика. - К. - вып. 25 - с. 59-61.

149. Дорошенко Ю.А. Геометрическое моделирование и алгоритмизация расчета криволинейных технических форм по их точечному каркасу. Автореф.дис. ... канд.техн. наук.- К.: КИСИ, 1988.- 18 с.

150. Дорошенко Ю.А. Гладкая окружностная аппроксимация плоских технических кривых / Ю.А. Дорошенко // Прикл. геом. и инж. графика. – К.: Будівельник, 1986. – Вып. 42. – с. 77–78.

151. Дорошенко Ю.А. Разработка подсистемы моделирования криволинейных обводов с помощью окружностных оптимизированных сплайнов / Ю.А. Дорошенко // Прикл. геом. и инж. графика. – К.: Будівельник, 1986. – Вып. 41. – с. 71–72.

152. Драганов Б. Х. Конструирование впускных и выпускных каналов двигателей внутреннего сгорания / Б. Х. Драганов, М.Г. Круглов, В.С. Обухова. – К., 1987. – 176 с.

153. Дубовский Г.И. Автоматизированное конструирование линейных обводов / Г. И. Дубовский // Прикладная геометрия и инженерная графика. – К.: Будівельник, 1985. – Вып. 39. – С. 65 – 67.

154. Евграфов А.Н. Аэродинамическое проектирование АТС. / А.Н. Евграфов, О.Х . Папашев и др. // «Автомобильная промышленность», № 6, 1991 - с.14-16.

155. Епифанова В.И. Компрессорные и расширительные турбомашины радиального типа / В.И. Епифанова. – М.: Изд-во МГТУ, 1998. – 624 с.

156. Ермаков А.В. К вопросу проектирования отвала лесного плуга / А.В. Ермаков // Моск. лесотехн. ин-т, 1976 - вып. 85 - с. 48-54.

157. Журавлев Д.А. Машинное проектирование оболочки отсека летательного аппарата / Д.А. Журавлев, О.Д. Марченко // Машинное проектирование, увязка и воспроизведение сложных деталей в авиастроении. - Иркутск, 1977 - с. 142-157.

158. Журавлев Д.А. О единой системе описания внешних форм летательного аппарата в процессе его создания / Д.А. Журавлев, О.Д. Марченко // Машинное проектирование, увязка и воспроизведение сложных деталей в авиастроении. - Иркутск. 1976 - с.41-44.

159. Завьялов Ю.С. Методы сплайн – функцій / Ю.С. Завьялов, Б.И. Квасов, В.Л. Мирошниченко - М.: Наука, 1980. - 352с.

160. Завьялов Ю.С. Сплайны в инженерной геометрии / Ю.С. Завьялов, В.А. Леус, В.А. Скороспелов - М.: Машиностроение, 1985.- 224 с.

161. Замалин С.М. Об одном способе аппроксимации контуров самолета / С.М. Замалин // Прикладная геометрия и инженерная графика. - К., 1975 - вып. 20 - с. 124-126.

162. Зиновьев Д.В. Основы моделирования в SolidWorks / Д.В. Зиновьев. - М. : ДМК-Пресс, 2017. - 240 с.

163. Золотова А.В. Згущення дискретного каркасу поверхні / А.В. Золотова // Прикладна геометрія та інженерна графіка. - К.: КНУБА, 2013. - Вип. 91.-С. 92-96.

164. Золотова А.В. Одновимірна кускова дискретна інтерполяція точок на площині / А.В. Золотова // Наукові нотатки. - Луцьк, 2008. — Вип. 22. -С. 125- 130.

165. Золотова А.В. Поверхні, яким належать вузли дискретних сіток при розподілі зовнішнього навантаження по гіпару / А.В. Золотова // Прикладна геометрія та інженерна графіка. - К.: КНУБА, 2010. - Вип. 84. - С. 187 - 191.

166. Золотова А.В. Систематизація поверхонь, яким належать вузли дискретних сіток при лінійному розподілі зовнішнього навантаження / А.В. Золотова // Геометричне та комп'ютерне моделювання. - Харків, 2009. - Вип. 25. - С. 159- 164.

167. Золотова А.В. Формування дискретного каркасу складеної поверхні при рівномірному розподіленні зовнішнього формоутворюючого навантаження / А.В. Золотова, О.І. Ахматшіна // Геометричне та комп'ютерне моделювання. - Харків, 2011.- Вип. 28. - С. 149- 154.

168. Зубков В.А. Об аппроксимации аэродинамических профилей выпуклыми полиномами / В.А. Зубков - Моск. авиац. ин-т. 1977 - вып. 414 - с. 24 -26.

169. Ибрагимов И.И. Методы интерполирования функций и некоторые их применения / И.И. Ибрагимов - М.: Наука, 1971. - 520 с.

170. Иванов Г.С. Анализ способов конструирования одномерных динамических обводов точек / Г.С. Иванов, К.К. Конакбаев - Моск.авиац.ин-т. 1971 - вып.229 - с.105-111.

171. Иванов Г.С. Конструирование технических поверхностей (математическое моделирование на основе нелинейных преобразований) / Г.С. Иванов — М.: Машиностроение, 1987. - 192 с.

172. Ивженко А.В. Способ конструирования двукаркасных поверхностей аффинных сечений / А.В. Ивженко – Моск. авиац. ин-т, 1980 - с. 73-75.

173. Иконников А.В. Функция, форма и образ в архитектуре / А.В. Иконников - М. : Стройиздат, 1986. - 288 с.

174. Калиткин Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин. – М.: Наука, 1978. – 512 с .

175. Камптсти Н. Аэродинамика компрессоров / Н. Кампсти; [пер. с англ.]. – М.: Мир, 2000. – 688 с.

176. Кардашевская Ю.Г. О возможности использования торсов в качестве лемешно-отвальных поверхностей / Ю.Г. Кардашевская – Моск. ин-т радиотехники, электроники и автоматики, 1969 - вып. 44 - с. 50-55.

177. Кириллов С.В. Уравнения поверхностей плоско-параллельного переноса / С.В . Кириллов - Моск. авиац. ин-т. 1974 – вып. 296 - с. 90-92.

178. Кобко В.П. Конструирование некоторых поверхностей с конгруэнтными параллельными сечениями / В.П. Кобко // Прикладная геометрия и.инженерная графика. - К., 1974 - вып. 18 - с. 49-51.

179. Ковалев С.Н. Геометрические свойства дискретных сетей [Текст] / С.М. Ковальов, В.О. Вязанкін, А.В. Кащенко, А.В. Сафронеев, А.И. Харченко // Прикладная геометрия и инженерная графика: сборник научных трудов. - Вып. 35. - К.: КИСИ, 1983, - С. 22 – 25.

180. Ковалев С.Н. Статико-геометрический способ формирования дискретных сетей / С.Н. Ковалев // Прикл.геом. и инж.граф. - К., 1989 - вып.48 - с.17-19.

181. Ковалев С.Н. Формирование дискретных моделей поверхностей пространственных архитектурных конструкций: автореф. дисс. доктора техн. наук - М., 1986. - 34 с.

182. Ковальов С.М. Дискретна двовимірна інтерполяція з першим порядком гладкості стикування порцій / С.М. Ковальов, А.В. Золотова // Прикладна геометрія та інженерна графіка.- К.: КНУБА, 2011.- Вип.87.- С.164-170.

183. Ковальов С.М. Дискретна інтерполяція нелінійними різницевими операторами / С.М. Ковальов // Прикладна геометрія та інженерна графіка.- К.: КНУБА, 2012,- Вип.89,- С.207-211.

184. Ковальов С.М. Локальні інтерполяції дугами клотоїди з другим порядком гладкості / С.М. Ковальов, С.І. Ботвіновська // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2002.– Вип. 71. – С. 31–33.

185. Ковальов С.М. Прикладна геометрія / С.М. Ковальов, В.М. Верещага. - Київ : ДІЯ, 2012. – 427 с

186. Ковальов С.М. Управління параметрами дискретної сітки за рахунок варіювання сил у в'язях / С.М. Ковальов // Прикладна геометрія та інженерна графіка: зб. наук, праць. - Вип. 56. - К.: КНУБА, 1994, - С. 13 - 16.

187. Ковальов С.М. Формування рівноланкової дискретно поданої кривої з заданою кривиною / С.М. Ковальов, О.М. Ковтун // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2000. – Вип. 67. – С. 33–35.

188. Кованцов М.І. Проективна геометрія / Кованцов М.І. // «Вища школа» - Київ, 1969.- 410 с.

189. Ковтун А.М. Специальные сплайны из полиномов третьей, четвёртой и пятой степени в геометрическом моделировании: монографія / А.М. Ковтун КНУБА - Київ, 2006 . - 25 с.

190. Ковтун О.М. Апроксимація ізометричним кубічним сплайном з керуючими точками, що належать кривій / О.М. Ковтун // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Праці / Таврійська державна агротехнічна академія. - Вип.4, т.24(25). - Мелітополь: ТДАТА. - с.72-76.

191. Ковтун О.М. Спеціальні поліноміальні сплайни третього, четвертого і п'ятого степенів в геометричному моделюванні: автореф. дис. канд. техн. наук - К., 2006. - 21 с.

192. Копелев С.З. Проектирование проточной части турбин авиационных двигателей / С.З. Копелев. – М.: Машиностроение, 1984. – 224 с.

193. Корабельский В.И. К вопросу геометрического анализа работы поверхностей почвообрабатывающих машин / В.И. Корабельский // Прикладная геометрия и инженерная графика. - К., 1973 - вып. 17 - с. 8-12.

194. Корабельский В.И. К вопросу конструирования поверхностей типа отвалов с учетом некоторых технологических требований / В.И. Корабельский, А.В. Павлов // Вестник КПИ, сер. хим. машиностроения и технологии, 1971 – вып. 8 - с. 151-153.

195. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1970. – 720 с.

196. Корнейчук Н.П. Сплайны в теории приближения / Н.П. Корнейчук - М.: Наука, 1984. - 352с.

197. Котов И. И. Графо-аналитические методы построения обводов / И.И. Котов. – Тр. / Ин-т Дружбы народов им. П. Лумумбы, 1963, т. 2, вып. 1., с. 37–46.

198. Котов И. И. Обвод кривых с общими кривизнами. / И.И. Котов, Е.Г. Утишев. // Тематический сборник научных трудов. М.: МАИ, 1977. – Вып. 414. – С. 20–21.

199. Котов И.И. Алгоритмы машинной графики / И.И. Котов - М.: Изд-во Моск, авиац. ин-та, 1975. - 94 с.

200. Котов И.И. Алгоритмы обводов кривых второго порядка / И.И. Котов - Таганрог, радиотехн. ин-т, 1976, вып. 46, с. 3-9.

201. Котов И.И. Аппроксимация пяти- и шестипараметрическими кривыми / И.И. Котов - Моск. авиац. ин-т, 1975, вып. 331, с. 39-49.

202. Котов И.И. Гладкие обводы поверхностей / И.И. Котов // Начертательная геометрия и черчение - Саратов, 1967 - с. 139-142.

203. Котов И.И. Графо-аналитические методы построения обводов / И.И. Котов - Ун-т Дружбы народов им.П.Лумумбы, 1963 - т.2, вып.1 - с.37-46.

204. Котов И.И. Коробовая линия эллипсов / И.И. Котов, В.А. Ермакова // Начертательная геометрия и черчение. - Саратов, 1967 - с. 169-176.

205. Котов И.И. О построении обводов технических форм / И.И. Котов // Всесоюзн . заочн. энерг. ин-т, 1958 - вып. 13 - с. 19-36.

206. Котов И.И. Обвод кривых с общими кривизнами / И.И. Котов, Е.Г. Утишев // Моск. авиац. ин-т, 1977 - вып.414 - с. 20-21.

207. Котов И.И. Обводы кривых второго порядка гладкости, составленные из дуг логарифмической спирали / И.И. Котов, Е.Г. Утишев // Тематический сборник научных трудов. – М.: МАИ, 1976. – Вып. 349. – С. 62–63.

208. Котов И.И. Основные методы построения двумерных обводов / И.И. Котов // Кибернетика графики и прикладная геометрия поверхностей. - М., 1968 - с. 25-29.

209. Котов И.И. Построение обводов с наперед заданными кривизнами на стыках / И.И. Котов // Материалы межзональной научно-методической конференции вузов Сибири , Урала и Дальнего Востока по прикладной геометрии и инженерной графике. - Новосибирск, 1976 - с. 55-60.

210. Крылов В. И. Вычислительные методы / В.И. Крылов, В.В. Бобков, П.И. Монастырский. – М.: Наука, 1976. – Т.1, 303 с.

211. Кузьмин В.Н. Комбинационный метод интерполяции гладких плоских контуров / В.Н. Кузьмин - Моск, авиац. ин-т, 1974 - вып. 296 - с. 185-187.

212. Кузьмин В.Н. Численный метод конструирования плоских обводов кривыми второго порядка с непрерывной первой и второй производными / В.Н. Кузьмин - Моск. авиац. ин-т, 1976 - Вып. 349 - с. 70-72.

213. Кунву Ли. Основы САПР CAD/CAM/CAE / Кунву Ли. - СПб.: Питер, 2004. — 560 с.

214. Курек Г.К. Некоторые вопросы конструирования минимальных поверхностей и решение на них метрических и позиционных задач: дис. ... канд. техн. наук - К.: КИСИ, 1975.- 157 с.

215. Кушнарев А.С. Проектирование рыхлительных рабочих органов культиваторов / А.С. Кушнарев, А.В. Бауков, А.В. Найдыш - К. : Изд-во УСХА, 1979. – 20 с.

216. Лаврентьев М.М. Некорректные задачи математической физики и анализа / М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, С.П. Шишацкий. - М.: Наука, 1980. - 286 с.

217. Лебедев В.О. Дискретна інтерполяція плоских дискретно представлених кривих ліній на основі кутів загущення: автореф. дис. канд. техн. наук - Мелітополь, 1994. -15 с.

218. Левенберг В.Д. Судовые турбоприводы: [справочник] / В.Д. Левенберг. – Л.: Судостроение, 1983. – 328 с.

219. Леус В.А. Гладкая окружностная аппроксимация кривых / В.А. Леус // Вычислительные системы. Новосибирск, 1970, вып. 38, с. 102–127.

220. Ли В.Г. Постановка задачи интерполяции точечно заданных пространственных кривых / В.Г. Ли, У.К. Кусебаев // Прикладная геометрия и инженерная графика. – К.: Будівельник, 1990. – Вып.50. – С. 108–110.

221. Логачев М.Я. Управление формой поверхностей оболочек, формируемых под действием нормального нагружения: автореф. дис. канд. техн. наук - К., 1995. - 18 с.

222. Лукина З.И. Некоторые вопросы геометрии сетчатых каркасов поверхностей переноса / З.И. Лукина - Ун-т Дружбы народов им. П.Лумумбы, 1967 - т. 26, вып. 3 - с. 48-57.

223. Малько С.В. Аппроксимация упорядоченного точечного обвода кривыми 2-го порядка / С.В. Малько // Прикладная геометрия и инженерная графика. - К., 1979 - вып. 27 - с. 41-42.

224. Марченко І.Ф. Дискретна аппроксимація за критерієм найменшого граничного відхилення: автореф. дис. канд. техн. наук - К., 1999.- 17 с.

225. Математика и САПР: В 2-х кн. Кн.1 Пер.с франц. / Шенен П., Коснар М., Гардан И. и др.- М.: Мир, 1989.- 204 с.

226. Мацулевич О.Є. Апроксимація дискретно представлених кривих у полярній системі координат за критерієм найменших граничних відхилень.: автореф. дис. канд. техн. наук - Мелітополь, 2003. - 16 с.

227. Мельник В.И. Конструирование циклических поверхностей с конгруэнтными линиями каркаса / В.И. Мельник // Прикладная геометрия и инженерная графика. - К., 1976 - вып. 21 - с. 165-168.

228. Мельник В.И. Пучки плоских конгруэнтных кривых, заданных огибающей, и конструирование составных поверхностей / В.И. Мельник, И.И. Коваленко // Прикладная геометрия и инженерная графика. - К., 1977 - вып. 24 - с. 113-115.

229. Михайленко В.Е. Конструирование оболочек из конгруэнтных кусков квадрик по наперед заданным условиям / В.Е. Михайленко, Ш. Мурадов // Прикладная геометрия и инженерная графика. - К., 1970 - вып. 10 - с. 28-34.

230. Михайленко В.Е. Конструирование форм современных архитектурных сооружений / В.Є. Михайленко, С.М. Ковальов - К.: Будівельник, 1978, -112 с.

231. Михайленко В.Е. О задании поверхности непрерывным каркасом алгебраических кривых / В.Е. Михайленко // Прикладная геометрия и инженерная графика . - К., 1970 - вып. II - с. 18-26.

232. Михайленко В.Е. О координатных способах конструирования поверхностей / В.Е. Михайленко, С.Н. Ковалев // Прикладная геометрия и инженерная графика. - К., 1975 - вып. 19 - с. 11—14.

233. Михайленко В.Е. Поверхности переноса, образованные кривыми второго порядка / В.Е. Михайленко, Л.З. Корниенко - Изв. высш. учеб, заведений. Строительство и архитектура, 1970 - вып. 8 - с. 76-81.

234. Михайленко В.Е. Формообразование большепролетных покрытий в архитектуре / В.Є. Михайленко, С.М. Ковальов, К.А. Сазонов - К.: Вища шк. Головное изд -во, 1987.- 189 с.

235. Михайленко В.Е. Формообразование оболочек в архитектуре / В.Е. Михайленко, В.С. Обухова, А.Л. Подгорный - К.: Будівельник, 1982.- 205 с.

236. Михнеев М.М. Графические методы определения кривизны плоских и пространственных кривых линий / М.М. Михнеев // Труды ВЗЭИ. – ВЗЭИ: 1958, – Вып. 13. – С. 63-67.

237. Михнеев М.М. Методы определения локальных характеристик кривых линий, заданных своими ортогональными проекциями / М.М. Михнеев // Известие Вузов МВО СССР / Машиностроение. – 1958, - №2. – С. 51-58.

238. Муфтеев В.Г. Моделирование кривых высокого качества на основе метода V-кривых / В.Г. Муфтеев // Прикладная геометрия: научн. журн. / Моск. авиационный ин-т (гос. техн. университет) «МАИ». – 2007. - № 19, вып. 9. – С. 24-74.

239. Надолинный В.А. Геометрическое конструирование кривых и поверхностей на ЭВМ / В.А. Надолинный // Геометрия САПР и автоматизированные системы производства деталей и узлов машин. Тезисы докл. - М., 1978 - ч. I - с. 72-75.

240. Надолинный В.А. Основы теории проективных рациональных поверхностей: автореф.дис. ... докт.техн.наук. М., МАДИ,1989.- 30 с.

241. Надолинный В.А. Способ конструирования поверхностей сложных технических форм / В.А. Надолинный, А.В. Павлов // Прикладная геометрия и инженерная графика. - К., 1975 - вып. 20 - с. 11-13.

242. Найдиш А.В. Геометричне моделювання дискретних точкових множин на основі перенесення до простору параметрів: автореф. дис ... доктор техн. наук. – К.: КДУБА, 1998. – 48 с.

243. Найдиш В.М. Використання барицентричних координат при локальному згущенні ділянок дискретно поданої кривої / В.М. Найдыш, Е.А. Гавриленко // Прикл. геом. та інж. графіка / Праці ТДАТА. – Мелітополь, 2003. – Вип. 4. – Т. 18. – с. 40–44.

244. Найдиш В.М. Дискретна інтерполяція [навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів III–IVрівнів акредитації] / В.М. Найдиш. – Мелітополь: Люкс, 2008. – 250 с.

245. Найдиш В.М. Дискретне диференціювання [навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів III–IV рівнів акредитації] / В.М. Найдиш, В.М. Верещага, А.В. Найдиш. – Мелітополь: Люкс, 2007. – 115 с.

246. Найдиш В.М. Додаткові можливості дискретної інтерполяції / В.М. Найдиш // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2000. – Вип. 67. – С. 11–15.

247. Найдиш В.М. Зміст та особливості варіативного дискретного геометричного моделювання / В.М. Найдиш, А.В. Найдиш // Праці Таврійської державної агротехнічної академії. – Мелітополь, 2006. – Вип. 4: Прикладна геометрія та інженерна графіка, т. 32 – С. 3–14.

248. Найдиш В.М. Можливості та перспективи розвитку дискретного геометричного моделювання / В.М. Найдиш // Прикладна геометрія та інженерна графіка: зб. наук, праць. - Вип. 56. - К.: КНУБА, 1994, - С. 11 – 13.

249. Найдиш В.М. Нові возможності дискретної інтерполяції / В.М. Найдиш // Прикл. геом. и инж. графика /Труды ТГАТА. – Мелитополь, 1999. – Вып. 4. – Т. 10. – с. 3–7.

250. Найдиш В.М. Основи прикладної дискретної геометрії / В.М. Найдиш, В.М. Верещага, А.В. Найдиш, В.М. Малкіна - Мелітополь: ВДП «Люкс», 2007. - 193 с.

251. Найдиш В.М. Основні поняття дискретного геометричного моделювання / В. М. Найдиш // Праці Таврійської державної агротехнічної академії. – Мелітополь: ТДАТА, 2001. – Вип. 4: Прикладна геометрія та інженерна графіка, т. 13.– С. 3–11.

252. Найдиш В.М. Особливості та перспективи в розвитку дискретно-параметричного методу геометричного моделювання кривих ліній та поверхонь / В.М. Найдиш, В.М. Верещага // Прикл. геом. та інж. графіка. – К.: КДТУБА, 1996. – Вип. 61. – с . 19–21.

253. Найдиш В.М. Про гладкість дискретної інтерполяції / В.М. Найдиш // Прикладна геометрія та інженерна графіка: зб. наук, праць. - Вип. 73. - К.: КНУБА, 2003. - С. 8- 12.

254. Найдыш В.М. Актуальные проблемы геометрического моделирования / В.М. Найдыш // Сб. трудов III Международ. научно-практич. конференции. "Современные проблемы геометрического моделирования" 3–5 сентября 1996, – Мелитополь: ТГАТА, 1996. – ч. 1 – с. 3–4.

255. Найдыш В.М. Дискретная интерполяция алгебраическими полиномами / В.М. Найдыш, В.М. Верещага // Рукопись деп. в ВИНИТИ, 23.12.88 В. М. №8932 – В 88.

256. Найдыш В.М. Дискретная интерполяция табличных функцій / В.М. Найдыш // Прикладная геометрия и инженерная графика. - К.,1989 - вып. 48 - с. 19-21.

257. Найдыш В.М. Дискретное моделирование плоской кривой, заданной рядом двукратных точек / В.М. Найдыш, В.М. Верещага // Прикл. геом. и инж. графика, К., 1993, Вып. 55, с. 25–28.

258. Найдыш В.М. Интерполирование на основе дискретных представлений функцій / В.М. Найдыш // Прикладная геометрия и инженерная графика - К., 1991 - вып. 51 - с. 8-12.

259. Найдыш В.М. Использование нормаль-отображений в САПР поверхностей / В .М. Найдыш // Повышение эффективности производства в машиностроении на основе применения технологического оборудования с ЧПУ. Тезисы докл. - К., 1980 – с. 34-36.

260. Найдыш В.М. Конструирование поверхностей и обводов отсеков интегральных поверхностей / В.М. Найдыш // Укр. с-х. акад. - К., 1980 - вып. 234 - с. 136-138.

261. Найдыш В.М. Конструирование поверхностей и обводов при помощи нормаль-отображений / В.М. Найдыш // Прикладная геометрия и инженерная графика. - К ., 1981 - вып. 32 - с. 52-54.

262. Найдыш В.М. Конструирование поверхностей из многопараметрических множеств линий и поверхностей / В.М. Найдыш // Укр. с.-х. акад. – К., 1980 - вып. 234 – с. 141-144.

263. Найдыш В.М. Методы и алгоритмы формирования дискретных геометрических моделей / В.М. Найдыш // Тез. докл. международной научно-практической конференции. «Математическое моделирование явлений и процессов в с.х. производстве» - 17-19 августа 1994, Мелитополь - т.2 - с. 6-9.

264. Найдыш В.М. Методы и алгоритмы формирования поверхностей и обводов по заданным дифференциально-геометрическим условиям. Автореф.дис…докт.техн.наук.-М.:МАИ,1983.-33с.

265. Найдыш В.М. Моделирование кривых линий на основе дискретной интерполяции. / В.М. Найдыш // Прикл.геом.и инж.граф. - К., 1990 - вып. 50 - с. 13-17.

266. Найдыш В.М. Моделирование линейных обводов с неосциллирующим характером изменения кривизны / В.М. Найдыш, В.М. Верещага, В.М. Брустинов, А.В. Найдыш // Мелитопольский ин-т мех.с.х. - Мелитополь,1993 -10с.: Рус.-Деп.в ГНТБ Украины, 07.06.93 N1121- А.В. -Ук93.

267. Найдыш В.М. Направления развития теории дискретного геометрического моделирования / В.М. Найдыш // Геометричне моделювання, інженерна та комп'ютерна графіка. – Харьков, 1993. – С.7.

268. Найдыш В.М. Перспективы развития геометрического моделирования / В.М. Найдиш // Прикладна геометрія та інженерна графіка: зб. наук, праць. - Вип. 60.-К.: КНУБА, 1996,-С. 15-19.

269. Найдыш В.М. Последовательное сгущение точечного каркаса поверхности / В .М. Найдыш, В.М. Верещага, В.М. Брустинов, А.В. Найдыш // Тезисы междунар. научно-метод. конф. «Геометричне моделювання. Інженерна та комп.графіка» - Львів, 1994 - с. 16 -17.

270. Найдыш В.М. Проблемы численного интегрирования / В.М. Найдыш, В.М. Верещага // Прикладная геометрия и инжен.графика - К., 1994 - Вып.57 - с.21-24.

271. Найдыш В.М. Сгущение 4-угольных ячеек дискретного точечного каркаса поверхности / В.М. Найдыш, В.М. Верещага, В.М. Брустинов, А.В. Найдыш // Тезисы междунар. научно-метод. конф. «Геометричне моделювання. Інженерна та комп. графіка» - Львів, 1994 - с.17-18.

272. Найдыш В.М. Теоретические основы дискретного геометрического моделирования / В.М. Найдиш // Прикладна геометрія та інженерна графіка: зб. наук, праць. - Вип. 58. - К.: КНУБА, 1995, -С. 26- 29.

273. Найдыш В.М. Формирование дифференциальных характеристик в узлах пространственной кривой / В.М. Найдыш, В.М. Верещага, В.М. Брустинов, А.В. Найдыш // Мелитопольский ин-т мех.с.х., Мелитополь, 1993,- 13с.: Деп.в ГНТБ Украины,22.12.93 N2531-Ук93.

274. Несвідомін В.М. Комп'ютерні моделі синтетичної геометрії: автореф. дис.… докт. техн. наук: 05.01. 01 / Несвідомін Віктор Миколайович. – К.: КНУБА, 2008. – 54 с.

275. Николаевский В.Г. Конструирование поверхности по двум сечениям / В.Г. Николаевкий - Моск. авиац. ин-т, 1971 - вып. 229 - с.46- 49.

276. Обухова В.С. Конструктивно-прикладная теория нелинейных осевых отображений и ассоциирование с ними алгебраических поверхностей: дисс. ... доктора техн. наук - К., 1991.-573 с.

277. Обухова В.С. О конструировании отвальной поверхности с использованием ЭВМ / В.С. Обухова, А.Л. Мартиросов // Прикладная геометрия и инженерная графика. - К., 1978 - вып. 25 - с. 83-87.

278. Обухова В.С. Об аппроксимации лемешно-отвальных поверхностей / В.С. Обухова, А.Л. Мартиросов // Прикладная геометрия и инженерная графика. - К., 1976 - вып. 21 - с. 145-150.

279. Обухова В.С. Параметризация и каноническая форма уравнения торса Т34/ В. С. Обухова // Прикл. геометрия и инж. графика: республ. межвед. научн.-техн. сб. - К.: Будівельник, 1980. - Вып. 30. - С. 17-20.

280. Обухова В.С. Прикладная геометрия поверхностей отвального типа / В.С. Обухова // Республиканская конференция по прикладной геометрии и инженерной графике. Тезисы докл. - К., 1976 - с. 76-78.

281. Обухова В.С. Применение метода сложения выпуклых кривых к конструированию каналовых поверхностей / В.С. Обухова, О.В. Василевский // Прикладная геометрия и инженерная графика. - К., 1978 - вып. 26 - с. 15-18.

282. Обухова В.С. Существенные параметры развертывающихся поверхностей лемешно-отвального типа / В.С. Обухова, В.Я. Булгаков // Прикладная-геометрия и инженерная графика. - К., 1974 - вып. 18 - с. 21-25.

283. Осипов В.А. Алгоритм построения многопараметрических плоских обводов / В.А. Осипов // Кибернетика, графики и прикладная геометрия поверхностей. - М., 1968 - с. 52-59 - (Тр./Моск. авиац. ин-т).

284. Осипов В.А. Аналитический метод конструирования и расчета плоских обводов порядка гладкости т в виде единой функции с наперед заданным распределением знака кривизны в любой точке кривой / В.А. Осипов, В.И. макутов // Моск. ин-т электрон. техники, 1968 - вып. I - с. 184-187.

285. Осипов В.А. Машинные методы проектирования непрерывно-каркасных поверхностей / В.А. Осипов - М.: Машиностроение, 1979. - 248с.

286. Осипов В.А. Непрерывно-каркасные поверхности как результат комплекса мгновенных преобразований / В.А. Осипов // Прикладная геометрия и инженерная графика. - К., 1573 - вып. 16 - с. 32-36.

287. Осипов В.А. Об одном методе аппроксимации и проектирования аэродинамических контуров / В.А. Осипов // Моск, авиац. ин-т, 1973 - вып. 268 - с. 70-72.

288. Осипов В.А. Параметризация плоских обводов / В.А. Осипов // Моск, ин-т радиотехники, электроники и автоматики, 1969 - вып. 44 - с. 102-107.

289. Осипов В.А. Проектирование непрерывных каркасов поверхностей с наперед заданными дифференциальными свойствами / В.А. Осипов // Моск. ин-т радиотехники, электроники и автоматики, 1972 - вып. 63 – с. 47-53.

290. Основы проектирования турбин авиадвигателей / [А.В. Деревянко, В.А. Журавлев, В.В. Зикеев и др.]; [под ред. С.З. Копелева]. М.: Машиностроение, 1988. – 328 с .

291. Павлов А.В. Графоаналитические способы конструирования поверхностей сложных форм. Автореф.дис. ... докт.техн.наук. М., 1967.- 36 с.

292. Павлов А.В. К вопросу о построении обводов технических форм с помощью кривых 2-го порядка / А.В. Павлов // Прикладная геометрия и инженерная графика. -К.: КИСИ, 1965. - Вып. 1.- С. 110-118.

293. Павлов А.В. Каркасные поверхности в голономных кибернетических системах / А.В. Павлов // Моск. авиац. ин-т, 1970 - вып.195 - с. 16-20.

294. Павлов А.В. Конструирование некоторых сопрягающих поверхностей / А.В. Павлов // Прикладная геометрия и инженерная графика. - К., 1967 - вып..5 - с. 78-82.

295. Павлов А.В. Параметризация линейных обводов и примеры ее применения в конструировании поверхностей / А.В. Павлов, С.Н. Грибов, В.В. Ванин // Прикладная геометрия и инженерная графика. – К.: КИСИ, 1993. – Вып. 55. – С. 10–14.

296. Патент на корисну модель 91024 Україна, МПК (2014.01) F16S 5/00. Спосіб моделювання лінійних елементів каркаса складних поверхонь, які обмежують технічні вироби, що взаємодіють із середовищем / Гаврилєнко Є. А., Холодняк Ю. В.; заявник і патентовласник Таврійський державний агротехнологічний університет. — № u201311250; заявл. 23.09.2013; опубл. 25.06.2014, Бюл. № 12.

297. Підгорний О.Л. Геометричне моделювання надходження сонячної радіації на різні поверхні / О.Л. Підгорний // Прикл. геометрія та інж. графіка: збірник статей. -К.: КІБІ, 1993. -Вип. 54. - С. 10-12.

298. Підгорний О.Л. Система синтетично-конструктивних способів задання лінійчатих множин в прикладній геометрії / О.Л. Підгорний // Наукові нотатки: міжвуз. зб. - Луцьк: ЛДТУ, 2008. - Вип. 22, ч. 2: Сучасні проблеми геометричного моделювання. - С. 250-415.

299. Пилипака С.Ф. Конструювання поверхонь та їх неперервне згинання в кінцеві форми на основі управління натуральними параметрами: Автореф. … дис. д–ра техн. наук. – К.: КНУБА, 2000. – 38 с.

300. Плоский В.А. Формообразование оболочек на основе реализации инвариантной конструктивной модели геометрических преобразований: автореф. дис. канд. техн. наук. - К., 1986. - 16 с.

301. Подгорный А.Л. Вопросы конструирования сопрягающих поверхностей выделением из множеств прямых и кривых линий / А.Л. Подгорный, И.А. Скидан // Прикладная геометрия и инженерная графика. - К., 1968 - вып. 7 - с. 44-53.

302. Подгорный А.Л. Геометрическое моделирование пространственных конструкций : дис. ... доктора техн. наук. - К.: КИСИ, 1975.-371 с.

303. Подгорный А.Л. К вопросу конструирования циклических поверхностей оболочек / А.Л. Подгорный, А.П. Червоненко // Прикладная геометрия и инженерная графика. - К., 1974 - вып. 18 - с. 16-19.

304. Подгорный А.Л. Ключевые способы задания множеств линий и конструирование поверхностей / А.Л. Подгорный // Прикладная геометрия и инженерная графика. - К., 1969 - вып. 9 - с. 6-21.

305. Подгорный А.Л. Конструирование гладко-сопряженных поверхностей выделением из множеств составных линий / А.Л. Подгорный, В.И. Мельник // Прикладная геометрия и инженерная графика. - К., 1973 - вып. 17 - с. 16-19.

306. Подгорный А.Л. Конструирование поверхностей оболочек по заданным условиям на основе выделения их из конгруэнций прямих / А.Л. Подгорный // Прикладная геометрия и инженерная графика. - К., 1969 - вып, 8 - с. 17-38.

307. Подкорытов А.Н. Построение гладких окружностей обводов для узлов интерполяции с заданными в них нормалями и радиусами кривизны / А.Н. Подкорытов, А. А. Донис // Прикладная геометрия и машиностроение на базе ЭВМ. - Новосибирск, 1978 - с. 21-31.

308. Поликарпов Ю.В. Конструирование технических кривых и поверхностей: учеб. пособие / Ю. В. Поликарпов, А. П. Зелев, В. В. Мартынов. – Уфа: Уфимск. гос. авиац. ун-т., 1994. – 89 с.

309. Полещук Н.Н. Самоучитель AutoCAD 2016 / Полещук Н.Н. - СПб: БХВ-Петербург, 2016. - 464 с.

310. Прикладна геометрія та інженерна графіка / С.М. Ковальов, М.С. Гумен, С.І. Пустюльга [і др.] – Луцьк: ЛДТУ, 2006. – Вип. 1. – 256 с.

311. Принс М.Д. Машинная графика и автоматизация проектирования / М.Д. Принс - М.: Советское радио, 1975. - 232 с.

312. Пршедромирский Ю.М. Воспроизведение поверхностей, заданных кинематическим способом / Ю.М. Пршедромирский, А.В. Павлов // Прикладная геометрия и инженерная графика. - К., 1977 - вып. 23 - с. 7-9.

313. Пугачов Є.В. Дискретне геометричне моделювання скалярних і векторних полів стосовно будівельної світлотехніки: дис.... докт. техн. наук: 05.01. 01 / Пугачов Євген Валентинович. – К.: КНУБА, 2001. – 353 с.

314. Ратушняк Г.С. Управління проектами енергозбереження шляхом термореновації будівель / Г.С. Ратушняк, О.Г. Ратушняк // Навч. Пос. – Вінниця: ВНТУ, 2006 – 106с.

315. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. Учебник. — 3-е издание. М., ГИТТЛ, 1950. — 428 с.

316. Роджерс Д. Математические основы машинной графики: пер. с англ. / Д. Роджерс, Дж. Адамс - М.: Машиностроение, 1980. - 240 с.

317. Рожкова Л.И. Конструирование пространственных кривых линий с различными видами их определителей / Л.И. Рожкова // Прикладная геометрия поверхностей. – М.: МАИ, 1964. – С.72-80.

318. Романовський Г.Ф. Теорія та розрахунок парових і газових турбін: [навч. посібник] / Г.Ф. Романовський, О.Я. Іпатенко, В.М. Патлайчук. – Миколаїв: УДМТУ, 2002 . – 292 с.

319. Рыжов Н.Н. Алгоритмы перехода от конструктивно-кинематического задания поверхности к аналитическому / Н.Н. Рыжов // Ун-т Дружбы народов им. П. Лумумбы, 1971 - т. 53, вып. 3 - с. 17-25.

320. Рыжов Н.Н. Аппроксимация сложных поверхностей развертывающимися поверхностями / Н.Н. Рыжов // Всесоюз. Заочн. Энерг. ин-т, 1958 - вып. 13 - с. 5-18.

321. Рыжов Н.Н. Каркасная теория задания и конструирования поверхностей / Н.Н. Рыжов // Труды УДН.Т.П., Сер. Математика. Вып.4. - М., 1967, -С. 3 – 13.

322. Рыжов Н.Н. О теории каркаса / Н.Н. Рыжов // Труды УДН.Т.П., Начертательная геометрия, Вып. 1. - М., 1963, - С. 9 – 19.

323. Рыжов Н.Н. Параметрическая геометрия / Н.Н. Рыжов - М.: МАДИ, 1988.- 560 с.

324. Самарский А.А. Численные методы / А.А. Самарский, А.В. Гулин - Москва: Наука, 1989. -428 с.

325. Самостян В.Р. Вплив геометричних вимог на процеси дискретного моделювання криволінійних об’єктів будівництва: автореф. дис. канд. техн. наук., КНУБА - К., 2011. - 20 с.

326. Самчук П.В. Управление формой дискретно заданных поверхностей в задачах паркетирования оболочек.: автореф. дис. канд. техн. наук. - К., 1991. - 16 с.

327. Сафронеев И.В. Формообразование поверхностей оболочек из унифицированных элементов с учетом плоскостной аппроксимации сетей паркетирования: автореф. дис. канд. техн. наук. - К., 1987. - 17 с.

328. Семенков О.И. Теоретические основы аппроксимации линий на базе параметрических сплайнов / О.И. Семенков, Е.А. Ефимов // Геометрия САПР и автоматизированные системы производства деталей и узлов машин. Тезисы докл. - М.,

1978 - ч. I – с. 32-33.

329. Сироткин Я.А. Аэродинамическии расчет лопаток осевых турбомашин / Я.А. Сироткин. – М.: Машиностроение, 1972. – 448 с.

330. Сластин Ю.В. Конструирование обводов кубических полиномов без точек перегиба / Ю.В. Сластин // Материалы межзональной научно-методической конференции вузов Сибири, Урала и.Дальнего Востока по прикладной геометрии и инженерной графике, Омск, 1975, вып. 2, с. 136-140.

331. Сластин Ю.В. Обводы кубических кривых в параметрической форме / Ю.В. Сластин // Моск. авиац. ин-т, 1974 - вып. 296 - с. 179-181.

332. Спиринцев В.В. Дискретная интерполяция дискретно представленных кривых линий на основе заданного закона изменения угловых параметров: дисс. … канд. техн. наук: 05.01.01 / Спиринцев Вячеслав Васильевич. – Мелитополь, 2007. – 192 с.

333. Спиринцев Д.В. Дискретная интерполяция на основе вариативного формирования разностных схем угловых параметров: дисс. … канд. техн. наук: 05.01.01 / Спиринцев Дмитрий Васильевич. – Мелитополь, 2010. – 214 с.

334. Степанов Г.Ю. Гидродинамика решеток турбомашин / Г.Ю. Степанов. – М.: Физматгиз, 1962. – 512 с.

335. Стечкин С.Б. Сплайны в вычислительной математике / С.Б. Стечкин, Ю.Н. Субботин- М.: Наука, 1976.- 248 с.

336. Суванкулов І.Ш. Формування двопоясних решітчастих структур із заданими метричними властивостями стосовно до архітектурної практики.: автореф. дис. канд. техн. наук - К., 1989. - 16 с.

337. Суслин В.П. Формирование математических моделей поверхностей кузовов автомобилей / В.П. Суслин // Вычислительная техника в машиностроении.- Минск: АН БССР, ИТК, 1969 - с.40-47.

338. Тевлин А.М. Дифференциально-геометрические характеристики поверхности переноса с каркасом коник / А.М. Тевлин С. Давлеталиев В.А. Филиппенков // Материалы межзональной научно-методической конференции вузов Сибири, Урала и Дальнего Востока по прикладной геометрии и инженерной графике. - Новосибирск, 1976 - с. 20-25.

339. Тевлин А.М. Кинематический методы конструирования и исследования развертывающихся поверхностей / А.М. Тевлин – Тр./Моск. авиац. ин-т, 1970 - вып. 213 - с. 5-12.

340. Тевлин А.М. Конструирование каркасных поверхностей [Текст] / А.М. Тевлин // Труды МАИ. - М.: 1975, - С. 90 – 93.

341. Тевлин А.М. Конструирование непрерывных каркасов обводов линейчастых поверхностей методом кинематических диаграмм / А.М. Тевлин Э.Э. Манажеров – Тр. /Моск. авиац. ин-т, 1970 - вып. 213 - с. 59-68.

342. Тевлин А.М. Методы нелинейных отображения и их технические приложения / А.М. Тевлин – М.: Изд-во Моск. Авиац. ин-та, 1971. – 136 с.

343. Тевлин А.М. Об одном кинематическом способе образования линейчастых поверхностей / А.М. Тевлин // Труды Московского научно-методического семинара по начертательной геометрии и инженерной графике. - М., 1963 - вып. 2 - с. 95-100.

344. Тевлин А.М. Перспектива развития и взаимосвязи методов механики и прикладной геометрии поверхностей / А.М. Тевлин // Вопросы машинного проектирования и инженерной графики. -М.: МАИ, 1980, - С. 7-10.

345. Тевлин А.М. Проблемы нелинейного моделирования / А.М. Тевлин // Моск. Авиац. ин-т, 1975 - вып. 331 - с. 94-101.

346. Тевлин А.М. Пространственная интерполяция квазивинтовыми поверхностями / А.М. Тевлин В.И. Нартя // Моск. Авиац. ин-т, 1975 - вып. 331 - с. 108-111

.

347. Тихонов А.Н. Методы решения некорректных задач: 2-е изд. / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин.– М.: Наука, 1979. – 285 с.

348. Ткаченко А.В. Построение поверхности, эквидистантной к точечному каркасу / А.В. Ткаченко // Прикладная геометрия и инженерная графика: сборник научных трудов. - Вып. 4. - К.: КИСИ, 1966, - С. 107-115.

349. Топунов А.М. Теория судовых турбин / А.М. Топунов. – Л.: Судостроение, 1985. – 472 с.

350. Устенко С.А. Геометричне моделювання кривих ліній із заданою кривиною в граничних точках / С.А. Устенко, С.В. Діданов, О.Ю. Агарков // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2011. – Вип. 87. – С. 404-409.

351. Устенко С.А. Геометричне моделювання плоских кривих із застосуванням елементів кривини / С.А. Устенко // Праці Харківського державного університету харчування та торгівлі. "Геометричне та комп'ютерне моделювання". – Х.: ХДУХТ, 2009. – Вип. 22. – С. 82-87.

352. Устенко С.А. Геометричне моделювання скелетної лінії симетричних і асиметричних профілів лопаток осьових компресорів / С.А. Устенко // Праці Харківського державного університету харчування та торгівлі. "Геометричне та комп'ютерне моделювання". – Х.: ХДУХТ, 2010. – Вип. 27. – С. 51-56.

353. Устенко С.А. Комп'ютерна реалізація методів геометричного моделювання плоских кривих ліній із застосуванням графіків розподілу їх кривини / С.А. Устенко // Збірник наукових праць "Науковий потенціал вищої школи". – Миколаїв: МПІ, 2008. – С. 73-77.

354. Устенко С.А. Моделювання кривої із застосуванням кубічного закону розподілу її кривини / С.А. Устенко // Вестник Херсонского национального технического университета. – Херсон: ХНТУ, 2008. – Вып. 2(31). – С.480–484.

355. Устенко С.А. Побудова перехідної лінії в плоскому перерізі лопатки осьового компресора / С.А. Устенко // Праці Харківського державного університету харчування та торгівлі. "Геометричне та комп'ютерне моделювання". – Х.: ХДУХТ, 2011. – Вип. 28. – С. 57-61.

356. Устенко С.А. Геометрична теорія моделювання криволінійних форм лопаткових апаратів турбомашин з оптимізацією їх параметрів: автореф. на здобуття наук. ступеня доктора. техн. наук: спец. 05.01.01 / С.А. Устенко. – К., 2013. – 38 с.

357. Утишев Н.Г. Обводы полос второго порядка гладкости / Н.Г. Утишев // Материалы межзональной научно-методической конференции вузов Сибири, Урала, Дальнего Востока по прикладной геометрии и инженерной графике. - Новосибирск, 1976 - с. 112-115.

358. Утишев Н.Г. Алгоритмы машинного проектирования аэродинамических контуров / Н.Г. Утишев // Геометрия САПР и автоматизированные системы производства деталей и узлов машин: Тезисы докл. - М., 1978 - ч. I - с. 21-24.

359. Фесан О.М. Геометрическое моделирование и автоматизация проектирования трансформируемых складчатых структур: автореф. дис. канд. техн. наук - К., 1982. - 16 с.

360. Фирсов В.А. Воспроизведение обводов самолета в системе автоматизированного проектирования / В.А. Фирсов - М.: МАИ, 1978.- 71 с.

361. Фокс А. Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве: пер. с англ. / А. Фокс, М. Пратт – М.: Мир, 1982. – 304 с.

362. Фоли Дж. Основы интерактивной машинной графики. В 2-х кн., кн.1, пер.с англ. / Дж. Фоли, А. ван Дем. - М., Мир, 1985.- 368 с.

363. Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений: Пер. с англ. / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер - М.: Мир, 1980.- 279 с.

364. Харченко А.И. Формообразование пневмооболочек сложной конфигурации и автоматизация процессов их паркетирования и раскроя: автореф. дис. канд. техн. наук. - К ., 1979. - 18 с.

365. Хегай Ф. Вопросы конструирования и исследования некоторых видов сетчатых каркасов: автореф. дис. канд. техн. наук. - М., 1968. - 17 с.

366. Холодняк Ю.В. Моделирование одномерных обводов по заданным условиям / Ю. В. Холодняк, Е. А. Гавриленко, А. В. Дубинина // Сучасні проблеми моделювання: наук. фах. видання / Мелітоп. держ. пед. ун-т ім. Б. Хмельницького. – Мелітополь, 2017. – Вип. 9. – С. 162-166.

367. Холодняк Ю.В. Формирование обводов с заданными геометрическими свойствами / Ю. В. Холодняк, Е. А. Гавриленко, А. В. Дубинина // Сучасні проблеми моделювання: наук. фах. видання / Мелітоп. держ. пед. ун-т ім. Б. Хмельницького. – Мелітополь, 2018. – Вип. 11. – С. 165-169.

368. Холодняк Ю.В. Визначення діапазонів положення дотичних при моделюванні монотонної дискретно представленої кривої / Ю.В. Холодняк // Прикладна геометрія та інженерна графіка: міжвід. наук.–техн. зб. / КНУБА. – К., 2012. – Вип. 90. – С.367–371.

369. Холодняк Ю.В. Визначення обмежень при моделюванні дискретно представленої кривої із монотонною змінною кривини / Ю.В. Холодняк, В.А. Дідур // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету / ТДАТУ. – Мелітополь, 2012. – Вип. 4: Прикладна геометрія та інженерна графіка, т. 55. – С.224–227.

370. Холодняк Ю.В. Моделирование дискретно представленных кривых с монотонным изменением кривизны / Ю.В. Холодняк, А.В. Найдыш // Технические науки – от теории к практике: сб. статей ... науч.–практ. конф. (октябрь, 2013 г., Новосибирск) / СибАК. – Новосибирск, 2013. – С.13–18.

371. Холодняк Ю.В. Формування геометричних характеристик при моделюванні монотонної дискретно представленої кривої / Ю.В. Холодняк, Є.А. Гавриленко // Прикладна геометрія та інженерна графіка: міжвід. наук.–техн. збірник / КНУБА. – К., 2013. – Вип. 91. – С.292–296.

372. Холодняк Ю.В. Формування ділянки дискретно представленої кривої із монотонною зміною кривини / Ю.В. Холодняк // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету / ТДАТУ. – Мелітополь, 2013. – Вип. 4: Прикладна геометрія та інженерна графіка, т. 57. – С.211–216.

373. Холщевников К.В. Теория и расчет авиационных лопаточных машин / К.В. Холщевников, О.Н. Емин, В.Т. Митрохин. – М.: Машиностроение, 1986. – 432 с.

374. Хомченко А.Н. Модифікація сплайнів на основі поліномів С.Н. Бернштейна / А.Н. Хомченко, Г.Я. Тулученко // Праці Таврійської державної агротехнологічної академії .- Мелітополь: ТДАТА, 2004.- Вип.4.- Т.24.- С.57-61.

375. Цвицинский И.В. Алгоритмы аппроксимации и изображения кривых линий и поверхностей / И.В. Цвицинский, Б.Н. Чернов - Кишинев: Штиинца, 1979. - 102 с.

376. Цвицинский И.В. Расширенные В-сплайны / И.В. Цвицинский // Прикладная геометрия и инженерная графика. - К., 1981 - вып. 31 - с. 20-22.

377. Чудинов А.В. Теоретические основы инженерной графики. – Новосибирск: НГТУ, 2010. – 396 с.

378. Шерстюк А.Н. Радиально-осевые турбины малой мощности / А.Н. Шерстюк, А.Е. Зарянкин. – М.: Машиностроение, 1976. – 208 с.

379. Шубенко-Шубин Л.А. Оптимальное проектирование последней ступени мощных паровых турбин / Л.А. Шубенко-Шубин, А.А. Тарелин, Ю.П. Антипцев. – К.: Наукова думка, 1980. – 222 с.

380. Шуригіна Н.Ю. Узагальнений апарат керування формою кривих скінчених сум в конструюванні лінійних обводів.: автореф. дис. канд. техн. наук. - К., 1999. -17 с.

381. Щербина В.М. Геометрическое моделирование спиралеобразных дискретно представленных кривых линий. Дис. … канд. техн. наук. / В.М. Щербина. – Мелитополь, 2002. – 191 с.

382. Якунин В.И. Алгоритм конструирования обвода с гладкостью по радиусу кривизны, состоящего из дуг кривых второго порядка / В.И. Якунин, Д.И. Овласюк // Моск. авиац. ин-т, 1976 - вып. 349 - с. 56-58.

383. Якунин В.И. Задание плоского обвода полиномами форсайта / В.И. Якунин // Моск. авиац. ин-т, 1972 - вып. 243 - с. 66-68.

384. Якунин В.И. К вопросу об аппроксимации дискретной дуги окружностями / В .И. Якунин // Моск. Авиац. ин-т, 1971 - вып. 229 - с. 81-85.

385. Bezier P. E. Numerical Control; Mathematics and Applications; Tohn Wiley /Sons, London-New York, 1972.

386. Gordon W. I. and Riesenfeld R. F. Bernstein-Bezier methods for the computer-aided design of free form curves and surfaces, I. ACM, 1974, vol 21, N2, pp. 293–310.

387. Bezier P.E. Semi–automatic system for defining free–form curves and surfaces / P. E. Bezier, S.Sioussiou // Computer Aided Design. – 1983. – Vol.15, № 2. – P. 148–159.

388. Chang G. Mathematical foundations of Bezier's technique / G.Chang, J.Wu // Computer Aided Design. – 1981. – Vol.13, № 3. – P. 133–136.

389. Lawson C.L. Software for C surface interpolation / C.L. Lawson // Mathematical software. – New York, 1977. – P. 161–194.

390. Schweikert D.G. An interpolating curve using a spline in tension / D.G._Schweikert , J. Math // Physics. – 1966. – № 45.– 301 p.

391. Coons S. A. 1967, Surfaces for Computer Aided design of Space Forms, Report MAC-TR-41, Project MAC, M. I. T.

392. Coons S. A. 1977, Modification of the Shape of Piecewise Curves, Computer-Aided Design 9, 3, 178-180.

393. Bezier P.E.Numerical Control; Mathematics and Applications; Tohn Wiley/ Sons, London-New York, 1972.

394. Bezier P.E., Sioussiou S. Semi-automatic system for defining free-form curves and surfaces. - CAD, March 1983, vol. 15, N 2. P.148-159.

395. Dietz D. Interpolation with cubic spirals / Dietz D., Piper B. // Computer Aided Geometric Design, 2004. Vol. 21, Issue 2. - P. 165-180.

396. Forrest A.R. Interactive interpolation and approximation by Bezier polynomials [Текст] / Forrest A.R. // Computer Journal, 1972, v.15 – p. 71-79.

397. Kovalev S. Main Directions in the Development of Discrete Applied Geometry of Curves and Surfaces [Текст] / Kovalev S., Ivanova L. // The applied geometry and engineering graphics. - Kyiv, 2002, v.70, - P. 67 - 71.

398. Meek D. Constrained interpolation with rational cubics [Текст] / Meek D., Ong B., Walton D. // Computer Aided Geometric Design, 2003. Vol. 20, Issue 5. - P.253 - 275.

399. Schoenberg I.J. Cardinal Spline Interpolation [Текст] / Schoenberg I.J. // CBMS Vol. 12, SIAM. - Philadelphia, 1973. - P. 81 – 325.

400. Zimmer A. Konstruiren mittels Komputer im Automobilbau, Automobile Rev. 1971, s. 95-106.

401. Gavrilenko E. A. Determine of geometrical characteristics ranges of the discretely presented curve with law of curvature change / E. A. Gavrilenko, V. V. Gnatushenko, Yu. V. Kholodnyak // Системні технології: регіон. межвуз. зб. наук. пр. / НМетАУ. – Дніпропетровськ, 2013. – Вип. 1(84). - С.156-161.

402. Gavrilenko E. A. Discretely geometrical modelling of one-dimensional contours with a regular change of differential-geometric characteristics [Електронний ресурс] / E. A. Gavrilenko, Yu. V. Kholodnyak //

Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines (Dynamics). – 2014. – P. 1-5. Режим доступу: http://ieeexplore.ieee.org/xpl/articleDetails.jsp?arnumber=7005654.

403. Gavrilenko E. A. Variative modelling of one-dimensional contours according to the given conditions / E. A. Gavrilenko, Y. V. Kholodnyak // Knowledge is power, power is knowledge : the international multidisciplinary congress (Vienna, Austria, 27 июля 2015 г.) / International Scientific Association "Science & Genesis". – Prague, 2015. – С. 267-270.

404. Havrylenko Y. Development of the method for the formation of one-dimensional contours by the assigned interpolation accuracy / Y. Havrylenko, Y. Kholodniak, O. Vershkov, A. Naidysh // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2018. – Vol. 1, Iss. 4(91). – P. 76-82.

405. Light R. Modification of geometric-models through variational geometry / R. Light, D. Gossard // Computer-Aided Design. – 1982. - Vol, 14, Iss. 4, - P. 209-214.

406. Sarfraz M. Computer-aided reverse engineering using simulated evolution on NURBS / M. Sarfraz // Virtual and physical prototyping. - 2006. – Vol. 1, Iss. 4. – P. 243-257.

ДОДАТКИ

ДОДАТОК А
Лістинг програмного модуля для проведення аналізу плоского точкового ряду

```
emax := proc () global E, z, i;
E := 0;
 for i from 2 to n-1 do
 if abs(E) < abs(e[i]) then
 E := e[i]; z := i end if
 end do;
end proc;
 ope := proc () local s1, s2, sol, ix, ig, a1, l1, xK1, yK1, c1,
d, f, l;
 global xT, yT, e, c, a, b, t;
if i = 1 then
ix := 'ix';
ig := 'ig';
s1 := (ig-y[i])*(xN[i]-x[i]) = (ix-x[i])*(yN[i]-y[i]);
s2 := (ig-y[i+1])*(xN[i+1]-x[i+1]) = (ix-x[i+1])*(yN[i+1]-y[i+1
]);
sol := solve({s1, s2}, {ix, ig}); assign(sol); xT[i] := ix;
yT[i] := ig;
ix := 'ix';
ig := 'ig';
s1 := (ig-y[i+1])*(xN[i+1]-x[i+1]) = (ix-x[i+1])*(yN[i+1]-y[i+1
]);
s2 := (ig-yb[i])*(y[i+1]-y[i]) = (ix-xb[i])*(x[i]-x[i+1]);
sol := solve({s1, s2}, {ix, ig}); assign(sol);
a1 := sqrt((xT[i]-ix)^2+(yT[i]-ig)^2);
l := sqrt((x[i]-xT[i])^2+(y[i]-yT[i])^2);
xK1 := xT[i]*(l-a1)/l+x[i]*a1/l;
yK1 := yT[i]*(l-a1)/l+y[i]*a1/l;
c1 := sqrt((xK1-ix)^2+(yK1-ig)^2);
d := c1+l-2*a1-sqrt((x[i+1]-xT[i])^2+(y[i+1]-yT[i])^2);
f := d/(2*a1-c1)+1;
a[i] := a1*f;
c[i] := c1*f;
b[i] := l-a[i]
else ix := 'ix';
ig := 'ig';
s1 := (ig-y[i])*(xN[i]-x[i]) = (ix-x[i])*(yN[i]-y[i]);
s2 := (ig-y[i+1])*(xN[i+1]-x[i+1]) = (ix-x[i+1])*(yN[i+1]-y[i+1
]);
sol := solve({s1, s2}, {ix, ig});
assign(sol); xT[i] := ix;
yT[i] := ig;
ix := 'ix';
ig := 'ig';
s1 := (ig-y[i+1])*(xN[i+1]-x[i+1]) = (ix-x[i+1])*(yN[i+1]-y[i+1
]);
s2 := (ig-yb[i])*(y[i+1]-y[i]) = (ix-xb[i])*(x[i]-x[i+1]);
sol := solve({s1, s2}, {ix, ig});
assign(sol);
a1 := sqrt((xT[i]-ix)^2+(yT[i]-ig)^2);
l := sqrt((x[i]-xT[i])^2+(y[i]-yT[i])^2);
xK1 := xT[i]*(l-a1)/l+x[i]*a1/l;
yK1 := yT[i]*(l-a1)/l+y[i]*a1/l;
```

```
c1 := sqrt((xK1-ix)^2+(yK1-ig)^2);
d := c1+l-2*a1-sqrt((x[i+1]-xT[i])^2+(y[i+1]-yT[i])^2);
f := d/(2*a1-c1)+1;
a[i] := a1*f;
c[i] := c1*f;
t[i] := sqrt((xT[i]-xT[i-1])^2+(yT[i]-yT[i-1])^2);
b[i] := t[i]-a[i-1]-a[i]; e[i] := 20*b[i]/(c[i-1]+c[i])-10
end if;
end proc;
for i to n-1 do
ope()
end do;
emax();
for p while abs(E) > 2 do
emax();
ee[p] := E;
if ee[p] = ee[p-1] then break end if;
A := 1;
if z = 2 then
z1 := z
else z1 := z-1 end if;
if z = n-1 then
z2 := z else z2 := z+1 end if;
i := z;
N1 := N[i];
xN1 := xN[i];
yN1 := yN[i];
if i = n then
h := sqrt((xN[i]-xN[i-1])^2+(yN[i]-yN[i-1])^2)
elif i = n-1 then
h := sqrt((xN[i]-xN[i+1])^2+(yN[i]-yN[i+1])^2)
elif i = 1 then
h := sqrt((xb[1]-xN[1])^2+(yb[1]-yN[1])^2);
xo[1] := xb[1];
yo[1] := yb[1] else
h := sqrt((xN[i]-xK[i+1])^2+(yN[i]-yK[i+1])^2) end if;
for s to infinity do
if E > 1 then
N[i] := (1-1/2^A)*N1;
xN[i] := xo[i]*(N1-N[i])/N1+xN1*N[i]/N1;
yN[i] := yo[i]*(N1-N[i])/N1+yN1*N[i]/N1
elif E < -1 then
a1 := h/2^A;
L := (N1+a1)/N1;
xN[i] := xo[i]*(1-L)+xN1*L;
yN[i] := yo[i]*(1-L)+yN1*L;
N[i] := N1+h/2^A end if;
for i from z1 to z2 do
ope() end do;
if `or`(`or`(abs(e[z1]) > abs(E), abs(e[z]) > abs(E)), abs(e[z2
]) > abs(E)) then
A := A+1;
i := z;
```

```
if `and`(i < n, i > 1) then
ig := 'ig';
ix := 'ix';
s1 := (ig-y[i])*(xN[i]-x[i]) = (ix-x[i])*(yN[i]-y[i]);
s2 := (ig-yb[i-1])*(y[i]-y[i-1]) = (ix-xb[i-1])*(x[i-1]-x[i]);
sol := solve({s1, s2}, {ig, ix});
assign(sol);
xK[i] := ix;
yK[i] := ig end if;
break end if
end do
end do;
for i to n do
if i = 1 then
a1 := a[1]+b[2]*c[1]/(c[1]+c[2]);
l := sqrt((x[1]-xT[1])^2+(y[1]-yT[1])^2);
if a1 < b[1] then
xC[1] := xT[1]*(l-a1)/l+x[1]*a1/l;
yC[1] := yT[1]*(l-a1)/l+y[1]*a1/l;
R[1] := sqrt((x[1]-xC[1])^2+(y[1]-yC[1])^2) else
a1 := a[1]+(l-a[1])*(1/2);
xC[1] := xT[1]*(l-a1)/l+x[1]*a1/l;
yC[1] := yT[1]*(l-a1)/l+y[1]*a1/l;
R[i] := sqrt((x[i]-xC[i])^2+(y[i]-yC[i])^2) end if
elif i = n then
l := sqrt((xT[n-2]-xT[n-1])^2+(yT[n-2]-yT[n-1])^2);
a1 := a[n-2]+b[n-1]*c[n-2]/(c[n-2]+c[n-1]);
b1 := l-a1;
h1 := sqrt((x[n]-xT[n-1])^2+(y[n]-yT[n-1])^2);
h2 := h1+b1;
L := h2/h1;
xC[n] := x[n]*(1-L)+xT[n-1]*L;
yC[n] := y[n]*(1-L)+yT[n-1]*L;
R[i] := sqrt((x[i]-xC[i])^2+(y[i]-yC[i])^2) else
a1 := a[i-1]+b[i]*c[i-1]/(c[i-1]+c[i]);
l := sqrt((xT[i-1]-xT[i])^2+(yT[i-1]-yT[i])^2);
xC[i] := xT[i-1]*(l-a1)/l+xT[i]*a1/l;
yC[i] := yT[i-1]*(l-a1)/l+yT[i]*a1/l;
R[i] := sqrt((x[i]-xC[i])^2+(y[i]-yC[i])^2)
end if
end do;
```

ДОДАТОК Б
Лістинг програмного модуля для проведення аналізу просторового точкового ряду

```
restart;
f1 := fopen("C:/test/xd.txt", READ);
f2 := fopen("C:/test/yd.txt", READ);
f3 := fopen("C:/test/zd.txt", READ);
x := readdata(f1, 1);
y := readdata(f2, 1);
z := readdata(f3, 1);
close("C:/test/xd.txt");
close("C:/test/yd.txt");
close("C:/test/zd.txt");
for i while
whattype(x[i]) = float do
n := i
end do;
X := 'X'; Y := 'Y'; Z := 'Z';
for i to n-1 do
xK[i] := evalf((x[i]+x[i+1])*(1/2));
yK[i] := evalf((y[i]+y[i+1])*(1/2));
zK[i] := evalf((z[i]+z[i+1])*(1/2));
Ap[i] := x[i+1]-x[i];
Bp[i] := y[i+1]-y[i];
Cp[i] := z[i+1]-z[i];
Dp[i] := xK[i]*(x[i]-x[i+1])+yK[i]*(y[i]-y[i+1])+zK[i]*(z[i]-z[i
+1]);
P[i] := Ap[i]*X+Bp[i]*Y+Cp[i]*Z+Dp[i]
end do;
for i from 2 to n-2 do
X := 'X'; Y := 'Y'; Z := 'Z';
s1 := P[i-1] = 0;
s2 := P[i] = 0;
s3 := P[i+1] = 0;
sol := solve({s1, s2, s3}, {X, Y, Z});
assign(sol);
xT[i] := evalf(X);
yT[i] := evalf(Y);
zT[i] := evalf(Z)
end do;
for i from 3 to n-2 do
par := 'par';
X := xT[i-1]+(xT[i]-xT[i-1])*par;
Y := yT[i-1]+(yT[i]-yT[i-1])*par;
Z := zT[i-1]+(zT[i]-zT[i-1])*par;
A := evalf((y[i]-y[i-1])*(z[i+1]-z[i-1])-(y[i+1]-y[i-1])*(z[i]-z
[i-1]));
B := evalf((x[i+1]-x[i-1])*(z[i]-z[i-1])-(x[i]-x[i-1])*(z[i+1]-z
[i-1]));
C := evalf((x[i]-x[i-1])*(y[i+1]-y[i-1])-(x[i+1]-x[i-1])*(y[i]-y
[i-1]));
DD := evalf(-A*x[i-1]-B*y[i-1]-C*z[i-1]);
PP := A*X+B*Y+C*Z+DD;
sol := solve({PP = 0}, {par});
assign(sol);
xPO[i] := evalf(X);
```

```
yPO[i] := evalf(Y);
zPO[i] := evalf(Z);
RPO[i] := evalf(sqrt((x[i]-xPO[i])^2+(y[i]-yPO[i])^2+(z[i]-zPO[i
])^2))
end do;
for i from 2 to n-1 do
AP[i] := (y[i]-y[i-1])*(z[i+1]-z[i-1])-(y[i+1]-y[i-1])*(z[i]-z[i
-1]);
BP[i] := (x[i+1]-x[i-1])*(z[i]-z[i-1])-(x[i]-x[i-1])*(z[i+1]-z[i
-1]);
CP[i] := (x[i]-x[i-1])*(y[i+1]-y[i-1])-(x[i+1]-x[i-1])*(y[i]-y[i
-1]);
DP[i] := -AP[i]*x[i-1]-BP[i]*y[i-1]-CP[i]*z[i-1];
PP[i] := AP[i]*X+BP[i]*Y+CP[i]*Z+DP[i]
end do;
for i to n do
X := 'X'; Y := 'Y'; Z := 'Z';
t := par[i];
N[i] := x1[i]*(X-x[i])+y1[i]*(Y-y[i])+z1[i]*(Z-z[i])
end do;
for i from 4 to n-3 do
t := 't';
X := (xT[i-1]-xT[i-2])*t+xT[i-1];
Y := (yT[i-1]-yT[i-2])*t+yT[i-1];
Z := (zT[i-1]-zT[i-2])*t+zT[i-1];
sol := solve({N[i] = 0}, {t});
assign(sol);
xL1[i] := evalf(X);
yL1[i] := evalf(Y);
zL1[i] := evalf(Z);
t := 't';
X := (xT[i]-xT[i-1])*t+xT[i];
Y := (yT[i]-yT[i-1])*t+yT[i];
Z := (zT[i]-zT[i-1])*t+zT[i];
sol := solve({N[i] = 0}, {t});
assign(sol);
xL[i] := evalf(X);
yL[i] := evalf(Y);
zL[i] := evalf(Z);
t := 't';
X := (xT[i+1]-xT[i])*t+xT[i+1];
Y := (yT[i+1]-yT[i])*t+yT[i+1];
Z := (zT[i+1]-zT[i])*t+zT[i+1];
sol := solve({N[i] = 0}, {t});
assign(sol);
xL2[i] := evalf(X);
yL2[i] := evalf(Y);
zL2[i] := evalf(Z);
LT1 := sqrt((xT[i-1]-xL1[i])^2+(yT[i-1]-yL1[i])^2+(zT[i-1]-zL1[i
])^2)/sqrt((xT[i-2]-xL1[i])^2+(yT[i-2]-yL1[i])^2+(zT[i-2]-zL1[i
])^2);
LT2 := sqrt((xT[i]-xL[i])^2+(yT[i]-yL[i])^2+(zT[i]-zL[i])^2)
/sqrt((xT[i-1]-xL[i])^2+(yT[i-1]-yL[i])^2+(zT[i-1]-zL[i])^2);
```

```
LT3 := sqrt((xT[i+1]-xL2[i])^2+(yT[i+1]-yL2[i])^2+(zT[i+1]-zL2[i
])^2)/sqrt((xT[i]-xL2[i])^2+(yT[i]-yL2[i])^2+(zT[i]-zL2[i])^2)
end do;
for i from 4 to n-4 do
X := 'X'; Y := 'Y'; Z := 'Z';
s1 := P[i] = 0;
s2 := N[i] = 0;
s3 := N[i+1] = 0;
sol := solve({s1, s2, s3}, {X, Y, Z});
assign(sol);
xLl[i] := evalf(X);
yLl[i] := evalf(Y);
zLl[i] := evalf(Z)
end do;

for i from 4 to n-4 do
pr1 := evalf(sqrt((xL1[i]-xLl[i-1])^2+(yL1[i]-yLl[i-1])^2+(zL1[i
]-zLl[i-1])^2)+sqrt((xLl[i-1]-xL[i])^2+(yLl[i-1]-yL[i])^2+(zLl[i
-1]-zL[i])^2));
pr2 := evalf(sqrt((xL1[i]-xL[i])^2+(yL1[i]-yL[i])^2+(zL1[i]-zL[i
])^2));
pr3 := evalf(sqrt((xL[i]-xLl[i])^2+(yL[i]-yLl[i])^2+(zL[i]-zLl[i
])^2)+sqrt((xLl[i]-xL2[i])^2+(yLl[i]-yL2[i])^2+(zLl[i]-zL2[i])^2
));
pr4 := evalf(sqrt((xL[i]-xL2[i])^2+(yL[i]-yL2[i])^2+(zL[i]-zL2[i
])^2))
end do;
for i from 4 to n-4 do
alfa(xT[i]-xT[i-1], yT[i]-yT[i-1], zT[i]-zT[i-1], xL2[i]-xL[i],
yL2[i]-yL[i], zL2[i]-zL[i]);
ps1[i] := al;
alfa(xL2[i]-xL[i], yL2[i]-yL[i], zL2[i]-zL[i], xL[i+1]-xL1[i+1],
yL[i+1]-yL1[i+1], zL[i+1]-zL1[i+1]);
ps[i] := al;
alfa(xL[i+1]-xL1[i+1], yL[i+1]-yL1[i+1], zL[i+1]-zL1[i+1], xT[i+
1]-xT[i], yT[i+1]-yT[i], zT[i+1]-zT[i]);
ps2[i] := al;
alfa(xL[i]-xL1[i], yL[i]-yL1[i], zL[i]-zL1[i], xL2[i]-xL[i], yL2
[i]-yL[i], zL2[i]-zL[i]);
w[i] := al;
Bps[i] := 3*ps[i]/h[i];
Bw[i] := 3*w[i]/(h[i-1]+h[i]);
CSf1[i] := evalf(sqrt((xLl[i]-x[i])^2+(yLl[i]-y[i])^2+(zLl[i]-z[
i])^2));
CSf2[i] := evalf(sqrt((xL1[i]-x[i])^2+(yL1[i]-y[i])^2+(zL1[i]-z[
i])^2));
CSf3[i] := evalf(sqrt((xL2[i]-x[i])^2+(yL2[i]-y[i])^2+(zL2[i]-z[
i])^2));
X := 'X'; Y := 'Y'; Z := 'Z';
t := 't';
Al := xL[i]-xL1[i];
Bl := yL[i]-yL1[i];
Cl := zL[i]-zL1[i];
```

```
Dl := x[i]*(xL[i]-xL1[i])+y[i]*(yL[i]-yL1[i])+z[i]*(zL[i]-zL1[i
]);
pl := Al*X+Bl*Y+Cl*Z+Dl;
X := (xL[i]-xL1[i])*t+xL[i];
Y := (yL[i]-yL1[i])*t+yL[i];
Z := (zL[i]-zL1[i])*t+zL[i];
sol := solve({pl = 0}, {t});
assign(sol);
ix := X; ig := Y; zt := Z;
RK1[i] := evalf(sqrt((ix-x[i])^2+(ig-y[i])^2+(zt-z[i])^2));
X := 'X'; Y := 'Y'; Z := 'Z';
t := 't';
Al := xL[i]-xL2[i];
Bl := yL[i]-yL2[i];
Cl := zL[i]-zL2[i];
Dl := x[i]*(xL[i]-xL2[i])+y[i]*(yL[i]-yL2[i])+z[i]*(zL[i]-zL2[i
]);
pl := Al*X+Bl*Y+Cl*Z+Dl;
X := (xL[i]-xL2[i])*t+xL[i];
Y := (yL[i]-yL2[i])*t+yL[i];
Z := (zL[i]-zL2[i])*t+zL[i];
sol := solve({pl = 0}, {t});
assign(sol);
ix := X; ig := Y; zt := Z;
RK2[i] := evalf(sqrt((ix-x[i])^2+(ig-y[i])^2+(zt-z[i])^2));
hL1[i] := evalf(sqrt((xLl[i]-xL[i])^2+(yLl[i]-yL[i])^2+(zLl[i]-
zL[i])^2));
hL2[i] := evalf(sqrt((xLl[i]-xL[i+1])^2+(yLl[i]-yL[i+1])^2+(zLl[
i]-zL[i+1])^2))
end do;
for i from 3 to n-2 do
X := 'X'; Y := 'Y'; Z := 'Z';
s1 := N[i] = 0;
s2 := CO[i] = 0;
s3 := sqrt((x[i]-X)^2+(y[i]-Y)^2+(z[i]-Z)^2) = R[i];
sol := solve({s1, s2, s3}, {X, Y, Z}); assign(sol[1]);
xC[i] := X;
yC[i] := Y;
zC[i] := Z;
lt1 := sqrt((xC[i]-xPO[i])^2+(yC[i]-yPO[i])^2+(zC[i]-zPO[i])^2);
X := 'X'; Y := 'Y'; Z := 'Z';
assign(sol[2]);
xC2 := X;
yC2 := Y;
zC2 := Z;
lt2 := sqrt((xC2-xPO[i])^2+(yC2-yPO[i])^2+(zC2-zPO[i])^2);
if lt2 < lt1 then
xC[i] := xC2;
yC[i] := yC2;
zC[i] := zC2
end if;
X := 'X'; Y := 'Y'; Z := 'Z';
Av[i] := x[i]-xC[i];
```

```
Bv[i] := y[i]-yC[i];
Cv[i] := z[i]-zC[i];
Dv[i] := xC[i]*(x[i]-xC[i])+yC[i]*(y[i]-yC[i])+zC[i]*(z[i]-zC[i
]);
Pv[i] := Av[i]*X+Bv[i]*Y+Cv[i]*Z-Dv[i]
end do;
for i from 4 to n-4 do
X := 'X'; Y := 'Y'; Z := 'Z';
s1 := N[i] = 0;
s2 := Pv[i] = 0;
s3 := P[i-1] = 0;
sol := solve({s1, s2, s3}, {X, Y, Z});
assign(sol);
xF1[i] := evalf(X);
yF1[i] := evalf(Y);
zF1[i] := evalf(Z);
X := 'X'; Y := 'Y'; Z := 'Z';
s1 := N[i] = 0;
s2 := Pv[i] = 0;
s3 := P[i] = 0;
sol := solve({s1, s2, s3}, {X, Y, Z});
assign(sol);
xF2[i] := evalf(X);
yF2[i] := evalf(Y);
zF2[i] := evalf(Z)
end do;
for i from 5 to n-4 do
pr1 := evalf(sqrt((xLl[i-1]-xF1[i])^2+(yLl[i-1]-yF1[i])^2+(zLl[i
-1]-zF1[i])^2)+sqrt((xF1[i]-xL[i])^2+(yF1[i]-yL[i])^2+(zF1[i]-zL
[i])^2))-hL2[i-1];
pr2 := evalf(sqrt((xL[i]-xF2[i])^2+(yL[i]-yF2[i])^2+(zL[i]-zF2[i
])^2)+sqrt((xF2[i]-xLl[i])^2+(yF2[i]-yLl[i])^2+(zF2[i]-zLl[i])^2
))-hL1[i]
end do;
for i from 4 to n-4 do
LF1[i] := sqrt((xF1[i]-xL[i])^2+(yF1[i]-yL[i])^2+(zF1[i]-zL[i])^
2)/sqrt((xLl[i-1]-xF1[i])^2+(yLl[i-1]-yF1[i])^2+(zLl[i-1]-zF1[i
])^2);
LF2[i] := sqrt((xF2[i]-xLl[i])^2+(yF2[i]-yLl[i])^2+(zF2[i]-zLl[i
])^2)/sqrt((xL[i]-yF2[i])^2+(yL[i]-yF2[i])^2+(zL[i]-zF2[i])^2);
alfa(xC[i]-xF2[i], yC[i]-yF2[i], zC[i]-zF2[i], xL[i]-xL1[i], yL[
i]-yL1[i], zL[i]-zL1[i]);
w1[i] := al;
alfa(xC[i]-xF2[i], yC[i]-yF2[i], zC[i]-zF2[i], xL[i]-xL2[i], yL[
i]-yL2[i], zL[i]-zL2[i]);
w2[i] := al
end do;
```

ДОДАТОК В
Акти про впровадження результатів дослідження

УКРАЇНА

ПАТЕНТ

НА КОРИСНУ МОДЕЛЬ
№ 91024

СПОСІБ МОДЕЛЮВАННЯ ЛІНІЙНИХ ЕЛЕМЕНТІВ КАРКАСА СКЛАДНИХ ПОВЕРХОНЬ, ЯКІ ОБМЕЖУЮТЬ ТЕХНІЧНІ ВИРОБИ, ЩО ВЗАЄМОДІЮТЬ ІЗ СЕРЕДОВИЩЕМ

Видано відповідно до Закону України "Про охорону прав на винаходи і корисні моделі".

Зареєстровано в Державному реєстрі патентів України на корисні моделі **25.06.2014.**

Голова Державної служби
інтелектуальної власності України — М.В. Ковіня

Державна служба інтелектуальної власності України
Ідентифікаційний код 37552556
№1

(11) **91024**

(19) **UA**

(51) **МПК** (2014.01)
F16S 5/00

(21) Номер заявки: **u 2013 11250**

(22) Дата подання заявки: **23.09.2013**

(24) Дата, з якої є чинними права на корисну модель: **25.06.2014**

(46) Дата публікації відомостей про видачу патенту та номер бюлетеня: **25.06.2014, Бюл. № 12**

(72) Винахідники:
Гавриленко Євген Андрійович, UA,
Холодняк Юлія Володимирівна, UA

(73) Власник:
ТАВРІЙСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ АГРОТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ,
пр. Б. Хмельницького, 18, м. Мелітополь, Запорізька обл., 72312, UA

(54) Назва корисної моделі:

СПОСІБ МОДЕЛЮВАННЯ ЛІНІЙНИХ ЕЛЕМЕНТІВ КАРКАСА СКЛАДНИХ ПОВЕРХОНЬ, ЯКІ ОБМЕЖУЮТЬ ТЕХНІЧНІ ВИРОБИ, ЩО ВЗАЄМОДІЮТЬ ІЗ СЕРЕДОВИЩЕМ

(57) Формула корисної моделі:

Спосіб моделювання лінійних елементів каркаса складних поверхонь, які обмежують технічні вироби, що взаємодіють із середовищем, що полягає у формуванні дискретно представленої кривої на основі упорядкованого точкового ряду, який **відрізняється** тим, що
на робочій поверхні визначається область розташування кривої, яка є елементом каркаса поверхні, за умови монотонної зміни диференціально-геометричних характеристик, при цьому положення точок, які належать кривій, призначаються всередині отриманої області.

ТУРБОКОМ
ЗАВОД ТУРБОКОМПРЕССОРОВ

ООО «МЕЛИТОПОЛЬСКИЙ
ЗАВОД ТУРБОКОМПРЕССОРОВ»
www.turbocom.com.ua
www.turbolider.com.ua

72311, Украина,
Запорожская обл., г. Мелитополь, Каховское шоссе, 3/7
ОКПО: 34667488, ІНН: 346674808322, Св-во: №100262787
факс: +38 (0619) 42-96-19
тел: +38 (0619) 42-96-13

ЗАТВЕРДЖУЮ
Директор ООО «Мелітопольський
Завод турбокомпресорів»
_____ Овчаренко В. Г.
«23» 10 2013р.

АКТ
упровадження результатів науково-дослідної роботи
Гавриленко Євгена Андрійовича
по геометричному опису та розрахунку поверхонь робочих коліс та корпусних деталей турбокомпресора

Даний акт видано Гавриленко Є.А. у тому, що ним розроблено метод та складено виробничу інструкцію по моделюванню поверхонь із закономірною зміною диференційно-геометричних характеристик.
Розроблені методика та виробнича інструкція використовуються при розрахунку та проектуванні моделей робочих коліс та корпусних деталей компресорів типу ТРК ЯМЗ, ТКР-11Н1, ТКР-11Н2, ТКР-11Н3.
Метод, розроблений Гавриленко Є.А., дозволяє збільшити можливість корегування форми робочих поверхонь за допомогою вибору значень керуючих параметрів формоутворення.
Програмне забезпечення, що розроблено на основі запропонованого методу моделювання поверхонь, дозволяє скоротити час створення комп'ютерної моделі виробу та програми для обробки поверхонь на верстатах з числовим програмним керуванням.
Застосування запропонованого автором методу дає можливість покращити динамічні характеристики потоків у міжлопаткових каналах за рахунок поліпшення геометричних характеристик робочих поверхонь та підвищення точності їх виготовлення.

Технічний директор Плакун В. П.

Товариство з обмеженою відповідальністю "Мелітопольський завод турбокомпресорів" 34667488 Україна Запорізька область м. Мелітополь

МЕЛТ
ЛИТЕЙНАЯ КОМПАНИЯ

72311, Україна, Запорізька обл.,м. Мелітополь, Каховське шосе, 3
моб.: +38 (095) 700-78-48; e-mail: meltcompany2013@gmail.com

ЗАТВЕРДЖУЮ
Директор ливарної компанії «МЕЛТ»
_____ Греджев І.В.
«21» 11 2013р.

АКТ

упровадження результатів науково-дослідної роботи

Гавриленко Євгена Андрійовича

по геометричному опису та розрахунку поверхонь робочих коліс та корпусних деталей турбокомпресора

Даний акт видано Гавриленко Є.А. у тому, що ним розроблено метод та складено виробничу інструкцію по моделюванню поверхонь із закономірною зміною диференційно-геометричних характеристик.

Інструкція використовується у процесі проектування моделей робочих коліс та корпусних деталей компресорів типу ТРК ЯМЗ, ТКР-11НЗ.

Запропонований метод суттєво підвищує можливість варіювання формою робочих поверхонь шляхом вибору значень керуючих параметрів формоутворення. Це дає можливість оцінювати отримані результати та локально корегувати окремі ділянки поверхонь.

На основі розроблених автором алгоритмів створено програмне забезпечення, яке адаптоване до геометричного моделювання поверхонь робочих коліс та корпусних деталей.

Використання програмного забезпечення дозволяє скоротити час проектування та підвищити якість обробки робочих поверхонь на обробних центрах з числовим програмним керуванням.

Запропонований метод дозволяє поліпшити динамічні характеристики потоків у міжлопаткових каналах та економічність компресорів.

Технічний директор Мороз К.В.

Начальник бюро проектування Черномурко Є.В.

АКТ
о внедрении результатов диссертационного исследования
Гавриленко Евгения Андреевича

Данный акт выдано Гавриленко Е.А. в том, что им разработан метод и алгоритмы моделирования кривых линий и поверхностей на основе упорядоченного множества точек по заданному закону изменения дифференциально-геометрических характеристик (положения касательных, нормалей, значения радиусов кривизны и кручения).

Предложенные разработчиком алгоритмы приняты к внедрению в качестве основы для создания программного обеспечения для моделирования кривых линий по заданным условиям.

Разработанные автором метод и алгоритмы моделирования кривых линий универсальны и могут быть использованы для формирования элементов определителей поверхностей, задаваемых дискретным или непрерывным каркасом.

Использование алгоритмов, разработанных Гавриленко Е.А., дает возможность повысить функциональные возможности пакетов твердотельного параметрического моделирования (КОМПАС-3D, Delcam Power SHAPE), их надежность и быстродействие.

Генеральный директор
ТзОВ «НПП«Центр САПР» Борисенко О.И.

15.05.2014 г.

ТОВАРИСТВО З ОБМЕЖЕНОЮ ВІДПОВІДАЛЬНІСТЮ НАУКОВО-ВИРОБНИЧЕ ПІДПРИЄМСТВО Центр САПР 33951996 УКРАЇНА м.ЛЬВІВ

«Таврия Турбо Плюс»

Специализированное предприятие по проектированию и производству автотракторных турбокомпрессоров

72364 Украина Запорожская обл,Мелитопольский район, с.Константиновка ул.Садовая,87
тел.факс (0619) 44-27-77 , (0619) 44-27-00
http://www.tturbo.com.ua e-mail: info@tturbo.com.ua e-mail: tturbo@mail.ru

ЗАТВЕРДЖУЮ
Директор приватного підприємства «Таврія Турбо Плюс»
Піскунов В.В.
«10» 12 2013р.

АКТ
упровадження результатів науково-дослідної роботи
Гавриленко Євгена Андрійовича
по геометричному опису та розрахунку поверхонь робочих коліс та корпусних деталей турбокомпресора

Даний акт видано Гавриленко Є.А. у тому, що ним розроблено метод та складено виробничу інструкцію по моделюванню поверхонь із заданим законом зміни диференційно-геометричних характеристик.

Запропоновані метод та виробнича інструкція використовуються під час проектування та розрахунку моделей робочих коліс та корпусних деталей турбокомпресорів типу ТКР 6, ТКР 8,5С3, ТКР 9, ТКР 7 ТТ-01.

Розроблений метод дає можливість змінювати форму робочих поверхонь за рахунок вибору значень управляючих параметрів формоутворення. Це дозволяє оцінювати функціональні якості та корегувати окремі ділянки отриманих поверхонь.

Використання програмного забезпечення, яке розроблено на основі алгоритмів, запропонованих Гавриленко Є.А., дає можливість зменшити час проектування комп'ютерних моделей робочих коліс та корпусних деталей турбокомпресорів, а також поліпшити якість обробки робочих поверхонь на обробних центрах з числовим програмним управлінням.

Розроблений автором метод дає можливість покращити динамічні характеристики потоків у каналах, які обмежені робочими поверхнями компресора, завдяки поліпшенню геометричних характеристик поверхонь.

Головний технолог Нінов О.Л.

ЗАТВЕРДЖУЮ
Директор товариства з обмеженою
відповідальністю «СПП «ЛАНА»
_____ Верещага Л.І.
«22» ____10_____ 2014р.

АКТ
проведення випробувань робочого органу для рихлення ґрунту, виготовленого з використанням методики моделювання функціональних поверхонь, яка розроблена
Гавриленко Євгеном Андрійовичем

Польові випробування робочого органу для рихлення ґрунту, який сконструйовано з використанням методики, розробленої Гавриленко Є.А., та виготовлено науково-виробничою компанією «Роста» були проведені на виробничій базі товариства з обмеженою відповідальністю «СПП «ЛАНА».

Якість обробки ґрунту робочим органом оцінювалась за наступними показниками:

- розмір фракції ґрунту, отриманої після обробки;
- ущільнення ґрунту у результаті взаємодії із поверхнею робочого органу;
- залипання ґрунтом робочої поверхні інструменту;
- затрати енергії на обробку ґрунту.

Характеристики роботи інструмента, що випробовувався, порівнювались з аналогічними характеристиками роботи прототипу, який використовувався для рихлення ґрунту.

Результати випробувань робочого органу на ґрунтах із різним ступенем в'язкості та зволоженості показали його перевагу над прототипом.

1. Після обробки ґрунту інструментом, що випробовувався, відсоток фракції регламентованого розміру збільшився. Характеристики ґрунту с точки зору ущільнення більш переважні.

2. Використання робочого органу, що випробовувався, призвело до зменшення мінімального зусилля, що прикладається до валу, котре призводить до зсуву шару ґрунту, на 2,5%. Затрати палива на обробку еталонної ділянки ґрунту зменшились на 1,5%.

3. Огляд робочої поверхні інструменту після випробовувань свідчить про рівномірне переміщення ґрунту по робочій поверхні під час обробки.

Розроблений інструмент для рихлення ґрунту рекомендується для використання у виробництві.

Головний інженер Ганзін В.І.

Представник підприємства-виробника Коломоєць С.О. головний інженер

ЧП НПК РОСТА

72319 Украина, Запорожская обл.,
г. Мелитополь,
пр. Б. Хмельницкого, 27
тел. (0619) 43-60-28,
тел/факс (0619) 43-77-71
E-mail: mail@rosta.ua

ЗАТВЕРДЖУЮ
Директор науково-виробничої компанії «Роста»
_____ Тарасенко В.В.
«14» 12 2014 р.

АКТ
упровадження результатів науково-дослідної роботи
Гавриленко Євгена Андрійовича
по геометричному опису функціональних поверхонь
робочих органів ротаційних ґрунтообробних машин

Даний акт видано Гавриленко Є.А. у тому, що розроблений ним метод моделювання поверхонь із закономірною зміною диференційно-геометричних характеристик прийнято до впровадження на науково-виробничій компанії «Роста».

Програмне забезпечення, яке розроблено на основі алгоритмів, запропонованих автором, та складена виробнича інструкція використовуються для моделювання лінійних елементів каркасу функціональних поверхонь ротаційних робочих органів для рихлення ґрунту пристовбурних областей плодових дерев.

Вихідними даними для моделювання одновимірних елементів каркасу робочої поверхні є упорядкований точковий ряд. Положення вихідних точок ряду призначаються у відповідності із кінематичною схемою руху робочого органу, яка розроблена з урахуванням регламентованого розміру фракції ґрунту та ступеня його ущільнення у результаті обробки.

Формування обводів за методикою, розробленою Гавриленко Є.А., забезпечує закономірну зміну положень дотичних та значень кривини уздовж кривої, що сприяє підвищенню динамічних якостей поверхонь.

Моделювання поверхонь із використанням запропонованого методу дає можливість поліпити функціональні якості поверхні, а саме зменшити сили тертя ґрунту о робочу поверхню та зменшити енергетичні затрати на обробку ґрунту.

Головний інженер Коломоєць С.О.

Товариство з обмеженою відповідальністю
Науково-виробнича комерційна фірма
«Спеціальні гідравлічні машини»
72319, Україна, м. Мелітополь, Запорізької області пров. Балтійський, буд. 9
т/факс: (0619) 42-67-92 e-mail: sgmh@ya.ru
р/р2600601134959 в філія ВАТ «УКРЕКСІМБАНК»
у м. Запоріжжі МФО 313979
Ідентифікаційний код юр.особи 36968672
ІПН 369686708328 Свідоцтво № 100302216

ЗАТВЕРДЖУЮ
Директор товариства з обмеженою відповідальністю Науково-виробнича комерційна фірма «Спеціальні гідравлічні машини»
_____ Зюзін Н.Н.
«14» січня 2014 р.

АКТ
упровадження результатів науково-дослідної роботи
Гавриленко Євгена Андрійовича
по геометричному опису та розрахунку функціональних поверхонь центробіжного одноступінчатого насосу СЦН 75/70

Даний акт видано Гавриленко С.А. у тому, що розроблений ним метод та складена виробнича інструкція по моделюванню поверхонь із заданим законом зміни диференційно-геометричних характеристик прийнято до впровадження на ТОВ Науково-виробнича комерційна фірма «Спеціальні гідравлічні машини».

Запропонований метод використовується при проектуванні робочих коліс та корпусних деталей направляючого апарату центробіжного насосу.

Формування елементів каркасу робочих поверхонь за методикою, розробленою автором, забезпечує закономірну зміну положень дотичних та значень кривини уздовж кривих, що є елементами моделі. Забезпечення заданих характеристик лінійних елементів моделі поверхні сприяє підвищенню динамічних якостей поверхонь, ламінарному обтіканню поверхонь рідиною, підвищенню продуктивності насосу.

Використання програмного забезпечення, яке розроблено на основі алгоритмів, запропонованих Гавриленко Є.А., дає можливість зменшити час проектування комп'ютерних моделей робочих коліс та корпусних деталей насосу, а також поліпшити якість обробки робочих поверхонь на обробних центрах з числовим програмним управлінням.

Директор Зюзін Н.Н.