

УДК 517.9

Валентин Собчук, доктор технічних наук, професор,
професор кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь,
Єлизавета Рудик, здобувач третього (освітньо-наукового)
рівня вищої освіти кафедри інтегральних
та диференціальних рівнянь,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
м. Київ, Україна

ІСНУВАННЯ ПЕРІОДИЧНИХ ЦИКЛІВ У РІВНЯННІ ЛІЄНАРА З ІМПУЛЬСНИМИ ЗБУРЕННЯМИ

Анотація. Досліджується рівняння Лієнара з імпульсною дією. Встановлено умови існування $T(n)$ -періодичних розв'язків, коли фазова траєкторія зазнає рівно n імпульсних дій протягом періоду. Показано, що точки, які визначають періодичні цикли, задаються дробово-поліноміальними співвідношеннями спеціального вигляду.

Ключові слова: рівняння Лієнара; імпульсна дія; періодичні розв'язки; граничний цикл.

Abstract. A Liénard equation with impulsive action is investigated. Conditions for the existence of $T(n)$ -periodic solutions are established under which the phase trajectory undergoes exactly n impulsive actions within one period. It is shown that the points defining periodic cycles are described by fractional-polynomial relations of a special form.

Keywords: Liénard equation; impulsive action; periodic solutions; limit cycle.

Досліджується динамічна система, рух у якій описується диференціальним рівнянням Лієнара вигляду:

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0, \quad (1)$$

($x \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$, $\mathcal{D}$ – фазовий простір системи (1), $t \in \mathbb{R}$ – час) і яка зазнає впливу імпульсних сил, які визначаються деяким оператором $\mathcal{A}_t$, що у моменти проходження рухомою точкою певного фіксованого положення $x = x_*$ діє згідно з правилом $(x, t) \rightarrow (t, \mathcal{A}_t x)$.

Якщо t_* деякий момент часу, в який рухома точка досягає положення $x = x_*$, коли відбувається імпульсна дія, то імпульсні збурення рухомої точки записують [1]:

$$\Delta \frac{dx}{dt} \Big|_{x=x_*} = \frac{dx}{dt} \Big|_{t=t_*+0} - \frac{dx}{dt} \Big|_{t=t_*-0} = \mathcal{A}_t x - x = I(\dot{x}). \quad (2)$$

Опис фізичної інтерпретації рівняння Лієнара та характеристика його фазового портрету детально вивчено в [2]. Встановлено, що диференціальне рівняння (1) з імпульсною дією (2), коли функція імпульсної дії має вигляд:

$$I(\dot{x}) = \begin{cases} (\lambda - 1)\dot{x} - \lambda\dot{x}_*, & \dot{x} \geq 0, \\ -(\lambda + 1)\dot{x} - \lambda\dot{x}_*, & \dot{x} < 0, \end{cases} \quad (3)$$

де $\dot{x}_*$, при $1 \leq \lambda \leq |\min G(x)|$, $G(x) = \int_0^x g(s)ds$, має $T(n)$ –періодичні розв’язки такі, що фазова точка даної системи при русі вздовж відповідної траєкторії зазнає рівно n імпульсних дій за період, де $n \in \mathbb{N}$. При чому точки дії імпульсних сил, що відповідають $T(n)$ –періодичним розв’язкам слід шукати серед дробів вигляду

$$\dot{x} = \frac{\mathcal{P}^n(\lambda)}{1 \pm \lambda^n} \dot{x}_*,$$

де $\mathcal{P}^n(\lambda)$ – многочлен, вигляду

$$\mathcal{P}^n(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_2 \lambda^2 + \lambda, \quad a_j = \pm 1, \quad j = \overline{2, n}.$$

Встановлено вигляд точок, що визначають періодичний цикл періоду n на проміжку $(1, |\min G(x)|]$ коли фазова точка при русі фазовою траєкторією рівняння (1) зазнає імпульсної дії (3) рівно n разів за період.

Список використаних джерел

1. Samoilenko A. M. and Perestyuk N.A. Impulsive Differential Equations. Vol. 14, World Scientific, Singapore, 1995. 472 p. <https://doi.org/10.1142/2892>
2. Самойленко В. Г., Собчук В. В. Періодичні розв’язки рівняння Ляпунова з імпульсною дією. *Нелінійні коливання*. 2000. Т. 3, № 2. С. 256 – 265.