

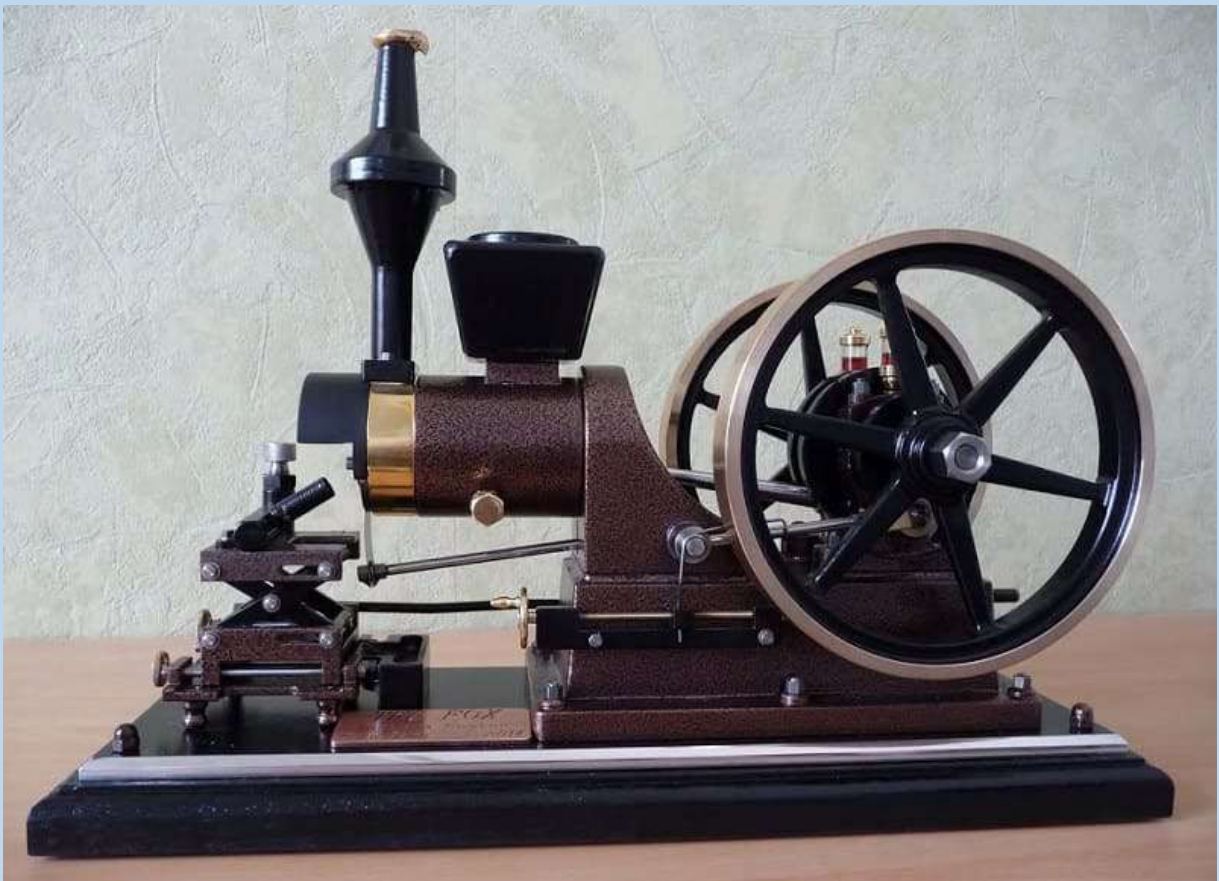
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ТАВРІЙСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ АГРОТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ІМЕНІ ДМИТРА МОТОРНОГО

Олена Михайленко, Галина Антонова, Максим Супрун

**ІНЖЕНЕРНА МЕХАНІКА (ТЕОРІЯ МЕХАНІЗМІВ І МАШИН)**

**СТРУКТУРА. КІНЕМАТИКА. ДИНАМІКА**

Конспект лекцій



Запоріжжя, 2025

УДК 531(075.8)  
М69

Автори: О.Ю. Михайленко, Г.В. Антонова, М.В. Супрун

Рекомендовано до друку рішенням Вченої ради  
механіко-технологічний факультету  
Протокол № 4 від 11.11.2025 р.

Рецензенти:

**Верещага В. М.**, доктор технічних наук, професор, професор кафедри математики і фізики Мелітопольського державного педагогічного університету імені Богдана Хмельницького

**Кувачов В. П.**, доктор технічних наук, професор, декан механіко-технологічного факультету Таврійського державного агротехнологічного університету імені Дмитра Моторного

**Михайленко Олена**

**М69 Інженерна механіка. Теорія механізмів і машин. Структура. Кінематика. Динаміка:** навчально – методичний посібник. Конспект лекцій / Олена Михайленко, Галина Антонова, Максим Супрун – Запоріжжя: ТДАТУ, 2025. – 167 с.

Навчально-методичний посібник (конспект лекцій) з «Інженерної механіки. Теорії механізмів і машин», що читається студентам механіко-технологічного факультету розглядає основи обґрунтування вибору оптимальних параметрів механізмів і машин та методів їх раціонального проєктування. Суть її інженерної спрямованості полягає в розробці не тільки методів аналізу механізмів, а й у виявленні закономірностей їх синтезу (проєктування), адже на досконалість машин впливає насамперед повнота врахування кінематичних та динамічних властивостей окремих механізмів саме на стадії проєктування.

Зміст видання відповідає освітньо-професійній програмі підготовки бакалаврів зі спеціальностей: G9 «Прикладна механіка за ОПП «Проєктування цифрових моделей машин і механізмів» та H7 «Агроінженерія» за ОПП «Агроінженерія»

© Михайленко О.Ю.

© Таврійський державний  
агротехнологічний  
університет імені Дмитра  
Моторного, 2025

## ЗМІСТ

ВСТУП .....	5
ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1. ....	6
ТЕМА 1. ВСТУП. СТРУКТУРА МЕХАНІЗМІВ. ....	6
1.1. ТММ - наукова основа створення високопродуктивних машин і механізмів.....	6
1.2. Основні поняття і визначення.....	7
1.3. Класифікація механізмів.....	13
1.4. Групи Ассура. ....	13
1.5. Заміна в плоских механізмах вищих пар нижчими. ....	16
ТЕМА 2 КІНЕМАТИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ МЕХАНІЗМІВ.....	23
2.1. Мета та методи кінематичного аналізу.....	23
2.2. План положень механізму – графічне зображення взаємного розташування ланок механізму в певний момент часу. ....	29
2.3. Графоаналітичний метод кінематичного аналізу.....	47
2.4. Дослідження важільних механізмів методом кінематичних діаграм. ....	61
ТЕМА 3. ДИНАМІКА МАШИН І МЕХАНІЗМІВ .....	67
3.1. Основні завдання динаміки машин. ....	67
3.2. Сили, діючі на ланки механізмів та умови вирішування задачі силового аналізу плоского механізму. ....	69
3.3. Силовий (кінетостатичний) аналіз плоских механізмів.....	71
3.4. Важіль Жуковского. ....	84
3.5. Енергетичні характеристики машин. ....	89
3.5.1. Режим руху механізму. ....	89
3.5.2. Коефіцієнт руху механізму (ККД) механізму. ....	92
ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2. ....	97
ТЕМА 4 МЕХАНІЧНІ ПЕРЕДАЧІ ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ.....	97
4.1. Класифікація механізмів передач. ....	97
4.2. Теорема про загальне передавальне відношення. Кінематика зубчастих механізмів. Планетарні механізми. Диференціальні механізми.....	101
4.3. Основна теорема зубчастого зачеплення.....	109
4.4. Утворення евольвенти і її властивості. Геометричні параметри зубчастих коліс і зачеплення.....	111

4.5. Методи виготовлення зубчастих коліс. Вихідний контур рейки, рейкове зачеплення. ....	116
4.6. Найменше число зубців зубчастих коліс. Підрізування і загострення зубців. Виправлення (коригування) зубчастих коліс. ....	122
4.7. Побудова картини зовнішнього евольвентного зачепленням. ....	126
4.8. Визначення геометричних якісних показників передачі. ....	135
4.9. Властивості евольвентного зачеплення. ....	140
<b>ЛЕКЦІЯ 5. КІНЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ І СИНТЕЗ КУЛАЧКОВИХ МЕХАНІЗМІВ. ....</b>	<b>143</b>
5.1. Загальні відомості.....	143
5.2. Класифікація кулачкових механізмів.....	144
5.3. Основні параметри кулачкового механізму. Закон руху вихідної ланки.....	147
5.4. Кут тиску і його вплив на працездатність механізму.....	151
5.5. Побудова кінематичних діаграм штовхача.....	153
5.6. Визначення мінімального радіусу кулачка.....	158
5.7. Побудова профілю кулачка. ....	161
<b>СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....</b>	<b>166</b>

## ВСТУП

«Інженерна механіка. Теорія механізмів і машин» (ІМ ТММ) є ключовою інженерною дисципліною, яку викладають у технічних вищих навчальних закладах. Вона охоплює вивчення будови, класифікації механізмів, а також методів їх кінематичного та силового аналізу, що є основою для проєктування машин різного призначення. Ці знання необхідні інженерам для створення сучасних машин і забезпечення їх ефективного використання.

Машинобудування є провідною галуззю промисловості в економічно розвинутих країнах і виступає фундаментом для технічного прогресу всіх секторів господарства. Рівень розвитку машинобудування визначається якістю створюваних машин, а їх вдосконалення значною мірою залежить від застосування теоретичних основ ІМ ТММ.

Сучасний інженер має досконало володіти методами розрахунку і проєктування швидкодіючих, автоматизованих та високопродуктивних машин. Проєктування нових механізмів базується на досягненнях фундаментальних і прикладних наук, де теорія механізмів і машин займає важливе місце.

Якість машин значною мірою залежить від використання методів ІМ ТММ, оскільки саме через глибоке дослідження кінематичних і силових властивостей можна досягти високої продуктивності, надійності й ефективності конструкцій. Завдання дисципліни полягає в підготовці студентів до вивчення таких спеціалізованих дисциплін, як «Деталі машин і основи конструювання» та «Технологія металів», забезпечуючи базові знання для подальшого навчання й професійного розвитку.

**ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1.**  
**«АНАЛІЗ МЕХАНІЗМІВ З НИЖЧИМИ**  
**КІНЕМАТИЧНИМИ ПАРАМИ».**

**ТЕМА 1. ВСТУП. СТРУКТУРА МЕХАНІЗМІВ.**

**ПЛАН.**

- 1.1. ТММ – наукова основа створення високопродуктивних машин і механізмів.
- 1.2. Основні поняття і визначення.
- 1.3. Класифікація механізмів.
- 1.4. Групи Ассура.
- 1.5. Заміна в плоских механізмах вищих пар нижчими.
- 1.6. Приклад розв’язання задач.

**1.1. ТММ - наукова основа створення високопродуктивних машин і механізмів.**

*Теорія механізмів і машин (ТММ)* – наука, що вивчає будову, кінематику і динаміку механізмів у зв'язку з їх аналізом і синтезом.

ТММ включає три основні частини:

1. Структурний і кінематичний аналіз механізмів – вивчення теорії будови механізмів, дослідження руху тіл що утворюють механізм з точки зору геометрії без урахування сил, що викликають рух цих тіл.
2. Синтез механізмів – проектування механізмів за заданими кінематичними і динамічними умовами.
3. Динамічний аналіз механізмів – визначення сил, що діють на ланки механізму під час їх руху, вивчення взаємозв'язку між рухами тіл, їх масами і силами діючими на них.

*Основні проблеми що вирішуються в ТММ.*

Аналіз здійснюється при заданих розмірах і масі ланок, коли необхідно визначити: швидкості, прискорення, діючі сили, напругу в ланках і їх деформації. В результаті може бути зроблений перевірочний розрахунок на міцність, витривалість і так далі. Аналіз механізмів – це дослідження існуючих механізмів і машин.

Синтез здійснюється при заданих швидкостях, прискореннях, силах що діють, напрузі або деформаціях. При цьому вимагається визначити необхідні розміри ланок, їх форму і масу. При синтезі часто вирішується завдання оптимального проектування конструкції, коли знаходяться необхідні показники роботи машини при найменших витратах праці. Синтез механізмів – це проектування нових машин і механізмів, що використовуються в різних робочих машинах і автоматичних лініях. Аналіз і синтез – це моделювання.

Машина залишається двигуном наукового прогресу. Далі йде розрахунок деталей на міцність, облік кінематичних (графо-

аналітичний метод) і динамічних (силовий аналіз з урахуванням сил, що діють на тіло, принцип Даламбера) чинників.

## 1.2. Основні поняття і визначення.

**Машина** – цей пристрій, що створюється людиною, для полегшення фізичної і розумової праці, збільшення продуктивності шляхом часткової або повної заміни людини.

По функціональному призначенню машини умовно можна розділити на:

I. *Енергетичні*. В них відбувається перетворення енергії з одного виду в інший (наприклад, електрогенератори, електродвигуни, двигуни внутрішнього згорання будь-якого типу, парові і газові турбіни і т. д.).

II. *Технологічні*. Вони призначені для зміни форми, розмірів та фізичних властивостей матеріалів (металорізальні верстати, деревообробні, дорожні, будівельні, поліграфічні машини, машини харчових виробництв, машини текстильної та легкої промисловості та ін.). Ці машини становлять найчисленнішу групу.

III. *Транспортні*. Ці машини служать для переміщення різноманітних виробів, матеріалів і людей – відбувається переміщення об'єктів в просторі з необхідною швидкістю (автомобілі, літаки, локомотиви, судна, крани, конвеєри, маніпулятори).

IV. *Логічні (інформаційні)*. Машини, складові цієї групи, служать для зберігання, переробки та передачі (різні обчислювальні пристрої, ЕОМ, комп'ютери зокрема ПК).

V. *Кібернетичні*. Для заміни людини в її трудових та фізіологічних функціях (апарати штучного серця, штучні нирки, робот-домогосподарка та ін.).

Машини складаються з механізмів.

**Механізм** – система тіл, призначена для перетворення руху одних тіл (одного або декількох) в необхідний рух інших. Наприклад: механізм подачі заготівлі, механізм зчеплення, механізм гальмування і так далі

Всякий механізм складається з окремих тіл (деталей), сполучених між собою. Деталь – цей виріб, виготовлений без складальних операцій. **Деталь** – це елементарна частина машини, виготовлена, як правило, з цілісного шматка матеріалу або з окремих частин зварюванням, тому не може бути розібрана без руйнувань. Деталі, сполучені між собою нерухомо або за допомогою пружних зв'язків, утворюють окрему ланку. **Ланка** – одне або декілька жорстко сполучених твердих тіл. **Ланка** – деталь або група деталей, які рухаються як одне ціле.

Виконання ланок з декількох деталей забезпечується їх з'єднанням. Розрізняють з'єднання *нероз'ємні* (зварні, заклепувальні, клейові) і *роз'ємні* (шпони, шліцьові, різьбові).

Ланки залежно від виду їх матеріалу можуть бути тверді і гнучкі (пружні). Дві ланки, сполучених один з одним рухливо, утворюють кінематичну пару. **Кінематична пара** – з'єднання двох ланок, що допускає їх відносний рух.

**Елементом ланки** – називаються поверхні, лінії, точки ланки, по яких воно може стикатися з іншою ланкою, утворюючи кінематичну пару.

*Класифікація кінематичних пар.*

Кінематичні пари розрізняють і класифікують за різними ознаками.

**1.** По характеру контакту ланок розрізняють пари вищі – ланки стикаються по лінії або в точці (зубчасте зачеплення, кулачковий механізм) і нижчі – ланки стикаються по поверхнях (з'єднання типу підшипник – вал, поршень – циліндр).

Переваги нижчих кінематичних пар (вал – підшипник) простота їх виготовлення, можливість передачі значних зусиль при малому зносі, невеликий питомий тиск, отже менший знос. Вищі пари зношуються сильніше, чіт нижчі, оскільки ніж більше поверхні, тим менше питомий тиск (тиск на одиницю площі).

Переваги вищих кінематичних пар – можливість отримання різноманітних законів руху (досить складні відносний рух) вихідної ланки за рахунок форми ланок (підшипник ковзання (гвинт в циліндрі) відомий давно, підшипник кочення – 100 років).

Наприклад, п'ятирухлива та чотирьорухлива пари на рисунку 1.1 а та б – вищі, а трирухлива та дворухлива пари на рисунку 1.1 в та г – нижчі.

**2.** По характеру відносного руху ланок пари можуть бути обертальними (плоскі (траєкторії усіх точок у відносному русі ланок - плоскі криві, розташовані в паралельних площинах) або просторові) і поступальними (плоскі).

Плоска однорухлива пара може бути або обертальною (шарніром - рис.1.1, д), або поступовою (рис.1.1, е); просторова пара може бути, наприклад, гвинтовою (однорухлива), циліндричною (дворухлива), сферичною (двох - і трьохрухлива) і так далі.

**3.** Розрізняють кінематичні пари з геометричним і силовим замиканням:

*Геометричне замикання (характерно для нижчих пар) – зіткнення елементів ланок забезпечується їх формами (циліндричний шарнір, кульовий шарнір, повзун і куліса). Механізм влаштований таким чином, що рух однієї ланки наводить рух іншої ланки.*

*Силове замикання (характерно для вищих пар) – зіткнення забезпечується силою ваги, силою стискування пружини і так далі*

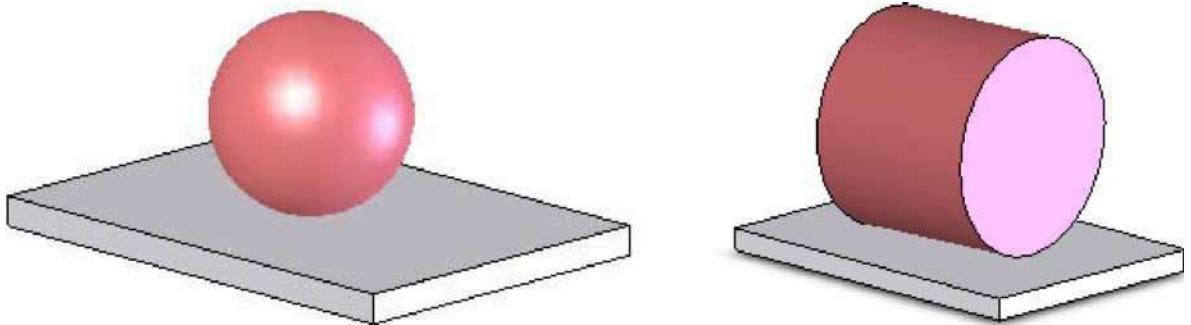
Наприклад, трьохрухлива пара по рисунку 1.1, в - нижча, а

чотирьохрухлива рисунку 1.1, б - вища.

4. По числу зв'язків, що накладаються на відносний рух ланки або за кількістю обмежень рухів.

Всяке вільне абсолютно тверде тіло, що рухається, в просторі має шість ступенів свободи (три поступальних, три обертальних) або шість видів незалежних можливих рухів. Вхідження двох ланок в кінематичну пару накладає на їх відносний рух деякі обмеження, або умови зв'язку; клас кінематичної пари (номер класу співпадає з числом умов зв'язку  $S$ ) завжди знаходиться в межах від 1 до 5, число тих, що залишилися рухливими (переміщень)  $H$  доповнює число зв'язків до шести, тобто  $H = 6 - S$ , тому пару п'ятого класу називають однорухливою, четвертого – дворухливою і так далі. Чи,  $H=1.5$  – кількість можливих переміщень,  $S = 6 - H$  – клас кінематичної пари.

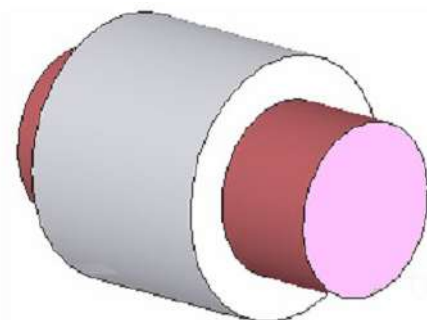
На рисунку 1.1 представлені приклади кінематичних пар 1 – 5 класів.



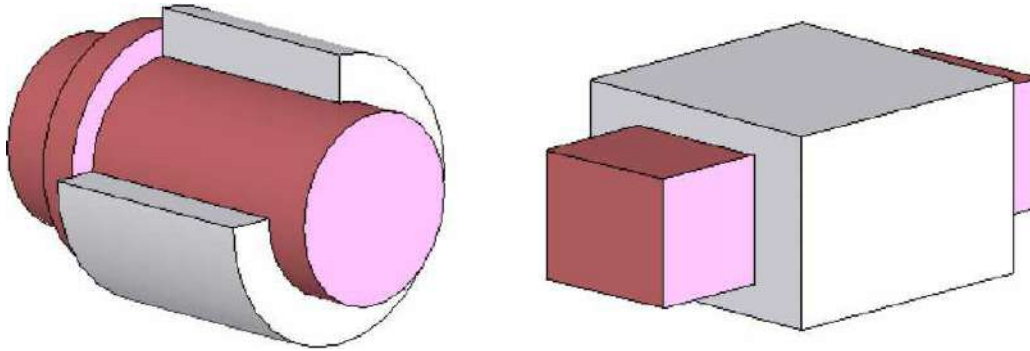
а) П'ятирухлива пара (1 клас)      б) Чотирьохрухлива пара (2 клас)



в) трьохрухлива пара (3 клас)



г) дворухлива пара (4 клас)



однорухливі пари (5 клас)

д) *обертальна*

е) *поступальна*

Рисунок 1.1 – Приклади кінематичних пар 1 – 5 класів.

**Для визначення до якого класу відноситься кінематична пара необхідно: одну з ланок кінематичної пари представити нерухомою, зв'язати з нею систему координат  $(x, y, z)$  і підрахувати які рухи другої ланки не можливі, це і є клас кінематичної пари.**

Умовне зображення механізмів в масштабі, яке показує з яких ланок побудований механізм і якими кінематичними парами сполучені ланки називається кінематичною схемою. **Кінематична схема механізму** – креслення механізму у вибраному масштабі з дотриманням умовних позначень ланок і кінематичних пар. Абстрагуємося від усього непотрібного, кінематична схема є скелетом механізму.

Ланки бувають рухливі і нерухомі. Нерухомі ланки називаються стійкою (корпус годинника, станина верстата, фюзеляж літака).

Ланки розрізняють вхідні (ведучі), вихідні (ведені) і проміжні.

**Провідна ланка** – ця ланка, закон руху якого заданий, а ведені – закон руху, яких необхідно визначити. Наприклад: поршень в циліндрі (диа. рисунок).

**Основні види ланок:** стійка, кривошип, коромисло, повзун, куліса, кулісний камінь, кулачок, зубчасте колесо.

- ❖ стійка – ланка, що приймається за нерухоме; така ланка в механізмі може бути тільки одне;

- ❖ кривошип – ланка механізму, що обертається, яка може здійснювати повний оберт навколо нерухомої осі;

- ❖ коромисло – ланка механізму, яка здійснює неповний оборот навколо нерухомої осі, тобто поворотно-обертальний рух;

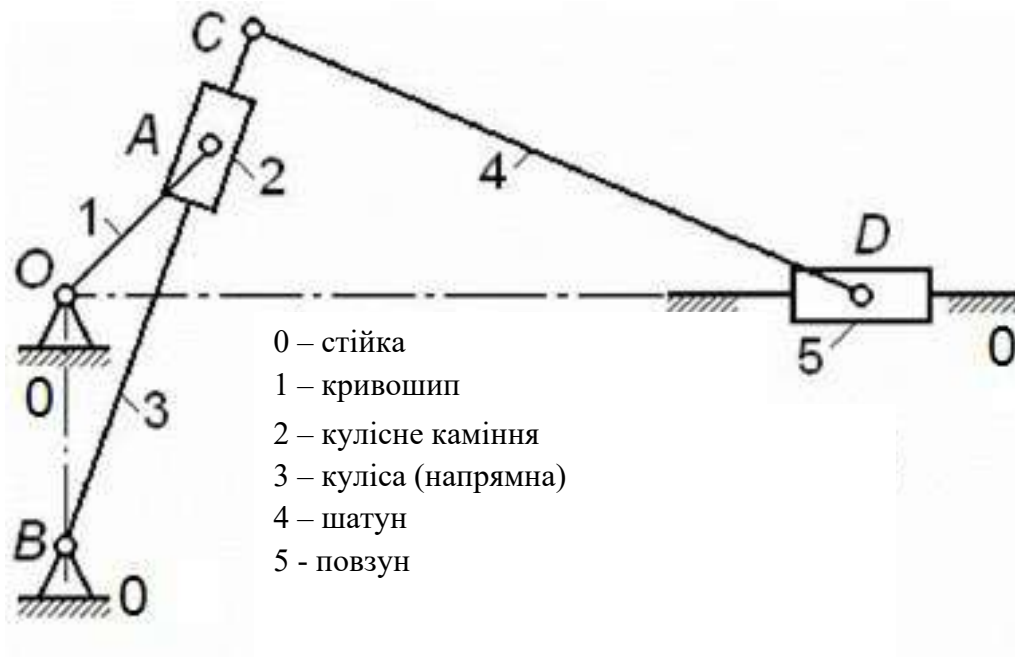


Рисунок 1.2 – Ланки механізму

❖ шатун – ланка механізму, що утворює кінематичні пари тільки з рухливими ланками, здійснює плоско-паралельний (поступальне разом з обертальним) рух;

❖ куліса – ланка механізму, що обертається навколо нерухомої осі і утворює з іншою рухливою ланкою поступальну пару; залежно від міри протяжності елемента поступальної пари розрізняють кулісний камінь (ланка меншої протяжності) і куліса (що направляє). Куліса - рухлива напрямна (1) і кулісний камінь (2), який рухається поступально по кулісі. Точка А здійснює складний рух – поступальний і обертальний (див. рис. 1.2).

❖ повзун – ланка механізму, що утворює поступальну пару із стійкою;

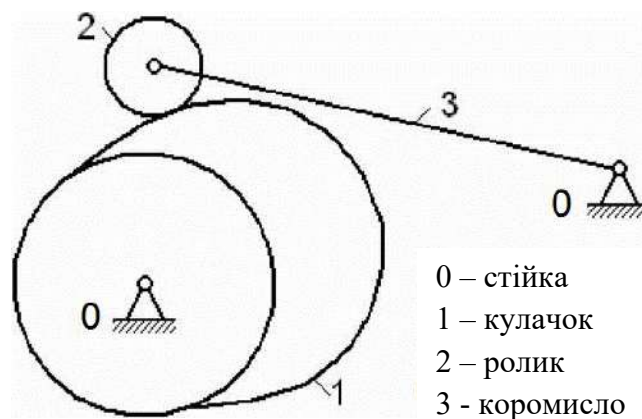


Рисунок 1.3 – Ланки кулачкового механізму

- ❖ зубчасте колесо – ланка із замкнутою системою зубів, що забезпечує безперервний рух іншого зубчастого колеса або рейки;
- ❖ кулачок – ланка, що має елемент вищої пари, виконаний у вигляді поверхні змінної кривизни.

Окрім перерахованих жорстких ланок, в механізмах застосовують гнучкі (ланцюги, ремні), пружні (пружини, мембрани) ланки, а також рідкі і газоподібні (масло, вода, газ, повітря і так далі).

Ланки означають цифрами, причому нумерація ведеться від провідної ланки, а стійкі привласнюється «нуль».

Кінематичні пари означають заголовними латинськими буквами (А, В, С, D і так далі).

Систему ланок, пов'язаних між собою кінематичними парами, називають кінематичним ланцюгом.

*Класифікація кінематичних ланцюгів.*

1. По області руху ланок ланцюга бувають **плоскі** (траєкторії руху точок усіх ланок – плоскі криві, що лежать в одній паралельних площинах) і **просторові** (точки ланок описують плоскі криві в непаралельних площинах або просторові криві).

2. За ознакою наявності розгалужень розрізняють ланцюги **прості** – кожна ланка ланцюга входить не більше, ніж в дві кінематичні пари і **складні** або розгалужені – якщо ланки входять в три, або більше пари; у розгалужених ланцюгах можуть бути присутніми так звані кратні (подвійні, потрійні і так далі) шарніри.

3. За ознакою наявності в кінематичних ланцюгах замкнутих контурів ланцюга можуть бути **замкнутими** і **незамкнутими**; у замкнутому ланцюзі кожна ланка входить не менше, чим в дві кінематичні пари.

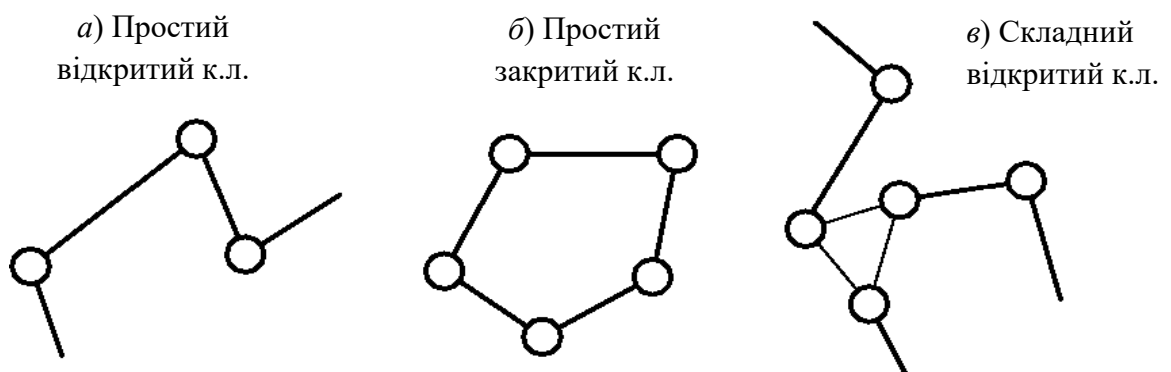


Рисунок 1.4 – Класифікація кінематичних ланцюгів

### 1.3. Класифікація механізмів.

1. По характеру руху ланок: плоскі і просторові.
  2. По видах кінематичних пар: з вищими і нижчими кінематичними парами.
  3. За конструктивними ознаками: важільні (стержневі), кулачкові, зубчасті, фрикційні (зчеплення), з гнучкими ланками (ремінні передачі) і так далі
- Механізм, ланки якого утворюють тільки обертальні, поступальні, циліндричні і сферичні пари називають важільним.

### 1.4. Групи Ассура.

Основний принцип утворення важільних механізмів був сформульований в 1914 році професором Л. В. Ассуром і полягає в наступному.

Схема будь-якого механізму може бути складена послідовним приєднанням до вхідних (початковим) ланок і стійкі кінематичного ланцюга з нульовою мірою рухливості. Такі кінематичні ланцюги називаються структурними групами або групою Ассура (надалі – просто групою).

Зі сказаного виходить, що група, приєднана до стійкі, має нульову рухливість, але тоді вона являється і кінематично і статично визначною системою ланок.

Структурна група I класу – це провідна ланка із стійкою, сполучені парою п'ятого класу.

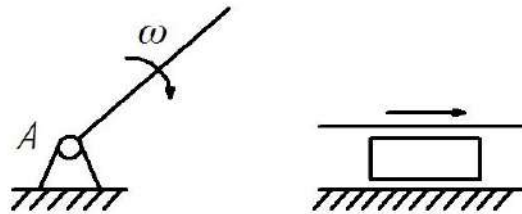


Рисунок 1.5 – Механізм I класу

Шляхом приєднання до таких механізмів різних груп Ассура можна отримати механізм будь-якої складності.

Клас структурної групи визначають кількістю кінематичних пар базисної ланки (ланки, яка має найбільш складну форму).

Порядок структурної групи визначають кількістю елементів зовнішніх кінематичних пар, якими група приєднується до механізму.

Кожна структурна група має порядок, вид і клас.

Структурна група II класу має 2-ий порядок (оскільки є двохповідковою групою, тобто два поводки). Структурна група II класу складається з двох ланок і трьох кінематичних пар п'ятого класу (обертальні або поступальні).

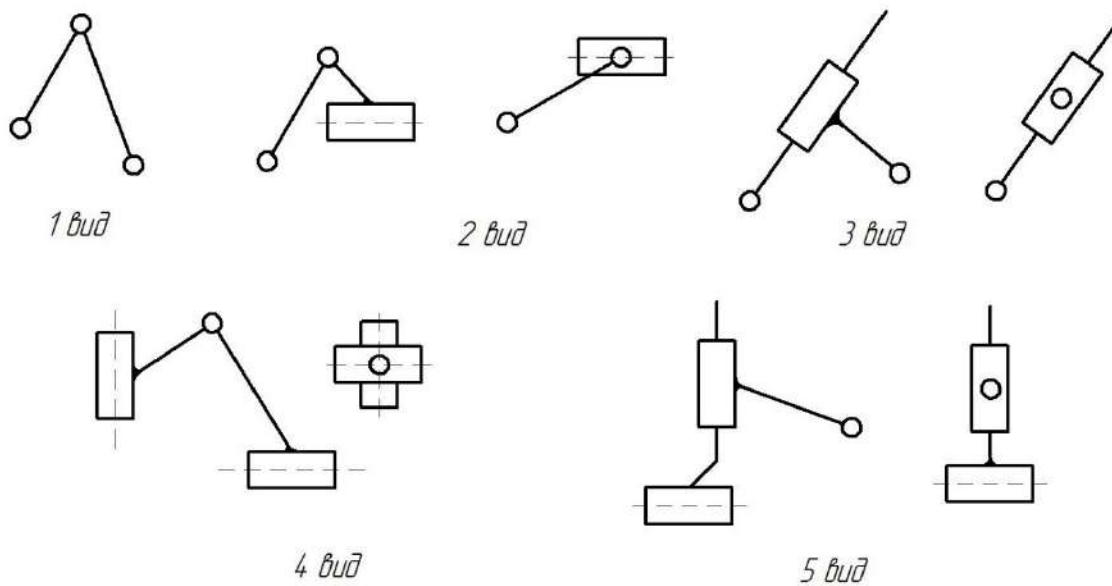


Рисунок 1. 6 – Структурні групи II-го класу: **1 вид** – коромислова; **2 вид** – повзуна; **3 вид** – кулісна; **4 вид** – тангенсна; **5 вид** – синусна.

Групи Ассур класифікуються по числу кінематичних пар, якими вони приєднуються до основного механізму. Це число визначає порядок групи. Крім того, група Ассур має клас, визначуваний числом кінематичних пар, що утворюють найбільш складний замкнутий контур.

Таким чином, механізм складається з початкових механізмів і деякої кількості структурних груп, приєднаних в строго певному порядку, який відбивають в спеціальному записі, званому формулою будови механізму.

Починаючи з III класу, номер групи привласнюється залежно від числа внутрішніх кінематичних пар (зовнішні кінематичні пари служать для з'єднання з іншими групами).

На рисунку 1.7 для зручності зіставлення поміщені поруч один з одним кінематичні і структурні схеми двох груп різних класів.

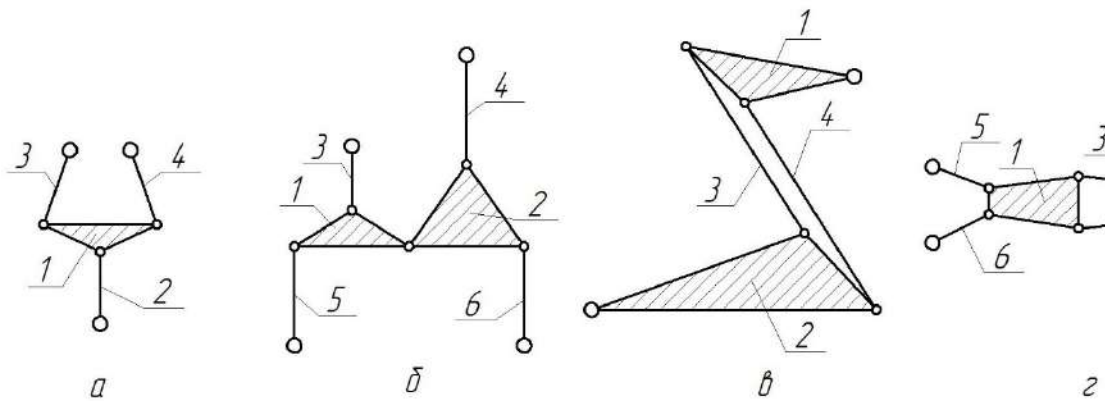


Рисунок 1.7. – Групи III класу (*a* – 3-го і *б* – 4-го порядків) і групи IV-го класу (*в* – 2-го і *г* – 3-го порядків).

Міра рухливості дає можливість визначити кількість провідних ланок. Розрізняють механізми плоскі і просторові.

Міру рухливості просторових механізмів рахують по формулі Сомова-Малишева:

$$W = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1 \quad (1.1)$$

де  $n$  – число рухливих ланок;

$p_1, p_2, p_3, p_4, p_5$  - число кінематичних пар п'ятого, четвертого, третього, другого і першого класів відповідно.

Міру рухливості плоских механізмів рахують по формулі Чебишова:

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 \quad (1.2)$$

Міра рухливості плоского механізму має дорівнювати числу провідних ланок, тобто  $W=1$ .

**Надмірні зв'язки** - це такі зв'язки, які повторюють (дублюють) зв'язки, вже наявні по цій координаті, і тому що не змінюють реальної рухливості механізму.

*Порядок структурного дослідження плоского механізму*

1. Пронумерувати усі ланки механізму (якщо номери ланок не вказані); нерухомій ланці (стійкі) зазвичай привласнюють останній номер.

2. Розрахувати міру рухливості механізму  $W$  і проаналізувати отриманий результат; за наявності місцевих рухливостей і (чи) пасивних зв'язків, позбавитися від них і повторити розрахунок  $W$  – в результаті повинна вийти фактична міра рухливості механізму.

3. Зробити заміну усіх вищих кінематичних пар фіктивними ланками і нижчими парами (заміну слід робити безпосередньо на кінематичній схемі механізму, використовуючи контактні нормалі і центри кривизни профілів); підтвердити розрахунком величину  $W$  – вона повинна залишитися колишньою.

Якщо кінематична схема складна для аналізу, можна для полегшення зображувати структурну схему за описаними раніше правилами (при цьому нумерація ланок обов'язково мають бути збережена).

4. Вибрати початкові ланки механізму (якщо вони не були задані умовою завдання): якщо після структурного дослідження механізму виконуватиметься його кінематичний розрахунок, то початкові ланки співпадають з вхідними, тобто з тими, яким задані закони руху; при наступному силовому аналізі механізму за початкові ланки приймають ті, до яких прикладені невідомі зовнішні сили.

Написати формулу будови механізму за типом; кожному варіанту вибору початкових ланок відповідає єдиний варіант цієї формули.

### **1.5. Заміна в плоских механізмах вищих пар нижчими.**

Як було показано вище, плоскі механізми можуть мати ланки, що входять як в нижчі, так і з вищі пари. При вивченні структури і кінематики плоских механізмів у багатьох випадках зручно замінювати вищі пари кінематичними ланцюгами або ланками, що входять тільки в нижчі обертальні і поступові пари V класу. При цій заміні повинна задовольнятися умова, щоб механізм, отриманий після такої заміни, мав колишній ступінь свободи і щоб збереглися відносні в даному положенні рухи усіх його ланок. Для будь-якого плоского механізму, що містить вищі кінематичні пари, можна побудувати так званий замінюючий механізм, який не містить вищих пар, але еквівалентний замінюваному механізму за наступними показниками:

- 1) в структурному відношенні (має ту ж рухливість);
- 2) відносно кінематики (при тих же законах руху вхідних ланок залишаються колишніми закони руху вихідних, зберігаються також траєкторії і закони руху по них усіх точок);
- 3) в силовому відношенні.

Розглянемо триланковий механізм, показаний на рисунку 1.8. Механізм складається з двох рухливих ланок 1 і 2, що входять в обертальні пари V класу A і B із стійкою 0 і вищу пару в точці C IV класу (перекочування з ковзанням), елементи ланок  $a$  і  $b$  які представляють собою кола радіусів  $O_1C$  і  $O_2C$ .

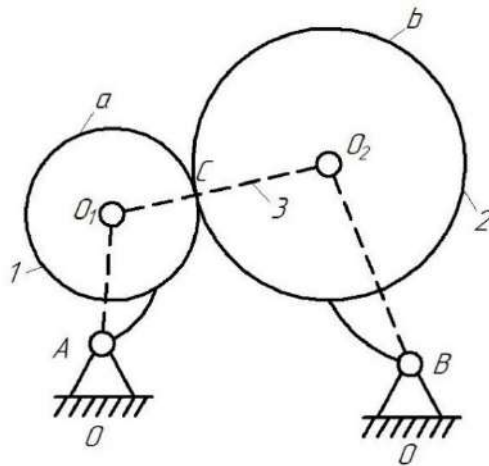


Рисунок 1.8 – Схема замінюючого механізму чотирьохланкового шарнірного механізму

Згідно з формулою (1.2) ступінь свободи механізму буде

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 1 = 1$$

Можна показати, що даний механізм може бути замінений еквівалентним йому шарнірним чотирьохланковим механізмом  $AO_1O_2B$ . Вища пара IV класу в точці  $C$  замінюється ланкою 3, що входить в точках  $O_1$  і  $O_2$  в обертальні пари V класу. Отриманий в результаті заміни механізм  $AO_1O_2B$  називається замінюючим механізмом.

Ступінь свободи  $W$  замінюючого механізму буде тим же, що і у заданого механізму.

Оскільки елементи  $a$  і  $b$  ланок є колами з центрами в точках  $O_1$  і  $O_2$ , то довжина  $O_1O_2$  ланки 3 виявляється постійною. Так само будуть постійними і довжини  $AO_1$  і  $BO_2$  ланок 1 і 2. Замінюючий механізм  $AO_1O_2B$  еквівалентний заданому і з точки зору законів руху ланок 1 і 2.

*Кінематична пара IV класу утворена двома сферами (кривими) заміщається однією ланкою з двома обертальними парами V класу.*

Розглянутий спосіб отримання замінюючого механізму можна узагальнити. Нехай заданий механізм з вищою парою, елементи ланок якої є задані криві  $a$  і  $b$  (рис. 1.9). Для побудови схеми замінюючого механізму проводимо нормаль  $NN$  в точці  $C$  торкання кривих і відмічаємо на ній центри  $O_1$  і  $O_2$  кривизни кривих  $a$  і  $b$ . Як і раніше центри кривизни  $O_1$  і  $O_2$  ми вважаємо шарнірами, що утворюють обертальні пари, в які входять умовні ланки  $AO_1$  і  $O_1O_2$ , з одного боку, і умовні ланки  $BO_2$  і  $O_1O_2$ , з іншого боку.

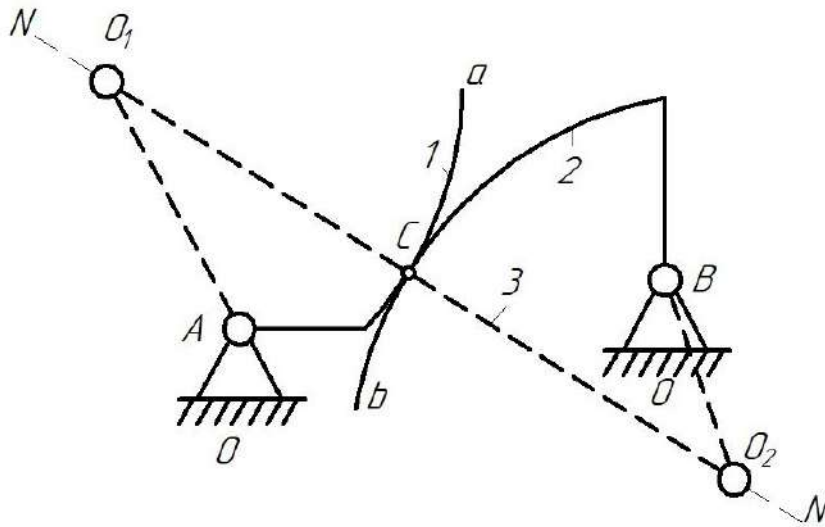


Рисунок 1.9 – Схема механізму з вищою парою та замінюючого його механізму

Описана заміна правильна для заданого положення основного механізму. У іншому положенні схема замінюючого механізму залишиться тією ж, розміри ж його ланок зміняться, бо центри кривизни  $O_1$  і  $O_2$  змістяться.

З диференціальної геометрії відомо, що коло кривизни в точці дотику з кривою і сама крива еквівалентні до похідних другого порядку включно, і тому замінюючий механізм еквівалентний основному в такій же мірі, положення, швидкості і прискорення однойменних точок того і іншого механізму будуть однаковими.

Якщо один з дотичних елементів – деяка крива  $a$ , а другий – пряма  $b$  (рис. 1.10), то центр кривизни другого профілю буде нескінченно видалений. Умовна ланка 3 в цьому випадку входить в центрі кривизни  $O_1$  елементу 1 в обертальну пару V класу. Друга обертальна пара, в яку повинна входити ланка 2, має вісь обертання нескінченно видаленою і переходить в поступальну пару також V класу.

*Кінематична пара IV класу утворена сферою (кривій) і прямою заміщається однією ланкою з одним обертальним і одним поступовим рухом пар V класу.*

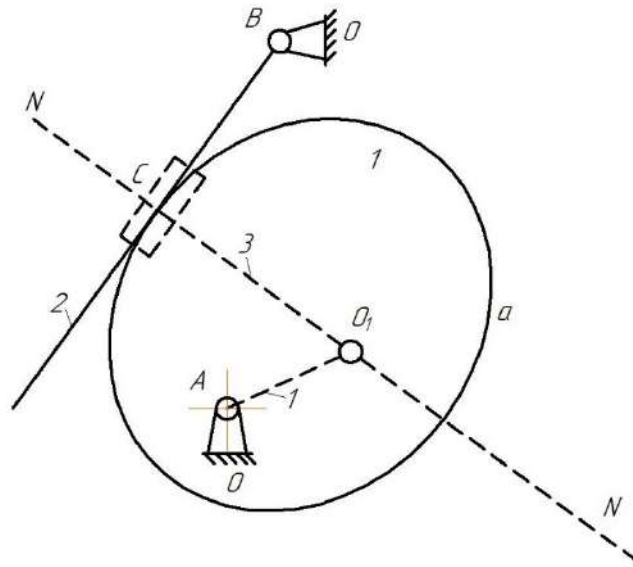


Рисунок 1.10 – Схема механізму з вищою парою та замінюючого його механізму

Далі можливий випадок, коли один з дотичних елементів – крива  $a$ , а інший – точка  $C$  (рис. 1.11). В цьому випадку центр кривизни  $O_2$  елементу  $C$  співпадає з самою точкою  $C$ , і тому умовна ланка 3 повинно входити в дві обертальні пари  $V$  класу – в обертальну пару з віссю, що проходить через центр кривизни  $O_1$  криволінійного елементу  $a$ , і у обертальну пару з віссю, що проходить через точку  $C$ .

Кінематична пара  $IV$  класу утворена кривою і точкою заміщається однією ланкою з двома обертальними парами  $V$  класу.

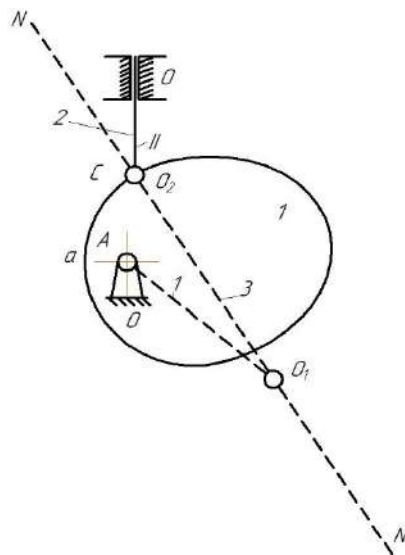


Рисунок 1.11 – Схема механізму з вищою парою та замінюючого його механізму.

У тому випадку, коли одним елементом є пряма АС, а іншим - точка З (рисунок 1.12), заміна зводиться до постановки умовної ланки 4, що входить в одну поступальну і одну обертальну пари.

Вісь обертальної пари і вісь руху поступальної пари повинні проходити через точку дотичної С. Замінюючий механізм показаний на рисунку 1.13.

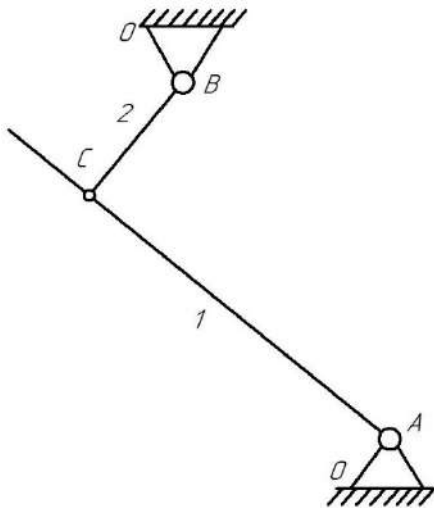


Рисунок 1.12 – Схема механізму з вищою парою, елементи ланок якої - пряма і точка

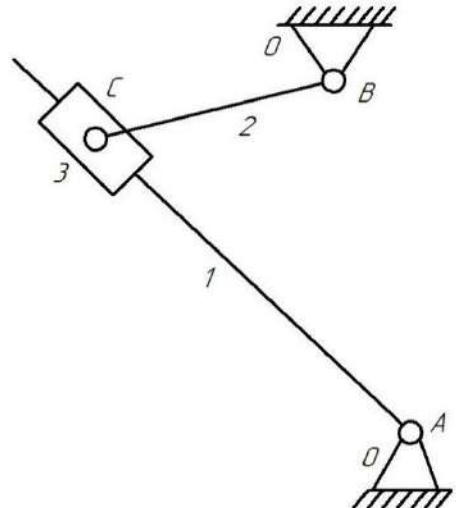


Рисунок 1.13 – Схема замінюючого механізму, еквівалентного механізму

Таким чином, *будь-який плоский механізм з вищими парами IV класу може бути замінений механізмом, до складу якого входять тільки нижчі кінематичні пари V класу.*

Якщо усі вищі пари IV класу в плоскому механізмі замінені нижчими парами, то структурна формула для замінюючого механізму отримає вид

$$W = 3n - 2p_5$$

### 1.6. Приклад розв'язання задач.

Провести структурний аналіз шестиланкового механізму (рис.1.4).

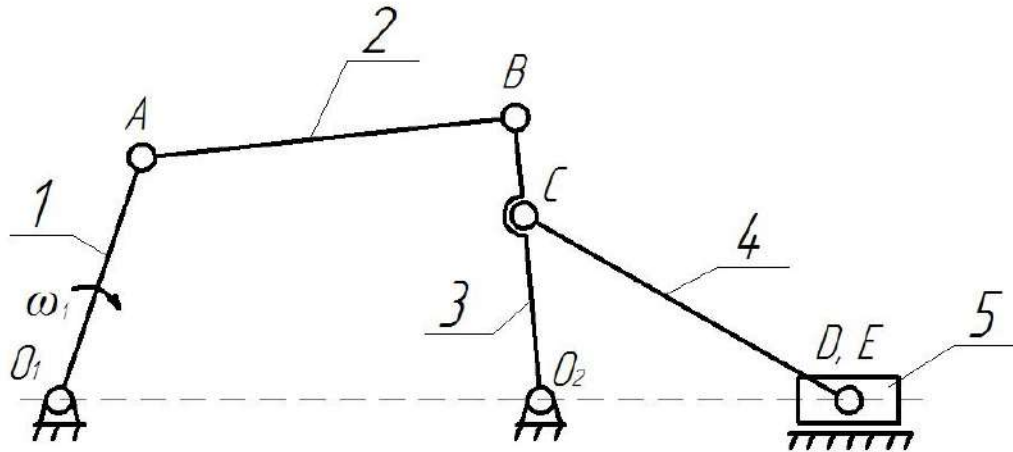


Рисунок 1.4 – Шестиланковий механізм

Рішення:

1) Механізм складається з шістьох ланок (табл. 1.2) і 7-ох кінематичних пар (табл. 1.3).

Таблиця 1.2

Характеристика ланок механізму.

Порядковий №	Назва	Характер руху
0	Стояк	Нерухома
1	Кривошип	Обертальний
2	Шатун	Плоскопаралельний
3	Коромисло	коливальний
4	Шатун	Плоскопаралельний
5	Повзун	Поступальний

Таблиця 1.3

Характеристика кінематичних пар механізму.

№	Позначення	Номери ланок, що утворюють її	Вид (характер відносного руху ланок пари)	Клас
1	$O_1$	0 – 1	Обертальна	5
2	A	1 – 2	Обертальна	5
3	B	2 – 3	Обертальна	5
4	$O_2$	0 – 3	Обертальна	5
5	C	3 – 4	Обертальна	5
6	D	4 – 5	Обертальна	5
7	E	0 – 5	Поступальна	5

2) Ступінь рухомості механізму визначимо за формулою Чебишова:

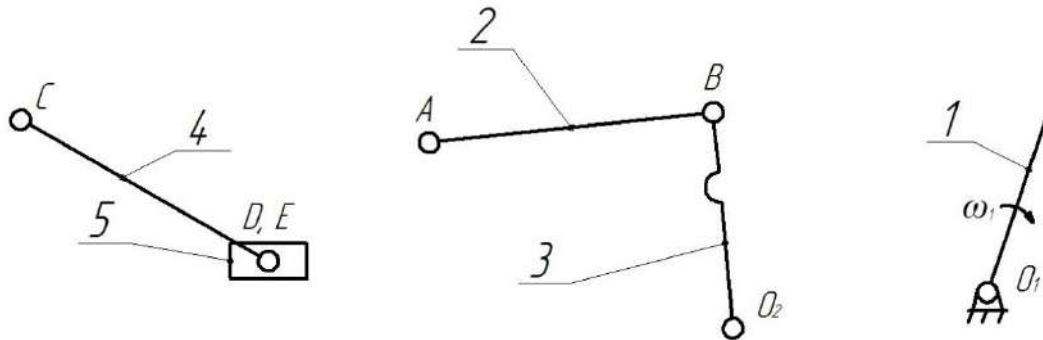
$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 - 0 = 1$$

де  $n=5$  - число рухомих ланок;

$p_5=7$  – число кінематичних пар 5-го класу;

$p_4=0$  – число кінематичних пар 4-го класу.

3) Визначимо клас механізму. Для цього розкладемо схему механізму на структурні групи і механізм I-го класу у зворотному порядку до його складання.



Група II-го класу 2-го виду.

Група II-го класу 1-го виду.

Механізм I-го класу.

Рисунок 1.5 – Групи Ассура

Оскільки механізм у своєму складі має дві групи Ассура 2-го класу, то він є механізмом II-го класу.

4) Формула будови механізму має вид (у скобках вказуються номери ланок, які складають групу; в індексі понизу вказується номер виду групи 2-го класу):

$$I(0,1) \leftarrow II_1(2,3) \leftarrow II_2(4,5).$$

### Контрольні питання

1. Що таке структурна схема механізму?
2. Що таке кінематична пара?
3. За якими ознаками і як класифікуються кінематичні пари?
4. Що таке кінематичні ланцюги і за якими ознаками вони класифікуються?
5. Що таке структурні групи, як визначається клас і порядок структурної групи?
6. На скільки та які модифікації поділяються структурні групи II-го класу 2-го порядку?

7. За якою формулою визначається ступінь рухомості плоского механізму?
8. Чому дорівнює ступінь рухомості структурної групи (групи Ассура)?
9. У чому полягає принцип утворення плоских механізмів?
10. Як визначається клас механізму?
11. Який зміст і порядок проведення структурного аналізу механізму?

## **ТЕМА 2 КІНЕМАТИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ МЕХАНІЗМІВ**

### **ПЛАН**

- 2.1. Мета та методи кінематичного аналізу.
- 2.2. Побудова планів положення механізмів.
- 2.3. Графоаналітичний метод кінематичного аналізу.
- 2.4. Дослідження важільних механізмів методом кінематичних діаграм.

### **2.1. Мета та методи кінематичного аналізу.**

Основним призначенням механізму є виконання ним необхідних рухів. Ці рухи можуть бути описані за допомогою його кінематичних характеристик. До них відносять координати точок і ланок, їх траєкторії, швидкості і прискорення. До кінематичних характеристик відносяться і такі характеристики, які не залежать від закону руху початкових ланок, визначаються тільки будовою механізму і розмірами його ланок і в загальному випадку залежать від узагальнених координат. Це функції положення, кінематичні передавальні функції швидкості і прискорення.

Функцією положення механізму називається залежність кутового або лінійного переміщення точки або ланки механізму від узагальненої координати.

Кінематичними передавальними функціями механізму називаються похідні від функції положення по узагальненій координаті. Перша похідна називається першою передавальною функцією або аналогом швидкості, друга похідна – другою передавальною функцією або аналогом прискорення.

*Кінематичними характеристиками механізму називають похідні від функції положення за часом. Перша похідна називається швидкістю (позначається  $V$ ,  $\omega$ ), друга - прискоренням (позначається  $a$ ,  $\varepsilon$ ).*

Кінематичний аналіз механізмів включає питання вивчення руху ланок без урахування сил, діючих на них, тобто розглядається рух ланок з чисто геометричної точки зору, з обліком тільки чинника часу.

**Кінематичний аналіз** – вивчення руху ланок механізму незалежно від сил, діючих на ці ланки.

Кінематичний аналіз проводять в порядку побудови механізму. Тому кінематичне дослідження проводять після завершення структурного аналізу, коли позитивно вирішено питання про працездатність механізму.

*Завданнями кінематичного аналізу є визначення кінематичних параметрів механізму:*

- положень ланок і траєкторій їх точок;
- лінійних і кутових швидкостей;
- лінійних і кутових прискорень.

**Мета кінематичного аналізу** - визначення швидкостей точок і кутових швидкостей ланок, визначення прискорень точок і кутових прискорень ланок механізму.

Знайти кінематичні параметри необхідно для оцінки роботи існуючої машини або для синтезу нових.

Визначення траєкторій точок ланок допомагає з'ясувати: картину взаємного положення ланок в проміжку одного періоду руху і намітити контур корпусу механізму, що особливо важливо при переміщенні ланок усередині нього, коли існує загроза зіткнення ланок; для раціонального підбору розмірів ланок, встановлення відповідності рухів робочих ланок машини правильної послідовності технологічного процесу і тому подібне

Знання швидкостей різних точок ланок дозволяє визначити потужність, дію сил і кінетичну енергію, приведену масу для розрахунку крутня. Адже від швидкості різцетримача стругального верстата залежить стійкість різального інструменту, продуктивність верстата.

Прискорення точок ланок використовуються при визначенні сил інерції. У швидкохідних машинах сили інерції в десятки, навіть сотні разів перевищують силу тяжіння ланок. Це потрібно враховувати при проектуванні і експлуатації машин.

Один з основних якісних показників вимірювальних приладів являється їх кінематична точність.

Залежно від складності механізму, що вивчається, і типу вирішуваної задачі передбачені різні методи кінематичного аналізу.

Для кінематичного дослідження важільних механізмів зручно використовувати графоаналітичні методи (планів швидкостей і прискорень) для кулачкових механізмів - графічні методи

(кінематичних діаграм) для зубчастих і механізмів з гнучким зв'язком - аналітичні методи.

Графічні методи характеризуються наочністю і відносною простотою, але не забезпечують необхідну точність.

У випадках, коли по умові завдання необхідно визначити кінематичні параметри з високою точністю, потрібно користуватися аналітичними методами дослідження, тим більше що наявність швидкодіючої обчислювальної техніки сприяє їх поширенню і вдосконаленню. Слід зазначити, що значення аналітичних методів кінематичного аналізу механізмів особливо набуло значення у зв'язку з можливістю автоматизації досліджень завдяки використанню обчислювальної техніки.

Експериментальні методи дослідження дозволяють перевірити правильність вибору розрахункових схем, методів і величин обчислювальних параметрів.

Для створення механізмів, що якнайкраще відповідають поставленим вимогам, потрібно знати методи визначення кінематичних характеристик механізмів.

Розрізняють наступні методи визначення кінематичних характеристик механізмів.

**1. Аналітичний (геометричний) метод** – заснований на аналізі векторних контурів кінематичних ланцюгів механізмів, представлених в аналітичному або графічному виді. Аналітичний метод (полягає у складанні та вирішенні рівнянь) – самий точний, але найбільш складний; застосовують у тих випадках, коли неможливо отримати потрібну точність рішення іншим методом (наприклад при малих переміщеннях ланок). Цим методом треба користуватися у випадках, коли за умовою задачі необхідно визначити кінематичні параметри з будь-якою наперед заданою точністю, тим паче що наявність швидкодіючої обчислювальної техніки сприяє автоматизації методу, поширенню і вдосконаленню.

$$x_A = l_1 \cdot \cos \varphi_1$$

$$y_A = l_1 \cdot \sin \varphi_1$$

$$V_{x_A} = -l_1 \cdot \omega_1 \cdot \sin \varphi_1$$

$$V_{y_A} = l_1 \cdot \omega_1 \cdot \cos \varphi_1$$

**2. Метод перетворення координат точок механізму**, вирішуваний в матричній або тензорній формі – зазвичай застосовується для дослідження кінематичних ланцюгів маніпуляторів промислових роботів з використанням ЕОМ. Застосування ЕОМ для

кінематичного аналізу механізмів пов'язане з розробкою відповідних алгоритмів і програм розрахунку. Найпростіше такі алгоритми реалізуються з використанням рівнянь перетворення координат в матричній формі запису необхідних операцій обчислення.

При цьому методі вибирають деяке число систем координат, достатнє для математичного опису геометричної форми ланок і відносного руху ланок в кожній кінематичній парі. Число систем координат визначається числом елементів ланок, що утворюють кінематичні пари. Нерухома система координат  $x^{(0)} y^{(0)} z^{(0)}$  пов'язана із стійкою. У кожній кінематичній парі вибирають дві системи координат (спосіб 1) або одна система координат (спосіб 2). При першому способі дві системи координат відносяться до елементів пари ланок, що утворюють цю пару. При другому способі кожній кінематичній парі відповідає прямокутна система координат, одна з осей якої пов'язана з характерними ознаками ланки, наприклад осью лінійною. Для прикладу слід звернутися до схеми маніпулятора, що імітує рух руки людини, зображеної на рисунку 2.1

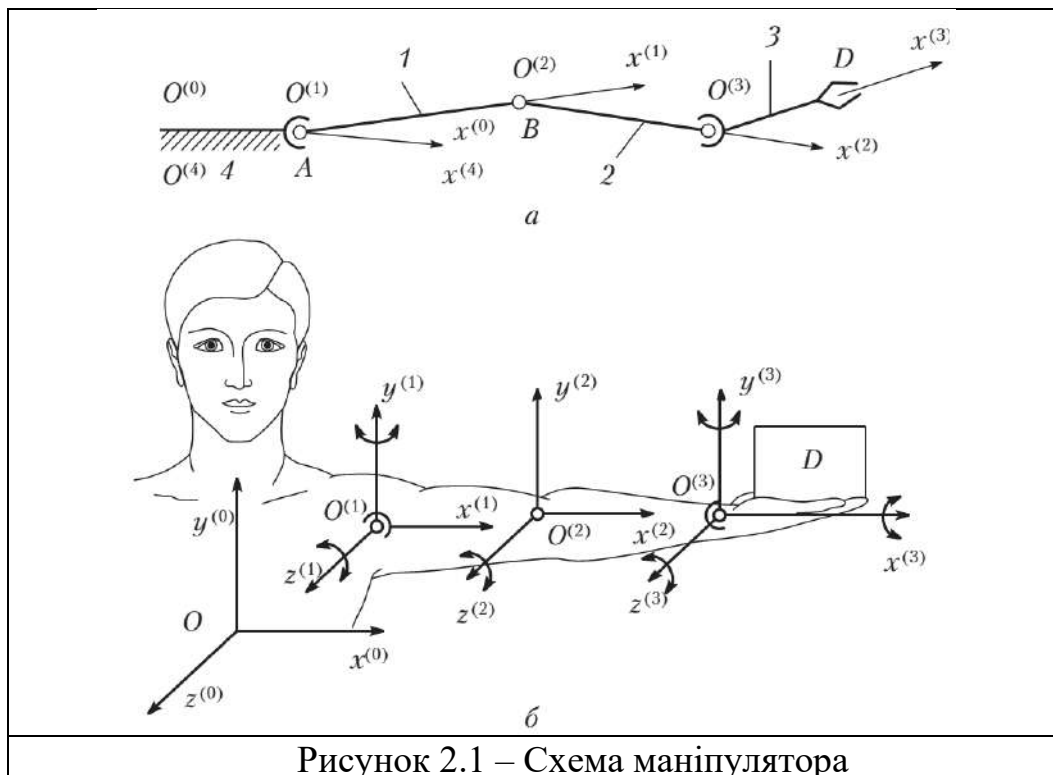


Рисунок 2.1 – Схема маніпулятора

На рис. 2.1, а показані координатні осі  $\theta_1 x^{(0)}$ ,  $\theta_2 x^{(2)}$ ,  $\theta_3 x^{(3)}$ ,  $\theta_4 x^{(4)}$  (чи  $\theta_0 x^{(0)}$ ) чотирьохланкового (1, 2, 3, 4) відкритого кінематичного ланцюга, що моделює структуру руки людини (рис. 2.1, б). Вісь  $z^{(i)}$  направляють уздовж осі пари, а вісь  $y^{(i)}$  доповнює праву систему координат  $\theta^{(i)} x^{(i)} y^{(i)} z^{(i)}$ .

Початок координат кожної  $i$ -ої локальної координатної системи поєднують з тією кінематичною парою, якою ця ланка сполучена з попередньою ланкою. Для плоских механізмів осі  $z^{(1)}, z^{(2)}, \dots, z^{(n)}$  паралельні між собою, оскільки вони перпендикулярні базовій площині, в якій розглядається рух ланок плоского механізму.

Перехід від  $i$ -ої локальної координатної системи до іншої  $(i+1)$  системи визначається рівняннями перетворення декартових прямокутних координат, в загальному випадку - перенесення і повороту координатних осей.

**3. Метод планів положень, швидкостей і прискорень,** заснований на рішенні векторних рівнянь, що зв'язують кінематичні параметри, в графічному виді або аналітичній формі. Метод планів або графоаналітичний метод, полягає у побудові планів швидкостей і прискорень механізму, у більшості випадках забезпечують необхідну точність, що дає змогу визначити траєкторію, швидкість та прискорення усіх точок механізму, але потребує виконання великого обсягу креслярських робіт, тому що необхідно будувати плани для ряду послідовних положень механізму, щоб простежити зміну швидкості та прискорення за цикл.

**4. Метод кінематичних діаграм** - метод чисельної інтеграції і диференціювання (вирішуваний за допомогою ЕОМ або графічно). Метод кінематичних діаграм – це графічний метод кінематичного дослідження (полягає у побудові кінематичних діаграм – графіків переміщень, швидкостей та прискорень будь-якої ланки механізму чи окремої її точки у функції часу або переміщення ведучої ланки) характеризується наочністю і відносною простотою, але не забезпечує необхідну точність і дають змогу дослідження тільки окремої точки ланки, а не всього механізму в цілому.

**5. Експериментальний метод.** При експериментальному методі дослідження механізмів кінематичні характеристики точок і ланок механізму реєструються за допомогою датчиків. Датчики реєструють, а потім і перетворюють кінематичні параметри в пропорційні електричні сигнали, які після посилення реєструються різними приладами. Останніми роками для реєстрації і обробки результатів експериментальних досліджень широко використовуються ПЕВМ.

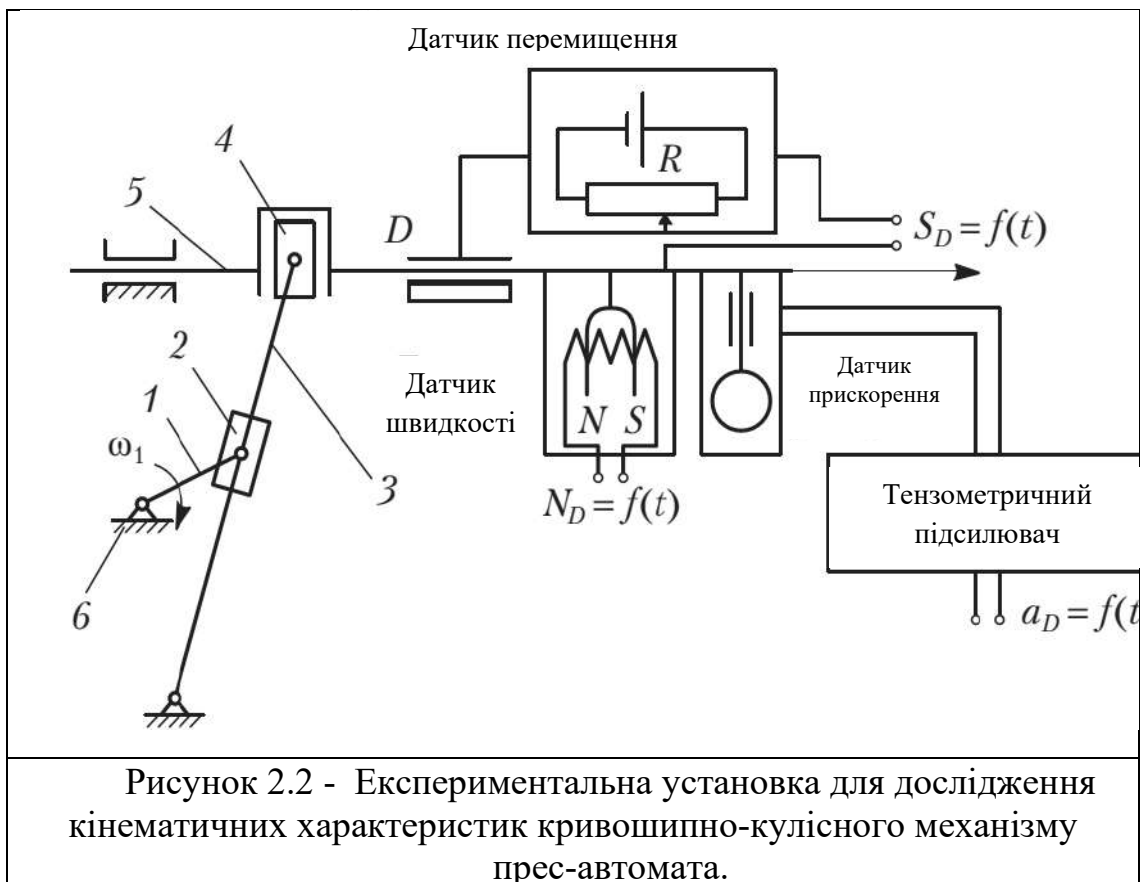
На рис. 2.2 показана експериментальна установка для дослідження кінематичних характеристик кривошипно-кулісного механізму прес-автомата.

У цій експериментальній установці використовуються для вимірів:

- переміщення вихідної ланки – датчик потенціометра переміщення, в якому пропорційно положенню движка потенціометра змінюється його опір;

- швидкості вихідної ланки – індукційний датчик швидкості, в якому напруга на кінцях котушки що рухається в полі постійного магніта пропорційно швидкості котушки;

- прискорення вихідної ланки – тензометричний акселерометр. Він складається з пластинчатої пружини, один кінець якої закріплений на вихідній ланці механізму, а на другому закріплена маса. На пластину наклеєні дротяні тензоперетворювачі. При русі вихідної ланки з прискоренням інерційність маси викликає вигин пластини, деформацію тензоперетворювачів і зміна їх опору, пропорційна прискоренню вихідної ланки.



Для проведення кінематичного аналізу треба мати *кінематичну схему механізму* – умовне зображення ланок і кінематичних пар, що утворюють механізм в масштабі; закон руху провідної ланки і розміри ланок.

*Допущення кінематичного аналізу механізму:*

- ланки механізму – абсолютно жорсткі;
- кутова швидкість провідної ланки – постійна, тобто  $\omega = const$  і дорівнює проєктованій середній кутовій швидкості.

Оскільки ми використовуватимемо переважно графічні методи, визначимо поняття *масштабного коефіцієнта фізичної величини*,

який є відношенням чисельного значення фізичної величини у властивих їй одиницях до довжини відрізка в міліметрах, що зображує цю величину. Його означають буквою  $\mu$  з індексом того параметра, який зображений графічно. Масштаб кінематичної схеми підбираються таким чином, щоб схема була зрозуміла і легко читалася і була виконана в масштабі по ГОСТ 2.302-68 ЄСКД (Єдина система конструкторської документації).

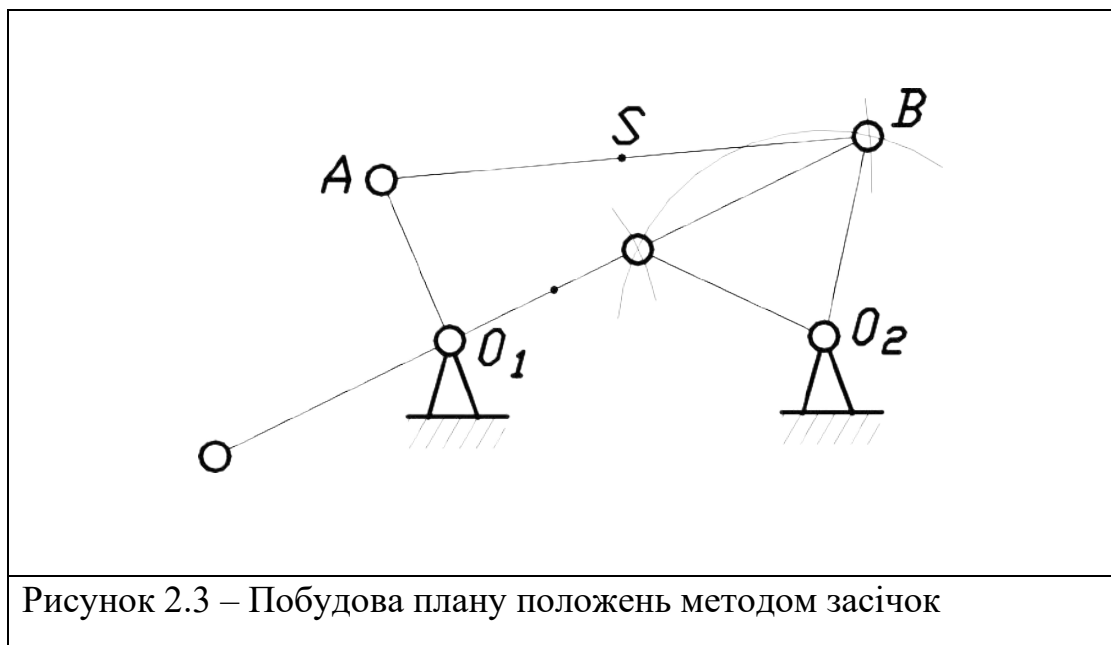
Закон руху провідної ланки задається у виді:  $\varphi = f(t)$ ,  $V = f(t)$ ,  $\omega = f(t)$ . Механізм досліджують в деяких (частіше в 12 положеннях) положеннях початкової (ведучого) ланки.

## 2.2. План положень механізму – графічне зображення взаємного розташування ланок механізму в певний момент часу.

Для проведення кінематичного аналізу механізму треба мати його кінематичну схему; закон руху й кутову швидкість ведучої ланки, розміри ланок та положення на них окремих точок (наприклад, центрів мас).

Кінематичні характеристики важільного механізму можуть бути визначені і за допомогою графоаналітичного методу, або, як його частіше називають, методу планів положень, швидкостей і прискорень.

**План положень механізму** – графічне зображення взаємного розташування ланок механізму в певний момент часу. Для цього використовують метод засічок.



Після побудови декількох поєднаних планів механізму при необхідності можна визначити графічно траєкторії характерних точок ланок, що мають складний рух, наприклад, центру ваги  $S$  шатуна  $AB$ .

Кожен механізм створений для виконання певної роботи, тому має робочий або холостий рух. На плані положень можна визначити, де механізм виконує робочий або холостий хід. До важеля, який кріпиться до кривошипа, шатуна або коромисла, прикладена сила корисного опору. Якщо сила корисного опору направлено проти напрямку руху важеля – механізм виконує **робочий хід**. Коли напрямок рухів важеля і сили опору збігаються – рух називається **холостим**.

У завдання на побудову планів положень входять:

- 1) структурна схема механізму та закон руху веденої ланки – кривошипа (рис.2.4);
- 2) розміри ланок, відстань до центрів мас ланок, центр ваги повзуна прийняти в середині ланки, кут нахилу важеля, напрямок і місце прикладання сили корисного опору (табл. 2.1).

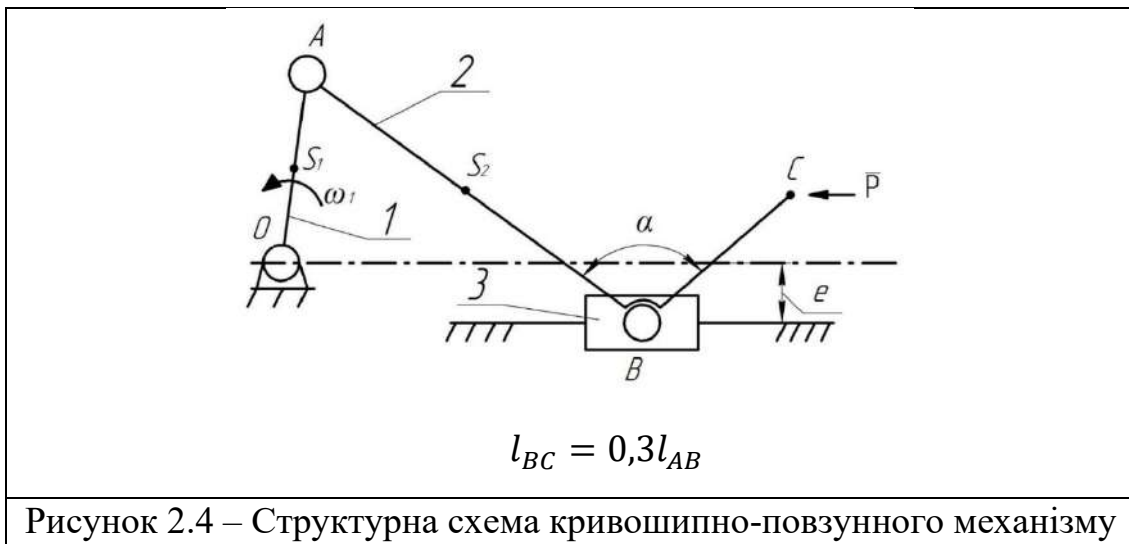


Рисунок 2.4 – Структурна схема кривошипно-повзунного механізму

Параметри, що потрібні для побудови кінематичної схеми наведені в таблиці 2.1:

Таблиця 2.1

Параметр	Позначення	Одиниця виміру
Довжина кривошипу	$L_{OA}$	м
Довжина шатуна	$L_{AB}$	м
Відстань центра мас кривошипа	$L_{OS_1}$	м
Відстань центра мас шатуна	$L_{AS_2}$	м
Ексцентриситет	$e$	м
Кутова швидкість кривошипа	$\omega_1$	$c^{-1}$
Кут нахилу важеля	$\alpha$	град
Сила корисного опору	$P$	Н

Обираємо масштаб плану положень механізму таким чином щоб він відповідав машинобудівельному масштабу:

$$\mu_l = \frac{l_{OA}}{OA'}, \frac{\text{м}}{\text{мм}}$$

$OA$  – обираємо довільно.

Визначаємо довжину ланок механізму у масштабі  $\mu_l$ .

$$AB = \frac{l_{AB}}{\mu_l}, \text{мм}$$

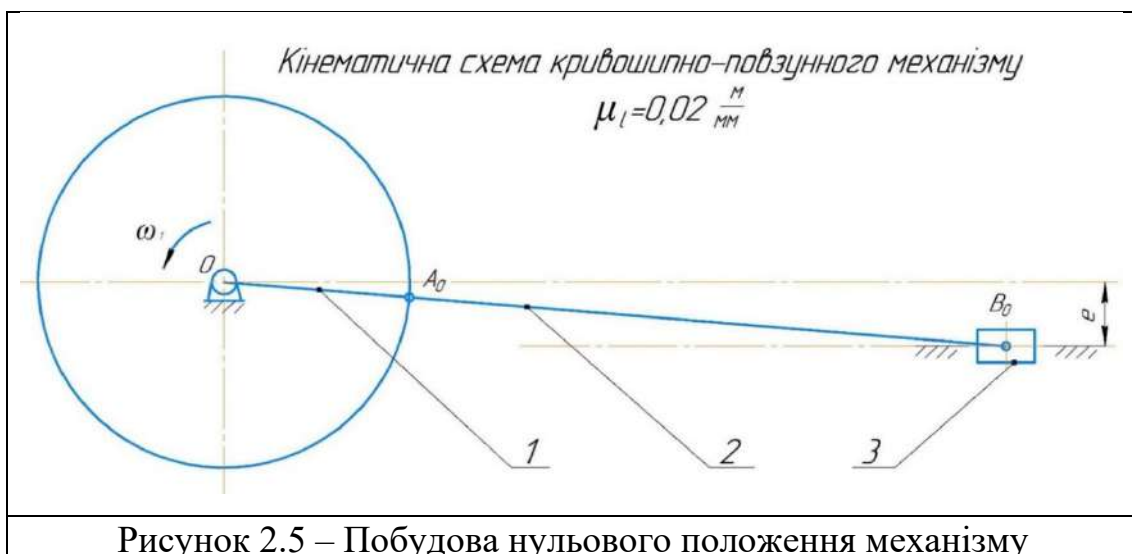
$$OS_1 = \frac{l_{OS_1}}{\mu_l}, \text{мм}$$

$$AS_2 = \frac{L_{AS_2}}{\mu_l}, \text{мм}$$

$$BC = \frac{0,3 \cdot l_{AB}}{\mu_l}, \text{мм}$$

$$E = \frac{l_e}{\mu_l}, \text{мм}$$

У прийнятому масштабі викреслюємо схему механізму. Закріплюємо стійку в точці  $O$  та проводимо горизонтальну вісь. Одкладаємо величину  $OA$  в прийнятій масштабі. Проводимо коло радіусом  $OA$  (траєкторію руху точки  $A$  кривошипа). Далі, згідно з кінематичною схемою механізму, відкладаємо відстань ексцентриситету  $e$  та проводимо вісь, траєкторію руху повзуна.



За нульове положення точки  $B$  приймаємо те, при якому кривошип  $OA$  знаходиться на одній лінії з шатуном  $AB$ . Тобто  $OA+AB$  та відкладаємо цю відстань від точки  $O$  до лінії руху повзуна, знаходимо точку  $B_0$  та  $A_0$  (рис.2.5).

Для побудови одинадцятьох положень кривошипу механізму розділимо траєкторію, описану точкою  $A$  кривошипу  $OA$  на 12 рівних частин, починаючи з точки  $A_0$ . З'єднуємо отримані точки з точкою  $O$ . Позначаємо точки  $A$  згідно напрямку кутової швидкості кривошипу  $\omega_1$  (рис.2.6).

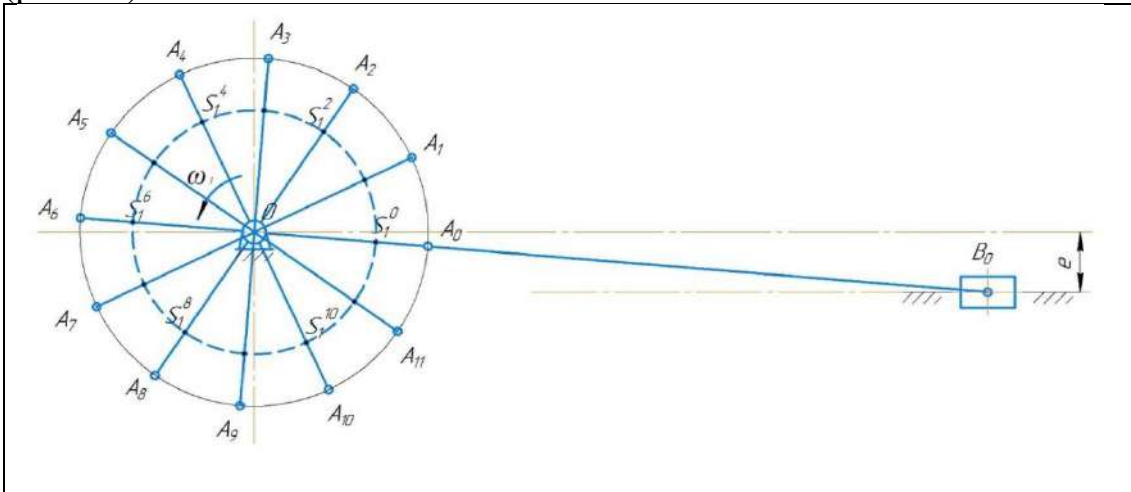


Рисунок 2.6 – Побудова дванадцятьох положень кривошипу та його центру мас

Далі з центру обертання кривошипу проводимо коло радіусом  $OS_1$  та отримуємо центр мас кривошипу  $S_1$  для дванадцятьох положень (рис. 2.6).

Далі креслимо 11 положень шатуна  $AB$  (рис. 2.7). Для цього довжину шатуна  $AB$  відкладаємо від кожної точки  $A$  ( $A_1, A_2, A_3$  і т.д.) до лінії – траєкторії руху повзуна та отримуємо точки  $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ .

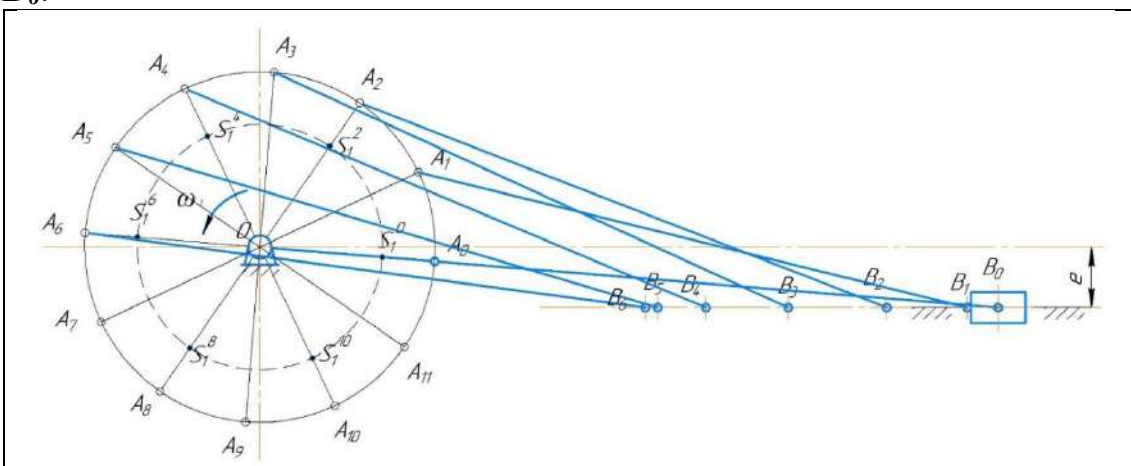


Рисунок 2.7 – Побудова положень шатуна



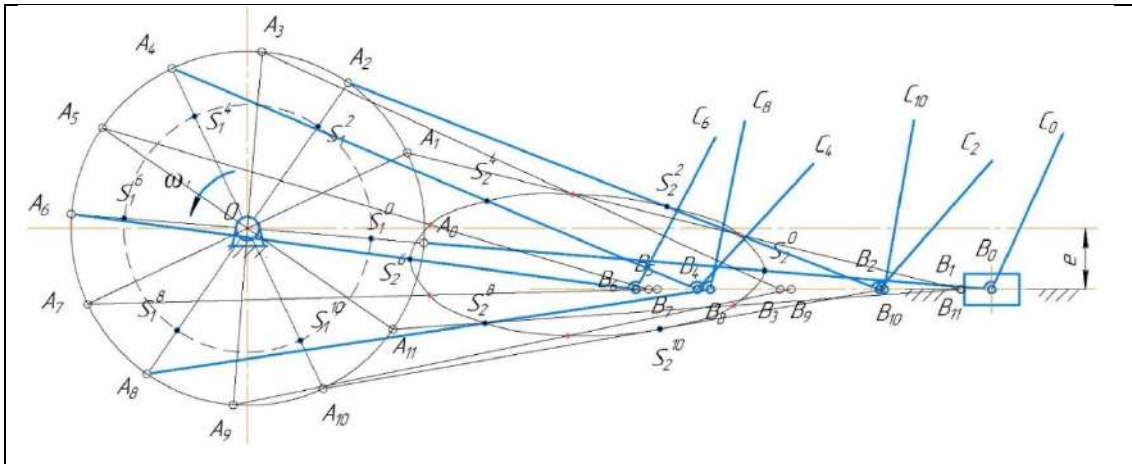


Рисунок 2.10 – Побудова важеля  $BC$

В результаті ми отримуємо 12 положень кривошипно-повзунного механізму і виділяємо три положення – нульове, робочий хід та холостий (рис. 2.11).

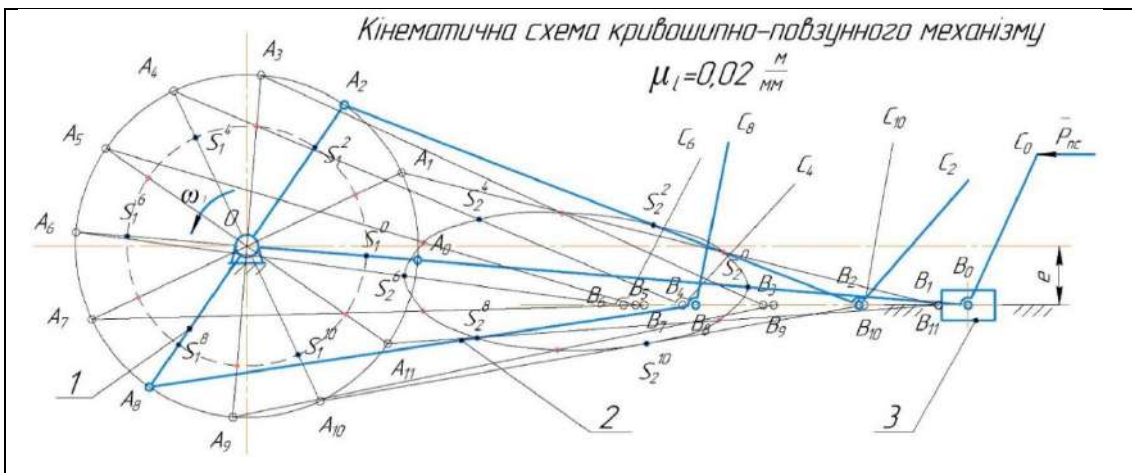


Рисунок 2.11 – Побудова дванадцятих положень механізму

Побудова кінематичної схеми кривошипно-коромислового механізму.

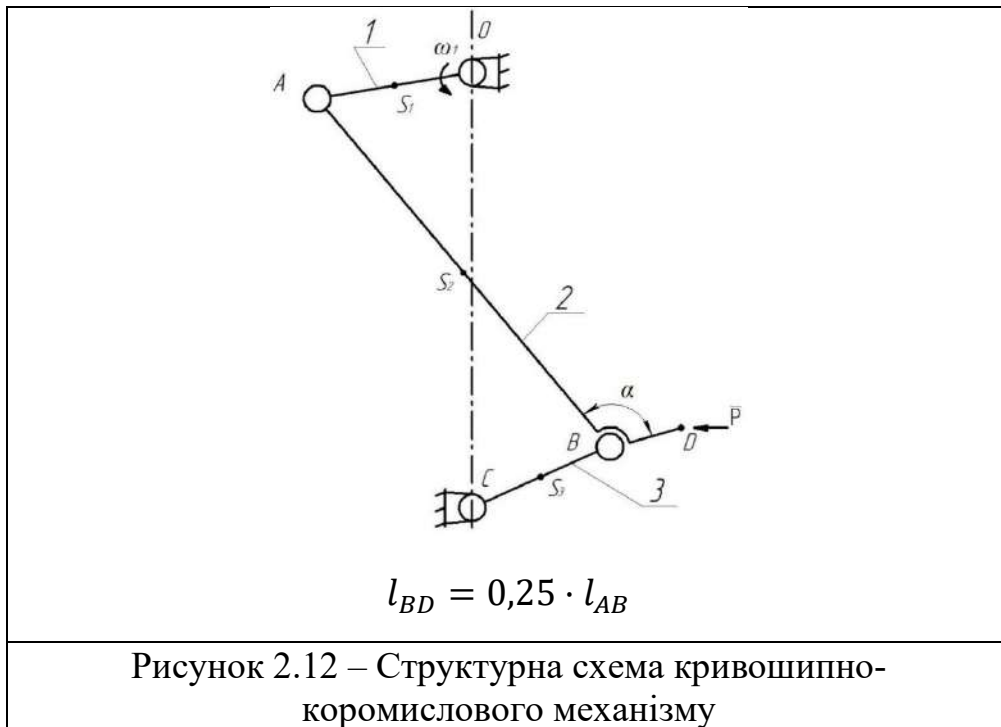


Рисунок 2.12 – Структурна схема кривошипно-коромислового механізму

Параметри, що потрібні для побудови кінематичної схеми наведені в таблиці 2.2:

Таблиця 2.2

Параметр	Позначення	Одиниця виміру
Довжина кривошипу	$L_{OA}$	м
Довжина шатуна	$L_{AB}$	м
Довжина коромисла	$L_{BC}$	м
Довжина стояка	$L_{OC}$	м
Відстань центра мас шатуна	$L_{AS_2}$	м
Відстань центра мас коромисла	$L_{CS_3}$	м
Кутова швидкість кривошипа	$\omega_1$	$c^{-1}$
Кут нахилу важеля	$\alpha$	град
Сила корисного опору	$P$	Н

Обираємо масштаб плану положень механізму таким чином щоб він відповідав машинобудівельному масштабу:

$$\mu_l = \frac{l_{OA}}{OA} = \frac{\text{м}}{\text{мм}}$$

$OA$  – обираємо довільно.

Визначаємо довжину ланок механізму у масштабі  $\mu_l$ .

$$AB = \frac{l_{AB}}{\mu_l} = \text{мм}$$

$$BC = \frac{l_{BC}}{\mu_l} = \text{мм}$$

$$OC = \frac{l_{OC}}{\mu_l} = \text{мм}$$

$$BD = \frac{0,25 \cdot l_{AB}}{\mu_l} = \text{мм}$$

$$OS_1 = \frac{OA}{2} = \text{мм}$$

$$AS_2 = \frac{L_{AS_2}}{\mu_l} = \text{мм}$$

$$CS_3 = \frac{L_{CS_3}}{\mu_l} = \text{мм}$$

У прийнятому масштабі викреслюємо схему механізму. Закріплюємо стійку в точці  $O$  та проводимо вертикальну вісь. Одкладаємо величину  $OA$  в прийнятій масштабі. Проводимо коло радіусом  $OA$  (траєкторію руху точки  $A$  кривошипа). Далі, згідно з кінематичною схемою механізму, відкладаємо відстань  $OC$ . З точки  $C$ , згідно схеми проводимо дугу радіусом  $BC$  – траєкторію руху коромисла. За нульове положення точки  $B$  приймаємо те, при якому кривошип  $OA$  знаходиться на одній лінії з шатуном  $AB$ . Тобто  $OA+AB$  та відкладаємо цю відстань від точці  $O$  до дуги руху коромисла, знаходимо точку  $B_0$  та  $A_0$  (рис.2.13).

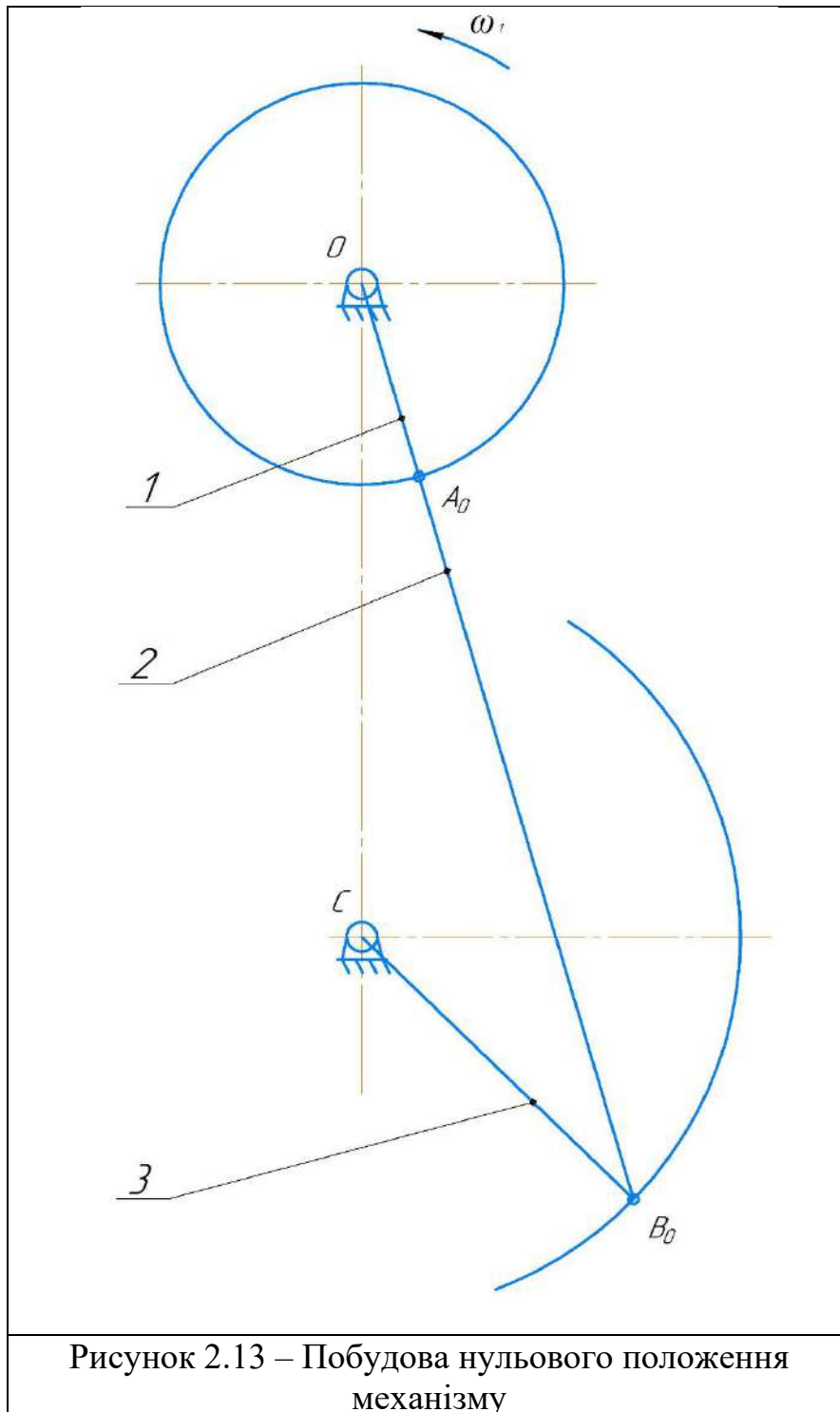


Рисунок 2.13 – Побудова нульового положення механізму

Для побудови одинадцятьох положень кривошипу механізму розділимо траєкторію, описану точкою  $A$  кривошипу  $OA$  на 12 рівних частин, починаючи з точки  $A_0$ . З'єднуємо отримані точки з точкою  $O$ . Позначаємо точки  $A$  згідно напрямку кутової швидкості кривошипу  $\omega_1$  (рис.2.14).

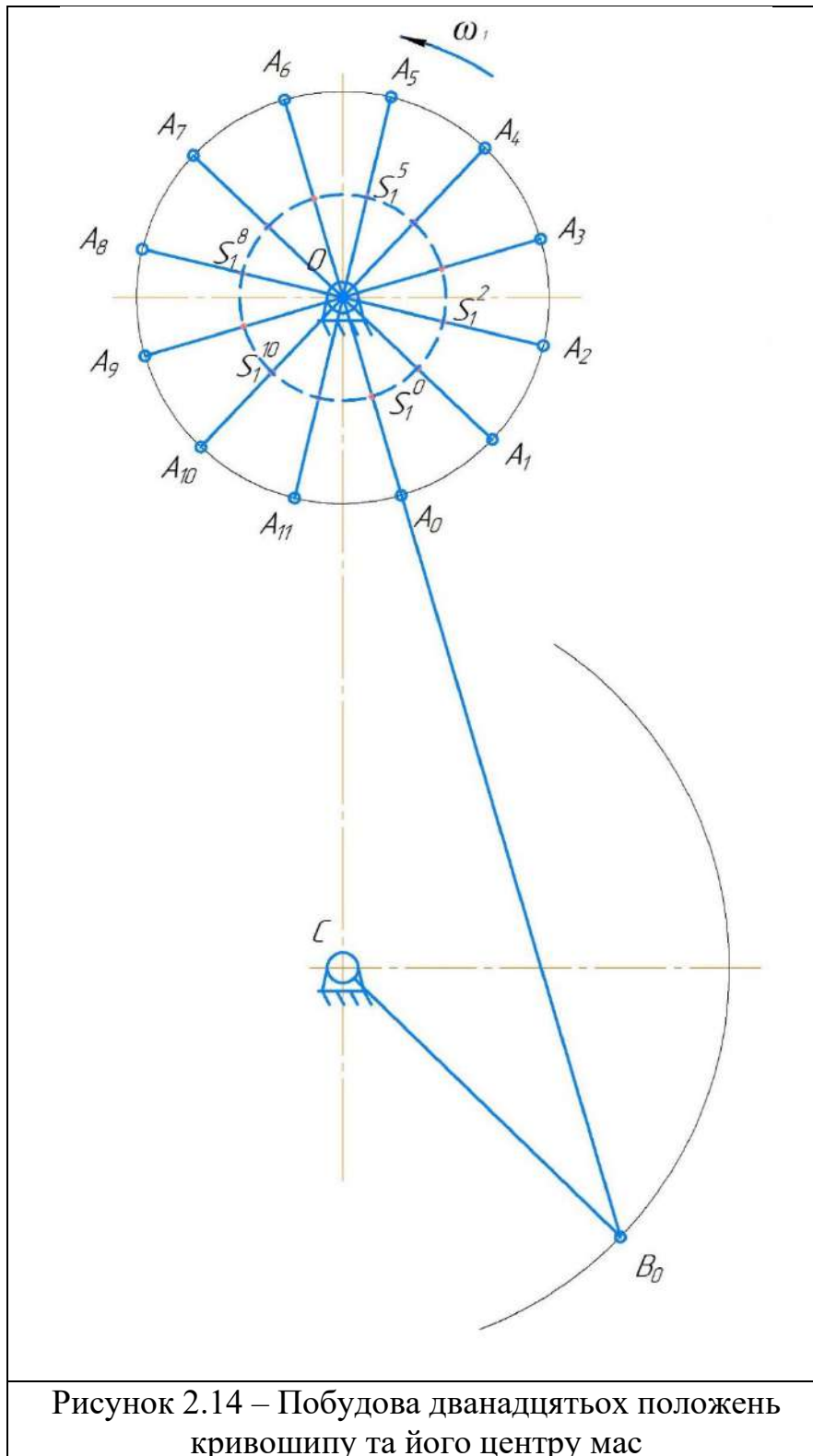


Рисунок 2.14 – Побудова дванадцятьох положень кривошипу та його центру мас

Далі з центру обертання кривошипу проводимо коло радіусом  $OS_1$  та отримуємо центр мас кривошипу  $S_1$  для дванадцятьох положень (рис. 2.14).

Далі креслимо 11 положень шатуна  $AB$  (рис. 2.15). Для цього довжину шатуна  $AB$  відкладаємо від кожної точки  $A$  ( $A_1, A_2, A_3$  і т.д.)

до дуги – траєкторії руху коромисла та отримуємо точки  $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ .

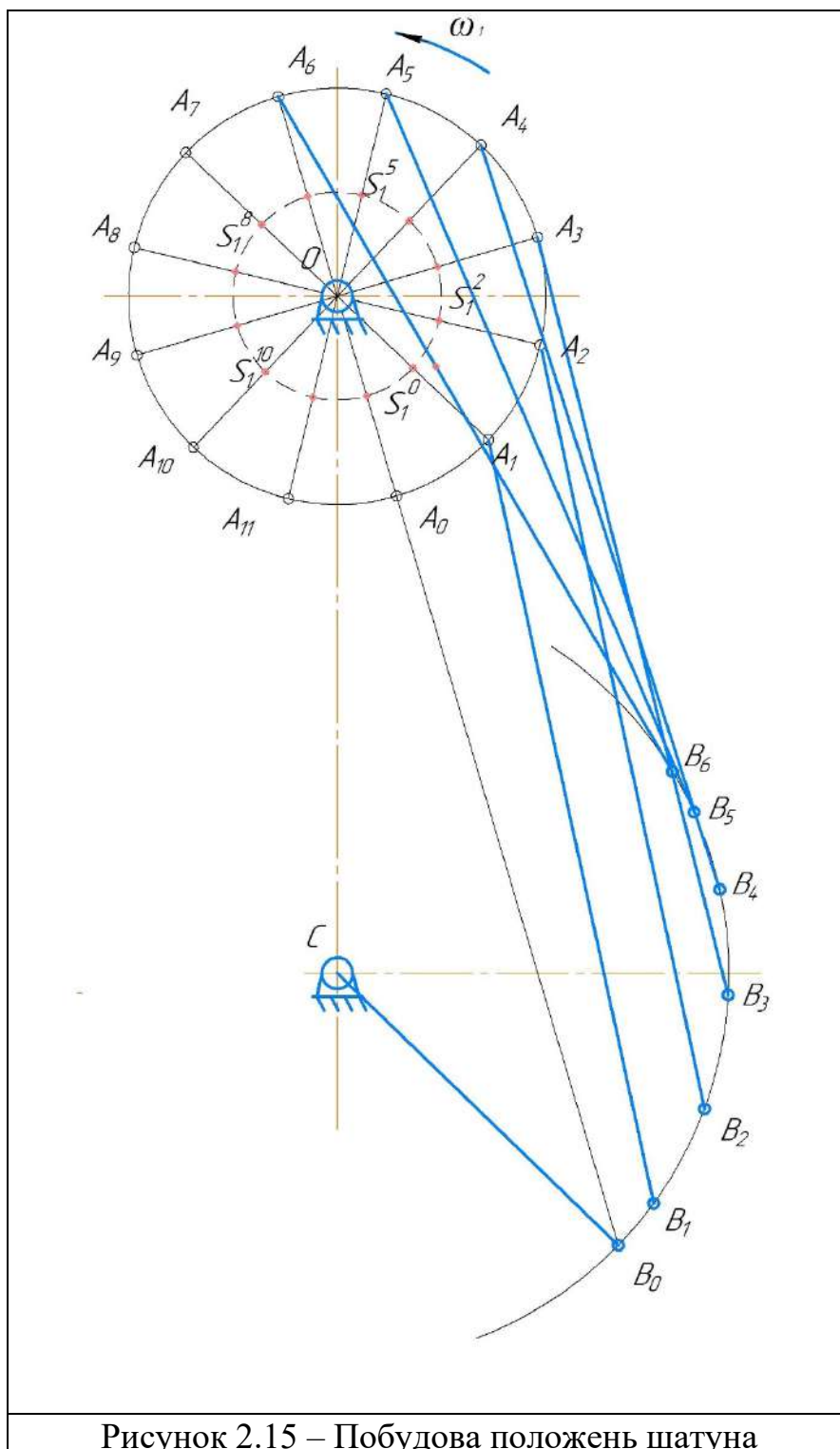


Рисунок 2.15 – Побудова положень шатуна

Далі для отримання положень коромисла  $BC$  з'єднуємо отримані точки  $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$  з точкою  $C$  (рис. 2.16):

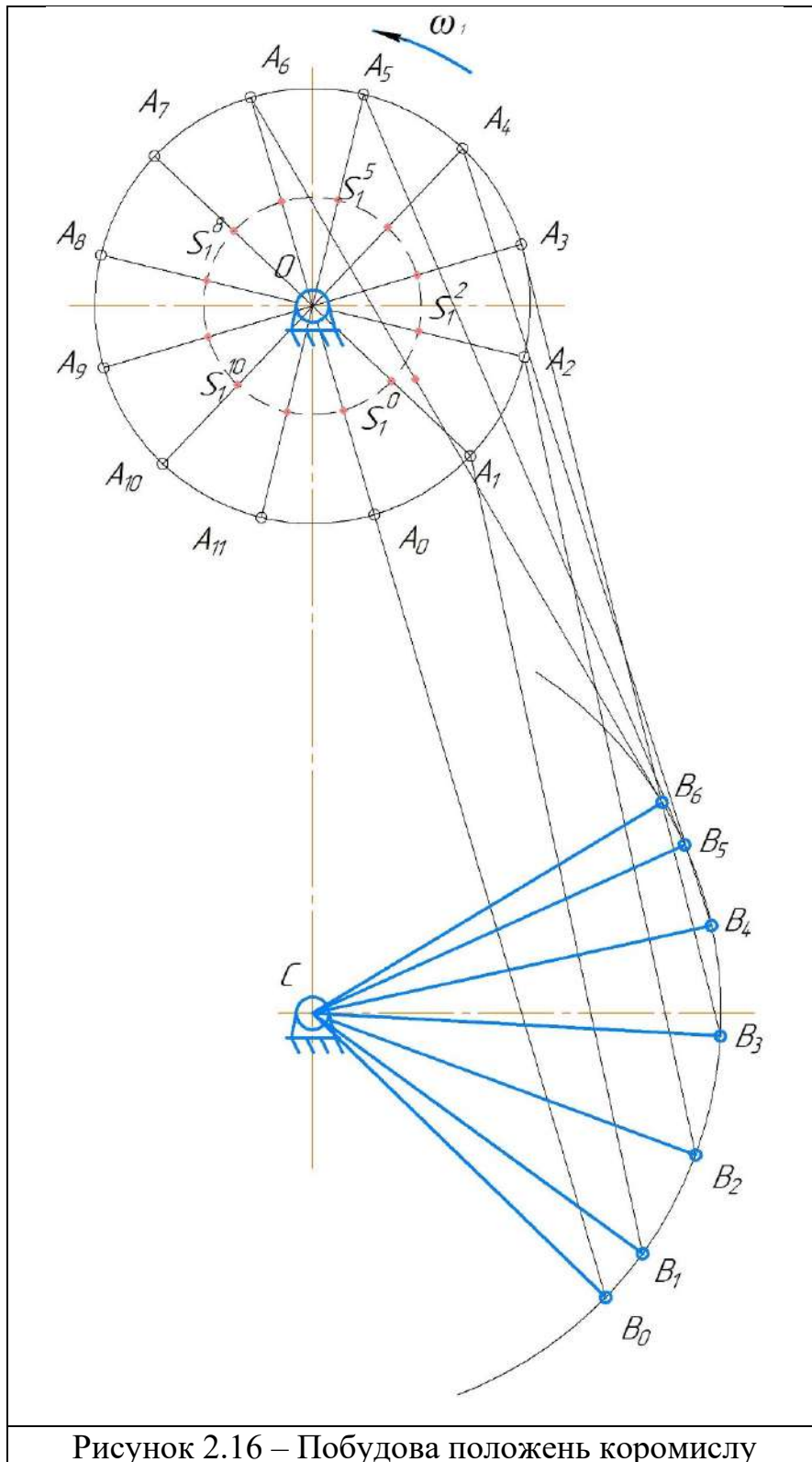


Рисунок 2.16 – Побудова положень коромислу

Далі креслимо останні положення шатуна  $AB$  і отримаємо точки  $B_7, B_8, B_9, B_{10}, B_{11}$  (рис. 2.17).

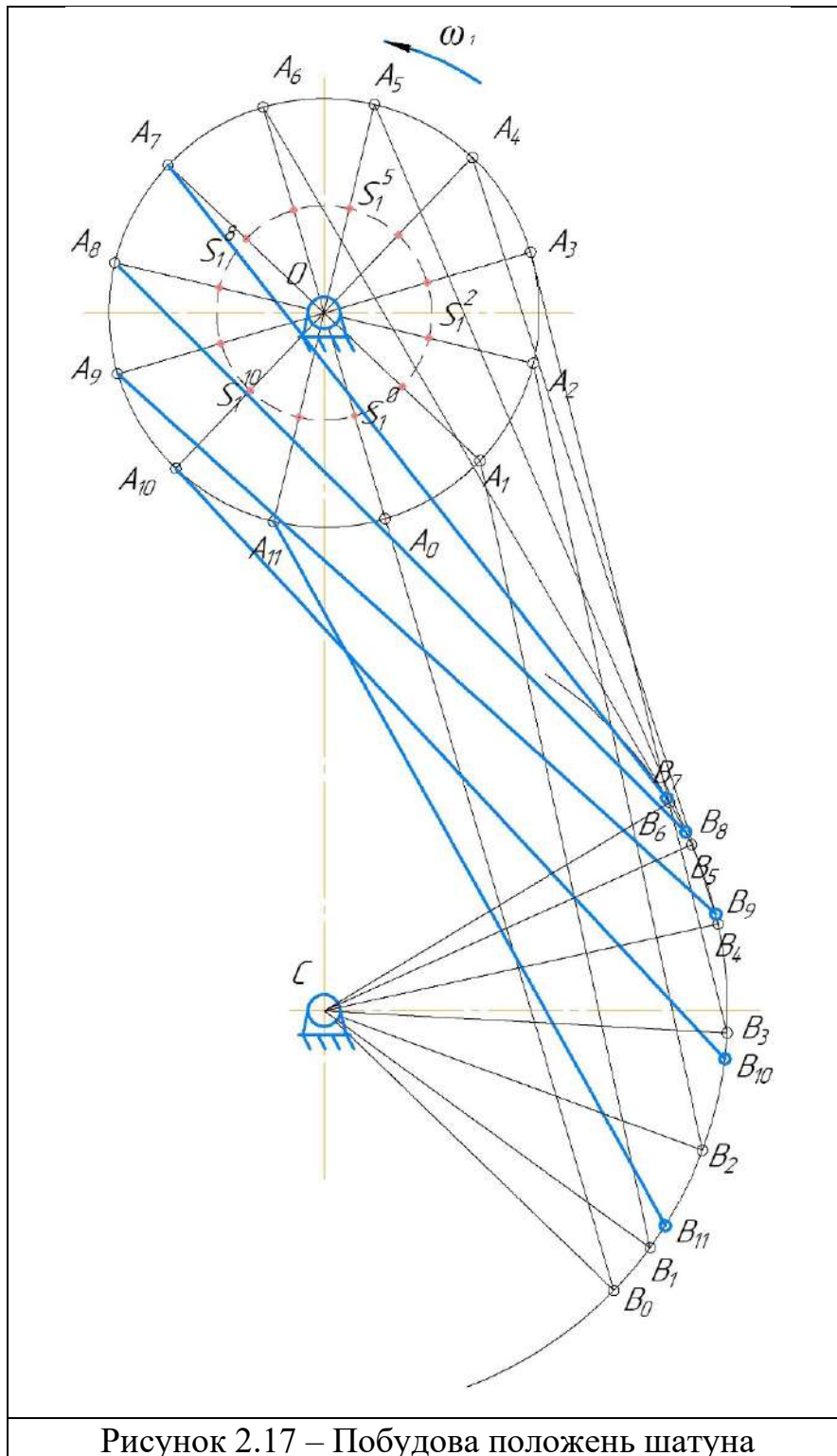


Рисунок 2.17 – Побудова положень шатуна

Та з'єднуємо їх з точкою  $C$  (рис.2.18):

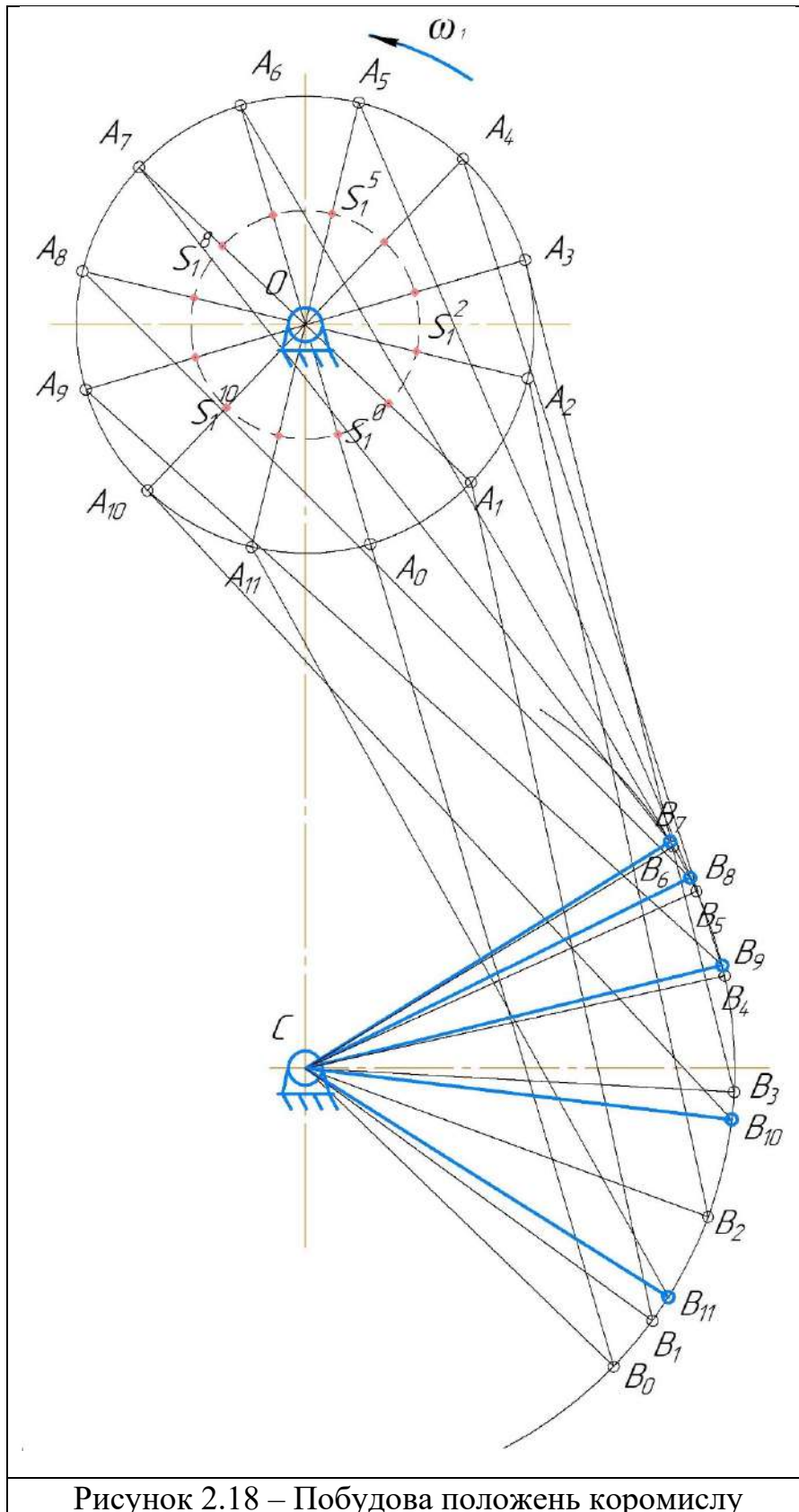


Рисунок 2.18 – Побудова положень коромислу

Далі з центру обертання коромислу, точки  $C$  проводимо дугу радіусом  $CS_3$  та отримуємо центри мас коромислу  $S_3$  для дванадцятьох положень (рис. 2.19).

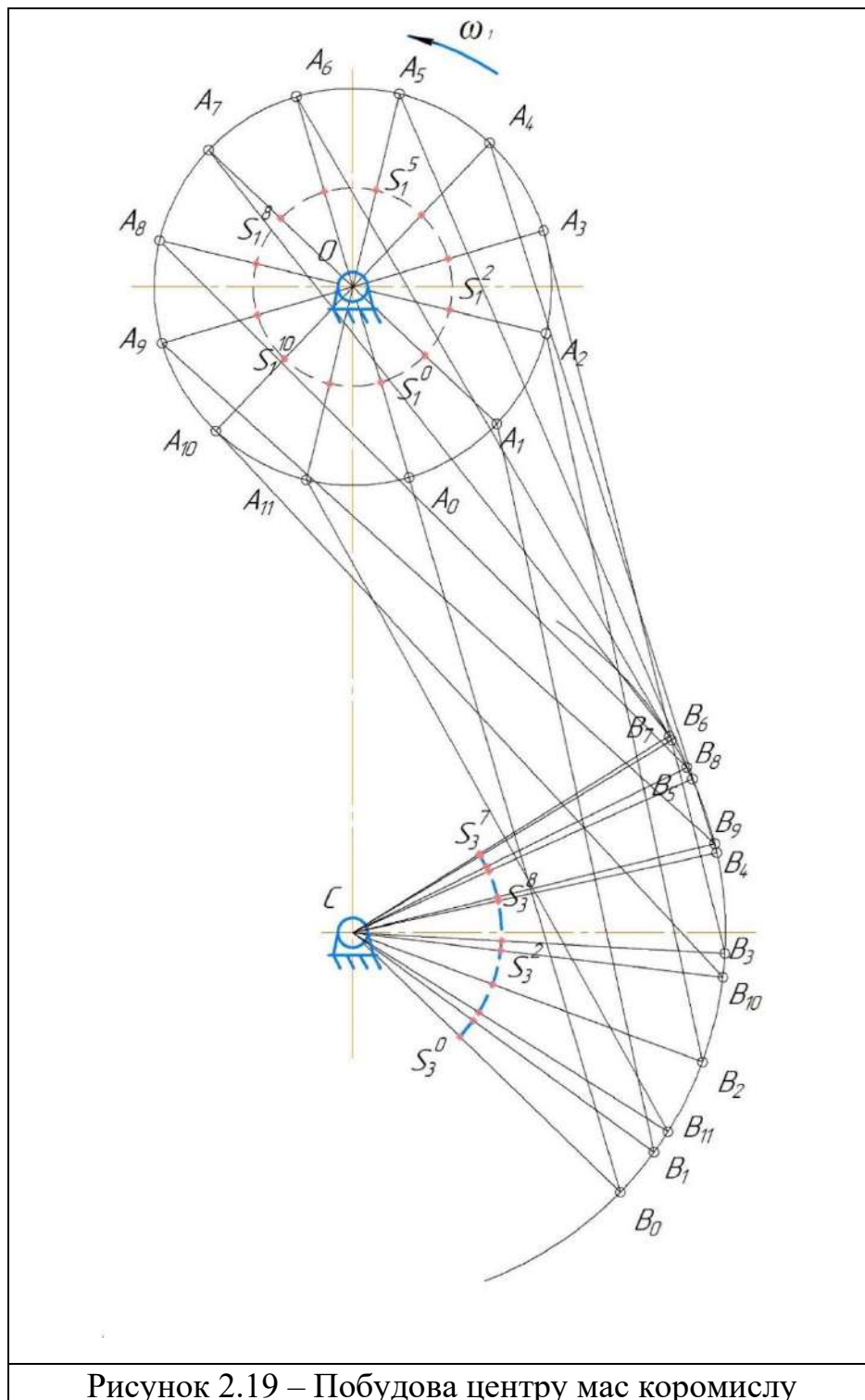
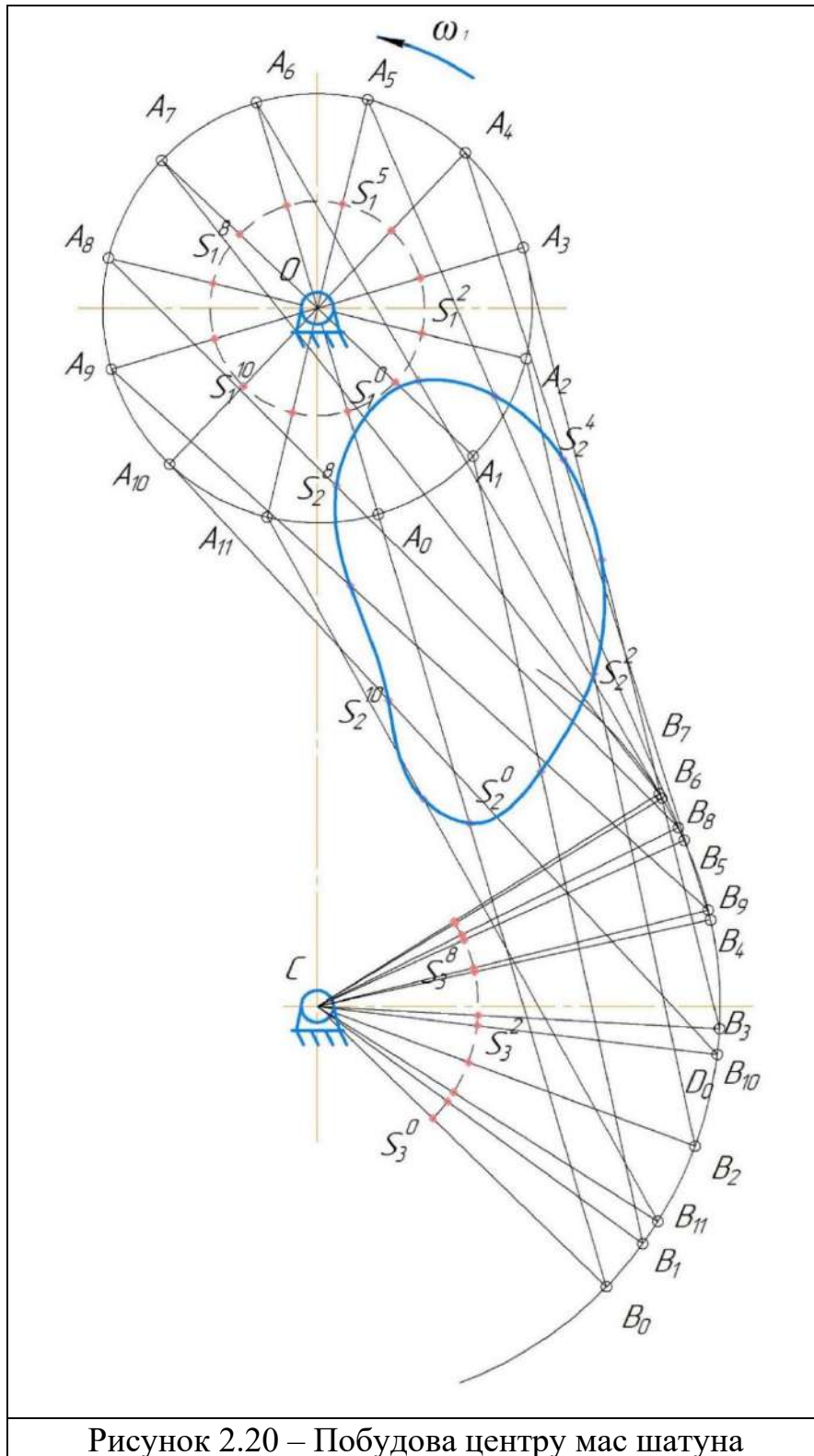


Рисунок 2.19 – Побудова центру мас коромислу

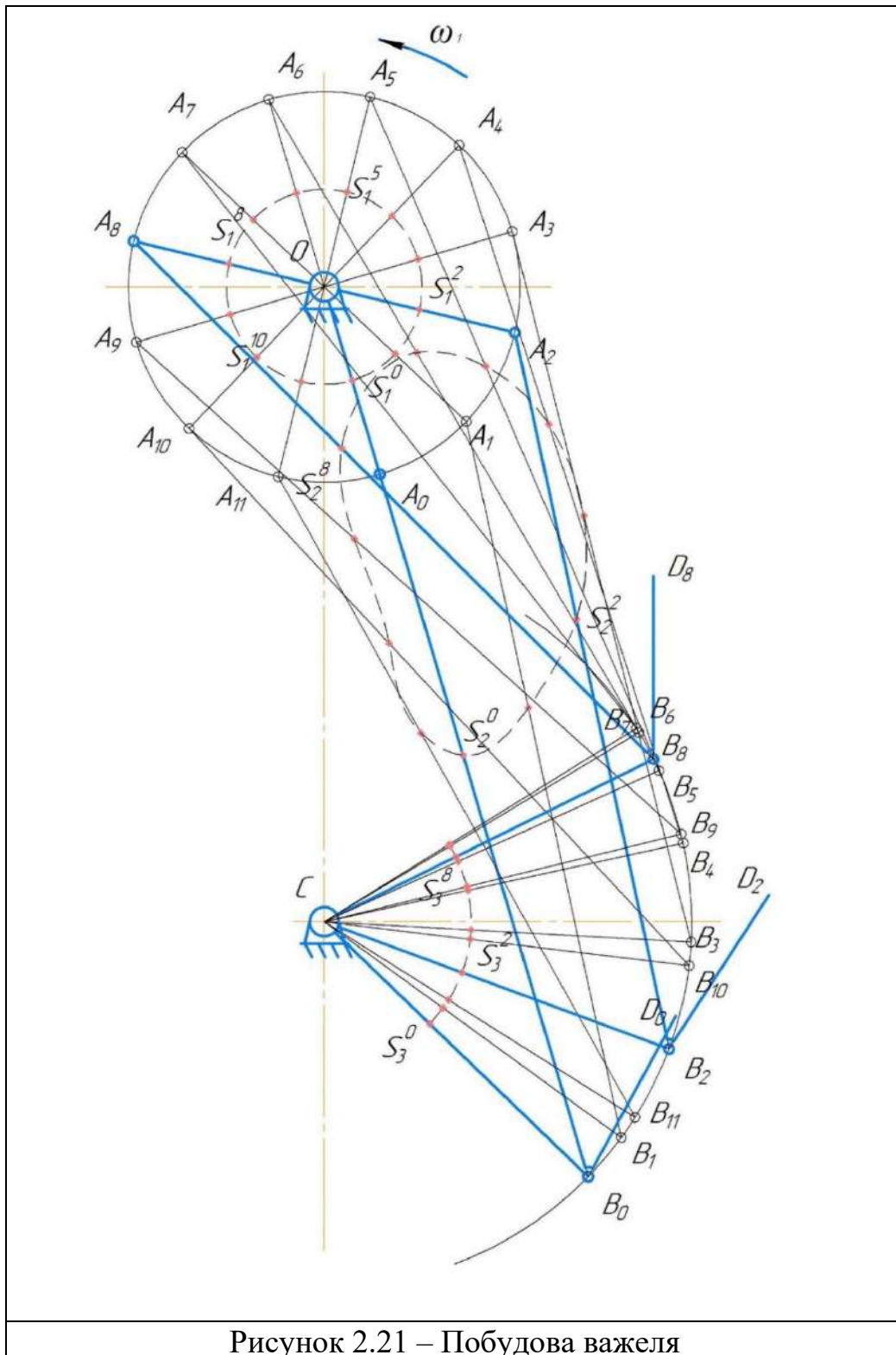
Слідуючим кроком визначаємо центр мас шатуна  $S_2$  для дванадцятьох положень та креслимо шатуну криву. Для цього від кожної точки  $A$  відкладаємо довжину  $AS_2$ , згідно масштабу та

вихідним даним. Потім отримані точки  $S_2$  з'єднаємо плавною кривою (рис. 2.20).



Далі будемо важіль  $BC$  до шатуна  $AB$  під кутом  $\alpha$ , до якого прикладаємо силу корисного опору  $P_{ко}$ . Згідно вихідним даним та

обраному масштабу, під кутом  $\alpha$  до кожного положення шатуна будемо важіль  $BC$ , довжиною у масштабі  $\mu_l$  (рис. 2.21).



В результаті ми отримуємо 12 положень кривошипно-коромислового механізму і виділяємо три положення – нульове, робочий хід та холостий (рис. 2.22).

Кінематична схема  
кривошипно-коромислового механізму

$$\mu_L = 0,002 \frac{M}{MM}$$

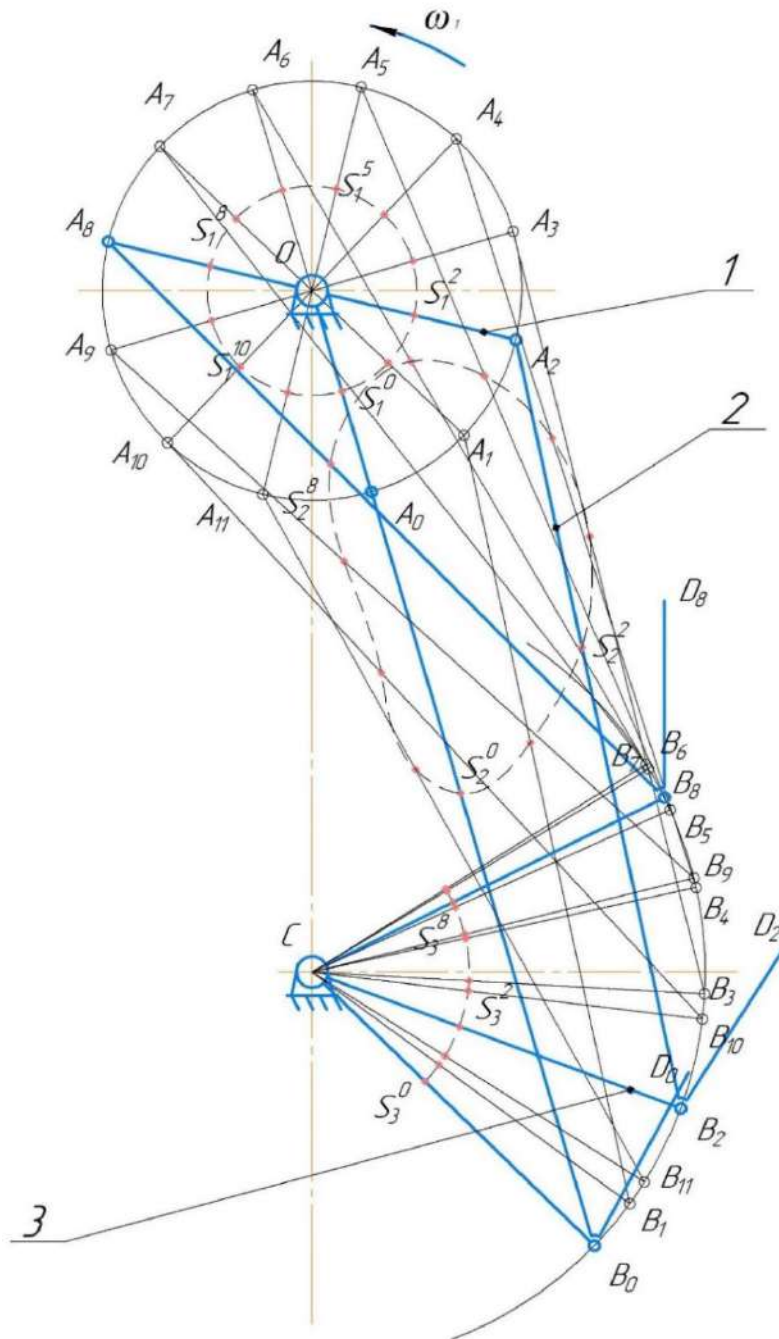


Рисунок 2.22 – Побудова дванадцятих положень механізму

### 2.3. Графоаналітичний метод кінематичного аналізу.

Метод планів є одним з найнаочніших. Визначенню підлягають лінійні швидкості і прискорення окремих точок і кутові швидкості і кутові прискорення ланок. При цьому заздалегідь складаються векторні рівняння для швидкостей і прискорень точок ланок, що здійснюють складний рух. Приклад 5-ланкової кінематичної схеми механізму – рисунок 2.23.

Дано: задано схему механізму, що складається з групи Асура 1 класу (ланки 0, 1); групи Асура 2 класу, 2 порядку, 1 виду (ланки 2, 3); групи Асура 2 класу, 2 порядку, 2 виду (ланки 4, 5).

$$l_{OA}, m, l_{AB}, m, l_{BO_1}, m, l_{CD}, m, \omega_1, c^{-1}.$$

Визначити: швидкості і прискорення точок механізму, кутові швидкості і кутові прискорення ланок заданого механізму.

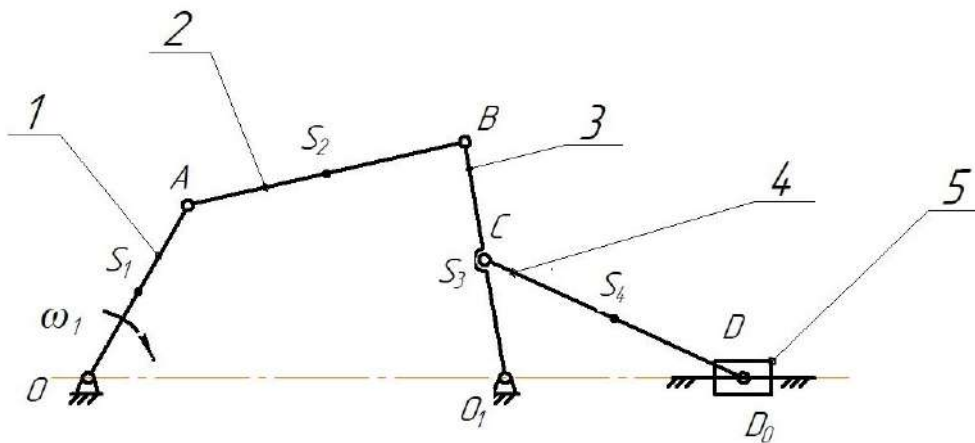


Рисунок 2.23 – Кінематична схема механізму

Формула побудови механізму:

*Кінематичний аналіз*

$$I(01) \leftarrow II(23) \leftarrow II(45)$$

*Силевий аналіз*

Кінематичний аналіз проводим в порядку побудови механізму.

Спочатку визначаємо швидкості точок та кутові швидкості ланок механізму.

Швидкість точки **O** дорівнює нулю, тому що це стійка. Визначимо швидкість точки **A**:

$$V_A = \omega_1 \cdot l_{OA}, \quad (2.1)$$

Визначимо швидкість точки **B**, використовуючи метод відомий нам з теорії плоско паралельного руху:

$$\begin{cases} \vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA} \\ \vec{V}_B = \vec{V}_{O_1} + \vec{V}_{BO_1} \end{cases} \quad (2.2)$$

Графічне зображення системи (2.2) називається планом швидкостей.

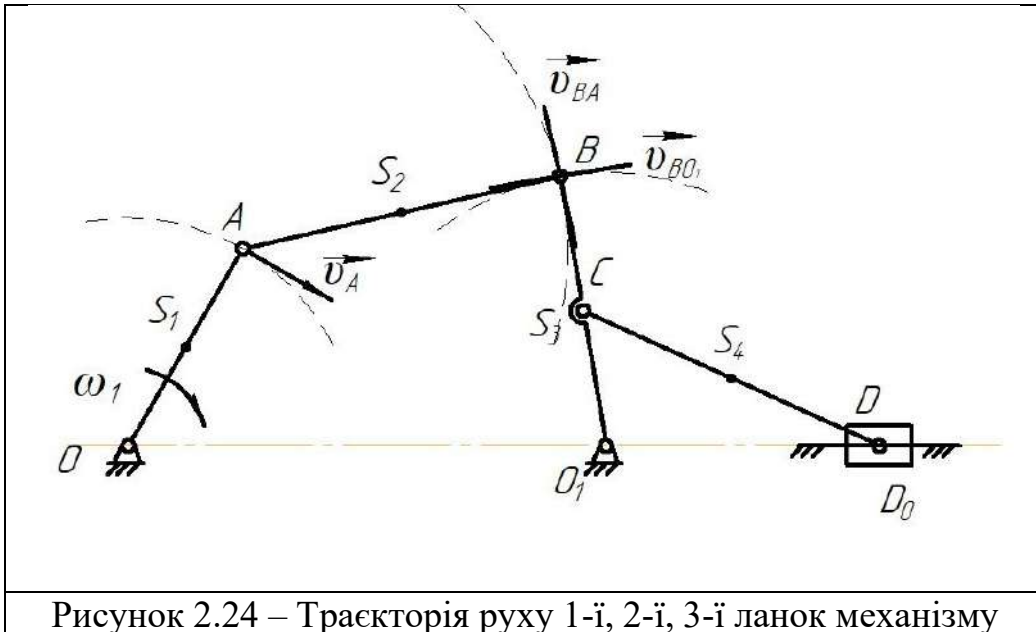


Рисунок 2.24 – Траєкторія руху 1-ї, 2-ї, 3-ї ланок механізму  
Враховуючи напрямлення векторів:

$$\vec{V}_A \perp OA; \vec{V}_{BA} \perp AB; \vec{V}_{O_1} = 0; \vec{V}_{BO_1} \perp BO_1.$$

Визначаємо масштаб плану швидкостей.

$$\mu_V = \frac{V_A}{ra}, \frac{m/c}{mm} \quad (2.3)$$

де  $ra$  – це довжина вектору швидкості точці  $A$ , приймається довільно.

Будуємо план швидкостей у відповідності з векторним рівнянням (2):



Рисунок 2.25 – Швидкість точки  $A$  в масштабі  $\mu_V$

Вектор швидкості точки  $A$  креслимо перпендикулярно ланки  $OA$  враховуючи напрям обертання кривошипів

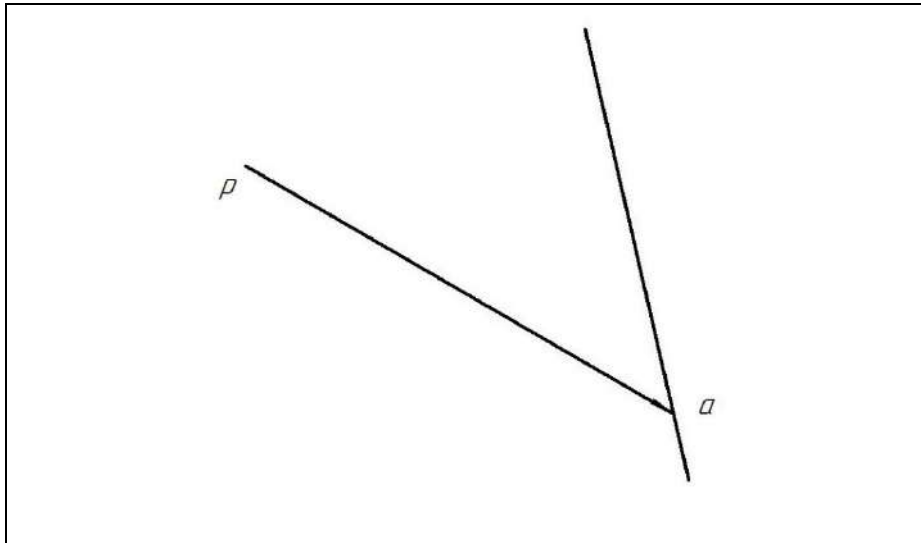


Рисунок 2.26 – Побудова 1 – го рівняння системи (2)

Згідно першому рівнянню системи (2.2) до вектору швидкості точки  $A$  додаємо вектор швидкості точки  $B$  відносно точки  $A$ , який направлено перпендикулярно ланки  $AB$ .

Перше рівняння системи (2.2) накреслено.

Визначаємо швидкість точки  $B$  відносно нерухомої точки  $O_1$ . Точка  $O_1$  знаходиться в полюсі  $p$ , тому що її швидкість дорівнює нулю. Вектор швидкості  $\vec{V}_{BO_1}$  креслимо перпендикулярно ланки  $O_1B$ .

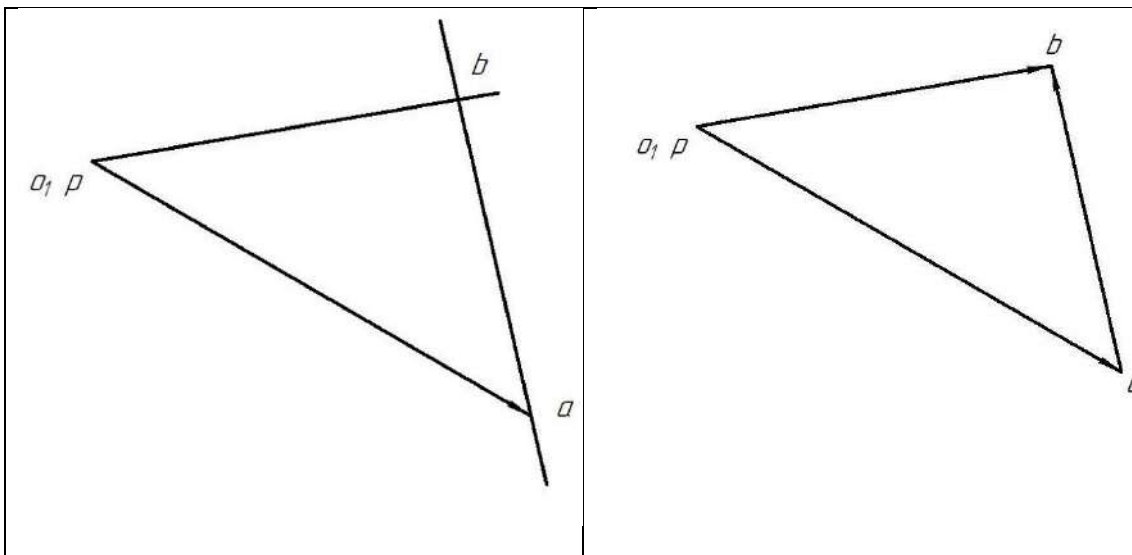


Рисунок 2.27 – Побудова 2– го рівняння системи (2)

На перетині двох векторів визначаємо точку  $B$ .

Визначаємо швидкість шатуна: для цього вимірюємо вектор  $\overline{ab}$  на плані швидкості і множимо його на масштаб плану швидкості  $\mu_V$ .

$$V_{BA} = \mu_V \cdot \overline{ab}, \text{ M/c} \quad (2.4)$$

Визначаємо кутову швидкість шатуна:

$$\omega_2 = \omega_{AB} = \frac{V_{BA}}{l_{AB}}, \frac{1}{\text{с}} \quad (2.5)$$

Визначаємо швидкість коромисла: для цього вимірюємо вектор  $\overline{pb}$  на плані швидкості і множимо його на масштаб плану швидкості  $\mu_V$ .

$$\overline{V}_{BO_1} = \mu_V \cdot \overline{pb}, \text{ M/c} \quad (2.6)$$

Визначаємо кутову швидкість коромисла:

$$\omega_3 = \omega_{BO_1} = \frac{V_{BO_1}}{l_{BO_1}}, \frac{1}{\text{с}} \quad (2.7)$$

Визначаємо напрям кутової швидкості шатуна: для цього перенесемо вектор  $\overline{ab}$  з плану швидкості на план положення та прикладемо його к точці, швидкість якої визначали, тобто до точки  $B$ .

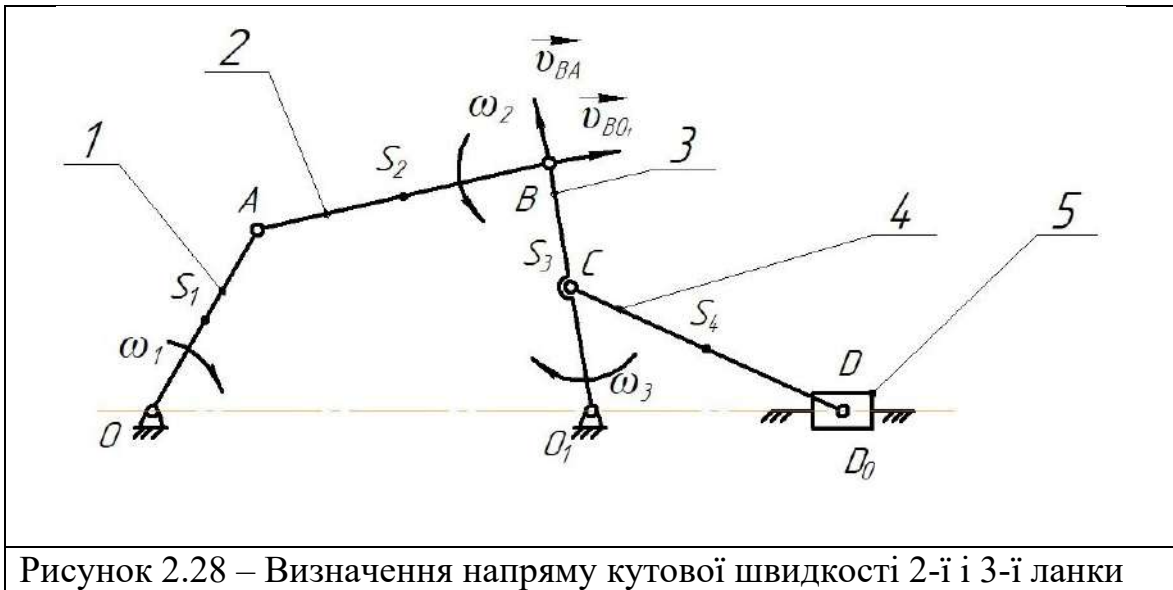


Рисунок 2.28 – Визначення напрямку кутової швидкості 2-ї і 3-ї ланки

Визначаємо напрям кутової швидкості коромисла: для цього перенесемо вектор  $\overline{pb}$  з плану швидкості на план положення та прикладемо його к точці, швидкість якої визначали, тобто до точки  $B$ .

Визначаємо швидкості точок центрів мас кривошипа  $S_1$ , шатуна  $S_2$ , та коромисла  $S_3$ . За умовою завдання центри мас знаходяться в середині ланок.

Визначаємо швидкість центра мас кривошипа  $V_{S_1}$ . Для цього знаходимо центр вектору  $\overline{pa}$  та ставимо стрілочку.

$$V_{S_1} = \mu_V \cdot \overline{pa}, \text{ M/c} \quad (2.8)$$

Визначаємо швидкість центра мас шатуна  $V_{S_2}$ . Для цього знаходимо центр вектору  $\overline{ab}$  та з'єднаємо його с полюсом  $p$ .

$$V_{S_2} = \mu_V \cdot \overline{ps_2}, M/c \quad (2.9)$$

Визначаємо швидкість центра мас коромисла  $V_{S_3}$ , який збігається з точкою кріплення четвертої ланки. Для цього знаходимо центр вектору  $\overline{pb}$  та ставимо стрілочку.

$$V_C = V_{S_3} = \mu_V \cdot \overline{ps_3}, M/c \quad (2.10)$$

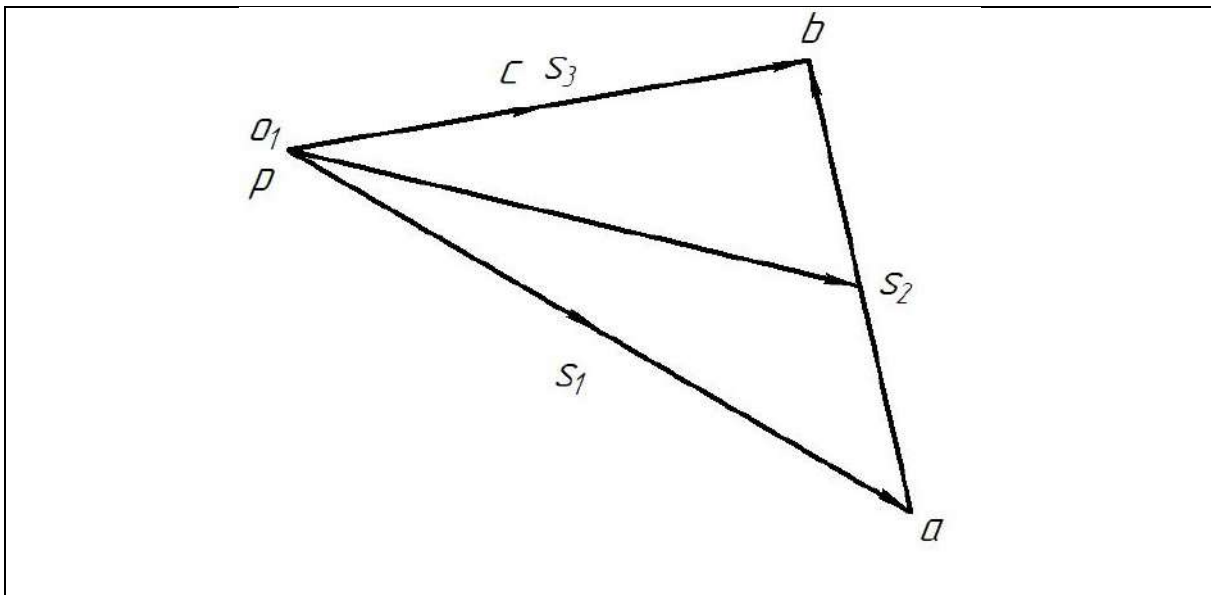


Рисунок 2.29 – Побудова швидкості точок центру мас 1-ї, 2-ї та 3-ї ланок

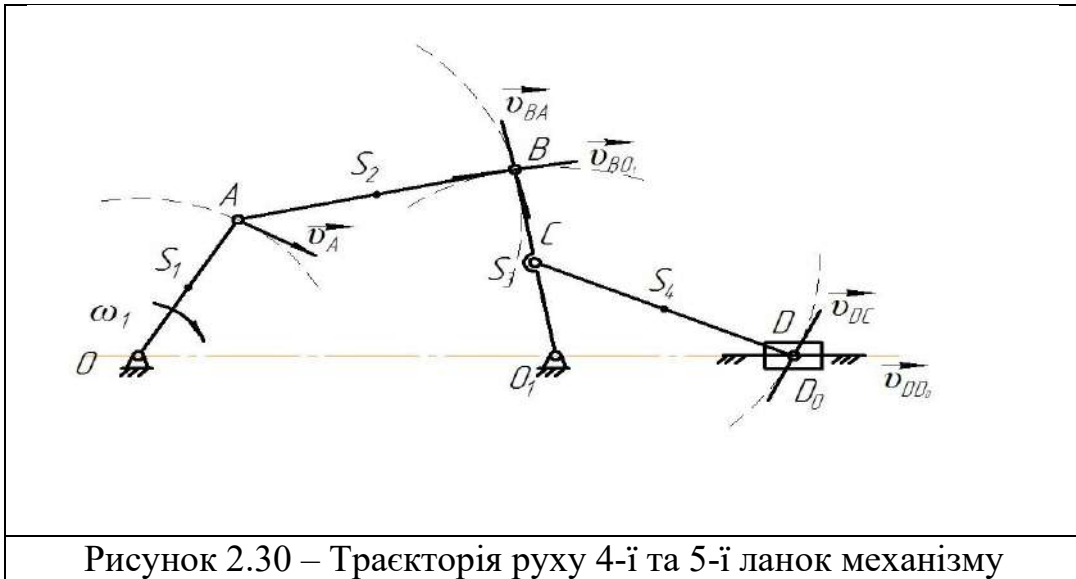
Виходячи з будови формули механізму переходимо до визначення кінематичних характеристик групи Ассур II класу, другого виду та другого порядку.

Швидкість точки C визначили. Визначимо швидкість точки D, використовуючи метод відомий нам з теорії плоско паралельного руху:

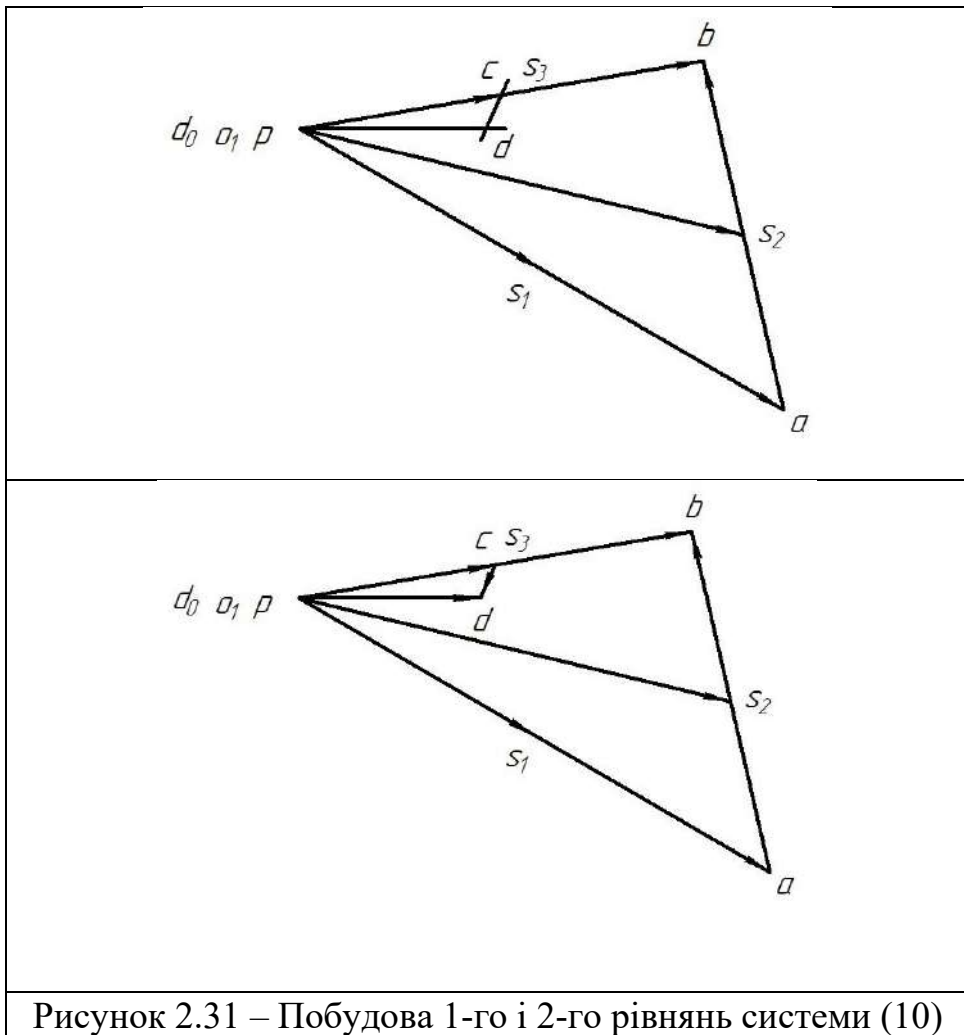
$$\begin{cases} \vec{V}_D = \vec{V}_C + \vec{V}_{DC} \\ \vec{V}_D = \vec{V}_{D_0} + \vec{V}_{DD_0} \end{cases} \quad (2.10)$$

Враховуючи напрямлення векторів:

$$\vec{V}_{DC} \perp CD; \vec{V}_{D_0} = 0; \vec{V}_{DD_0} \parallel x - x.$$



Визначаємо швидкість шатуна  $CD$ . Згідно рівнянню (2.10) додаємо до вектору точки  $C$  перпендикуляр до ланки  $CD$ .



Визначаємо швидкість точки  $D$  відносно нерухомої точки  $D_0$ . Точка  $D_0$  знаходиться в полюсі  $p$ , тому що її швидкість дорівнює нулю. Вектор швидкості  $\vec{V}_{DD_0}$  креслимо паралельно вісі  $x - x$ .

На перетині двох векторів визначаємо точку  $D$ .

Визначаємо швидкість шатуна: для цього вимірюємо вектор  $\overline{cd}$  на плані швидкості і множимо його на масштаб плану швидкості  $\mu_V$ .

$$V_{DC} = \mu_V \cdot \overline{cd}, \text{ м/с} \quad (2.11)$$

Визначаємо кутову швидкість шатуна:

$$\omega_4 = \omega_{DC} = \frac{V_{DC}}{l_{CD}}, \frac{1}{\text{с}} \quad (2.12)$$

Визначаємо напрям кутової швидкості шатуна: для цього перенесемо вектор  $\overline{cd}$  з плану швидкості на план положення та прикладемо його к точці, швидкість якої визначали, тобто до точки  $D$ .

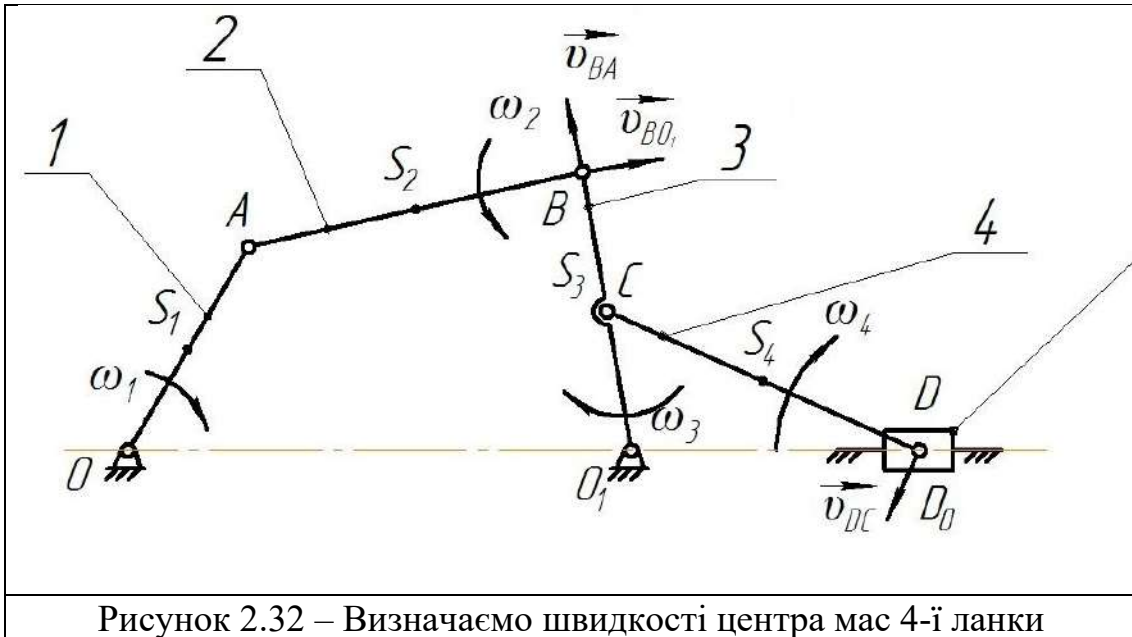


Рисунок 2.32 – Визначаємо швидкості центра мас 4-ї ланки

Визначаємо швидкість центра мас шатуна  $V_{S_4}$ . Для цього знаходимо центр вектору  $\overline{cd}$  та з'єднаємо його с полюсом  $p$ .

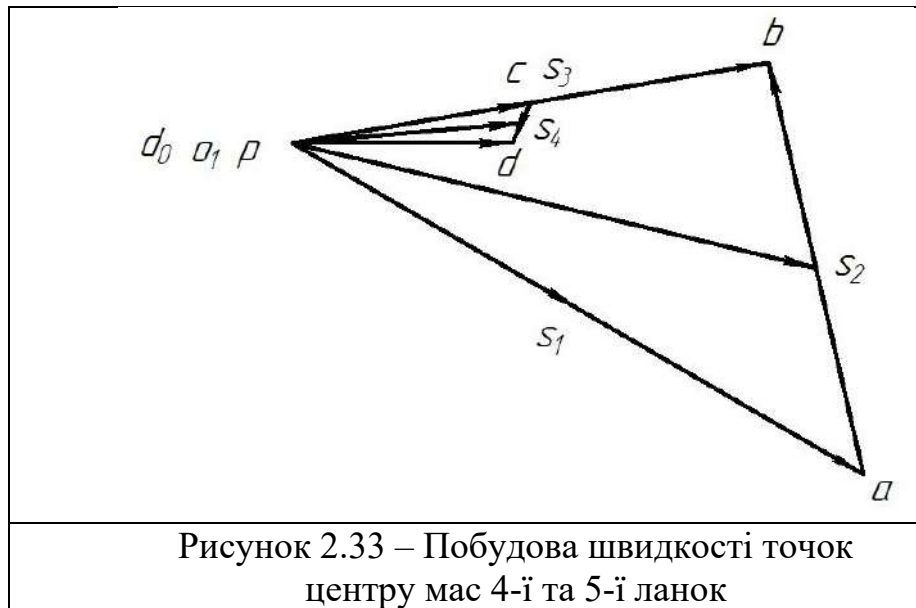


Рисунок 2.33 – Побудова швидкості точок центру мас 4-ї та 5-ї ланок

Довжину вектору  $\overline{ps_4}$  помножимо на  $\mu_V$ :

$$V_{S_4} = \mu_V \cdot \overline{ps_4}, \text{ M/c} \quad (2.13)$$

Визначаємо швидкість центра мас повзуна, який співпадає з точкою **D**: для цього вимірюємо вектор  $\overline{pb}$  на плані швидкості і множимо його на масштаб плану швидкості  $\mu_V$ .

$$V_D = \mu_V \cdot \overline{pd}, \text{ M/c} \quad (2.14)$$

**Планом швидкостей механізму** називається креслення, на якому зображені у вигляді відрізків вектори, рівні по модулю і напрямку швидкостям різних точок механізму в даний момент (рис. 2.33).

Тепер визначаємо прискорення точок та кутові прискорення ланок механізму.

Прискорення стійкі дорівнює нулю

$$a_O = a_{O_1} = a_{D_0} = 0 \text{ м/с}^2$$

Визначаємо прискорення точки **A**:

$$\bar{a}_A = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau$$

$$a_A^\tau = \varepsilon_1 \cdot l_{OA}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt} = 0$$

Тоді прискорення точки **A** буде визначатися як нормальне:

$$\bar{a}_A^n = \omega_1^2 \cdot l_{OA}, \text{ M/c}^2 \quad (2.15)$$

Визначаємо прискорення точок і ланок механізму використовуючи метод плану прискорень.

План прискорень побудуємо у відповідності до векторного рівняння.

$$\begin{cases} \bar{a}_B = \bar{a}_A^n + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^t \\ \bar{a}_B = \bar{a}_{O_1} + \bar{a}_{BO_1}^n + \bar{a}_{BO_1}^t \end{cases} \quad (2.16)$$

Визначаємо масштаб плану прискорень:

$$\mu_A = \frac{a_A^n}{\pi a}, \frac{M/c^2}{\text{мм}} \quad (2.17)$$

де  $\pi a$  – довжина вектору нормального прискорення точки **A**, приймається довільно.

Визначаємо нормальне прискорення точки **B** відносно точки **A**

$$\bar{a}_{BA}^n = \omega_2^2 \cdot l_{AB}, \frac{M}{c^2} \quad (2.18)$$

Довжину вектору нормального прискорення  $n_{BA}$  знайдемо за формулою:

$$n_2 = n_{BA} = \frac{a_{BA}^n}{\mu_A}, \text{мм} \quad (2.19)$$

Визначаємо нормальне прискорення точки **B** відносно точки **O<sub>1</sub>**

$$a_{BO_1}^n = \omega_3^2 \cdot l_{BO_1}, \frac{M}{c^2} \quad (2.20)$$

Довжину вектору нормального прискорення  $n_{BO_1}$  знайдемо за формулою:

$$n_3 = n_{BO_1} = \frac{a_{BO_1}^n}{\mu_A}, \text{мм} \quad (2.21)$$

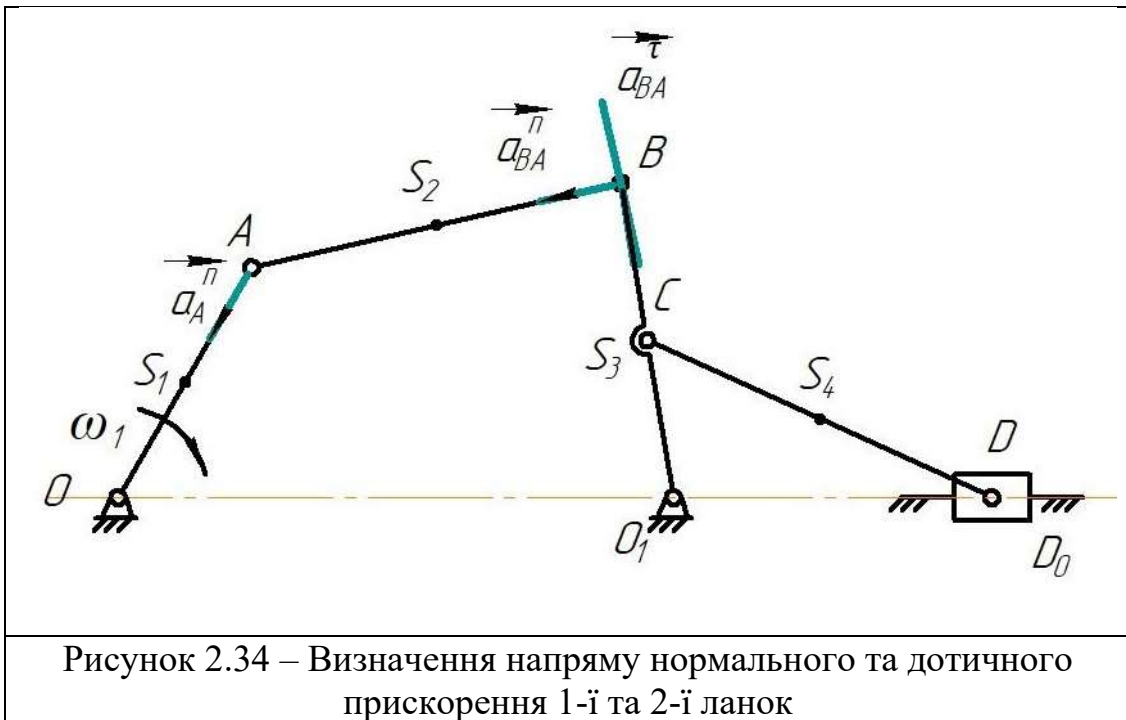


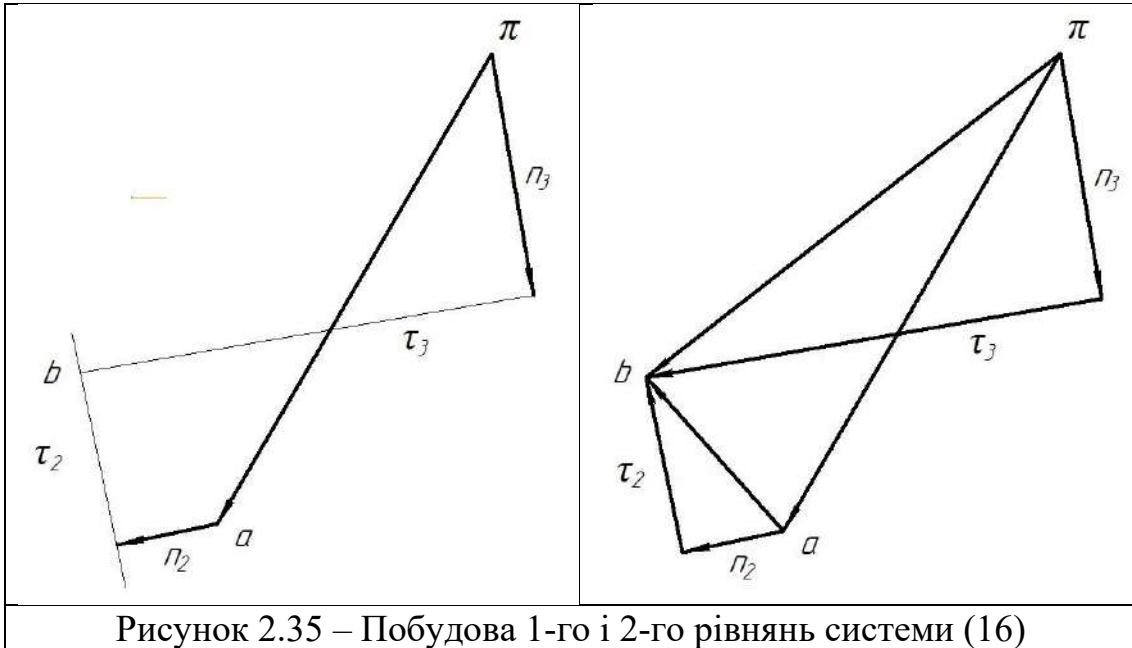
Рисунок 2.34 – Визначення напрямку нормального та дотичного прискорення 1-ї та 2-ї ланок

План прискорення будуємо враховуючи напрям векторів:

$$\bar{a}_A^n \parallel \tau. A \rightarrow \tau. O; \bar{a}_{BA}^n \parallel \tau. B \rightarrow \tau. A; \bar{a}_{BA}^t \perp AB$$

$$\bar{a}_{O_1} = 0; \bar{a}_{BO_1}^n \parallel B \rightarrow O_1; \bar{a}_{BO_1}^t \perp BO_1$$

Згідно першому рівнянню системи (2.16) креслимо вектор нормального прискорення точки  $A$ , який має напрямок до центру, тобто від точці  $A$  до точці  $O$ , довжиною  $\pi a$ . Далі додаємо вектору нормального прискорення точки  $A$  вектор нормального прискорення точки  $B$  відносно точки  $A$ , який направлено від точці  $B$  до точці  $A$ , довжиною  $\pi_2$ . До нього додаємо вектор тангенсного прискорення точки  $B$  відносно точки  $A$ , який направлено перпендикулярно ланки  $AB$ . Перше рівняння системи (2.16) накреслено.



Визначаємо прискорення точки  $B$  відносно нерухомої точки  $O_1$ . Точка  $O_1$  знаходиться в полюсі  $\pi$ , тому що її прискорення дорівнює нулю. Додаємо до полюсу вектору нормального прискорення точки  $B$  відносно точки  $O_1$ , який направлено від точці  $B$  до точці  $O_1$ , довжиною  $\pi_3$ . До нього додаємо вектор тангенсного прискорення точки  $B$  відносно точки  $O_1$ , який направлено перпендикулярно ланки  $BO_1$ . На перетині двох тангенсних векторів визначаємо точку  $B$ . Друге рівняння системи (2.16) накреслено.

З'єднуємо точки  $a$  і  $b$ ,  $\pi$  і  $b$ .

Визначаємо прискорення точок центрів мас кривошипа  $S_1$ , шатуна  $S_2$ , та коромисла  $S_3$ . За умовою завдання центри мас знаходяться в середині ланок.

Визначаємо прискорення центра мас кривошипа  $V_{S_1}$ . Для цього знаходимо центр вектору  $\bar{\pi a}$  та ставимо стрілочку.

$$a_{S_1} = \mu_A \cdot \bar{\pi S_1} \quad (2.22)$$

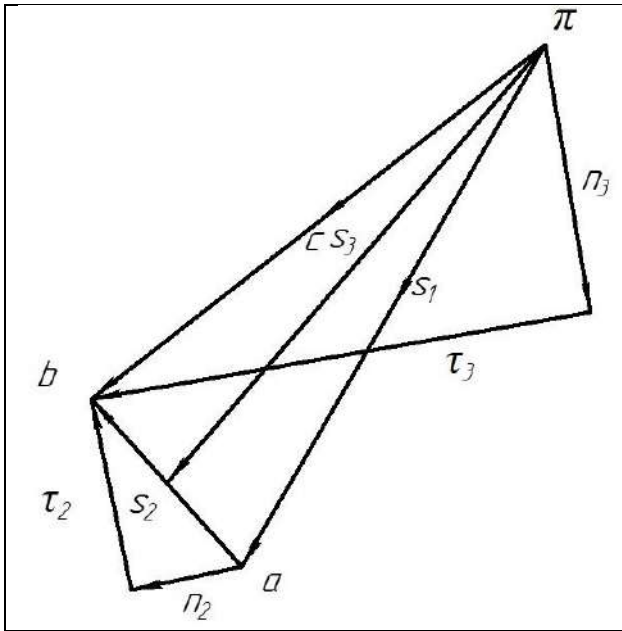


Рисунок 2.36 – Побудова прискорень центрів мас 1-ї, 2-ї та 3-ї ланок

Визначаємо прискорення центра мас шатуна  $V_{S_2}$ . Для цього знаходимо центр вектору  $\overline{ab}$  та з'єднаємо його с полюсом  $\pi$ .

$$a_{S_2} = \mu_A \cdot \overline{\pi S_2} \quad (2.23)$$

Визначаємо прискорення центра мас коромисла  $V_{S_3}$ , який збігається з точкою  $C$  – кріплення четвертої ланки. Для цього знаходимо центр вектору  $\overline{\pi b}$  та ставимо стрілочку.

$$a_C = a_{S_3} = \mu_A \cdot \overline{\pi S_3} \quad (2.24)$$

Визначаємо дотичне прискорення шатуна та коромисла:

$$a_{BA}^\tau = \mu_A \cdot \bar{\tau}_2 \quad (2.25)$$

$$a_{BO_1}^\tau = \mu_A \cdot \bar{\tau}_3 \quad (2.26)$$

Визначаємо кутове прискорення другої та третьої ланок по формулам:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{BA}^\tau}{l_{BA}} \quad (2.27)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{a_{BO_1}^\tau}{l_{BO_1}} \quad (2.28)$$

Визначаємо напрям кутового прискорення шатуна: для цього перенесемо вектор  $\bar{\tau}_2$  з плану прискорення на план положення та прикладемо його к точці, прискорення якої визначали, тобто до точки  $B$ .

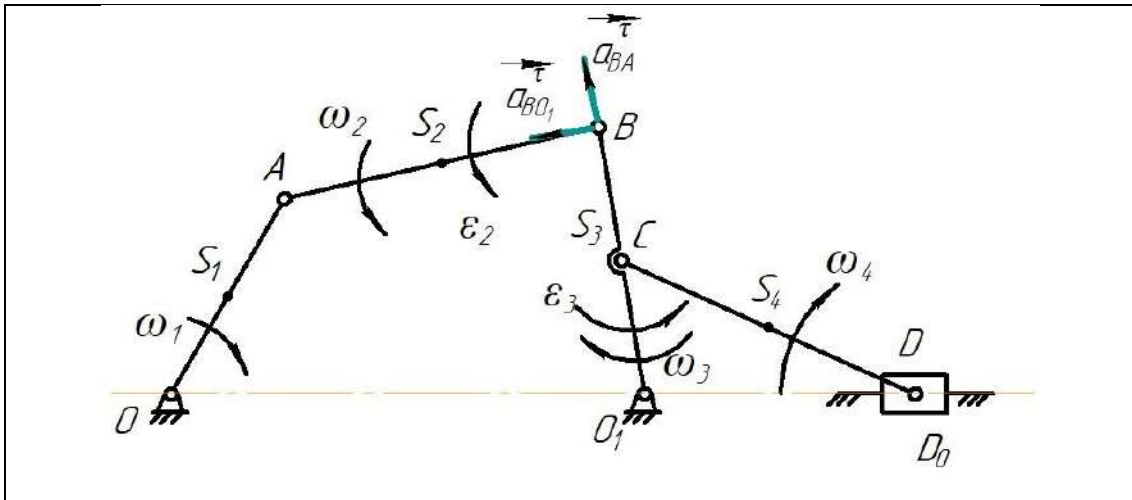


Рисунок 2.37 – Визначення напрямку кутового прискорення 2-ї та 3-ї ланок

Визначаємо напрям кутового прискорення коромисла: для цього перенесемо вектор  $\bar{\tau}_3$  з плану прискорення на план положення та прикладемо його к точці, прискорення якої визначали, тобто до точки  $B$ .

Виходячи з будови формули механізму переходимо до визначення кінематичних характеристик групи Ассур II класу, другого виду та другого порядку.

Прискорення точки  $C$  визначили. Визначимо прискорення точки  $D$ , використовуючи метод плану прискорень:

$$\begin{cases} \bar{a}_D = \bar{a}_C + \bar{a}_{DC}^n + \bar{a}_{DC}^t \\ \bar{a}_D = \bar{a}_{D_0} + \bar{a}_{DD_0}^t \end{cases} \quad (2.29)$$

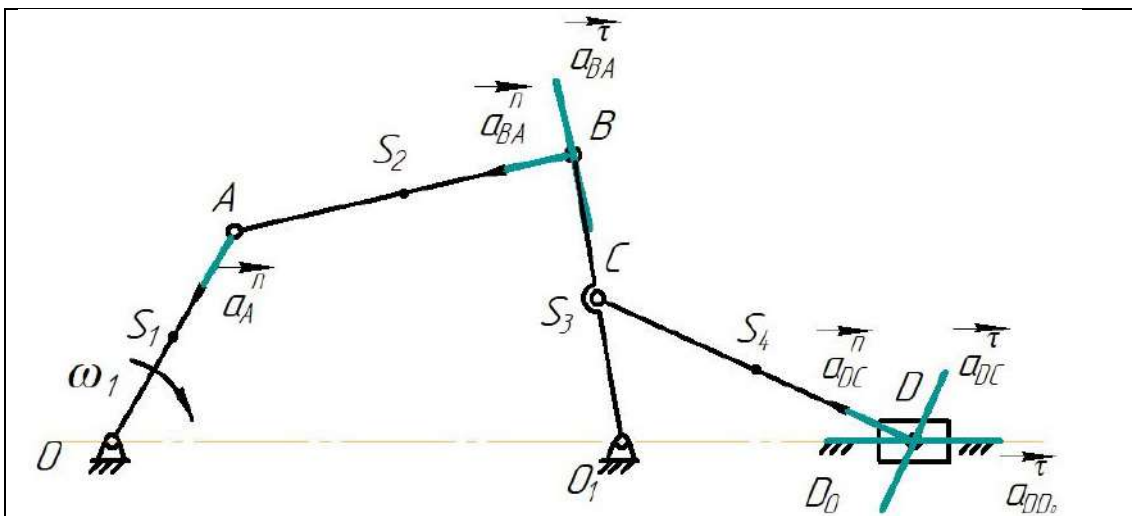


Рисунок 2.38 – Визначення напрямку нормального та дотичного прискорення 4-ї та 5-ї ланок

Визначаємо нормальне прискорення точки  $D$  відносно точки  $C$

$$\bar{a}_{DC}^n = \omega_4^2 \cdot l_{DC} \quad (2.30)$$

Враховуючи напрямлення векторів:

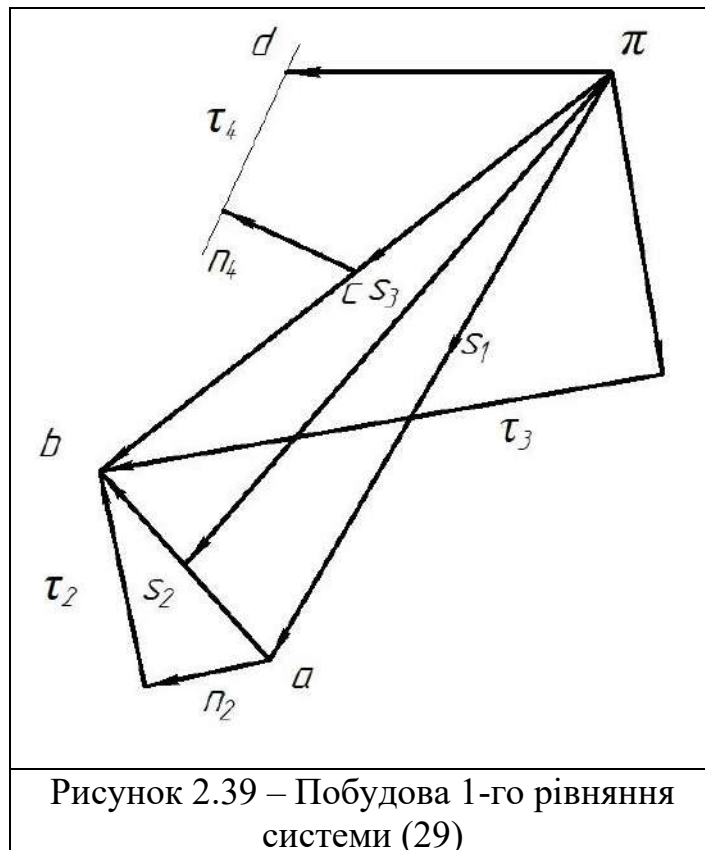
$$\bar{a}_A^n \parallel A \rightarrow O; \quad \bar{a}_{DC}^n \parallel \tau.D \rightarrow \tau.C; \quad \bar{a}_{DC}^\tau \perp DC.$$

$$\bar{a}_{D_0} = 0; \quad \bar{a}_{DD_0}^\tau \parallel x - x.$$

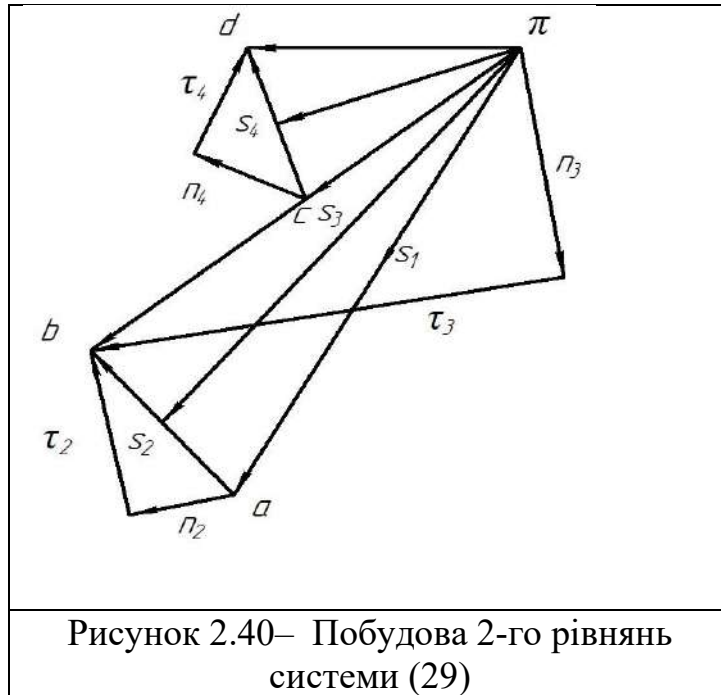
Довжину вектору нормального прискорення  $n_{DC}$  знайдемо за формулою:

$$\bar{n}_4 = \bar{n}_{DC} = \frac{\bar{a}_{DC}^n}{\mu_A} \quad (2.31)$$

Визначаємо прискорення шатуна  $CD$ . Згідно рівнянню (2.29) додаємо до вектору точки  $C$  вектор нормального прискорення точки  $D$  відносно точки  $C$ , який направлено від точці  $D$  до точці  $C$ , довжиною  $n_4$ . До нього додаємо вектор тангенсного прискорення точки  $D$  відносно точки  $C$ , який направлено перпендикулярно ланки  $CD$ . Перше рівняння системи (2.29) накреслено.



Визначаємо прискорення точки  $D$  відносно нерухомої точки  $D_0$ . Точка  $D_0$  знаходиться в полюсі  $\pi$ , тому що її швидкість дорівнює нулю. Вектор відносного прискорення  $\bar{a}_{DD_0}^\tau$  креслимо паралельно вісі  $x - x$ .



Креслення, на якому зображені у вигляді відрізків вектори, рівні по модулю і напрямку прискоренням різних точок ланок механізму в даний момент, називають *планом прискорень механізму* (рис.2.40).

На перетині двох векторів визначаємо точку **D**. З'єднуємо точки **c** і **d**.

Визначаємо прискорення центра мас шатуна. Для цього знаходимо центр вектору  $\overline{cd}$  та з'єднуємо його с полюсом **pi**.

Довжину вектору  $\overline{pi s_4}$  помножимо на  $\mu_A$ :

$$a_{S_4} = \mu_A \cdot \overline{pi s_4} \quad (2.32)$$

Визначаємо швидкість центра мас повзуна, який співпадає з точкою **D**: для цього вимірюємо вектор  $\overline{pd}$  на плані прискорення і множимо його на масштаб плану  $\mu_A$ .

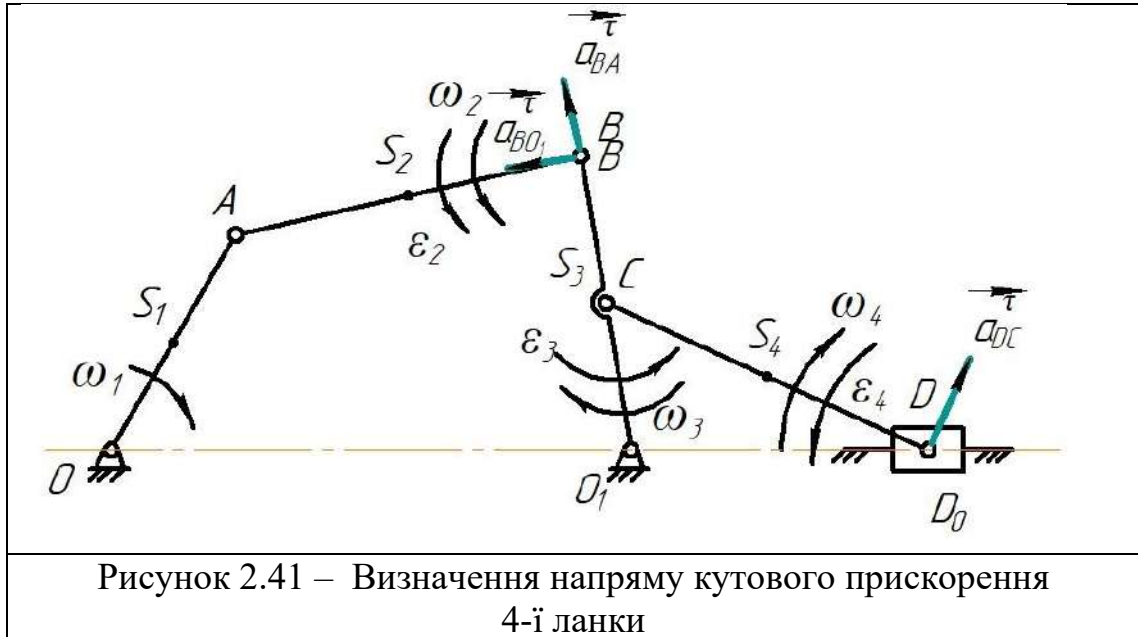
$$a_D = \mu_A \cdot \overline{pd} \quad (2.33)$$

Визначаємо дотичне прискорення шатуна: для цього вимірюємо вектор  $\overline{\tau_4}$  на плані швидкості і множимо його на масштаб плану прискорення  $\mu_V$ .

$$a_{DC}^{\tau} = \mu_A \cdot \overline{\tau_4} \quad (2.34)$$

Визначаємо кутове прискорення шатуна:

$$\varepsilon_4 = \frac{a_{DC}^{\tau}}{l_{DC}} \quad (2.35)$$



Визначаємо напрям кутового прискорення шатуна: для цього перенесемо вектор  $\bar{\tau}_4$  з плану прискорення на план положення та прикладемо його к точці, прискорення якої визначали, тобто до точки  $D$ .

#### 2.4. Дослідження важільних механізмів методом кінематичних діаграм.

Графічні методи наглядні і універсальні, оскільки дозволяють визначати положення швидкості і прискорення ланок механізмів будь-якої структури. Але графічні методи не завжди мають ту точність, яка буває потрібна в деяких конкретних завданнях аналізу механізмів. У цих випадках прийнятне застосування аналітичних методів, за допомогою яких дослідження кінематики механізмів може бути зроблено з будь-якою мірою точності. Крім того, аналітичні залежності дозволяють виявляти взаємозв'язок кінематичних параметрів механізму з його метричними параметрами, т. е. розмірами ланок. Аналітичні методи дослідження дозволяють проводити аналіз із заданою мірою точності.

*Кінематичною діаграмою називається графічна залежність будь-якого параметра руху ланки від часу або від переміщення вхідної ланки, представлені в певній системі координат.*

В ході дослідження різних механізмів часто недостатньо знайти тільки форму шляху - траєкторію руху точки, потрібно ще знати характер зміни величини пройденого шляху залежно від часу або кута повороту кривошипа. Графік шляху не слід змішувати з траєкторією,

напр., точка рухається по траєкторії, яка є кругом, а графік шляху являється параболою. Для цього будують діаграми лінійних переміщень  $S=S(t)$ , якщо ланка здійснює поступальну ходу (чи діаграми кутових переміщень  $\varphi=\varphi(t)$ , якщо ланка здійснює обертальний рух).

**Якщо відома одна кінематична діаграма, то можна отримати інші залежності шляхом графічного диференціювання або інтеграції, оскільки між переміщенням, швидкістю і прискоренням існують залежності:**

$$V = \frac{ds}{dt}, \alpha = \frac{dV}{dt} \quad \text{- для поступального руху, або}$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \quad \text{- для обертального руху.}$$

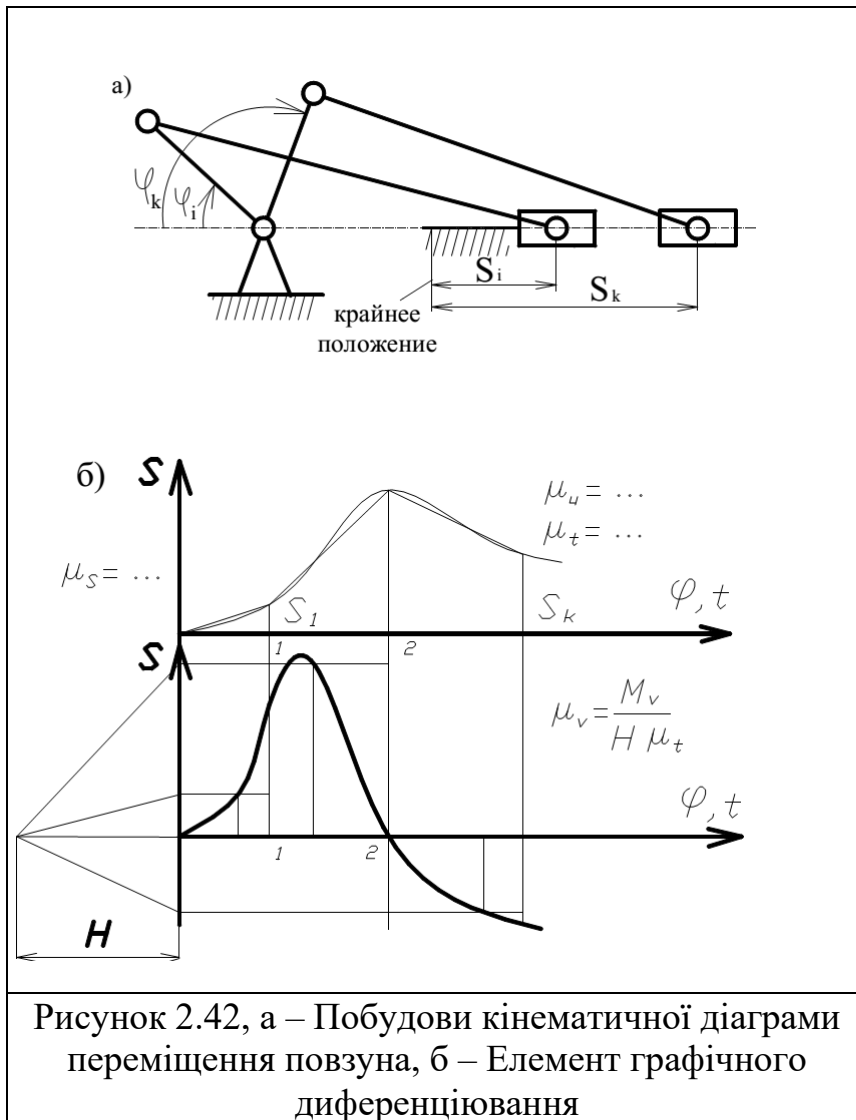
$$\frac{ds}{dt} = \operatorname{tg} \alpha, \frac{dV}{dt} = \operatorname{tg} \beta, \quad \text{де } \alpha \text{ і } \beta \text{ - відповідно кути нахилу дотичної}$$

до кривої в цій точці функцій  $S=S(t)$  і  $V_B=V_B(t)$  (геометрична інтерпретація першої похідної).

На рис. 2.42, а, б показана послідовність побудови кінематичної діаграми переміщення повзуна кривошипно-повзунного механізму  $S(\varphi)$  і  $S(t)$ , а також елементи графічного диференціювання з отриманням діаграми швидкостей  $V(t)$  методом хорд.

Якщо діаграма  $V(t)$  первинна, то процес, зворотний диференціюванню, забезпечить отримання діаграми  $S(t)$  і називається графічною інтеграцією.

Слід зазначити, що графічні методи часто призводять до спотворень результатів із-за неточності графічних побудов, тому необхідно контролювати розташування характерних точок, що відповідають екстремумам на діаграмах.



При графічному диференціюванні застосовують метод дотичних або хорд. Але на практиці метод дотичних незручний, оскільки провести точно дотичну в цій точці кривої важко і можуть виникнути значні погрішності. Тому частіше користуються наближеним методом - методом хорд (січних). **Він ґрунтується на відомій теоремі про кінцевий приріст функції:** якщо функція, задана графічно, і її похідна безперервні в будь-якому інтервалі, то хорда, яка стягує цю дугу на цьому інтервалі, паралельна дотичною до кривої, хоч би в одній точці, належить кривій в середині цього інтервалу. Зменшуючи інтервал, можна досягти того, що дотична і хорда зліяються. Отже, чим менше інтервал, тим точніше буде виконано диференціювання.

Масштаби кінематичних діаграм визначаються по формулах:

$$\text{Масштаб часу} \quad \mu_t = \frac{2\pi}{\omega_1 \cdot L}, \frac{c}{\text{мм}} \quad (2.36)$$

$$\text{Масштаб переміщення} \quad \mu_s = \frac{S_{max}}{Y_{max}}, \frac{м}{мм} \quad (2.37)$$

$$\text{Масштаб швидкості} \quad \mu_v = \frac{\mu_s}{H_1 \cdot \mu_t}, \frac{м/с}{мм} \quad (2.38)$$

$$\text{Масштаб прискорення} \quad \mu_a = \frac{\mu_v}{H_2 \cdot \mu_t}, \frac{м/с^2}{мм} \quad (2.39)$$

де  $L$  (мм) - відрізок по осі абсцис, що показує період одного обертання кривошипа;

$S_{max}$  - хід повзуна;

$Y_{max}$  - відрізок на графіці переміщення, що зображує максимальну відстань вихідної ланки від його початкового положення (максимальне переміщення повзуна), вибирається довільно;

$H_1, H_2$  (мм) - відповідно полюсні відстані диференціювання графіків швидкостей і прискорень.

Розглянемо метод хорд графічного диференціювання на прикладі кривошипно-повзунного механізму (рис. 2.43), період обертун кривошипа розглянемо у 12-ох положеннях.

Спочатку побудуємо графік переміщення повзуна як функцію часу  $S_B = S_B(t)$ , а потім графічним диференціюванням побудуємо графіки його швидкості  $V_B = V_B(t)$  і прискорення  $a_B = a_B(t)$ .

Кінематичні діаграми будуємо на одній базі по осі абсцис (рис.2.43). Для побудови діаграм, на осі абсцис відкладемо відрізок  $L$ , [мм], що в масштабі  $\mu_t$  буде часом періоду руху (одного повного обертун) кривошипа, який поділимо на 12 рівних частин (на таку кількість відрізків, на яку розбита траєкторія точки  $A$  кривошипа); в точках поділу креслимо вздовж осі ординат тонкі лінії.

Побудова діаграми переміщення повзуна  $S_B = S_B(t)$  (рис. 2.43): відкладаємо на відповідних ординатах переміщення точки  $B$  повзуна від крайнього його положення  $B_0$ . Масштаб графіка шляху  $\mu_s$  можна взяти таким, що дорівнює масштабові планів положень механізму  $\mu_L$ . Якщо графік займає багато місця за висотою, то ординати його треба зменшити, а масштаб відповідно збільшити. Сполучивши точки плавною кривою, дістанемо діаграму пройдених шляхів  $S_B = S_B(t)$ .

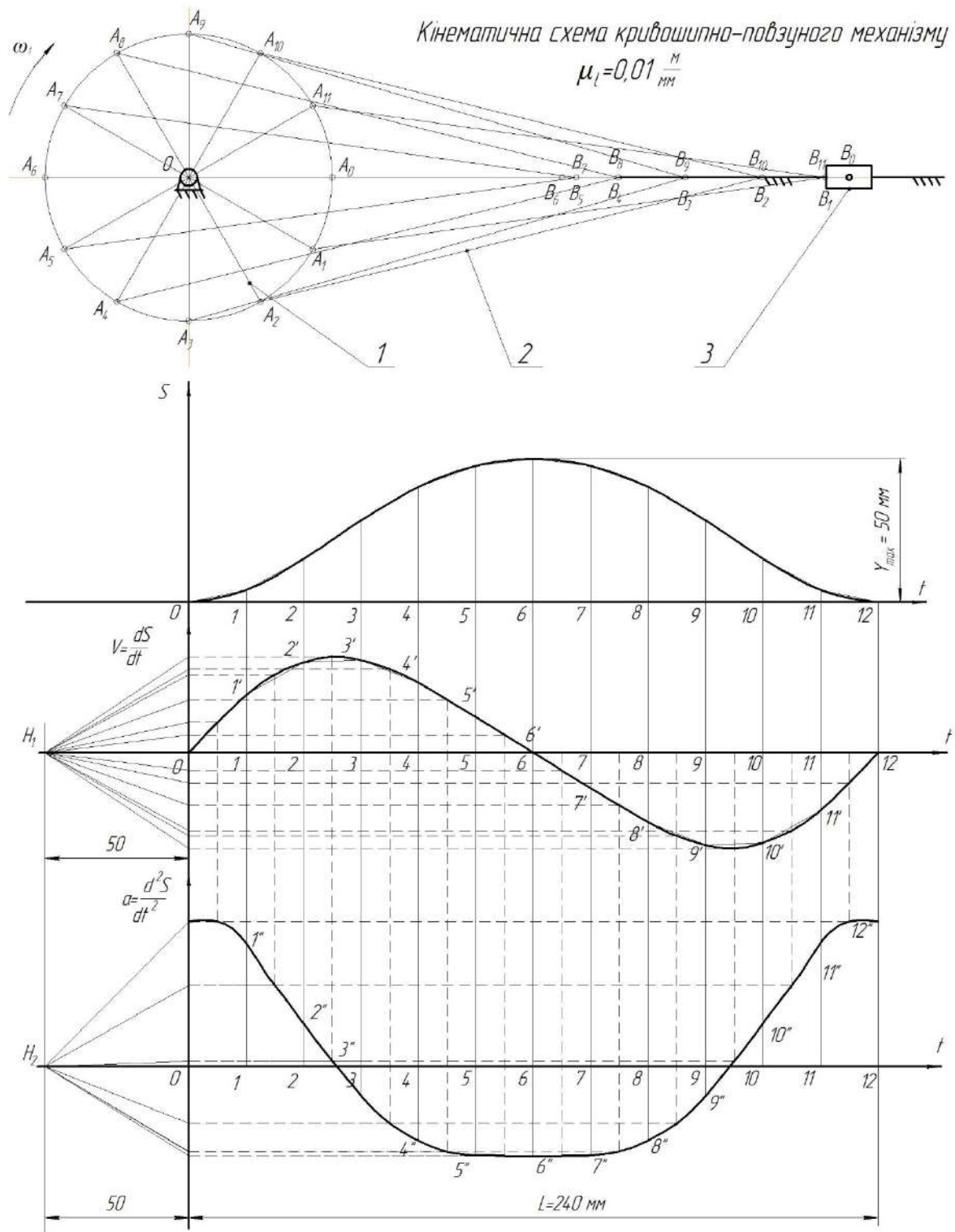


Рисунок 2.43 – Кінематична діаграма руху повзуна

Побудова діаграми швидкості повзуна  $V_B = V_B(t)$  (рис. 2.43):  
 диференціювання виконується в такому порядку. На проміжках графіку переміщень  $S_B = S_B(t)$  замінюємо криву відрізками прямих (хордами). Обираємо на продовженні осі абсцис (часу  $t$ ) ліворуч від осі ординат графіка швидкості  $V_B = V_B(t)$  довільний відрізок  $H_1$  (полюсну

відстань, 15-50 мм). Із точки  $H_1$  проведемо промені, паралельні відповідним хордам графіка  $S_B=S_B(t)$  до перетину з віссю ординат. Через точки, що дістали, проведемо лінії, паралельні осі абсцис до середини відповідних інтервалів графіка швидкості  $V_B=V_B(t)$ . Згідно з формулою ці відрізки зображують швидкості повзуна в середині цих інтервалів у певному масштабі  $\mu_V$  (січна паралельна дотичній в середині інтервалу). З'єднаємо плавною кривою отримані точки (ординати цих відрізків у середині інтервалів) і дістанемо діаграму швидкості повзуна.

Побудова діаграми прискорення повзуна  $a_B=a_B(t)$  (рис. 2.43): графік прискорень повзуна будується аналогічно. Полосу відстань  $H_2$  можна взяти такою, що дорівнює  $H_1$ .

Правильність побудови графіків легко контролюється по характеру кривих. Характерні залежності між інтегральною і диференціальною кривими:

- початкова і кінцева точки ординат графіку за період циклу механізму повинно бути однакові;
- проти точок перегину на діаграмі шляху  $[S, t]$  швидкість досягає максимум або мінімум, а прискорення дорівнює нулю;
- екстремальні значення (max) на діаграмі  $[a, t]$  прискорення відповідають нульові значення на діаграмі  $[V, t]$  швидкості;
- зростаючим ординатам діаграми  $[V, t]$  швидкості відповідають позитивні значення ординат діаграми  $[a, t]$  прискорення, а що убиває - негативні;
- максимальні значення на діаграмі  $[V, t]$  швидкості відповідають нульовим значенням на діаграмі  $[a, t]$  прискорення.

### ***Контрольні питання***

1. Задачі кінематичного аналізу механізмів.
2. Назвіть методи кінематичного аналізу механізмів, їх переваги і недоліки.
3. Визначення положень ланок кривошипно-повзуного механізму.
4. Визначення положень ланок кривошипно-коромислового механізму.
5. Визначення положень траєкторій точок кривошипно-повзуного механізму.
6. Визначення положень траєкторій точок кривошипно-коромислового механізму.
7. Графічний метод кінематичного аналізу механізму.
8. Метод графічного диференціювання.

9. Масштаби кінематичних діаграм.
10. Метод графічного інтегрування.
11. Характерні залежності між інтегральною і диференціальною кривими.
12. Які переваги і недоліки має графічний метод.
13. На якій теоремі ґрунтується метод хорд графічного диференціювання.
14. Які вихідні дані необхідні для кінематичного дослідження механізмів.
15. На якій теоремі ґрунтується метод хорд графічного диференціювання.
16. Плани швидкостей та прискорень плоских механізмів.
17. Кінематичне дослідження аналітичними методами векторних контурів.
18. В якій послідовності необхідно виконувати кінематичний розрахунок важільного механізму.
19. Що є планом положень механізму.
20. Як визначаються масштабні коефіцієнти фізичної величини.

### **ТЕМА 3. ДИНАМІКА МАШИН І МЕХАНІЗМІВ**

#### **ПЛАН**

- 3.1. Основні завдання динаміки машин.
- 3.2. Сили, діючі на ланки механізмів та умови вирішування задачі силового аналізу плоского механізму.
- 3.3. Силовий (кінетостатичний) аналіз плоских механізмів.
- 3.4. Важіль Жуковського.
- 3.5. Енергетичні характеристики машин.
  - 3.5.1. Режими руху механізму.
  - 3.5.2. Коефіцієнт руху механізму (ККД) механізму.

#### **3.1. Основні завдання динаміки машин.**

Основні завдання динаміки машин і механізмів полягають у вивченні закономірностей руху елементів машин під дією сил, що виникають у процесі їхньої роботи. Ця галузь механіки забезпечує наукову основу для проектування надійних, безпечних і ефективних машин. Основні завдання динаміки машин і механізмів:

1. *Визначення законів руху ланок механізмів* – аналіз переміщень, швидкостей і прискорень окремих частин машини.
2. *Розрахунок діючих сил і моментів* – з урахуванням маси, інерції, опорів і зовнішніх навантажень.

3. *Аналіз інерційних сил* – облік динамічних навантажень, що виникають під час роботи машини.

4. *Складання рівнянь руху* – побудова математичних моделей руху елементів машини з урахуванням мас та інерційних характеристик.

5. *Аналіз динамічного навантаження* – вивчення впливу змінних сил і моментів на роботу механізмів.

6. *Розрахунок кінетичної енергії та роботи сил* – дослідження енергетичних процесів у машині.

7. *Визначення реакцій у кінематичних парах* – сил взаємодії між з'єднаними ланками.

8. *Аналіз балансування рухомих частин* – визначення умов рівноваги для зменшення вібрацій та підвищення точності роботи.

9. *Оптимізація параметрів роботи механізмів* – забезпечення надійної роботи при мінімальній масі, витратах енергії та зниженні зношування.

Ці завдання вирішуються шляхом побудови математичних моделей і використання принципів динаміки, зокрема законів Ньютона, принципу Даламбера, енергетичних теорем.

**Динаміка** – розділ механіки машин і механізмів, що вивчає закономірності руху ланок механізму, під дією прикладених до них сил. У основі динаміки лежать три закони, сформульовані Ньютоном, з яких виходить:

*З першого закону:* якщо рівнодійна усіх зовнішніх сил діючих на механічну систему дорівнює нулю, то система знаходиться в стані спокою;

*З другого закону:* зміна стану руху механічної системи може бути викликана або зміною діючих на неї зовнішніх сил, або зміною її маси.

*З цих же законів виходить,* що динамічними параметрами механічної системи є:

- інерціальні (маси  $m$  і моменти інерції  $I$ );
- силові (сили  $F_{ij}$  і моменти сил  $M_{ij}$ );
- кінематичні (лінійні  $a$  і кутові  $\varepsilon$  прискорення).

Перша (пряма) задача динаміки – силовий аналіз – при відомій масі і законі руху, визначаємо сили, діючі на систему (вирішується методом диференціювання).

Друга (зворотна або основна) задача динаміки – динамічний аналіз – при відомих масі і сили, діючих на систему, визначується закон руху (вирішується методом інтегрування).

### 3.2. Сили, діючі на ланки механізмів та умови вирішування задачі силового аналізу плоского механізму.

Сили, діючі на ланки механізму, в загальному випадку ділять на:  
*зовнішні* – сили ваги і сили корисного опору, рушійні сили і сили (моменти) інерції для подолання яких призначений механізм.

*внутрішні* – реакції в кінематичних парах.

Під час руху машини на її ланки діють не лише прикладені до них зовнішні сили, а і сили, які виникають під час руху ланок. Характер руху цих сил, може бути різноманітним: деякі з них залежать від положення ланок механізму, інші - від швидкості, треті - постійні. Сили можна розділити на дві основні групи:

*рушійні сили* – приводять в рух ланки машини, що розвивають позитивну потужність (наприклад, сила тиску газів на поршень в двигунах внутрішнього згорання, сила тиску повітря або рідини в пневматичних і гідравлічних двигунах, момент на валу електродвигуна і так далі). Часто рушійні сили (їх моменти) задаються у вигляді механічних характеристик машин. Механічною характеристикою машини називають залежність силового параметра від часу або кінематичного параметра;

*сили опору* – розвивають негативну потужність. Силами опору називаються такі сили, які намагаються уповільнити рух провідної ланки, або що здійснюють негативну роботу.

Сили опору діляться на сили корисного опору і шкідливого опору.

*Сили корисного опору* – це сили, для подолання яких створені машини. Вони прикладені до вихідних ланок механізму, які пов'язані з робочими органами машин. Це опір металу різанню, опір породи ковша екскаватора, тиск повітря на поршень компресора, рідини на поршень насоса і так далі.

*Сили шкідливого опору* – це опір руху ланок при переміщенні їх в певному середовищі (повітрі, воді, рідині). Особливе місце займає шкідливий опір в кінематичних парах (тертя), що виникає при відносному русі ланок під дією їх сил тяжіння, сил корисного опору і інерції. Але є випадки, коли сили тертя неможливо віднести до шкідливого опору, наприклад, в гальмах або передачах тертям (фрикційні, стрічкові).

*Рушійні сили і сили опору* – це основні сили, що визначають характер руху.

Необхідно відмітити деяку умовність розподілу сил на рушійні і опори. Так, сили тяжіння ланок при підйомі їх центрів тяжіння будуть силами опору, а при опущенні – рушійними.

✓ *Сили тяжіння є результатом взаємодії кожної частки ланки із землею.* Прикладені в центрах мас ланок і спрямовані вертикально вниз. Внаслідок постійності напрямку сил тяжіння і замкнутості

траєкторій, що описують точками ланки, робота цих сил за період руху завжди дорівнює нулю. У середині періоду руху вони відрізняються від нуля.

✓ **Сили інерції**, обумовлені масою і рухом ланок з прискоренням, оскільки сучасні машини – швидкохідні. При періодичному русі робота сил інерції за період завжди дорівнює нулю.

При русі механізму сила інерції окремих ланок значно перевищує силу тяжіння. Тому зрозуміло, що уміти визначити і врахувати сили інерції потрібно обов'язково.

Окрім перерахованих силових чинників при силовому аналізі механізмів вводять в розгляд так звані **зрівноважуючі сили і моменти** – такі умовні зовнішні сили і моменти, які, будучи прикладеними до початкових ланок, забезпечують їх рух за заданим законом.

Механізм – це нерівноважна механічна система, оскільки в ній, як правило, немає жодної рухливої ланки, що знаходиться в стані спокою або рівномірного прямолінійного руху. Але оскільки при силовому аналізі механізмів прийнятніше використовувати прийоми і рівняння статки, то до реальних, фактично діючих сил, штучно додають інерційні сили і моменти, які, згідно з принципом Даламбера, будь-яку систему сил доповнюють до рівноважної; ці сили і моменти також вважають зовнішніми.

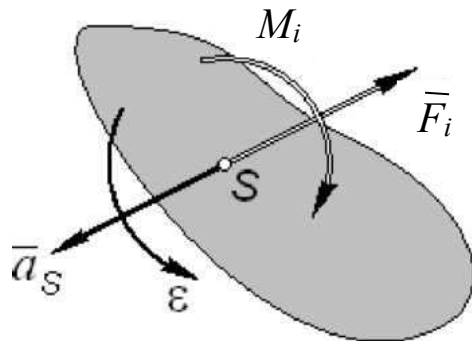


Рисунок 3.1

Для кожної ланки інерційну силу  $F_i$  і вважають прикладеною в центрі мас  $s$  і спрямованою протилежно його прискоренню  $a_s$ ; інерційний момент  $M_i$  прикладають до ланки і направляють протилежно його кутовому прискоренню  $\epsilon$  (рисунок 3.1).

Величини інерційних навантажень

$$F_i = m \cdot a_s \quad M_i = J_s \cdot \epsilon ; \quad (3.1)$$

де  $m$  - маса ланки, кг;

$J_s$  – момент інерції ланки відносно його центру мас  $S$  (що проходить через точку  $S$ ),  $кг \cdot м^2$ .

Силами тертя нехтуємо.

**Силовий аналіз механізмів з урахуванням інерційних навантажень називають кинестатичним.**

Метою силового аналізу механізму є:

1. Визначення сил взаємодії ланок (реакцій в кінематичних парах).

## 2. Визначення зрівноважуючих сил і моментів.

При силовому аналізі механізму окрім реакцій в кінематичних парах підлягають визначенню зрівноважуючі сили і моменти: кожен такий момент - це одна невідома величина, кожна сила - це в загальному випадку три невідомих; проте, як правило, для зрівноважуючих сил заздалегідь відомі точка прикладення і напрям, тоді і для кожної такої сили залишається одна шукана величина - її числове значення.

Оскільки силовий аналіз механізму виконується методами кінетостатики, то він здійснено тільки при дотриманні умов *статичної визначності вирішуваної задачі*:

- механізм статично визначимо тільки у тому випадку, якщо число невідомих параметрів, пов'язаних із зовнішніми шуканими силами і моментами (в більшості випадків - це число невідомих зрівноважуючих сил і моментів), дорівнює мірі рухливості механізму; при розрахунку  $W$  мають бути виключені місцеві рухливості і пасивні зв'язки;

- при розрахунку реакцій в кінематичних парах механізм розбивають на окремі кінематичні ланцюги; такий ланцюг статично визначимо тоді і тільки тоді, коли вона є структурною групою.

При силовому аналізі групи усі невідомі - це тільки параметри реакцій в зовнішніх і внутрішніх кінематичних парах групи, що розраховується; відомими силовими чинниками при цьому є усі зовнішні моменти і сили, а також реакції від раніше розрахованих груп.

### 3.3. Силовий (кінетостатичний) аналіз плоских механізмів.

Класичне завдання силового аналізу механізму зазвичай вирішується при таких початкових даних:

1. Кінематична схема механізму.
2. Розміри і інші геометричні параметри ланок.
3. Закони руху вхідних ланок.
4. Маса і моменти інерції ланок.
5. Сили і моменти корисних опорів.

Надалі вважатимемо, щодо моменту початку силового розрахунку механізму виконаний його повний кінематичний аналіз і розраховані ваги ланок, їх інерційні сили і моменти; природно, сили і моменти корисних опорів задані.

*Характеристики реакцій в кінематичних парах*

Вектор будь-якої сили характеризується точкою прикладення, модулем (величиною) і напрямом; замість величини і напрямку нерідко

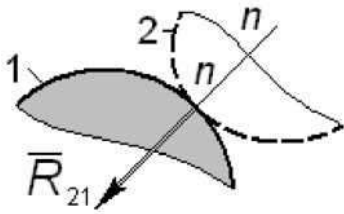


Рисунок 3.2 –  
Пара IV класу

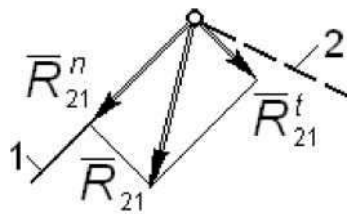
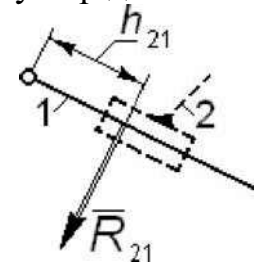


Рисунок 3.3 –  
Пари V класу а) обертальна б) поступальна



використовують дві складових цієї сили по яких-небудь вибраних напрямках.

Реакція в кінематичній парі завжди діє в тих напрямках, в яких неможливий відносно рух ланок.

У плоских механізмах зустрічаються кінематичні пари тільки IV і V класів (рис. 3.2 і 3.3). Очевидно, що реакції в таких парах характеризуються наступними поєднаннями відомих і невідомих величин:

- пара IV класу - відомі точка прикладення і напрям (діє уздовж контактної нормалі), невідома тільки величина;
- обертальна пара V класу - відома точка прикладення, невідомі напрям і величина (чи дві складових по вибраних напрямках);
- поступальна пара V класу - відомий напрям (що перпендикулярно направляє поступальну ходу), невідомі величина і положення точки прикладення.

Таким чином, при силовому аналізі пари IV класу характеризується однією невідомою, будь-яка пара V класу - двома.

#### *Порядок силового аналізу механізму*

Розглядаємо тільки такі механізми, які підкоряються класифікації Л.В. Ассура.

До початку силового аналізу необхідно виконати структурне дослідження механізму, при цьому мають бути усунені місцеві рухливості і пасивні зв'язки, а також зроблена заміна вищих кінематичних пар ланцюгами з нижчими парами і так далі.

Для написання формули будови механізму мають бути вибрані початкові ланки у кількості  $W$  - це завжди ті ланки, до яких прикладені невідомі зовнішні сили і моменти.

Формула будови повністю визначає послідовність розгляду частин механізму: на кожному етапі розрахунку може бути виконаний силовий розрахунок тієї групи або початкової ланки, які є кінцевими в будь-якій гілці цієї формули. Іншими словами, ніякий елемент

формули будови не може бути розрахований раніше того, який в цій формулі йде за ним. Наприклад;

Порядок кінематичного аналізу

$$I(01) \leftarrow II(23) \leftarrow II(45)$$

Порядок силового аналізу

#### Методи силового аналізу

Силовий розрахунок механізмів без урахування тертя в кінематичних парах допускає застосування як аналітичних, так і графоаналітичних методів.

Ми віддаємо перевагу графоаналітичному методу планів сил.

Оскільки векторний план є графічним зображенням векторної рівності, то при простій формі векторних силових багатокутників їх аналітична обробка досить проста і дозволяє розрахувати точні силові співвідношення для заданих положень механізмів.

#### Кінетостатика структурних груп II класу

Структурна група статично визначена, якщо для неї невідомі тільки реакції в усіх зовнішніх і внутрішніх кінематичних парах цієї групи; при цьому: для кожної обертальної пари невідомі величина і напрям реакції, для поступальної - величина і точка прикладення.

Приклад проведення кінетостатичного аналізу механізму.

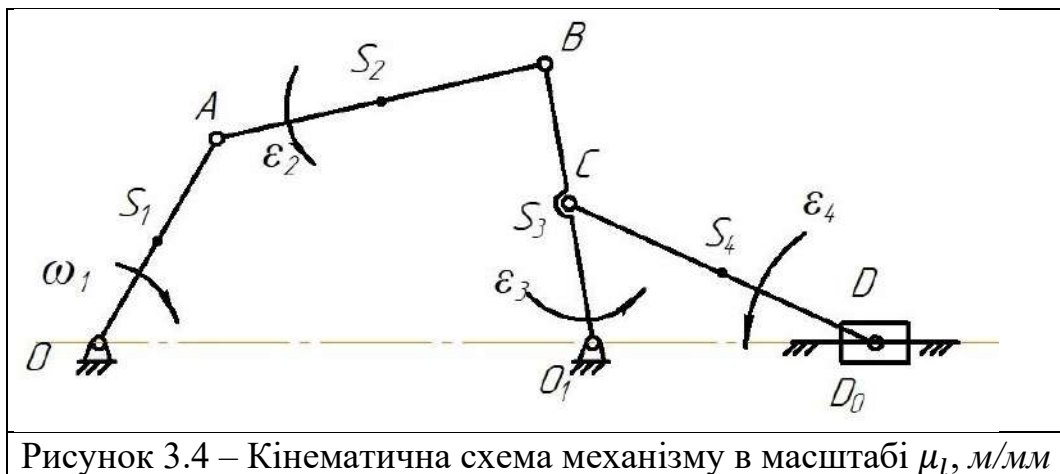


Рисунок 3.4 – Кінематична схема механізму в масштабі  $\mu_1, \text{м/мм}$

Дано:  $m_1, \text{кг}; m_2, \text{кг}; m_3, \text{кг}; m_4, \text{кг}; m_5, \text{кг}; I_{S_2}, \text{кг}\cdot\text{м}^2, I_{S_3}, \text{кг}\cdot\text{м}^2, I_{S_4}, \text{кг}\cdot\text{м}^2.$

Формула побудови механізму:

Порядок кінематичного аналізу

$$I(01) \leftarrow II(23) \leftarrow II(45)$$

Порядок силового аналізу

Тобто, кінетостатичний аналіз проводим в зворотному порядку побудови механізму.

Аналітично визначаємо:

$$G_1 = m_1 \cdot g, \text{ Н} \quad F_1^i = m_1 \cdot a_{S_1}, \text{ Н} \quad M_1^i = 0, \\ \text{тому що } a^r=0 \text{ і } \omega_1=\text{const}$$

$$G_2 = m_2 \cdot g, \text{ Н} \quad F_2^i = m_2 \cdot a_{S_2}, \text{ Н} \quad M_2^i = I_{S_2} \cdot \varepsilon_2, \text{ Н} \cdot \text{ м}$$

$$G_3 = m_3 \cdot g, \text{ Н} \quad F_3^i = m_3 \cdot a_{S_3}, \text{ Н} \quad M_3^i = I_{S_3} \cdot \varepsilon_3, \text{ Н} \cdot \text{ м}$$

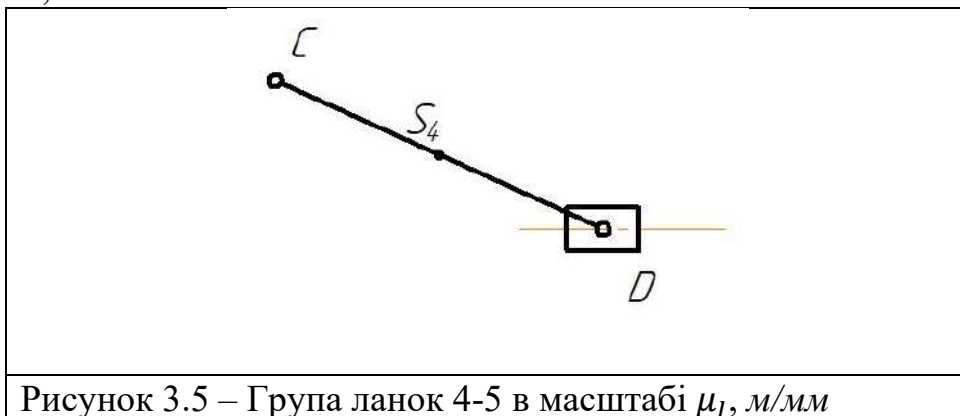
$$G_4 = m_4 \cdot g, \text{ Н} \quad F_4^i = m_4 \cdot a_{S_4}, \text{ Н} \quad M_4^i = I_{S_4} \cdot \varepsilon_4, \text{ Н} \cdot \text{ м}$$

$$G_5 = m_5 \cdot g, \text{ Н} \quad F_5^i = m_5 \cdot a_{S_5}, \text{ Н}$$

П'ята ланка рухається поступово, тому моменту сил інерції немає, є тільки сила інерції.

### 1. Силовий аналіз групи Асура 2 класу, 2 порядку, 2 виду

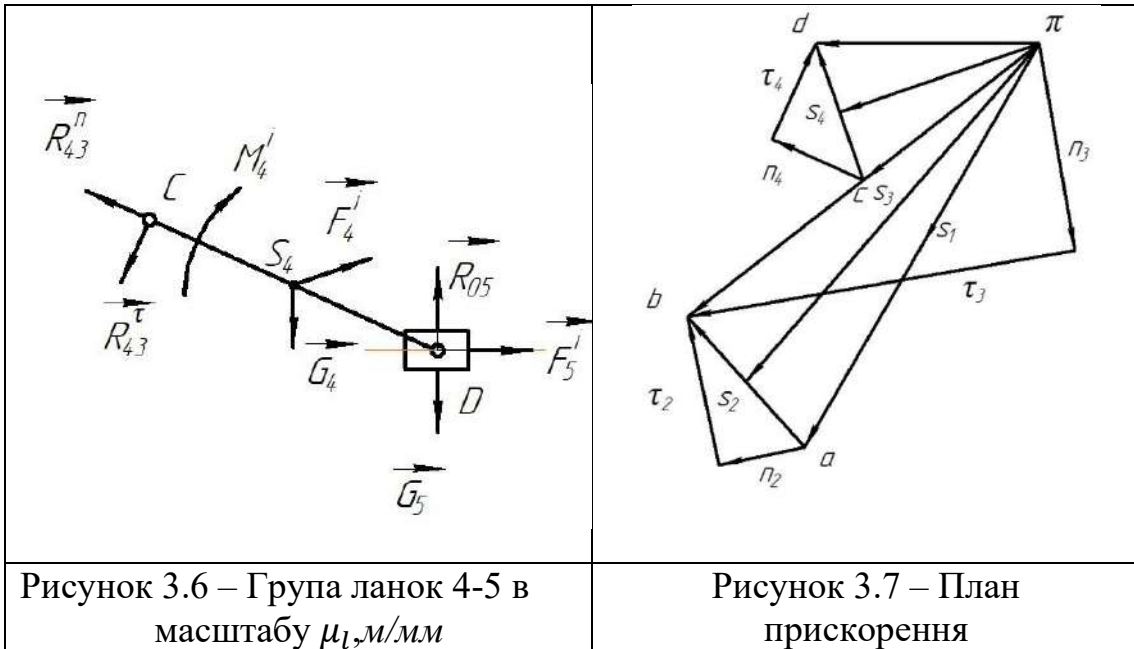
Відповідно до формули будови механізму і методу проведення силового аналізу, відокремлюємо структурну групу яка складається з ланок 4, 5.



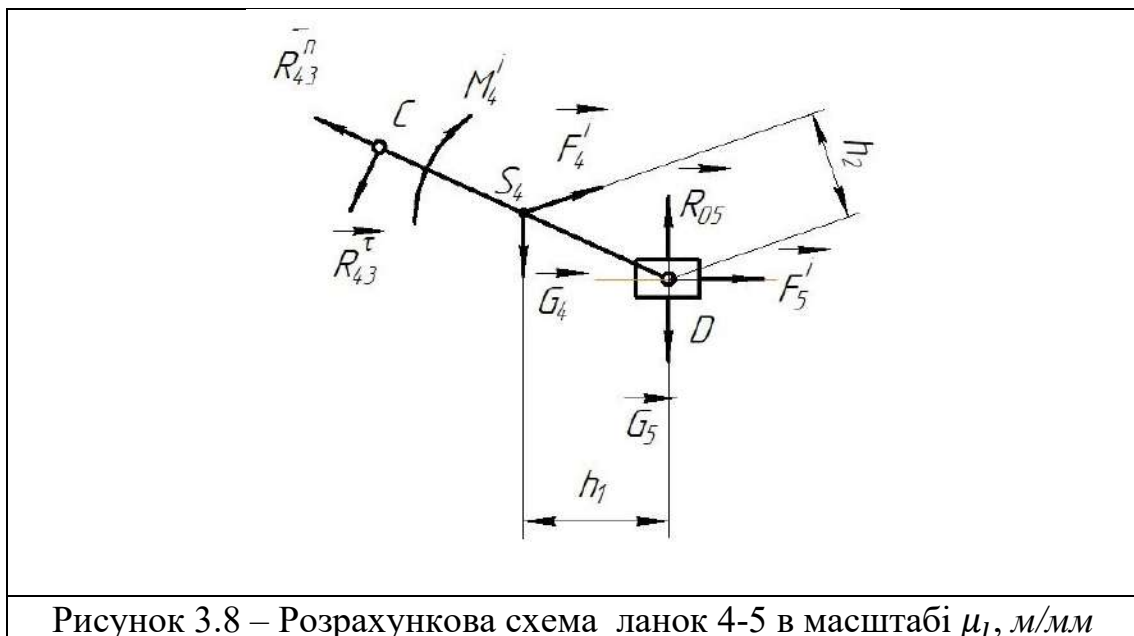
Докладаємо всіх зусиль: зовнішні і внутрішні.

Сили тяжіння прикладені в точках центру мас і спрямовані вертикально вниз. Сили інерції  $\bar{F}_4^i$  і  $\bar{F}_5^i$ , згідно з планом прискорень, спрямовані в зворотну сторону прискорення центру мас  $a_{S_4}$  і  $a_D$  та прикладені в точках  $S_4$  і  $D$ .

Ми не знаємо куди будуть спрямовані реакції в шарнірах. Розташуємо уздовж ланки **вісь x**, а перпендикулярно – **вісь y**, і назвемо реакцію в точці  $C$  на **вісь y** –  $\bar{R}_{43}^r$ , а на **вісь x** –  $\bar{R}_{43}^n$ , тому що 3-ю ланку відкинули. У точці  $D$  – одна реакція гладкої опори, яка направлена перпендикулярно поступального руху  $\bar{R}_{05}$ .



Напрямки сил інерції визначаємо, використовуючи план прискорення. Момент сил інерції спрямований у протилежний бік кутового прискорення  $\varepsilon_4$  4-ї ланки (рис. 3.6)



Складаємо рівняння: сума моментів щодо точки **D**:

$$\sum M_D(F_i) = 0 - \text{в загальному вигляді.}$$

$$R_{43}^{\tau} \cdot CD + G_4 \cdot h_1 - F_4^i \cdot h_2 - \frac{M_4^i}{\mu_l} = 0;$$

У цьому рівнянні один недолік – розмірні одиниці повинні бути дотримані, тобто  $M_4^i/\mu_l$  – момент інерції ділимо на масштаб плану положень. У цьому рівнянні одна невідома, визначаємо:

$$R_{43}^{\tau} = \frac{F_4^i \cdot h_2 - G_4 \cdot h_1 + M_4^i / \mu_l}{CD}, \text{ Н}$$

Залишилося дві невідомих. При використанні аналітичного методу, для даної групи, необхідно скласти три рівняння, тому що всього три невідомих. У графоаналітичному способі досить одного рівняння.

Обираємо масштаб:

$$\mu_P = \frac{R_{43}^{\tau}}{\bar{R}_{43}^{\tau}}, \frac{\text{Н}}{\text{мм}}$$

Далі визначаємо довжину усіх векторів сил:

$$\bar{G}_4 = \frac{G_4}{\mu_P}, \text{ мм}$$

$$\bar{G}_5 = \frac{G_5}{\mu_P}, \text{ мм}$$

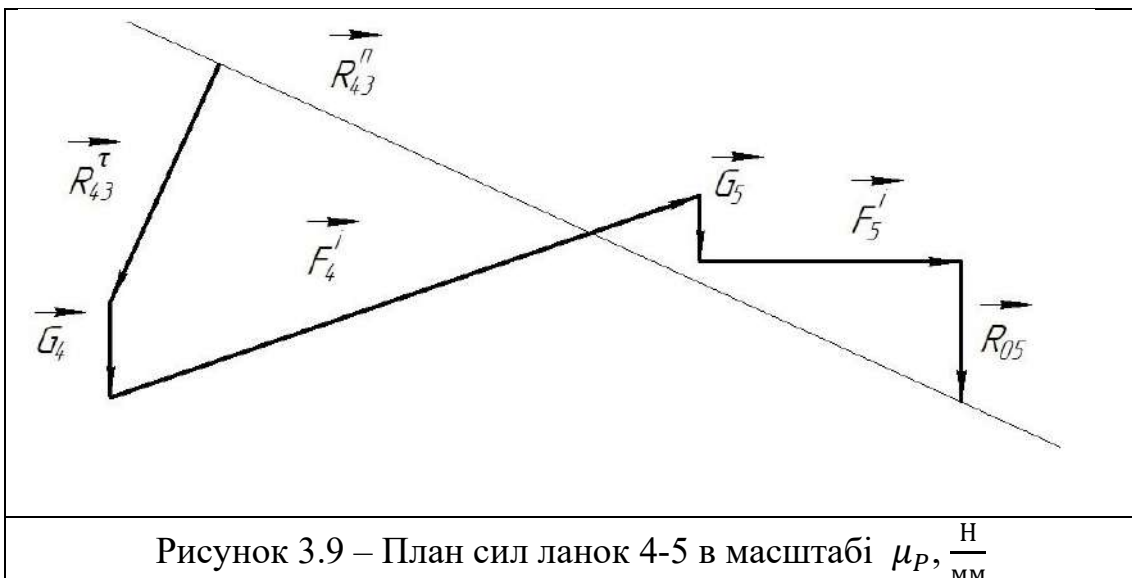
$$\bar{F}_4^i = \frac{F_4^i}{\mu_P}, \text{ мм}$$

$$\bar{F}_5^i = \frac{F_5^i}{\mu_P}, \text{ мм}$$

Записуємо векторне рівняння – сума всіх сил дорівнює нулю:

$$\sum \bar{F}_k = 0. \bar{R}_{43}^n + \bar{R}_{43}^{\tau} + \bar{G}_4 + \bar{F}_4^i + \bar{G}_5 + \bar{F}_5^i + \bar{R}_{05} = 0$$

Згідно масштабу, будуємо план сил.



В такому багатокутнику сума всіх сил дорівнює нулю, тому що він замкнутий.

Складаємо вектори нормальної і тангенціальної реакції в точці С, використовуючи метод трикутника і отримуємо результуючу, вимірюємо довжину вектору, множимо його на масштаб плану сил:

$$R_{43} = \bar{R}_{43} \cdot \mu_P, \text{ Н}$$

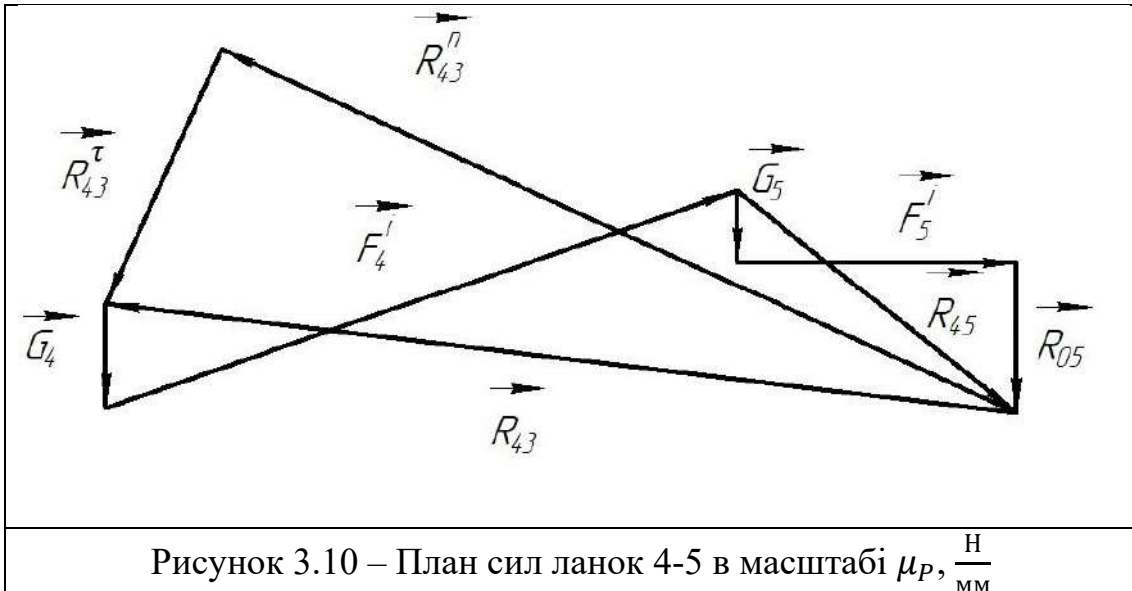


Рисунок 3.10 – План сил ланок 4-5 в масштабі  $\mu_P, \frac{\text{Н}}{\text{мм}}$

Вимірюємо довжину вектору  $\bar{R}_{05}$ :

$$R_{05} = \bar{R}_{05} \cdot \mu_P, \text{ Н}$$

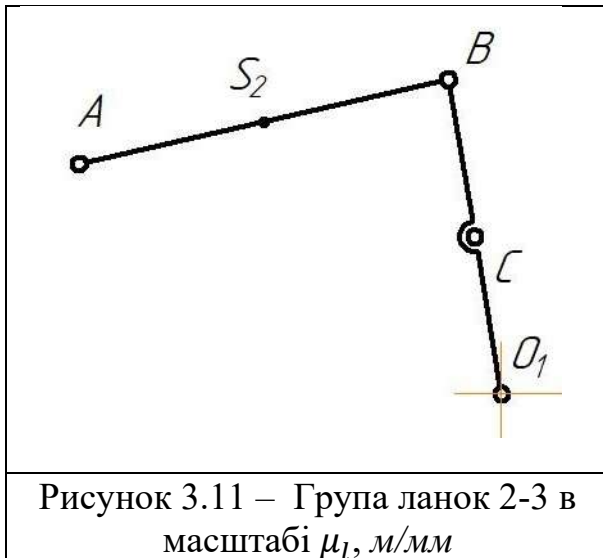
Далі на плані сил знаходимо точку, де закінчується дія сил на четверту ланку і починається дія сил на п'ята ланка і з'єднуємо її з точкою, де закінчується дія сил на п'ята ланка і починається дія сил на четверту ланку. В результаті отримуємо результуючу реакцію четвертого ланки на п'яте.

$$R_{45} = \bar{R}_{45} \cdot \mu_P, \text{ Н}$$

Четверта ланка діє на п'яте з такою ж силою, як п'яте на четверте і так само:

$$\bar{R}_{45} = -\bar{R}_{54}$$

2. Силовий аналіз групи Асура 2 класу, 2 порядку, 1 виду

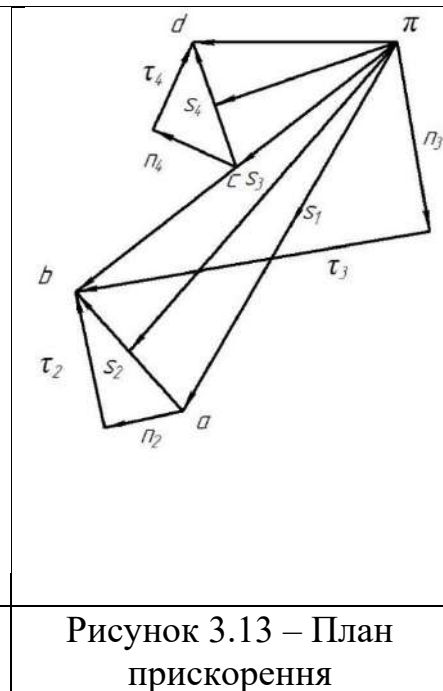
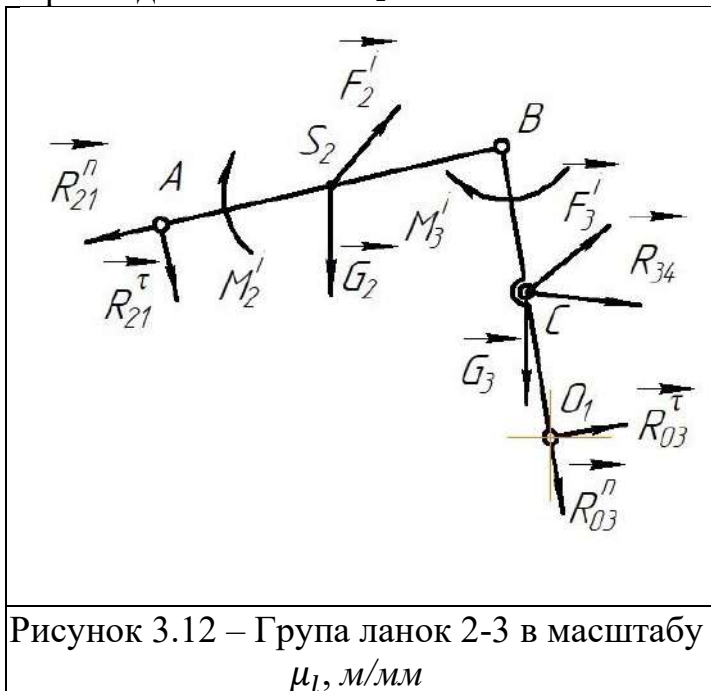


Відповідно до формули будови механізму і методу проведення силового аналізу, відокремлюємо структурну групу Асура 2-го класу, 2-го порядку, 1-го виду.

Моменти сил інерції спрямовані в зворотну сторону кутових прискорень  $\varepsilon_2$  і  $\varepsilon_3$  2-ї і 3-ї ланок (рис. 3.12)

Сили тяжіння прикладені в точках центру мас і спрямовані вертикально вниз. сили інерції  $\bar{F}_2^i$  і  $\bar{F}_3^i$ , згідно з планом

прискорень, спрямовані в зворотну сторону прискорення центру мас і прикладені в точках  $S_2$  і  $C$ .



Реакцію в точці  $C$ , на четверту ланку  $\bar{R}_{34}$  направляємо в протилежну сторону  $\bar{R}_{43}$ , беремо з плану сил ланок 4-5.

Нормальні і дотичні реакції в точках  $A$  і  $O_1$  маємо уздовж ланок і поперек.

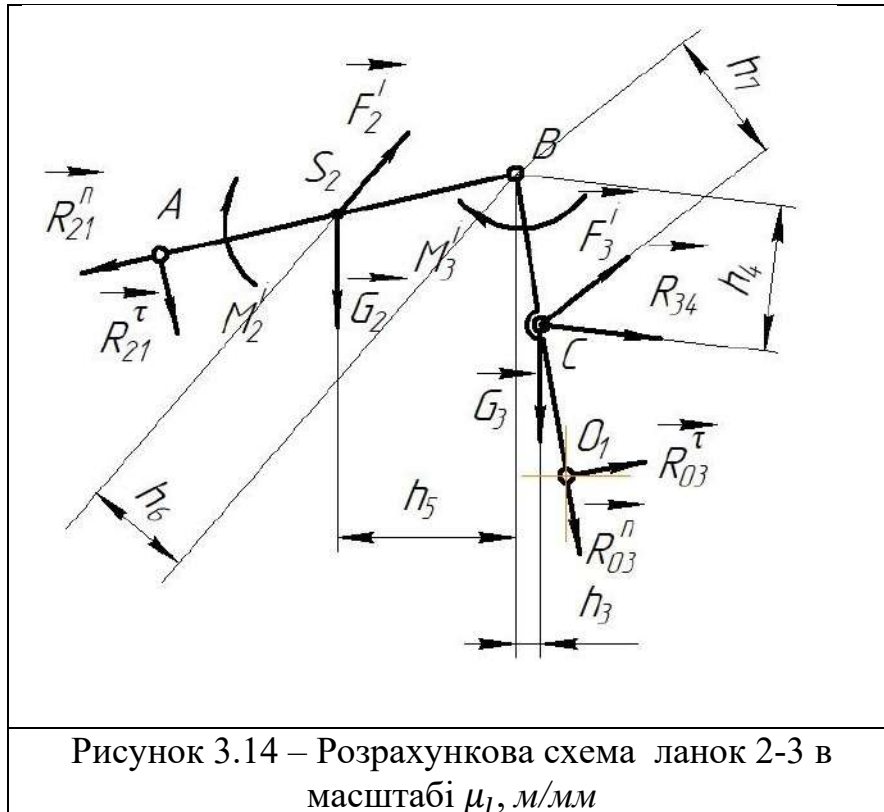


Рисунок 3.14 – Розрахункова схема ланок 2-3 в масштабі  $\mu_l, м/мм$

Складаємо рівняння: сума моментів щодо точки **B**. Для 2-ї ланки:

$$\sum M_B(F_i) = 0 \text{ – в загальному вигляді}$$

$$R_{21}^{\tau} \cdot AB + G_2 \cdot h_5 - F_2^i \cdot h_6 - \frac{M_2^i}{\mu_l} = 0;$$

У цьому рівнянні один недолік – розмірні одиниці повинні бути дотримані, тобто  $M_2^i/\mu_l$  – момент інерції ділимо на масштаб плану положень. У цьому рівнянні одна невідома, визначаємо:

$$R_{21}^{\tau} = \frac{F_2^i \cdot h_6 - G_2 \cdot h_5 + M_2^i/\mu_l}{AB}, Н$$

Для 3-ї ланки:

$$\sum M_B(F_i) = 0 \text{ – в загальному вигляді.}$$

$$R_{03}^{\tau} \cdot BO_1 - G_3 \cdot h_3 + F_3^i \cdot h_7 + R_{34} \cdot h_4 - \frac{M_3^i}{\mu_l} = 0;$$

У цьому рівнянні один недолік – розмірні одиниці повинні бути дотримані, тобто  $M_3^i/\mu_l$  – момент інерції ділимо на масштаб плану положень. У цьому рівнянні одна невідома, визначаємо:

$$R_{03}^{\tau} = \frac{G_3 \cdot h_3 - F_3^i \cdot h_7 - R_{34} \cdot h_4 + M_3^i/\mu_l}{BO_1}, Н$$

Обираємо масштаб:

$$\mu_P = \frac{R_{21}^{\tau}}{\bar{R}_{21}^{\tau}}, \frac{\text{Н}}{\text{мм}}$$

Далі визначаємо довжину усіх векторів сил:

$$\bar{G}_2 = \frac{G_2}{\mu_P}, \text{мм}$$

$$\bar{G}_3 = \frac{G_3}{\mu_P}, \text{мм}$$

$$\bar{F}_2^i = \frac{F_2^i}{\mu_P}, \text{мм}$$

$$\bar{F}_3^i = \frac{F_3^i}{\mu_P}, \text{мм}$$

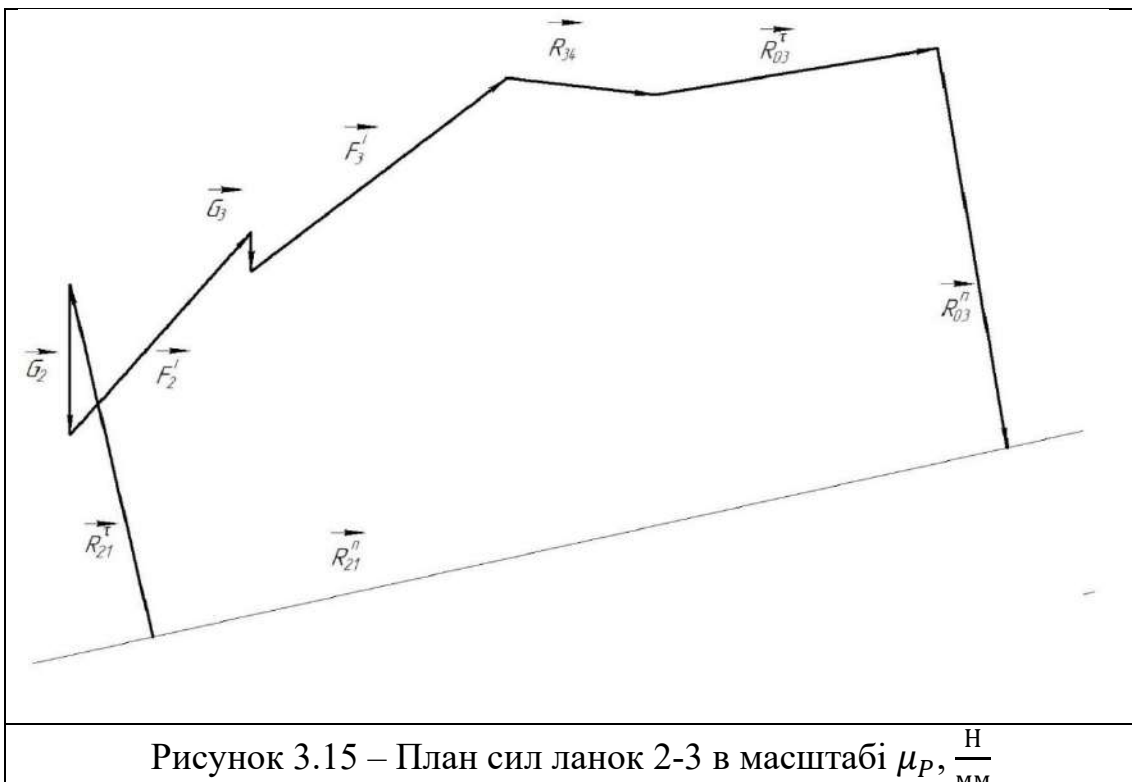
$$\bar{R}_{34} = \frac{R_{34}}{\mu_P}, \text{мм}$$

$$\bar{R}_{03}^{\tau} = \frac{R_{03}^{\tau}}{\mu_P}, \text{мм}$$

Записуємо векторне рівняння - сума всіх сил дорівнює нулю:

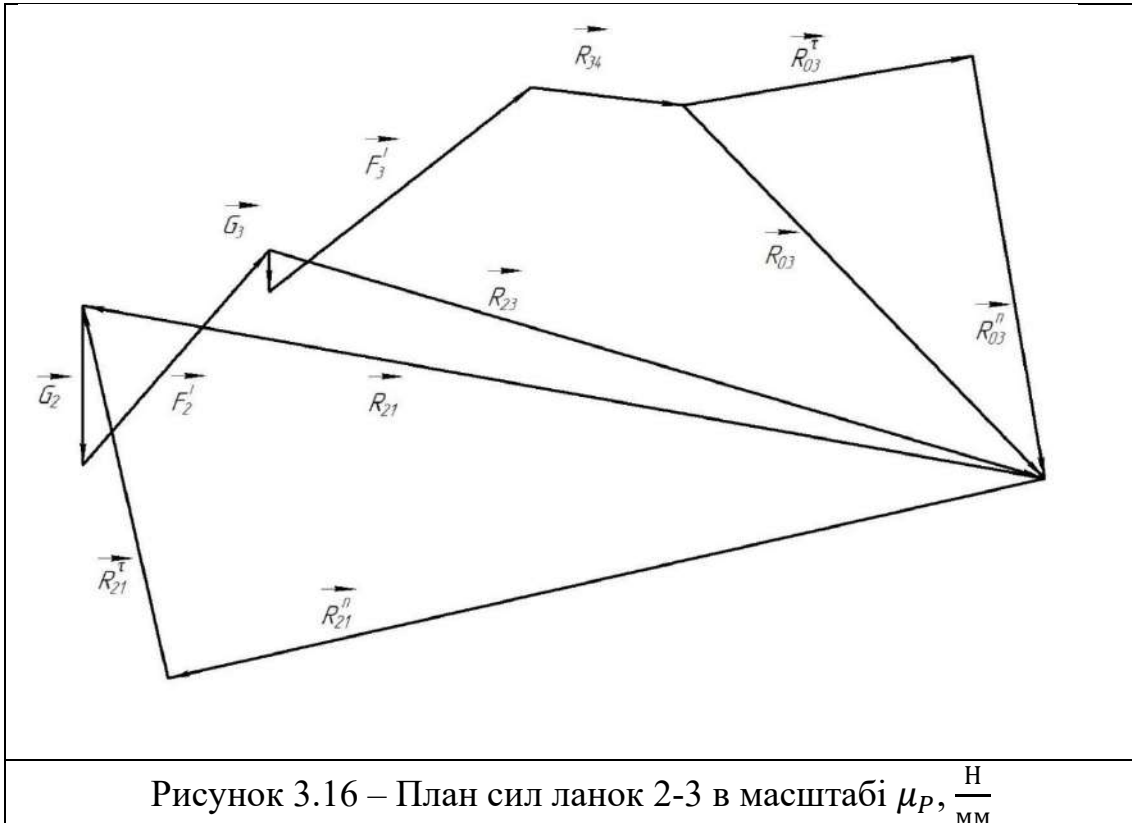
$$\sum \vec{F}_k = 0, \bar{R}_{21}^n + \bar{R}_{21}^{\tau} + \bar{G}_2 + \bar{F}_2^i + \bar{G}_3 + \bar{F}_3^i + \bar{R}_{34} + \bar{R}_{03}^{\tau} + \bar{R}_{03}^n = 0$$

Згідно масштабу, будемо план сил.



В такому багатокутнику сума всіх сил дорівнює нулю, тому що він замкнутий.

Складаємо вектори нормальної і тангенціальної реакції в точках  $A$  и  $O_1$ , використовуючи метод трикутника і отримуємо результуючі.



Вимірюємо довжину векторів  $\bar{R}_{21}$  и  $\bar{R}_{03}$  та множимо їх на масштаб плану сил:

$$\begin{aligned} R_{21} &= \bar{R}_{21} \cdot \mu_P, \text{ H} \\ R_{03} &= \bar{R}_{03} \cdot \mu_P, \text{ H} \end{aligned}$$

Далі на плані сил знаходимо точку, де закінчується дія сил на другу ланку і починається дія сил на третю ланку і з'єднуємо її з точкою, де закінчується дія сил на третю ланку і починається дія сил на другу ланку. В результаті отримуємо результуючу реакцію другої ланки на третє.

$$R_{23} = \bar{R}_{23} \cdot \mu_P, \text{ H}$$

Третя ланка діє на друге з такою ж силою, як друге на третє і так само:

$$\bar{R}_{23} = -\bar{R}_{32}$$

### 3. Силевий аналіз групи Асура 1 класу

Сила тяжіння спрямована в точці центру мас і спрямована

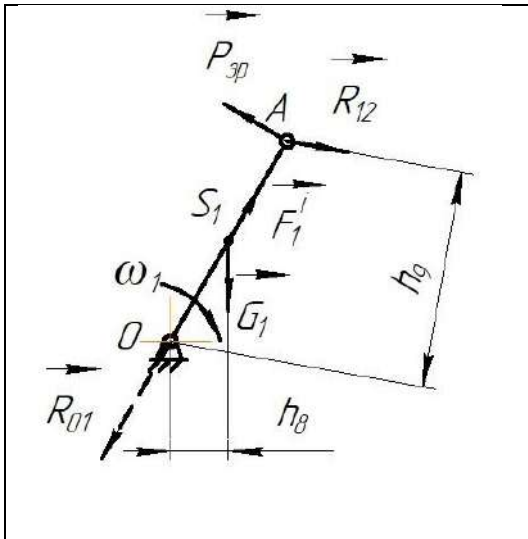


Рисунок 5.17 – Ведуча ланка в масштабі  $\mu_P, \frac{H}{MM}$

вертикально вниз. Сила інерції  $\bar{F}_1^i$ , згідно з планом прискорень, спрямована в протилежний бік прискорення центру мас і прикладена в точці  $S_1$ .

Реакцію в точці  $A$  на другу ланку  $\bar{R}_{12}$  прикладаємо, використовуючи план сил ланок 2-3 і направляємо в зворотну сторону  $\bar{R}_{21}$ .

До ведучого ланці в точці  $A$  прикладаємо зрівноважуючу силу перпендикулярно ланці  $OA$ , яку визначимо з рівняння рівноваги:

$$\sum M_O(F_i) = 0, P_{3p} \cdot OA - R_{12} \cdot h_9 - G_1 \cdot h_8 = 0;$$

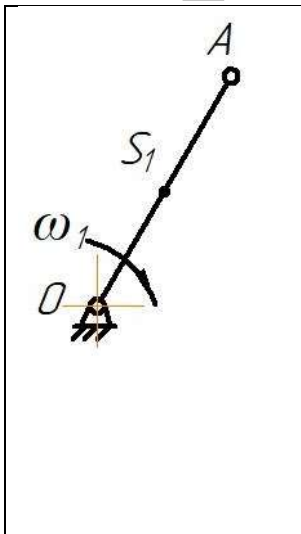


Рисунок 3.18 – Ведуча ланка в масштабі  $\mu_P, \frac{H}{MM}$

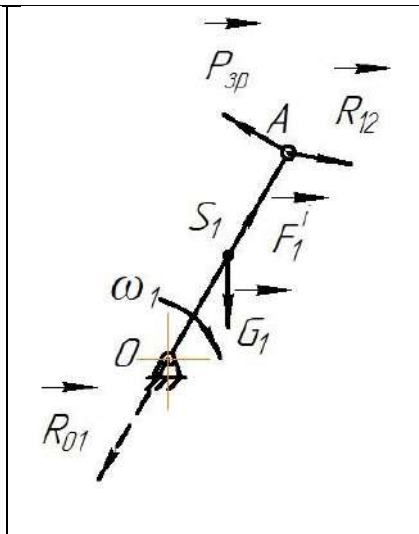


Рисунок 3.18 – Ведуча ланка в масштабі  $\mu_P, \frac{H}{MM}$

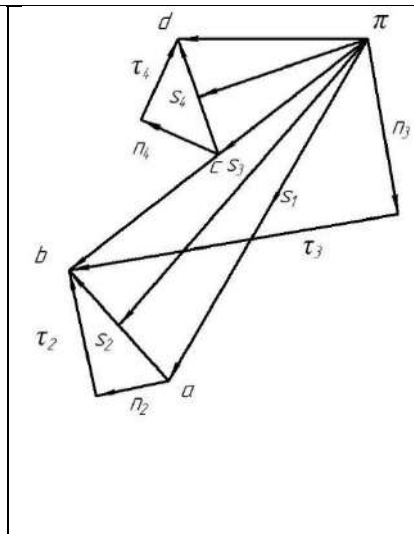


Рисунок 3.20 – План прискорення

$$P_{3p} = \frac{R_{12} \cdot h_9 + G_1 \cdot h_8}{OA}, H$$

Обираємо масштаб:

$$\mu_P = \frac{R_{12}}{\bar{R}_{12}}, \frac{H}{MM}$$

Визначаємо довжини векторів:

$$\bar{G}_1 = \frac{G_1}{\mu_P}, \text{ мм}$$

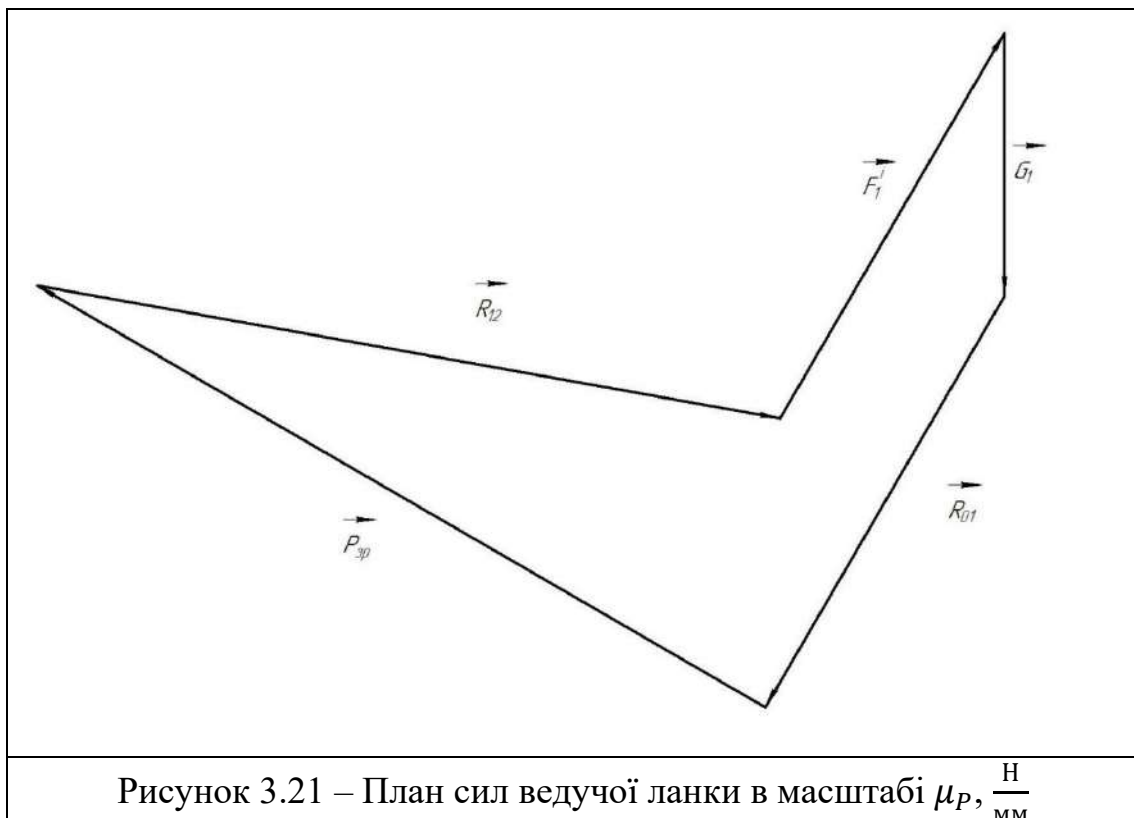
$$\bar{F}_1^i = \frac{F_1^i}{\mu_P}, \text{ мм}$$

$$\bar{P}_{зр} = \frac{P_{зр}}{\mu_P}, \text{ мм}$$

Записуємо векторне рівняння – сума всіх сил дорівнює нулю:

$$\sum \vec{F}_k = 0, \quad \bar{P}_{зр} + \bar{R}_{12} + \bar{F}_1^i + \bar{G}_1 + \bar{R}_{01} = 0$$

Згідно масштабу, будемо план сил.



$$R_{01} = \bar{R}_{01} \cdot \mu_P, \text{ Н}$$

### 3.4. Важіль Жуковського.

Одним із способів визначення зрівноважуючої сили  $P_{зр}$  являється спосіб, запропонований професором М.Є. Жуковським.

Силовий розрахунок і динамічне дослідження механізмів можуть бути завжди зроблені, якщо користуватися **принципом можливих переміщень**. Згідно з цим принципом, якщо на яку-небудь механічну систему діють сили, то, якщо додати до цих сил сили інерції, і додати усій системі можливі для цього її положення переміщення, отримуємо ряд елементарних робіт, сума яких повинна дорівнювати нулю. Можна сказати і так, що дійсно, згідно з принципом Даламбера усі реально діючі на ланки механізму сили, доповнені зрівноважуючими, а також інерційними силами і моментами, утворюють рівноважну систему, для якої сума миттєвих потужностей в будь-якому положенні механізму дорівнює нулю. І що особливо важливе, при розрахунках без урахування тертя, реакції в кінематичних парах в цьому балансі потужностей, не беруть участь.

*Графоаналітично це може бути представлено так, за умови, що план швидкостей механізму вже побудований в деякому масштабі  $\mu_v$ . Якщо план швидкостей повернути на  $90^\circ$  в будь-яку сторону і усі сили і моменти сил (ваги, інерції, корисного опору, зрівноваживальну) прикласти до відповідних точок (до кінців векторів), зберігши їх напрям, то моменти цих сил відносно полюса  $P$  буде рівний нулю:*

$$\sum M_p(F_i) = 0 - \text{в загальному вигляді.}$$

Повернений на  $90^\circ$  план швидкостей з прикладеними до нього силами називається *жорстким важелем Жуковського*.

Таким чином, зрівноважуючу силу можна знайти, повернувши на  $90^\circ$  план швидкостей і приклавши до нього усі зовнішні сили, включаючи сили інерції, у відповідних точках і зберігаючи їх напрями.

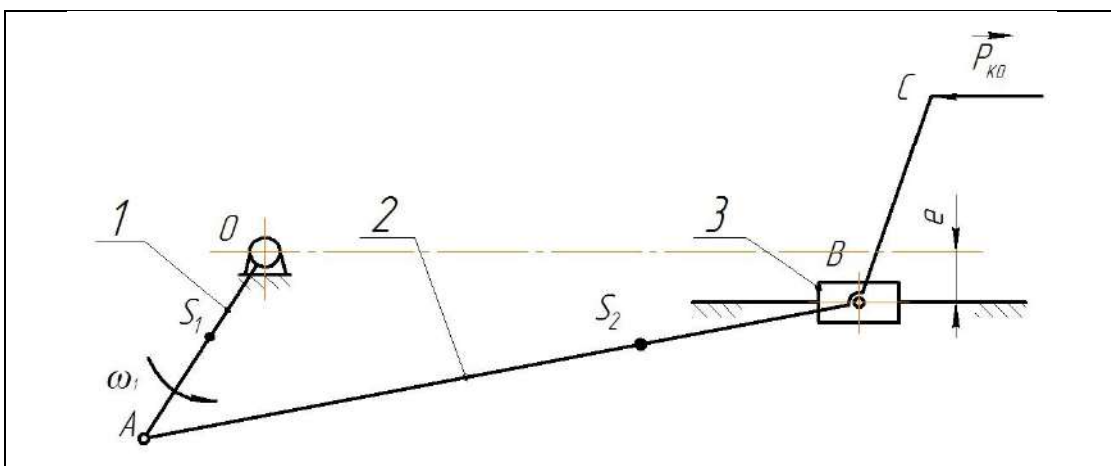
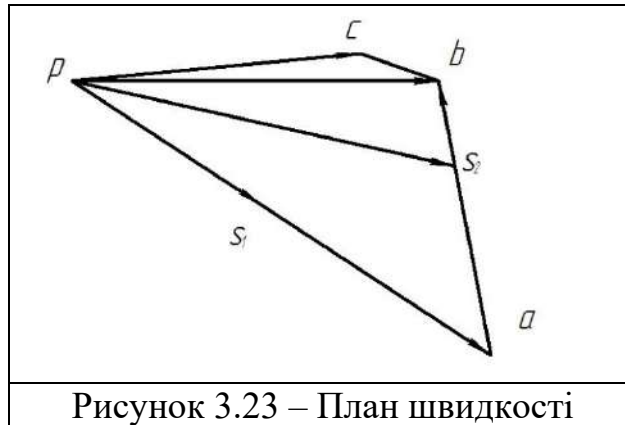


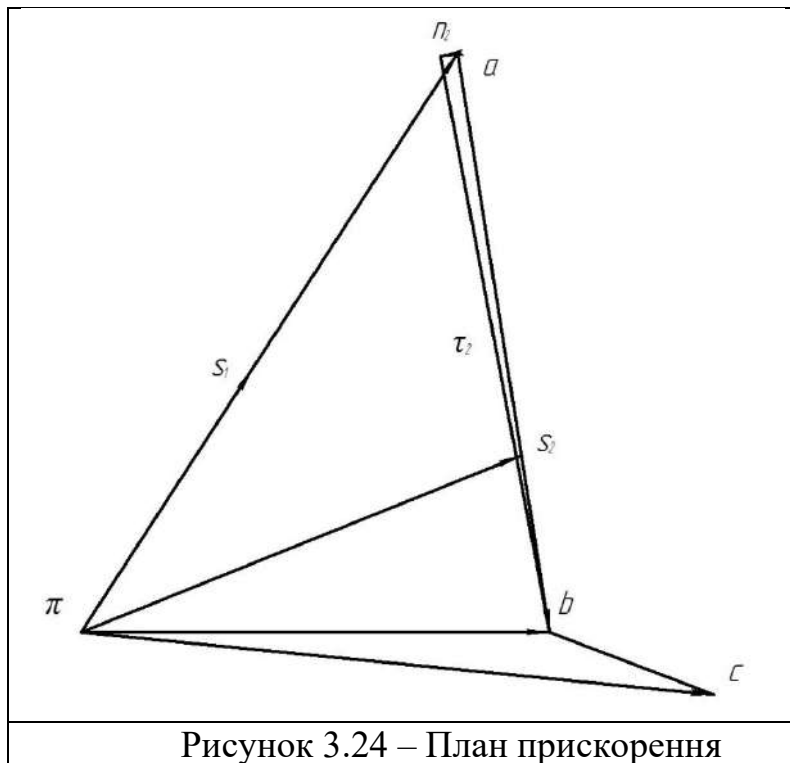
Рисунок 3.22 – Кінематична схема кривошипно-повзункового механізму: 1 – кривошип, 2 – шатун, 3 – повзун.

Нехай задано кінематичну схему кривошипно-повзункового механізму (рис.3.22), з центрами мас  $S_1$ ,  $S_2$  та  $S_3$  – у центрі повзуна. Швидкість обертання кривошипа  $OA$  дорівнює  $\omega_1$ . Механізм має ексцентриситет. До важеля  $BC$  прикладена сила  $P_{ко}$ .

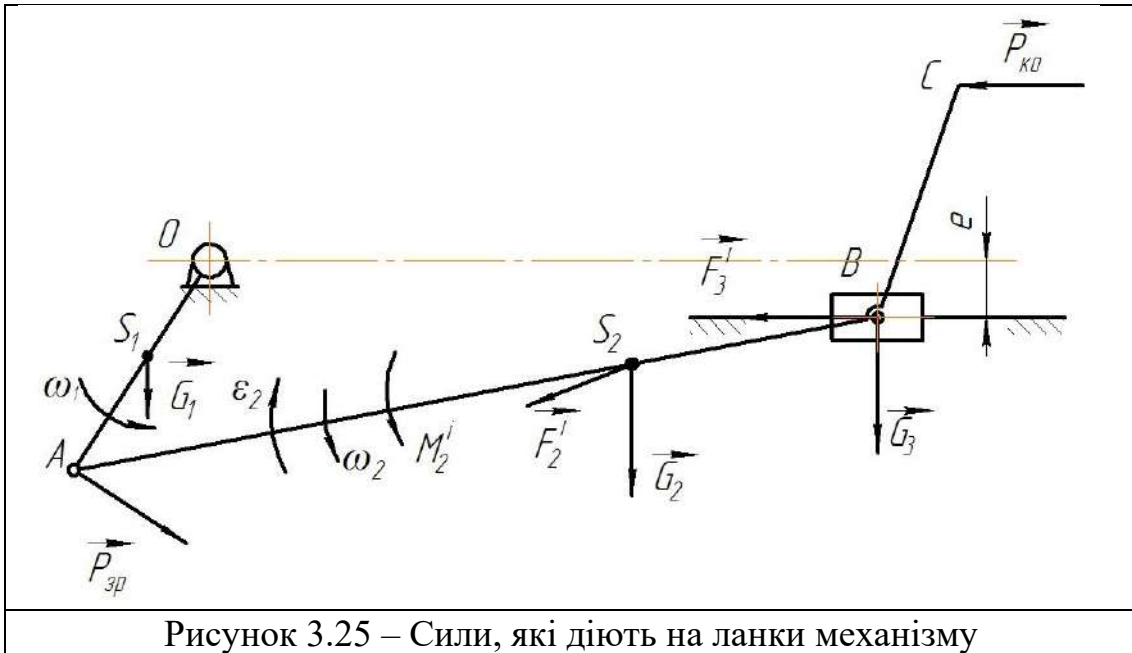
Для заданої схеми механізму будуємо план швидкості (рис. 3.23).



Також будуємо план прискорення (рис. 3.24) для визначення напрямку прискорень центрів мас та кутового прискорення шатуна  $AB$ .

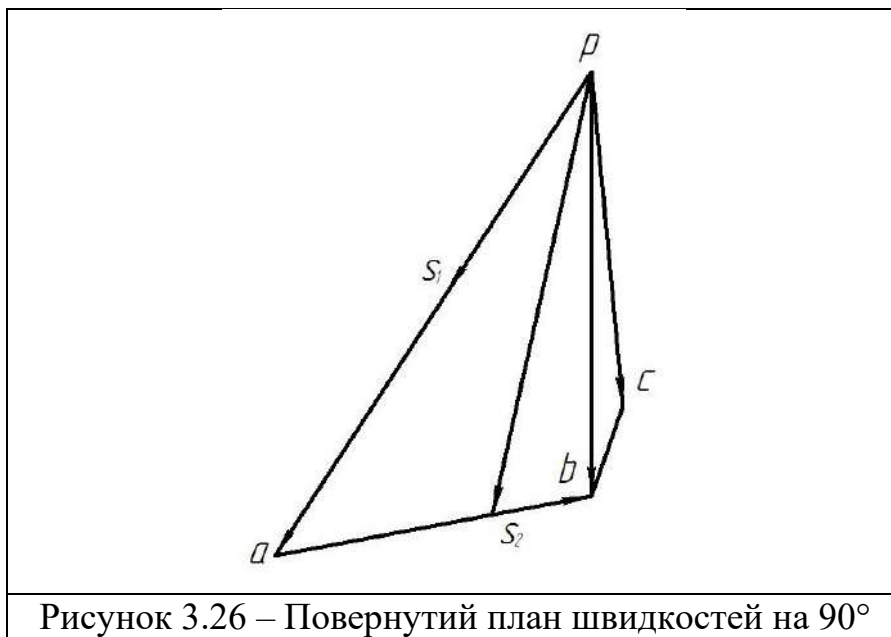


Визначаємо напрямлення сил інерції  $F_1, F_2, F_3$ , які діють на ланки механізму та момент сили інерції  $M_2$  (рис. 3.25).



Силу, що зрівноважує, прикладаємо до кривошипа  $OA$  у точці  $A$  перпендикулярно до ланки  $OA$ .

Для заданого положення механізму повертаємо на  $90^\circ$  проти миттєвого обертання кривошипа  $\omega_1$ , план швидкостей (рис. 3.26).



У відповідних точках на плані швидкостей прикладаємо сили інерції  $F_1, F_2, F_3$ , зберігаючи їх напрямки.

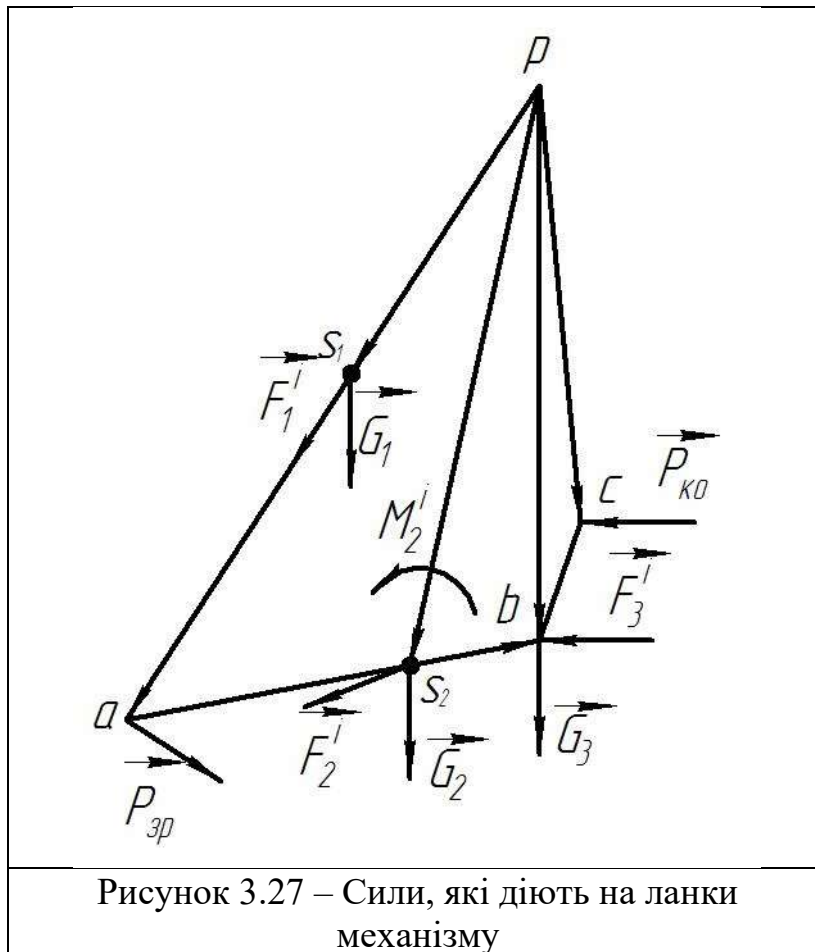


Рисунок 3.27 – Сили, які діють на ланки механізму

Таким чином, силу, що зрівноважує, можливо знайти, повернувши на  $90^\circ$  план швидкостей і приклавши до нього усі зовнішні сили, включаючи сили інерції та моменти сил інерції.

Необхідно звернути увагу на знак моменту, тут, **2-ої** ланки. Якщо читання ланки  $ab$  (ліворуч на право) на поверненому плані швидкостей співпадає з читанням ланки  $AB$  (ліворуч на право) на плані положень групи ланок, то знак моменту залишається без змін. У разі, коли читання ланки  $ab$  (справа на ліво) на поверненому плані швидкостей не співпадає з читанням ланки  $AB$  (ліворуч на право) на плані положень групи ланок, то знак моменту змінюється на протилежний.

Сила, що зрівноважує, характеризує реакцію механізму на рух його вхідної ланки за певним законом, що задається двигуном. Ця сила або момент розвивається двигуном і забезпечує заданий рух вхідної ланки.

Якщо до важеля Жуковського докласти всіх зовнішніх сил, включаючи сили інерції, а також зрівноважуючу силу, то його можна розглядати в рівновазі, з умови якого можна визначити невідому  $P_{zp}$ .

Будуємо розрахункову схему.

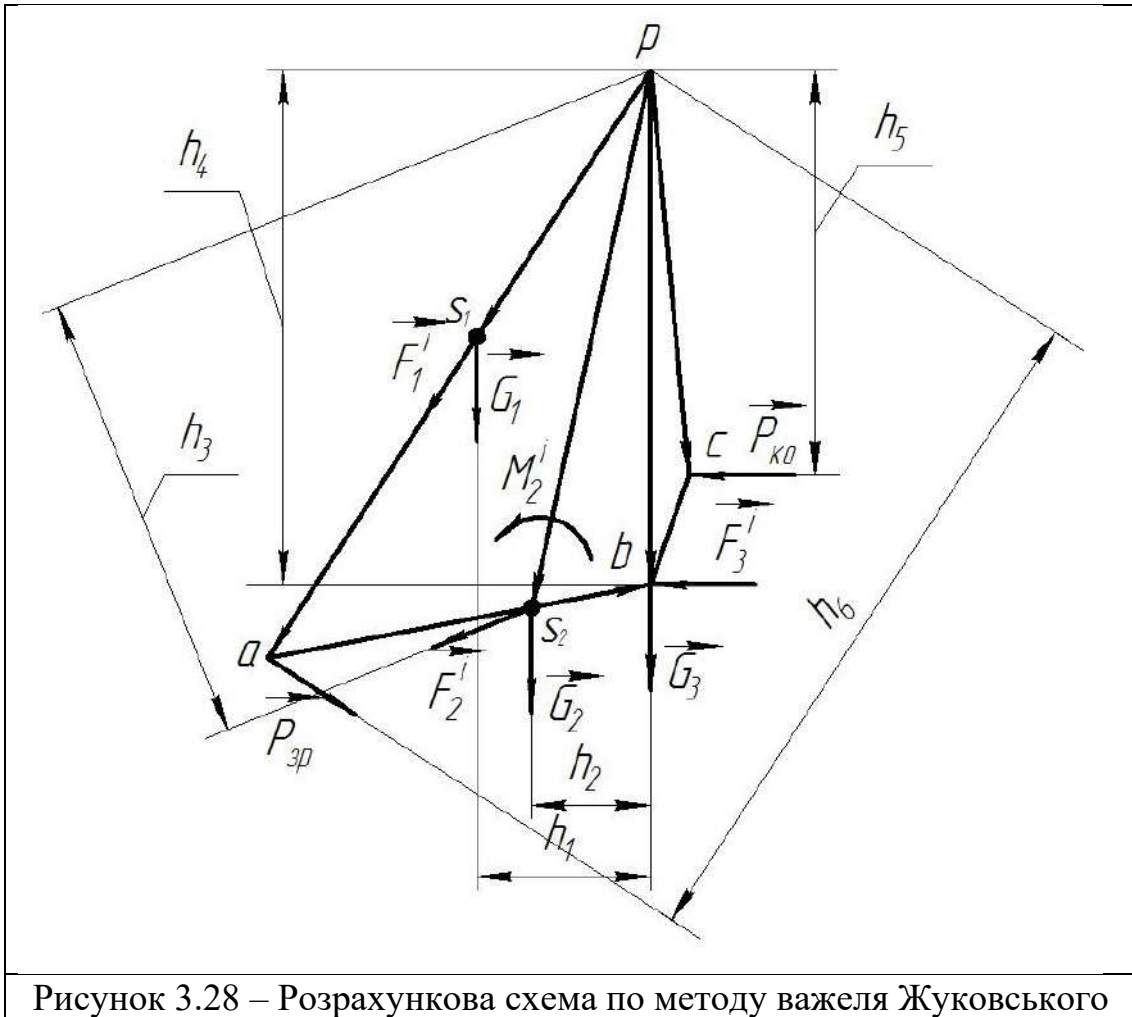


Рисунок 3.28 – Розрахункова схема по методу важеля Жуковського

Для визначення сили, що зрівноважує, напишемо рівняння рівноваги відповідно точці  $P$ .

$$\sum M_p(F_i) = 0; P_{yp}^* \cdot h_6 + G_1 \cdot h_1 + G_2 \cdot h_2 - F_2^i \cdot h_3 - F_3^i \cdot h_4 + P_{nc} \cdot h_5 + M_2^i / \mu_l = 0$$

$$P_{yp}^* = \frac{-G_1 \cdot h_1 - G_2 \cdot h_2 + F_2^i \cdot h_3 + F_3^i \cdot h_4 - P_{nc} \cdot h_5 - M_2^i / \mu_l}{h_6};$$

Після визначення зрівноважуючої сили порівнюємо результати розрахунків по методу планів сил і важеля Жуковського.

$$\Delta = \left| \frac{P_{zp} - P_{zp}^*}{P_{zp}^*} \right| \cdot 100\% \quad (3.2)$$

Погрішність між зрівноважуючої сили визначена по обох методах не повинна перевищувати 5%.

Зрівноважуюча сила характеризує реакцію механізму на рух його вхідної ланки за певним законом, двигуном, що задається. Ця сила або момент розвивається двигуном і забезпечує заданий рух вхідної ланки.

Якщо до важеля Жуковського докласти всіх зовнішніх сил, включаючи сили інерції, а також зрівноважуючу силу, то його можна розглядати в рівновазі, з умови якого можна визначити невідому  $P_{зр}$ , а також знайти потужність двигуна  $P_{дв}$ , потрібну для отримання заданого руху вхідної ланки в заданому положенні:

$$P_{дв} = P_{зр} \cdot V_A \cdot \cos(P_{зр} \cdot V_A) = M_{зр} \cdot \omega \quad (3.3)$$

### 3.5. Енергетичні характеристики машин.

#### 3.5.1. Режими руху механізму.

Пряме завдання динаміки (силовий аналіз механізму) - за заданим законом руху визначити сили, що діють на його ланки, а також реакції в кінематичних парах механізму.

*Зворотне завдання динаміки - по заданих силах, прикладених до механізму, визначити істинний закон руху механізму.*

У динамічний аналіз механізмів можуть бути включені і завдання урівноваження і віброзахисту.

Займімося рішенням зворотної задачі динаміки, вважаючи усі ланки механізмів жорсткими.

До механізму машинного агрегату під час його руху прикладені різні сили. Це рушійні сили, сили опору (іноді їх називають силами корисного опору), сили тяжіння, сили тертя і багато інших. Деякі сили постійні. Характер їх дії може бути різним і залежить:

- а) від положення ланок механізму;
- б) від зміни їх швидкості.

Своєю дією прикладені сили повідомляють механізму той або інший закон руху.

*Повним часом руху механізму назвемо проміжок часу від моменту початку руху механізму до моменту кінця його руху або повної зупинки.* Оскільки закон руху усіх ланок механізму визначається законом руху початкової ланки, то повним часом руху механізму є також проміжок часу від моменту початку руху початкової ланки до моменту кінця його руху.

**Повний час руху механізму складається з трьох частин:**

- а)  $T_p$  - часу (періоду) розгону;
- б)  $T_{сп}$  - часу (періоду) сталого руху;
- в)  $T_в$  - часу (періоду) вибігання (зупинки або гальмування).

**Час (період) розгону** характеризується зростанням швидкості початкової ланки від нульового значення до деякого середнього значення, що відповідає нормальній робочій швидкості цієї ланки механізму.

**Сталим рухом** механізму називається рух, при якому його кінетична енергія є періодичною функцією часу (тобто з часом цикли повторюються, де кінетична енергія за один цикл дорівнює нулю). Під час сталого руху зазвичай швидкість початкової ланки механізму коливається біля середнього значення, що відповідає нормальній робочій швидкості цієї ланки механізму.

$T_{ц}$  - **період циклу** - проміжок часу, після закінчення якого положення, швидкість і прискорення провідної (початкового) ланки механізму набувають первинних значень (при сталому русі). Якщо вказані параметри змінні, змінюються не періодично, то режим роботи не сталий.

**Час (період) вибігання** характеризується убуванням швидкості початкової ланки від середнього значення нормальної робочої швидкості механізму до нульового її значення.

На рис. 3.4 показана так звана тахограма механізму - крива  $\omega = \omega(t)$  залежності кутової швидкості  $\omega$  початкової ланки від часу  $T$ . Повний час  $T$  руху механізму складається з часу  $T_p$  розгону, часу  $T_{сп}$  сталого руху і часу  $T_{в}$  вибігання. Рис. 3.4 показує, що впродовж часу сталого руху крива швидкості  $\omega = \omega(t)$  зазвичай має деякі періодичні коливання біля середнього значення  $\omega_c$ , що відповідає нормальною робочою швидкості початкової ланки.

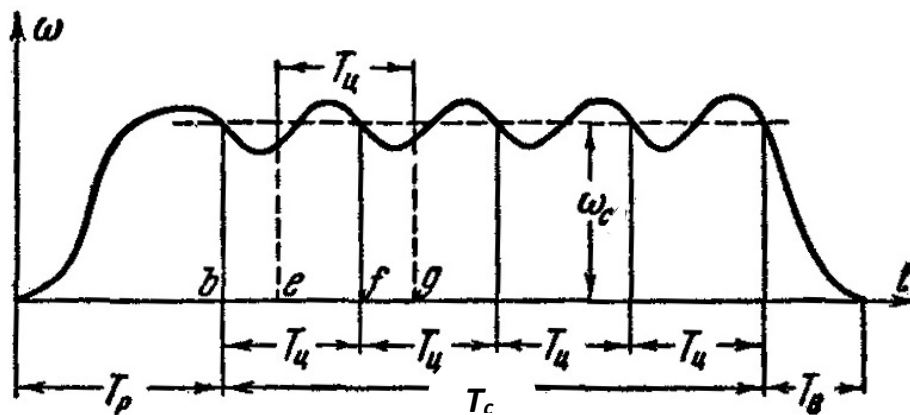


Рисунок 3.4 - Тахограма механізму

На рисунку 3.4 час сталого руху має чотири цикли. Кожному циклу відповідає час  $T_{ц}$ .

Повний час  $T_{сп}$  сталого руху може складатися з будь-якого числа циклів руху і залежить від того, наскільки довго необхідно і можливо підтримувати робочий режим руху механізму - режим з середньою робочою кутовою швидкістю  $\omega_c$ . Необхідно відмітити, що багато машин і механізмів можуть і не мати чітко розмежованих стадій руху. Так, наприклад, у вантажопідйомних кранах, екскаваторах, деяких транспортуючих машинах та ін. повний час руху того або іншого

механізму може складатися з часу розгону і часу вибігання, і в цих механізмах відсутній час сталого руху з характерними для нього циклами руху.

*Періодичним рухом механізму називається такий рух, при якому впродовж деякого проміжку часу механізм має постійні цикли руху, причому впродовж кожного циклу рух відбувається за одним і тим же законом.*

Наприклад, рис 3.4 показує, що механізм має періодичний рух на ділянці часу  $T_{cp}$ . Періодичний рух механізму відрізняється також і тим, що, при будь-якому зрушенні початку відліку часу  $T_u$  цей час залишається постійним. Якщо, наприклад, час  $T_u$  почати відлічувати не від точки  $b$ , а від точки  $e$ , то відповідно кінець циклу пересунеться з точки  $f$  в точку  $g$ ; при цьому відрізки  $bf$  і  $eg$  будуть рівні між собою.

*Цикл може відповідати одному або декільком оборотам початкової ланки.* Так, наприклад, вал насоса з кривошипно-повзунним механізмом впродовж циклу робить один оборот. У чотиритактного двигуна внутрішнього згорання впродовж циклу колінчастий вал робить два обороти. У деяких машинах один цикл відповідає і більшому числу оборотів провідного валу.

*Розглянемо тепер, чим характеризуються з точки зору динаміки розгін, сталий рух і вибігання. Для цього запишемо (у теоретичній механіці) зміну кінетичної енергії в загальному вигляді:*

$$\sum \frac{m_i \cdot V_i^2}{2} - \sum \frac{m_{i0} \cdot V_{i0}^2}{2} = \sum A_i^e \quad \text{- рівняння руху машини у формі кінетичної енергії} \quad (3.4)$$

де  $V_{i0}, V_i$  - початкова і кінцева швидкість  $i$ -того ланки (елементу);

$m_{i0}, m_i$  - маса  $i$ -того ланки (якщо плуг, то  $m_{i0} = m_i$ , а якщо ракета летить з паливом, то паливо витрачається і  $m_{i0} \neq m_i$ );

$\sum A_i^e$  - сума робіт зовнішніх сил.

$$\sum A_i^e = A_p - A_{к.о.} - A_m \pm A_G, \quad (3.5)$$

де  $A_p$  - робота рушійних сил, завжди позитивна;

$A_{к.о.}$  - робота сил корисного опору, завжди негативна;

$A_m$  - робота сил тертя (сили тертя в кінематичних парах, опір середовища);

$A_G$  - робота сил тяжіння (не завжди є в літературі, просто не враховується), має подвійний знак, оскільки при підйомі - робота виходить негативною, а при його опусканні - позитивною.

І тепер остаточно

$$\sum \frac{m_i \cdot V_i^2}{2} - \sum \frac{m_{i0} \cdot V_{i0}^2}{2} = A_p - A_{к.о.} - A_m \quad (3.6)$$

*Для часу розгону механізму необхідним являється умова, відповідно до якої кінцева швидкість  $V_i$  була б за величиною більше початкової швидкості  $V_{i0}$  ( $V_i > V_{i0}$ ), а це спричиняє за собою вимогу, щоб робота рушійних сил за весь цей час була більше роботи сил опору:*

$$\text{оскільки } \frac{m_{i0} \cdot V_{i0}^2}{2} = 0, \text{ то } \sum \frac{m_i \cdot V_i^2}{2} = A_p - A_{к.о.} - A_m, \text{ при цьому}$$

$$A_p > A_{к.о.} + A_m. \quad (3.7)$$

*Для часу сталого руху через кожен цикл руху величина швидкості  $V_i$  стає рівній величині швидкості  $V_{i0}$  ( $V_i = V_{i0}$ ), і, отже, за той же цикл робота рушійних сил має дорівнювати роботі сил опору - швидкість на початку і у кінці руху однакова:*

$$\sum \frac{m_i \cdot V_i^2}{2} = \sum \frac{m_{i0} \cdot V_{i0}^2}{2} \quad (3.8), \quad A_p = A_{к.о.} + A_m. \quad (3.9)$$

*Для часу вибігання  $V_i < V_{i0}$  і тому повинно бути:*

$$V_i = 0 - \text{кінцева швидкість дорівнює нулю, } -\sum \frac{m_i \cdot V_i^2}{2} = A_p - A_{к.о.} - A_m,$$

*тобто  $A_p < A_{к.о.} + A_m$ .*

### **3.5.2. Коефіцієнт руху механізму (ККД) механізму.**

*Розглянемо окремо сталий рух. Для кожного повного циклу цього руху приріст кінетичної енергії механізму дорівнює нулю, оскільки не змінюється за цикл (див. рівняння (3.8) і (3.9)) :*

$$\sum \frac{m_i \cdot V_i^2}{2} - \sum \frac{m_{i0} \cdot V_{i0}^2}{2} = 0 \text{ і } A_p = A_{к.о.} + A_m.$$

Таким чином, за повний цикл сталого руху робота усіх рушійних сил дорівнює роботі усіх корисних опорів  $A_{к.о.}$  і сил тертя  $A_m$ .

*Механічним коефіцієнтом  $\eta$  корисної дії називається відношення абсолютної величини роботи сил корисних опорів до роботи усіх рушійних сил за час (цикл) сталого руху:*

$$\eta = \frac{A_{к.о.}}{A_p}, \quad (3.10)$$

*к. к. д. показує - яка доля механічної енергії, підведеної до машини, корисно витрачається на здійснення тієї роботи, для якої вона створена.*

Чи, зважаючи на рівняння (3.9)  $A_{к.о.} = A_p - A_m$ , отримуємо

$$\eta = \frac{A_{к.о.}}{A_{к.о.} + A_m}. \quad (3.11)$$

Згідно з рівнянням (3.9), формулу (3.11) можна представити також в наступному виді:  $\eta = \frac{A_p - A_m}{A_p} = 1 - \frac{A_m}{A_p}$  или  $= 1 - \psi$  (3.12),

де  $\psi = \frac{A_m}{A_p}$  - відношення роботи  $A_m$  сили тертя до роботи

рушійних сил прийнято означати через  $\psi$  і називати механічним коефіцієнтом втрат - характеризує механічні втрати механізму.

Чим менше в механізмі робота сил тертя, тим менше його коефіцієнт втрат і тим досконаліше механізм в енергетичному відношенні  $0 < \psi \leq 1$ , може бути рівною одиниці.

З рівняння (3.12) виходить; оскільки ні в одному механізмі робота ( $A_m \neq 0$ ) сил тертя практично не може дорівнювати нулю, то коефіцієнт корисної дії  $\eta$  завжди менше одиниці  $0 \leq \eta < 1$ , не може бути більше одиниці.

З формули (3.12) виходить, далі, що ККД може дорівнювати нулю  $\eta=0$ , якщо  $A_p = A_m$  означає, ККД дорівнює нулю, якщо робота рушійних сил дорівнює роботі сил тертя, які є в механізмі. В цьому випадку рух механізму є можливим, але без здійснення якої-небудь корисної роботи. Такий рух механізму зазвичай називають рухом вхолосту.

Коефіцієнт корисної дії не може бути менше нуля  $\eta < 0$ , оскільки для цього необхідно (див. формулу (3.12)), щоб відношення робіт  $A_m / A_p$

було більше одиниці:  $\frac{A_m}{A_p} > 1$ , або  $A_p < A_m$ .

З цих нерівностей виходить, що якщо механізм, який задовільнить вказаній умові, знаходиться у спокої, то дійсного руху механізму статися не може. Це явище носить назву самогальмування механізму. Якщо ж механізм знаходиться в русі, то під дією сил тертя він поступово уповільнюватиме свій хід, поки не зупиниться (загальмується). Отже, отримання при теоретичних розрахунках негативного значення ККД служить ознакою самогальмування механізму або неможливості руху механізму в заданому напрямі.

Таким чином, коефіцієнт корисної дії механізму може змінюватися в межах  $0 \leq \eta < 1$ .

У більшості механізмів рушійні сили і сили опору впродовж часу сталого руху непостійні. Тому для визначення ККД підраховують роботу усіх рушійних сил і корисних опорів за один повний цикл часу сталого руху машини.

Як правило, сучасні машини складаються з багатьох механізмів, ККД яких відомі або його можна порівняно легко знайти. Зате

загальний ККД машини залежить не лише від ККД окремих механізмів, що входять до її складу, але і від способу з'єднання цих механізмів в машині. Розрізняють три способи з'єднання механізмів в машині: послідовне, паралельне і змішане.

Розглянемо тепер питання про визначення ККД декількох механізмів, з'єднаних *послідовно* один з одним. Нехай є  $n$  послідовно з'єднаних між собою механізмів (рис.3.5). Перший механізм приводиться в рух рушійними силами, що здійснюють роботу  $A_p$ . Оскільки корисна робота кожного попереднього механізму, що витрачається на корисні опори, є роботою рушійних сил для кожного наступного, то коефіцієнт корисної дії  $\eta$  першої, другої, третьої і, нарешті, для  $n$ -го механізму, відповідно рівний:

$$\eta_1 = \frac{A_1}{A_p}, \eta_2 = \frac{A_2}{A_1}, \eta_3 = \frac{A_3}{A_2}, \dots, \eta_n = \frac{A_n}{A_{n-1}}$$

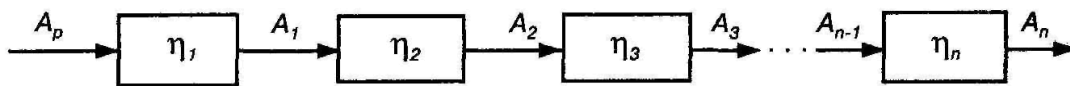


Рисунок 3.5 - Послідовно з'єднаний механізм

Загальний ККД  $\eta_{1n}$  рівний  $\eta_{обц} = \frac{A_n}{A_p}$

Значення цього ККД може бути набуто, якщо перемножити усі окремі коефіцієнти корисної дії  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ . Маємо

$$\eta_{обц} = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \cdot \dots \cdot \eta_n = \frac{A_1}{A_p} \cdot \frac{A_2}{A_1} \cdot \frac{A_3}{A_2} \cdot \dots \cdot \frac{A_n}{A_{n-1}} = \frac{A_n}{A_p}$$

Таким чином, загальний механічний ККД послідовно з'єднаних механізмів дорівнює множенню механічних ККД окремих механізмів, що утворюють одну загальну систему (чи машинний агрегат).

$$\eta_{обц} = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \cdot \dots \cdot \eta_n \quad (3.13)$$

З формули (3.13) видно, що чим складніше машина, тим більше втрати енергії і тим менше ККД. Причому загальний ККД ( $\eta_{обц} = \eta_{1n}$ ) машини при послідовному з'єднанні механізмів завжди менше найменшого ККД механізмів, що входять до його складу ( $\eta_{обц} < \eta_{min}$ ). Це свідчить про те, що при послідовному з'єднанні механізмів необхідно дуже ретельно виготовляти кожен механізм, кожен вузол машини, інакше не можна добитися високого ККД машини.

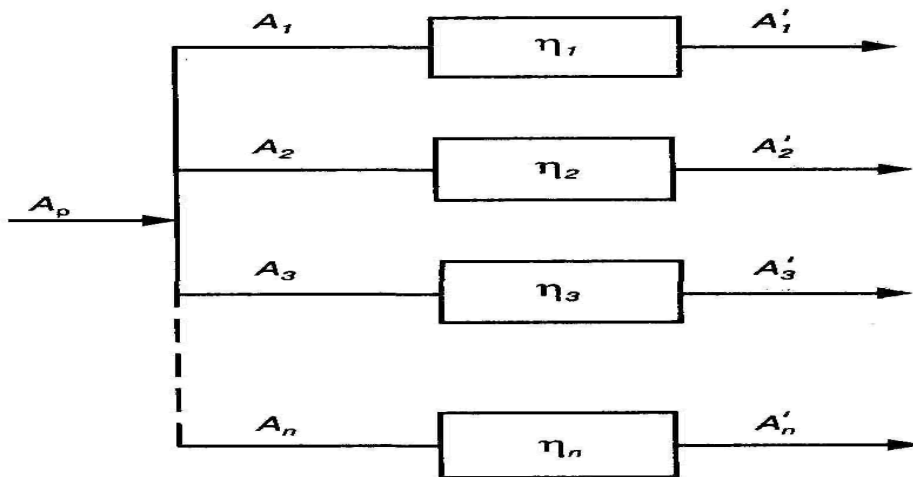


Рисунок 3.5 - Паралельно з'єднаний механізм

**Паралельне з'єднання механізмів.** На рис. 3.6 показана схема машин з паралельним з'єднанням механізмів. Робота рушійних сил Пекло, яка підводиться до машини, розподіляється між окремими механізмами відповідно  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ , які є для кожного механізму рушійними роботами, а значить,

$$A_p = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n = \sum_{i=1}^n A_i, \quad (3.14)$$

Кожен механізм відповідно виконує корисну роботу:

$$A'_1 = A_1 \eta_1, \quad A'_2 = A_2 \eta_2, \quad A'_3 = A_3 \eta_3, \quad A'_n = A_n \eta_n, \quad (3.15)$$

де  $\eta_i$  - ККД  $i$ -го механізму.

Загальна корисна робота усієї машини дорівнює сумі робіт усіх механізмів, тобто

$$A_{к.о.} = A'_1 + A'_2 + A'_3 + \dots + A'_n = A_1 \eta_1 + A_2 \eta_2 + A_3 \eta_3 + \dots + A_n \eta_n = \sum_{i=1}^n A_i \eta_i. \quad (3.16)$$

Тоді на основі (3.16) загальний ККД машини при паралельному з'єднанні механізмів має вид

$$\eta_{общ} = \frac{A_{к.о.}}{A_p} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \eta_i}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{A_1 \eta_1 + A_2 \eta_2 + A_3 \eta_3 + \dots + A_n \eta_n}{A_1 + A_2 + A_3 \dots + A_n}. \quad (3.17)$$

З формули (3.17) виходить, що механічний ККД машини при паралельному з'єднанні механізмів залежить не лише від ККД окремих механізмів, але і від характеру розподілу роботи рушійних сил між механізмами. Очевидно, ніж більша частина усієї витраченої роботи поступає в механізм з найбільшим ККД, тим значення ККД усієї машини буде більше, і навпаки, ККД машини буде тим менше, чим велика частина  $A_p$  поступить в механізм з найменшим ККД.

Цікаві окремі випадки ККД машини при паралельному з'єднанні механізмів. Зокрема, якщо робота рушійних сил Пекло розподілити рівномірно між механізмами ( $A_1 = A_2 = A_3 = \dots = A_n = A$ ), то ККД машини (3.18) матиме вид

$$\eta_{\text{общ}} = \frac{\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \dots + \eta_n}{n}, \quad (3.18)$$

де  $n$  - число механізмів.

З формули (3.18) видно, що загальний ККД машини при паралельному з'єднанні механізмів дорівнює середньому значенню ККД механізмів, що входять до складу машини. Очевидно, що  $\eta_{\text{общ}}$  при паралельному з'єднанні механізмів не може бути менше найменшого і більше найбільшого ККД складових механізмів ( $\eta_{\min} < \eta_{\text{общ}} < \eta_{\max}$ ). При паралельному з'єднанні низький ККД одного механізму менше впливає на значення ККД машини, чим при послідовному з'єднанні механізмів.

Якщо у випадку, який розглянутий залежністю (3.18) прийняти ККД усіх механізмів однаковими ( $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \dots = \eta_n = \eta_M$ ), загальний ККД машини рівний ККД окремого механізму ( $\eta_{\text{общ}} = \eta_M$ ).

При складному (змішаному) з'єднанні механізмів для визначення ККД машини користуються загальною формулою (3.10). Остаточні формули ККД машини залежать від схеми з'єднання механізмів, в якій завжди можна виділити послідовні і паралельні ланцюги сполучених між собою механізмів.

### **Контрольні питання**

1. Задачі динамічного аналізу.
2. Сили, що діють на ланки механізмів, та їх характеристики.
3. Сили інерції ланок плоских механізмів.
4. Використання принципу Д'Аламбера.
5. Умови статичної визначеності плоского кінематичного ланцюга.
6. Кінетостатичне дослідження важільного механізму.
7. Визначення реакцій в кінематичних парах груп II класу.
8. Кінетостатичний розрахунок механізму I класу.
9. Мета і послідовність проведення силового аналізу механізму.
10. Метод визначення кутових прискорень ланок при силовому розрахунку механізму.
11. Як визначити величину і напрямок векторів і моментів сил інерції кожної з ланок.
12. В якій послідовності необхідно виконувати силовий розрахунок важільного механізму.
13. Що таке план швидкості та план прискорення.

14. Зрівноважуючи сила і момент.
15. Важіль Жуковського.
16. Рівняння руху машинного агрегату у формі кінетичної енергії та формі моментів.
17. Режим руху механізмів: розбіг, усталений рух, вибіг.
18. Коефіцієнт корисної дії механізму, різних видів з'єднань механізмів.

## **ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2.**

### **«СИНТЕЗ МЕХАНІЗМІВ З ВИЩИМИ КІНЕМАТИЧНИМИ ПАРАМИ».**

#### **ТЕМА 4 МЕХАНІЧНІ ПЕРЕДАЧІ ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ. ПЛАН.**

- 4.1. Класифікація механізмів передач.
- 4.2. Теорема про загальне передавальне відношення. Кінематика зубчастих механізмів. Планетарні механізми. Диференціальні механізми.
- 4.3. Основна теорема зубчастого зачеплення.
- 4.4. Утворення евольвенти і її властивості. Геометричні параметри зубчастих коліс і зачеплення.
- 4.5. Методи виготовлення зубчастих коліс. Вихідний контур рейки, рейкове зачеплення.
- 4.6. Найменше число зубців зубчастих коліс. Підрізування і загострення зубців. Виправлення (коригування) зубчастих коліс.
- 4.7. Побудова картини зовнішнього евольвентного зачеплення.
- 4.8. Визначення геометричних якісних показників передачі.
- 4.9. Властивості евольвентного зачеплення.

#### **4.1. Класифікація механізмів передач.**

Механізми для відтворення обертального руху з постійним передавальним відношенням між двома по-різному заданими в просторі осями називаються механізмами передачі обертального руху або скорочено механізмами передачі.

Механізми передачі призначені для передачі обертального руху з одного валу на інший за допомогою деталей типу диска в основному циліндричної форми. При цьому, як правило, міняється величина кутової швидкості і передавального моменту, а також їх напрям. Вал, від якого передається рух, називається ведучим, а вал, якому передається рух, - веденим.

Передатні механізми мають своїм завданням - передача руху від двигуна до технологічної машини або старанного механізму.

Передаючи обертання з вхідної ланки на проміжні ланки і з них на вихідну ланку, ми як би послідовно окремими східцями змінюємо передавальні стосунки, отримуючи в результаті необхідні передавальні стосунки між вхідним і вихідним ланками.

Усі механізми можна розділити по характеру контакту ланок на кінематичні пари нижчі - ланки стикаються по поверхнях і вищі - ланки стикаються по лінії або в точці (зубчасте зачеплення, кулачковий механізм).

Кінематичні пари з вищим зачепленням:

1. Зубчастий механізм.
2. Кулачкові механізми.
3. Фрикційні механізми.
4. Мальтійський механізм.
5. Механізм хропіння з провідною собачкою і стійкою служить для перетворення зворотньо-обертального руху коромисла з собачкою в переривчастий рух храпового колеса (у годиннику).

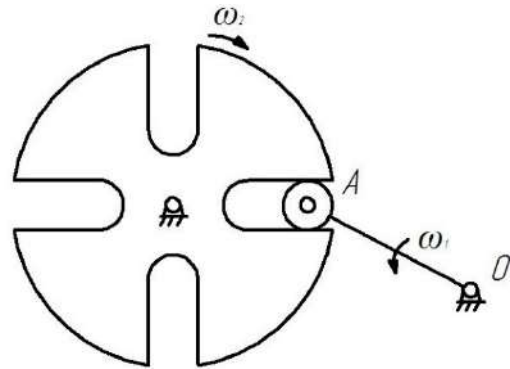
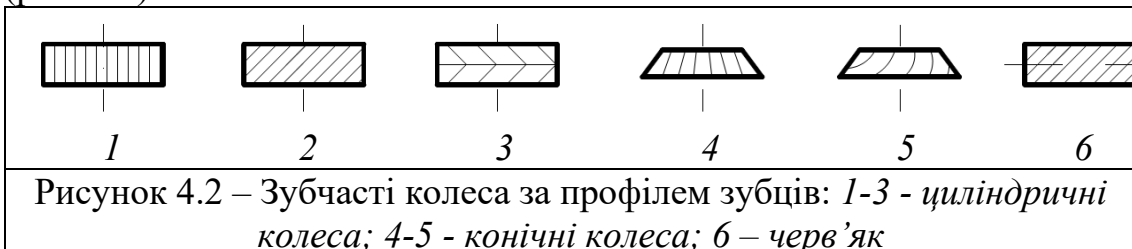


Рисунок 4.1 – Мальтійський механізм

Класифікація зубчастих механізмів.

1. Передачі із зовнішнім, внутрішнім і рейковим зачепленням.
2. Осі валів можуть бути паралельними (циліндричні), перетинатися (конічні) або перехрещуватися (гіперболоїдні) під різними кутами (напр., гвинтові, черв'ячні, гіпоїдні). У першому випадку механізм є плоским, в інших випадках механізми просторові.

Зубчасті передачі здійснюють передачу обертального руху з одного валу на інший за допомогою циліндричних, конічних, черв'ячних коліс, що мають спеціально профільовані зуби, при цьому зубчасті колеса можуть мати прямі, косі, спіральні, шевронні зуби та ін. (рис. 4.2).



При використанні не прямозубих коліс підвищується плавність і безшумність роботи і збільшується здатність навантаження передачі.

У зубчастих передачах з пересічними осями в якості початкових

поверхонь використовуються усічені конуси, вершини яких перетинаються в одній точці (рис. 4.3, а), а в передачах з осями, що перехрещуються, теоретичними початковими поверхнями є гіперболоїди обертання (рис. 4.3, б). Такі передачі називаються гіперболоїдними.

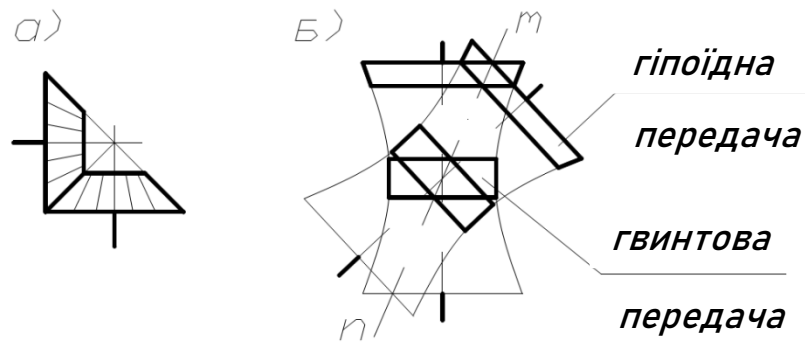
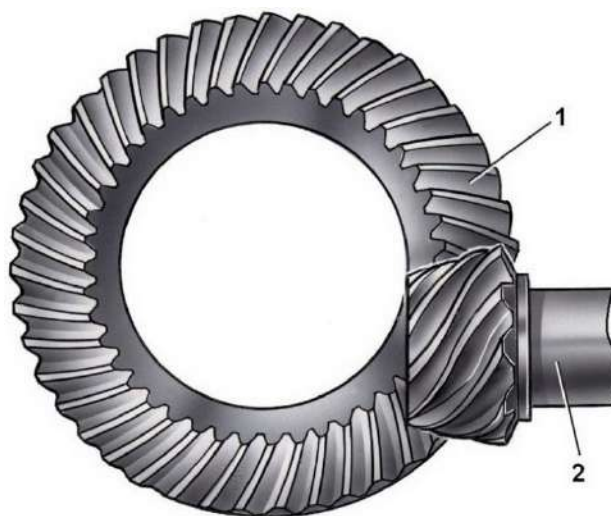


Рисунок 4.3 – Зубчасті передачі з пересіченими осями

Контакт зубців 2-х коліс в таких передачах відбувається по прямолінійних твірних  $mn$ . У машинобудівній практиці обмежуються



окремими короткими частинами гіперболоїдів. Наприклад, використовуючи середню частину гіперболоїдів, отримують гвинтову зубчасту передачу, а якщо використовувати усічені конуси, близькі за профілем до гіперболоїдів в їх широкій частині, то отримаємо так звану гіпоїдну передачу (рис. 4.3, б).

Рисунок 4.4 – Гіперболоїдна передача

Частковим випадком гвинтової передачі є черв'ячна передача, в якій мале колесо називається черв'яком, а велике - черв'ячним колесом (рис. 4.5, а, б).

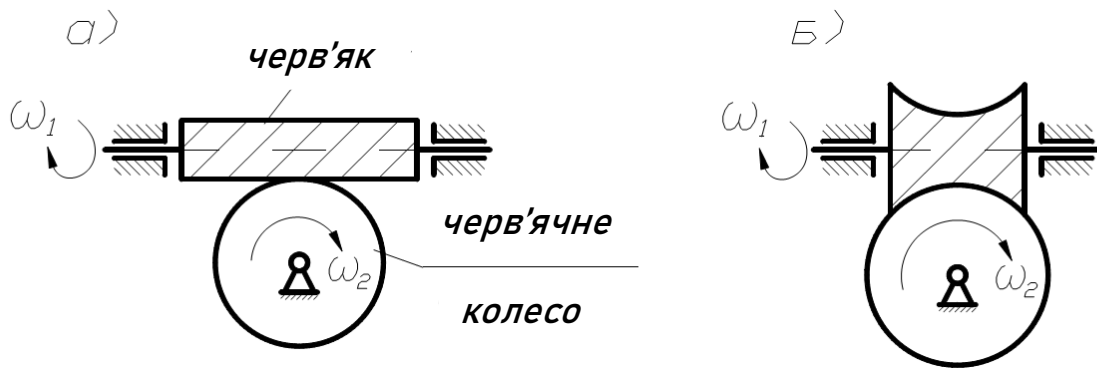


Рисунок 4.5 – Гвинтова передача: а) передача з циліндричним черв'яком; б) передача з тороїдним (глобоїдним) черв'яком

Черв'ячні передачі можуть бути з одне і багатозахідними черв'яками, при цьому число заходів черв'яка дорівнює числу його зубців. Черв'ячні передачі дозволяють забезпечити велике передавальне відношення при порівняно малих габаритах внаслідок малого числа зубців (заходів) на черв'яку. Проте коефіцієнт корисної дії (ККД) передачі низький.

Граничні значення передавальних стосунків для зубчастої пари складає:

- 1.6 - для циліндричних передач;
- 1.4 - для конічних передач;
- 10.40 - для черв'ячно-гвинтових передач.

За формою профілю зуба розрізняють передачі евольвентні, циклоїдні, цівкові, а також передачі із зачепленням Новикова.

Найбільшого поширення набули евольвентні передачі з профілем, запропонованим Леонардом Ейлером в 1754 р. Перевагою цього профілю є простота виготовлення, досить висока здатність навантаження, мала чутливість до неточностей міжцентрової відстані. Проте евольвентний профіль задовольняє не усім вимогам, що пред'являються до сучасних зубчастих передач. Так, наприклад, в потужних передачах зовнішнього зачеплення, де контактують опуклі зуби з малими радіусами кривизни профілів, відбувається їх швидке руйнування із-за недостатньої контактної міцності. Одним з шляхів підвищення контактної міцності є використання внутрішнього зачеплення, в якому профіль зуба одного з коліс увігнутий.

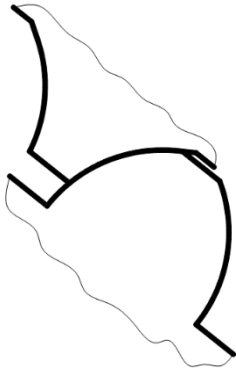


Рисунок 4.6 –  
Зачеплення  
Новикова

Застосування передач із зачепленням Новикова, де опуклі профілі зубів одного з коліс, обкреслені по дузі кола, контактують в увігнутими профілями іншого колеса (рис. 4.6). При цьому здатність навантаження передачі підвищується в 23 рази в порівнянні з евольвентной, а також зменшуються втрати на тертя.

До зубчастих передач відносяться передачі з некруглими, секторними колесами, колесами, що мають зуби на частини обода та ін.

Зазвичай в зубчастих передачах менше колесо називається шестернею. Вибір тієї або іншої передачі залежить від традиційної сфери її застосування і конкретних функціональних особливостей механізму, в якому ця передача буде використана.

#### 4.2. Теорема про загальне передавальне відношення. Кінематика зубчастих механізмів. Планетарні механізми. Диференціальні механізми.

Передавальне відношення окремої зубчастої пари позначається буквою *u* та рівно:

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{z_2}{z_1} \quad (4.1)$$

де  $\omega_1$  і  $\omega_2$  - кутова швидкість валу, що веде і веденого валу, 1/с;  
 $z_1$  і  $z_2$  - числа зубів колеса, що веде і веденого колеса.

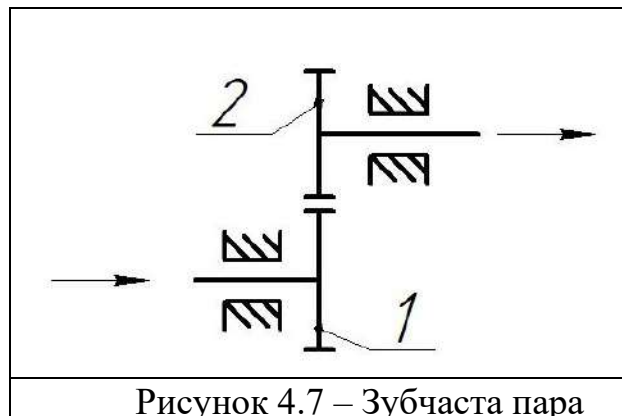


Рисунок 4.7 – Зубчаста пара

Передавальне відношення зубчастої пари із зовнішнім зачепленням (рис.4.8,а) має знак «мінус», оскільки колесо що веде і ведене колесо обертаються в протилежних напрямках, передавальне відношення пари з внутрішнім зачепленням (рис.4.8,б) знак «плюс».

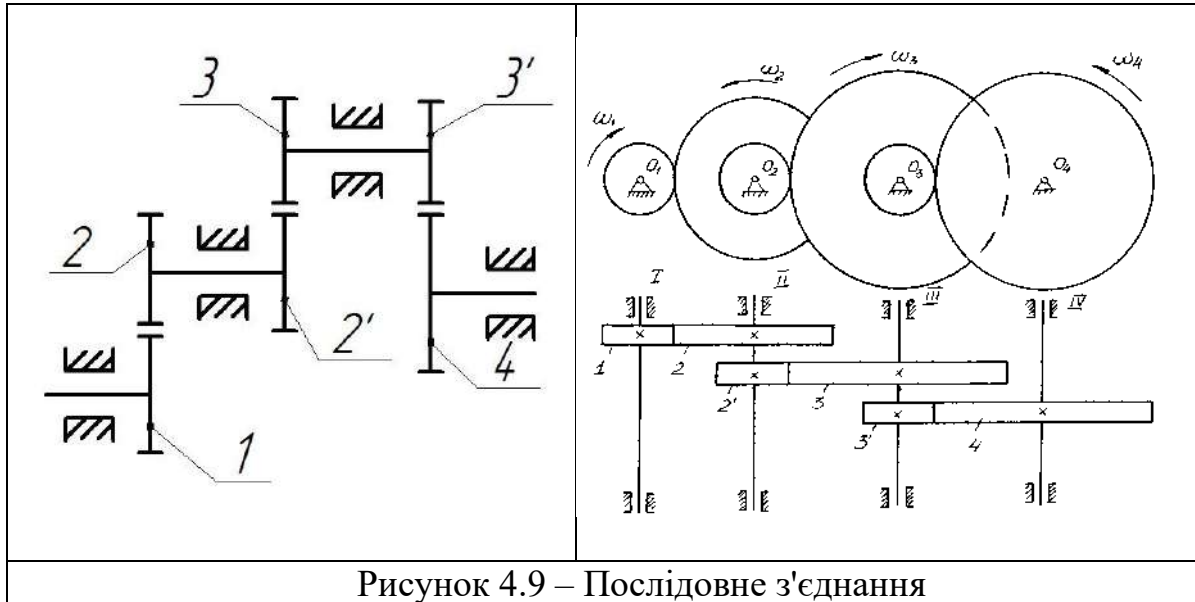


Загальне передавальне відношення послідовного кратного з'єднання визначається по формулі: (як множення)

$$u_{1n} = u_{12} \cdot u_{23} \cdot \dots \cdot u_{(n-1)n} \quad (4.2)$$

- і природно зі своїм знаком.

На проміжних валах є по два колеса (рис.4.9). Загальне передавальне відношення  $u_{заг}$  послідовного з'єднання дорівнює множенню окремих зубчастих пар, тобто



Спочатку визначаємо міру рухливості:

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 - 3 = 1$$

– означає одна провідна ланка.

Усі зачеплення коліс зовнішні – означає знак "мінус".

$$u_{14} = u_{12} \cdot u_{2'3} \cdot u_{3'4} = \left(-\frac{Z_2}{Z_1}\right) \cdot \left(-\frac{Z_3}{Z_2'}\right) \cdot \left(-\frac{Z_4}{Z_3'}\right) = -\frac{Z_2 \cdot Z_3 \cdot Z_4}{Z_1 \cdot Z_2' \cdot Z_3'}$$

- підставляємо кількість зубів і рахуємо передавальне відношення цього зачеплення.

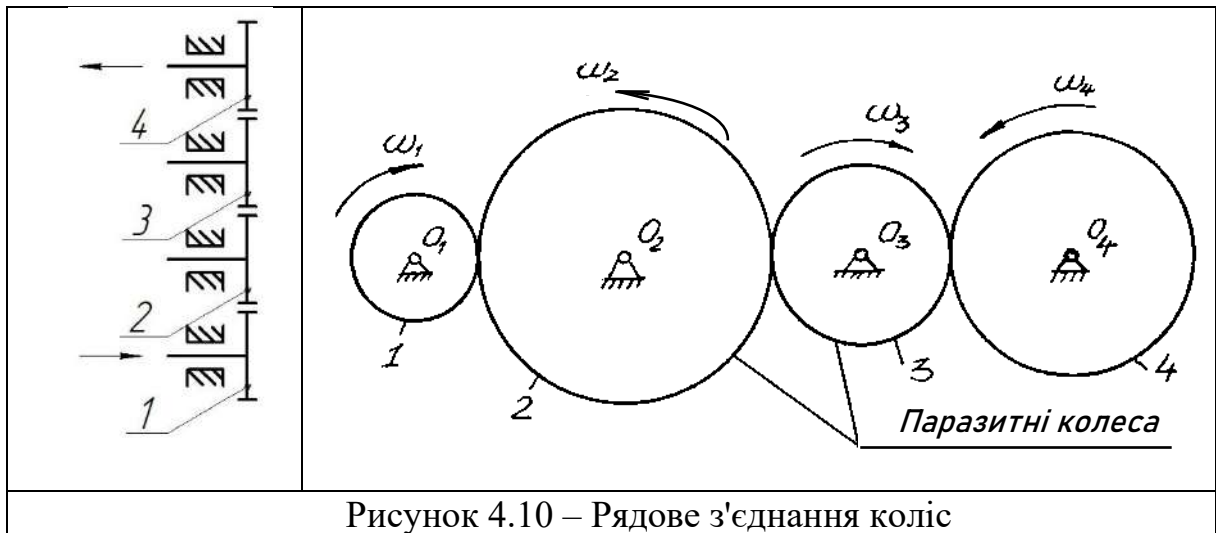


Рисунок 4.10 – Рядове з'єднання коліс

*Рядове з'єднання коліс. На проміжних валах розташовано по одному колесу (рис.4.10). Загальне передавальне відношення рядового з'єднання рівне:*

$$u_{заг} = u_{14} = \frac{\omega_1}{\omega_4} = (-1)^k \frac{z_4}{z_1} \quad (4.3)$$

– тобто передавальне відношення рівно зворотному відношенню чисел зубців крайніх коліс і не залежить від числа зубів проміжних коліс, які називаються паразитними.

Знак загального передавального відношення залежить від числа  $k$  пар зовнішнього зачеплення: при парному числі  $k$  «плюс», при непарному числі  $k$  – «мінус».

Спочатку визначаємо міру рухливості:

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 - 3 = 1$$

– означає одна провідна ланка. Усі зачеплення коліс зовнішні, означає знак «мінус».

$$u_{14} = u_{12} \cdot u_{23} \cdot u_{34} = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \cdot \left(-\frac{z_3}{z_2}\right) \cdot \left(-\frac{z_4}{z_3}\right) = -\frac{z_4}{z_1},$$

де  $z_2$  і  $z_3$  – називаються паразитними колесами. Підставляємо кількість зубів і рахуємо передавальне відношення цього зачеплення. Знак «мінус» означає, що вал останнього колеса обертається в протилежну сторону від ведучого.

Рядове з'єднання застосовують для з'єднання валів, віддалених на велику відстань один від одного, або для зміни напрямку обертання веденого валу.

У разі черв'ячної передачі (рис. 4.11) через  $z_1$  означають число заходів черв'яка, а через  $z_2$  - число зубів черв'ячного колеса.

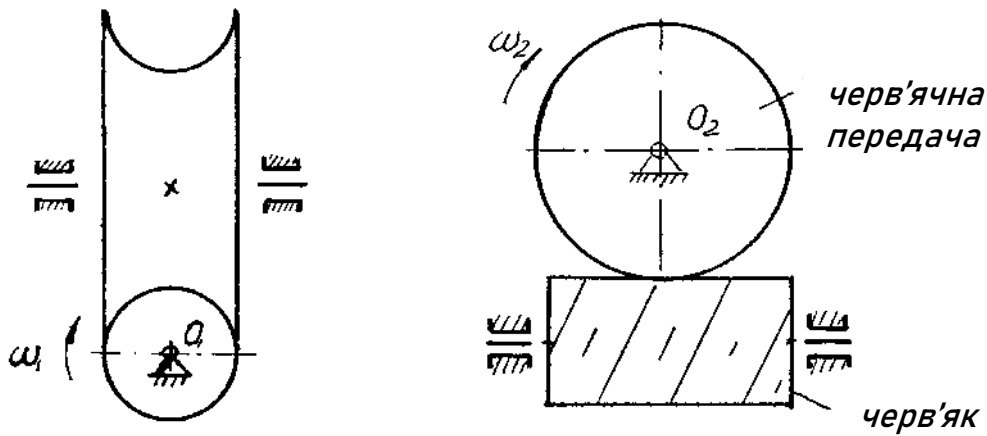


Рисунок 4.11 – Черв'ячна передача

У разі рейкового зачеплення (рис.4.12) обертальний рух колеса з кутовою швидкістю (перетвориться в поступальну ходу рейки зі швидкістю  $V_p = \omega r_n$ .

$$r_n = \frac{mz}{2},$$

де  $r_n$  – радіус початкового кола колеса;

$m$  – модуль зачеплення (стандартна величина).

При повороті колеса на кут, рівний  $360^\circ$ , рейка просувається на величину кроку.

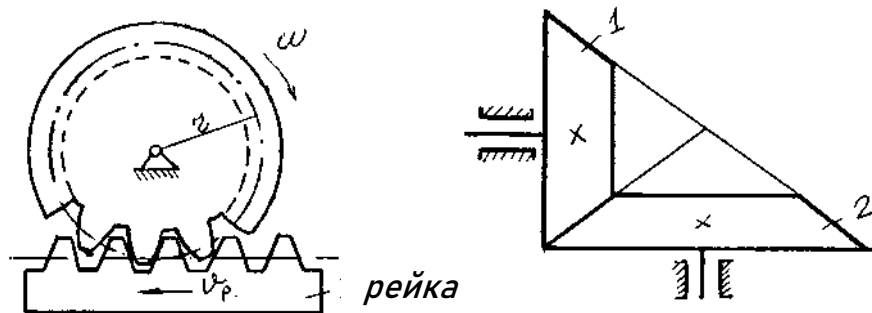


Рисунок 4.12 – Рейкове зачеплення конічна зубчаста пара

Для ступінчастої зміни передавального відношення застосовують коробки швидкостей (рис.4.13). При переміщенні блоку шестерень, посадженого на ковзаючу шпонку, уздовж валу I в зачеплення вступають попарно колеса  $z_1 - z_2$ ,  $z_3 - z_4$  або  $z_5 - z_6$ . Залежно від цього можуть бути отримані наступні передавальні стосунки:

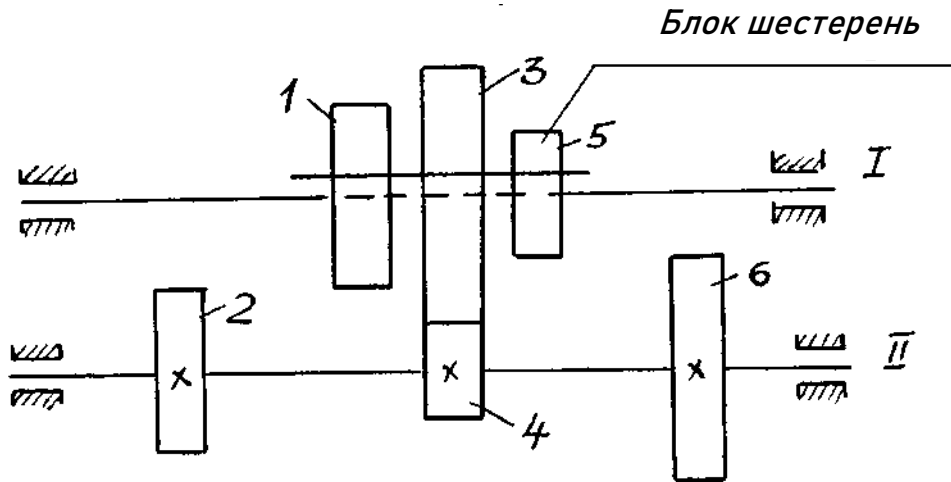


Рисунок 4.13 – Схема коробки швидкостей

$$u'_{12} = -\frac{z_2}{z_1}; u''_{12} = -\frac{z_4}{z_3}; u'''_{12} = -\frac{z_6}{z_5}.$$

До зубчастих механізмів з рухливими осями відносяться епіциклічні механізми: *планетарні* – зубчасті механізми (з одним ступенем свободи) і *диференціальні* зубчасті механізми (з двома ступенями свободи).

*Планетарний механізм* – це епіциклічний або диференціальний механізм, у якого на одне з коліс накладений кінематичний зв'язок, тобто одне з коліс закріплене нерухомо.

Щоб визначити передавальне відношення епіциклічного планетарного або диференціального механізму потрібно з одиниці відняти передавальне відношення цього ж механізму, визначуваного як рядового.

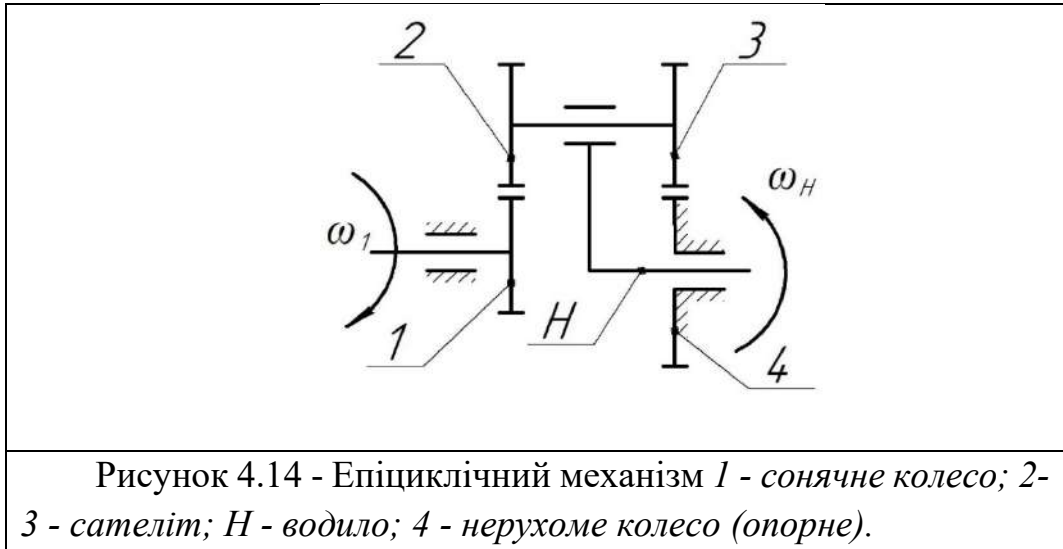


Рисунок 4.14 - Епіциклічний механізм 1 - сонячне колесо; 2-3 - сателіт; H - водило; 4 - нерухоме колесо (опорне).

$$u_{1H}^4 = 1 - u_{14}^H \quad (4.4)$$

Ця залежність про відношення кутових швидкостей у планетарному механізмі називається другою теоремою Вілліса.

Для цього застосовуємо метод звернення. Метод звернення полягає в тому, що, абстрагуючись, водило обертаємо в протилежну сторону з кутовою швидкістю  $-\omega_H$ . Тоді виходить, що водило зупинилося, а усі колеса змінили свою швидкість на  $-\omega_H$ . У 1-го колеса була швидкість  $\omega_1$ , у 4-го -  $\omega_4$ , тобто дорівнює нулю. Розглянемо таблицю 4.1.

Таблиця 4.1

№ колеса	до звернення	після звернення
1	$\omega_1$	$\omega_1 - \omega_H$
H	$\omega_H$	$\omega_H - \omega_H = 0$
4	$\omega_4 = 0$	$\omega_4 - \omega_H = -\omega_H$

$$u_{14} = \frac{\omega_1}{\omega_4} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{-\omega_H} = -\frac{\omega_H}{\omega_H} - \frac{\omega_1}{\omega_H} = 1 - u_{1H}$$

$u_{14} = 1 - u_{1H} \Rightarrow u_{1H}^4 = 1 - u_{14}^H$  – передавальне відношення від 1-го колеса до водила при зупиненому 4-му колесі, дорівнює одиниці мінус передавальне відношення від 1-го колеса до 4-го при зупиненому водили.

**Приклад.** Визначити ступінь рухомості та передаточне відношення зубчастого механізму.

Дано:  $Z_1 = 88, Z_2 = 48, Z_3 = 4, Z_4 = 44, Z_5 = 25, Z_6 = 17, Z_7 = 100$ .

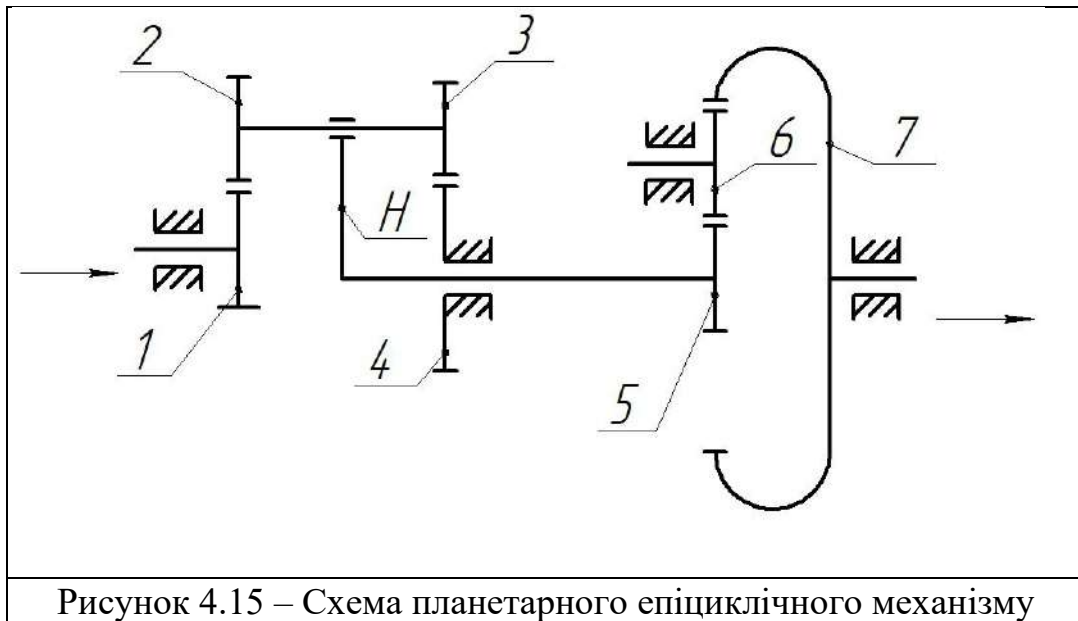


Рисунок 4.15 – Схема планетарного епіциклічного механізму

1. Визначаємо міру рухливості за формулою Чебишова:

$$W = 3n - 2p_5 - p_4$$

де  $n$  – кількість рухомих ланок,  $n=5$ ;

$p_5$  – кількість кінематичних пар п'ятого класу («підшипник-вал»),  $p_5=5$ ;

$p_4$  – кількість кінематичних пар четвертого класу (в даних випадках «зубчасте зачеплення»),  $p_4=4$ .

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 5 - 4 = 1$$

2. Встановлюємо, що зубчаста передача двоступінчаста:

1 - сонячне колесо; 2-3 - сателіт; H - водило; 4 - нерухоме колесо (опорне).

Перша ступінь (планетарна) – від колеса 1 до водила H;

друга ступінь – двоступінчаста передача з нерухомими осями коліс – від колеса 5 до колеса 7.

Загальне передавальне відношення для цього механізму:

$$u_{заг} = u_{еп} \cdot u_{ряд}$$

Визначаємо передаточне відношення планетарного ступеня та другого ступеня за формулою

$$u_{17} = u_{1H} \cdot u_{57} = (1 - u_{14}) \cdot u_{57} = \left[ 1 - \left( -\frac{z_2}{z_1} \right) \cdot \left( -\frac{z_4}{z_3} \right) \right] \cdot \left( -\frac{z_6}{z_5} \right) \cdot \frac{z_7}{z_6}$$

Отже, передаточне відношення планетарного та другого ступенів дорівнює

$$\begin{aligned} u_{17} &= u_{1H} \cdot u_{57} = (1 - u_{14}) \cdot u_{57} \\ &= \left[ 1 - \left( -\frac{48}{88} \right) \cdot \left( -\frac{44}{4} \right) \right] \cdot \left( -\frac{17}{25} \right) \cdot \frac{100}{17} \end{aligned}$$

Загальне передаточне відношення зубчастого механізму дорівнює

$$u_{17} = u_{1H} \cdot u_{57} = (1 - u_{14}) \cdot u_{57} = [1 - 6] \cdot (-4) = 20$$

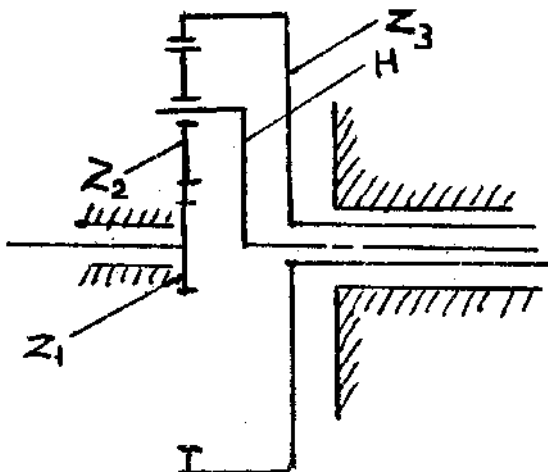


Рисунок 4.16 – Схема планетарного диференціального механізму

На рисунку 4.16 представлена одна з можливих схем диференціального механізму.

Співвідношення між кутовими швидкостями зубчастих коліс і водилом диференціального механізму визначається формулою:

$$u_{13}^{(H)} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} \quad (4.5)$$

Індекс «н» вказує, що в даному випадку водило є нерухомою ланкою, 1-провідна ланка, 3-ведена ланка.

Якщо колесо  $z_3$  закріпити нерухомо, то ми отримаємо планетарний механізм. Передавальне відношення від зубчастого колеса  $z_1$  до водилу планетарного механізму визначається формулою:

$$u_{1H}^{(3)} = 1 - u_{13}^{(H)} \quad (4.6)$$

Для підрахунку кінетичної енергії механізму, вибору підшипників при проектуванні планетарних механізмів необхідно знати кутову швидкість сателітів. Оскільки швидкість провідної ланки  $z_1$  задана і швидкість водила може бути визначена з використанням формули (4.6), для визначення кутової швидкості сателіта необхідно знати передавальне відношення від центрального колеса  $z_1$  до сателіта або від водила до сателіта:

$$u_{12}^{(3)} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \quad (4.7)$$

Розділивши чисельник і знаменник правої частини вираження (4.7) на  $\omega_n$ , отримаємо:

$$u_{12}^{(3)} = \frac{\omega_1}{\omega_n} \cdot \frac{\omega_n}{\omega_2} = \frac{u_{1n}^{(3)}}{u_{2n}^{(3)}} = \frac{1-u_{13}^{(n)}}{1-u_{23}^{(n)}} = \frac{1-\frac{z_3}{z_1}}{1+\frac{z_3}{z_2}}$$

Тоді можна визначити кутову швидкість сателіта :

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{1}{u_{13}^{(n)}}$$

При визначенні передавального відношення редуктора необхідно розділити його механізм на окремі східці. Передусім, слід виділити планетарний ступінь, маючи на увазі, що в планетарний ступінь входять водило, сателіти і два центральні зубчасті колеса.

Планетарні і диференціальні механізми практично майже ніколи не робляться з одним сателітом, зазвичай сателітів, що входять в зачеплення з одними і тими ж центральними колесами, декілька. Це робиться для зменшення сил інерції і розвантаження зубчастих коліс механізму, зменшення модуля зачеплення і загальних габаритів редуктора.

При визначенні числа ступенів свободи слід мати на увазі, що усі додаткові сателіти (більше одного) є пасивними зв'язками.

Величина загального передавального відношення може бути визначена досвідченим шляхом. Для цього крейдою наносять відмітки на того, що веде і ведений вали, а також на корпус. Повернувши провідний вал на декілька оборотів, підраховують число оборотів веденого валу.

### 4.3. Основна теорема зубчастого зачеплення.

Обертальний рух від ведучого зубчастого колеса до веденого передається безпосереднім тиском бічній поверхні зуба ведучого колеса на пов'язану (що складаються в певному співвідношенні між собою) з нею бічну поверхню зуба веденого колеса.

Однією з найважливіших умов роботи зубчастого зачеплення є збереження заданого передавального відношення, тобто щоб початкові окружності котилися одна по одній без ковзання. В іншому випадку будуть мати місце коливання швидкості веденої ланки при постійній швидкості ведучої і внаслідок, додаткова динамічне навантаження на зубці. Вимоги, яким повинні задовольняти пов'язані профілі зубців для збереження постійного передавального відношення, визначаються основною теоремою зачеплення (теорема Вілліса), яка встановлює зв'язок між заданим передавальним відношенням і геометричними характеристиками сполучених профілів.

Якщо розглянути звернений рух початкових кіл, коли усієї системі задана кутова швидкість ( $-\omega_2$ ), то друге колесо буде умовно нерухомим і точка  $P$  є миттєвим центром відносного обертання коліс (рис. 4.17 (a)).

Ця точка, звана полюсом зачеплення, де контактують початкові кола, ділить міжцентрову відстань на відрізки, обернено пропорційні кутовим швидкостям, т. я.

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_{w2}}{r_{w1}} = const \quad (4.8)$$

де  $\omega_1, \omega_2$  – кутові швидкості першого і другого колеса, відповідно, 1/с;

$r_{w1}, r_{w2}$  – радіуси початкових кіл, мм.

Розглянемо звернений рух профілів зубців зубчастих коліс (рис.4.17 (б)).

Точка контакту зубців (точка  $K$ ), що належить першому колесу, обертається навколо точки  $P$ , яка буде миттєвим центром швидкостей. Швидкість  $V_k \perp PK$  і збігається із загальною дотичною до профілів в точці  $K$  за умови сталості цього контакту.

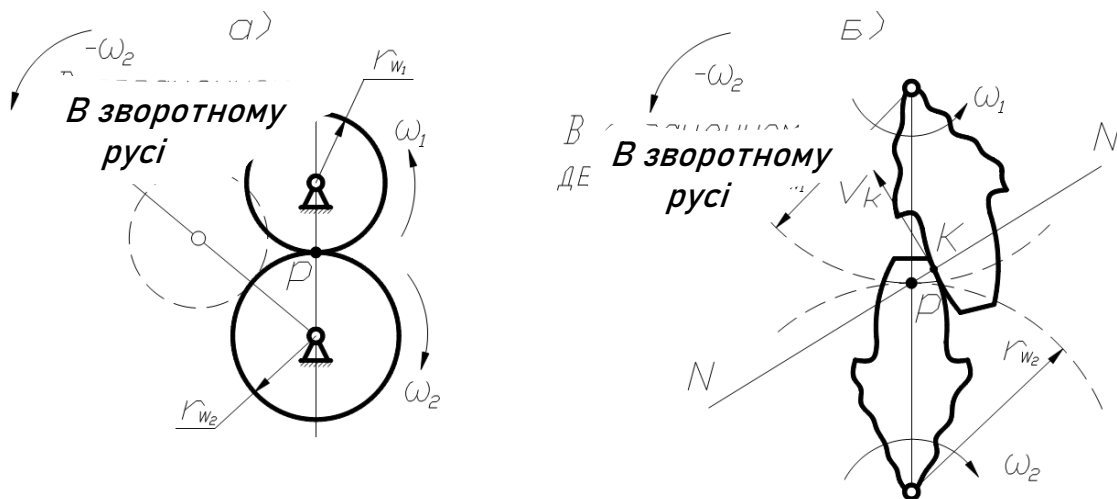


Рисунок 4.17 - Схема зубчастих коліс в зворотному русі

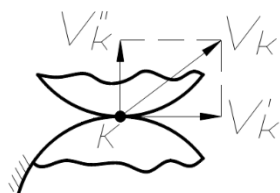


Рисунок 4.18

Інакше постійного контакту не буде, оскільки з'явиться складова і профілі розімкнуться (рис. 4.18). Оскільки розглядається довільне положення зубців, то можна сформулювати основну теорему зачеплення: **нормаль  $NN$  до профілів зубів, що стосуються, проведена через точку їх дотику в точці  $P$  (полюс зачеплення), ділить міжцентрову відстань на частини, обернено пропорційні до кутових швидкостей.**

Ця теорема, сформульована Вілісом в 1841 р., визначає основний закон зачеплення профілів, які не можуть бути довільними, а мають бути

спеціально підібрані.

$$V_P = \omega_1 \cdot r_{w1} = \omega_2 \cdot r_{w2},$$

тобто

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_{w2}}{r_{w1}} = u_{12} \quad (4.9)$$

Взаємодіючі профілі, для яких у будь-який момент зачеплення при  $u_{12} = const$  виконується співвідношення (4.9), називають зв'язаними; говорять також, що ці профілі обкреслені кривими, що взаємно огинаються.

З основної теореми виходить: якщо полюс зачеплення нерухомий, то стосунки кутових швидкостей постійні. В цьому випадку радіуси початкових кіл  $r_{w1}$  і  $r_{w2}$  – постійні, означає колеса круглі. Для некруглих кіл радіуси  $r_{w1}$  і  $r_{w2}$  змінюватимуться, полюс зачеплення змінюватиме своє положення і передавальне відношення не буде постійним.

#### 4.4. Утворення евольвенти і її властивості. Геометричні параметри зубчастих коліс і зачеплення.

Для побудови головного профілю зубів циліндричних зубчастих

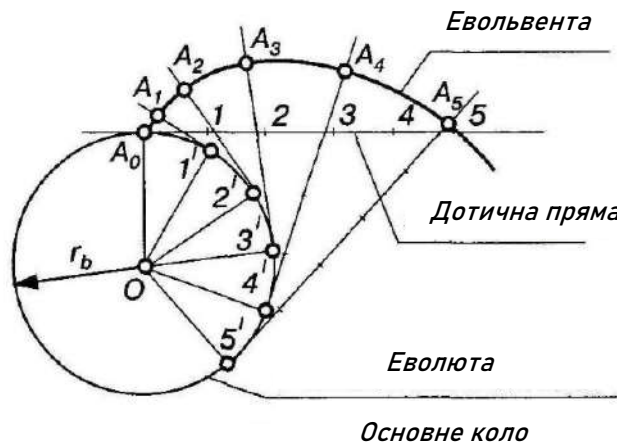


Рисунок 4.19 – Елементи евольвенти

колес, використовуваних в машинобудуванні, передусім, застосовують евольвентний профіль.

**Плоскою евольвентою кола** називають траєкторію будь-якої точки, наприклад  $A$ , прямій лінії, що перекочується без ковзання по колу радіусу  $r_b$ ; такі кола називають **еволютою**, або **основним колом**, а пряму

- дотичною прямою. Евольвентою кола називається крива, яку описує яка-небудь точка прямої, що котиться без ковзання по колу. Утворення евольвенти можна представити також таким чином. Допустимо, що на деякий циліндр намотана нитка (катушка з ниткою) – якщо змотувати нитку з циліндра (катушки), підтримуючи її увесь час натягнутою, то кінець нитки обкреслить евольвенту.

*Побудова евольвенти.* Нехай дана основна коло радіуса  $r_0$  (рис. 3.2, а) і деяка точка  $P$  поза нею. Потрібно побудувати евольвенту, що проходить через цю точку. Для вирішення завдання проведемо через точку  $P$  дотичну до основного кола і відстань між точкою  $P$  і точкою дотику розділимо на кілька рівних частин (наприклад, на 5). Довжину отриманого в результаті поділу малого відрізка позначимо через  $b$ . Далі, вправо від точки дотику розчином циркуля, рівним  $b$ , робимо 5 зарубок по основній окружності. Отримані на колі точки нумеруємо по порядку (останню крапку позначаємо цифрою 0, а точку дотику цифрою 5). Через всі проміжні точки на колі (1, 2, 3, 4) також проведемо дотичні. На кожній з цих дотичних відкладаємо стільки відрізків  $b$ , скільки позначає цифра, якою пронумерована відповідна точка на колі. Отримані на дотичних точки 1', 2', 3' і т. д. (а також нульову точку і точку  $P$ ) з'єднуємо плавною кривою, яка і буде шуканої евольвентою.

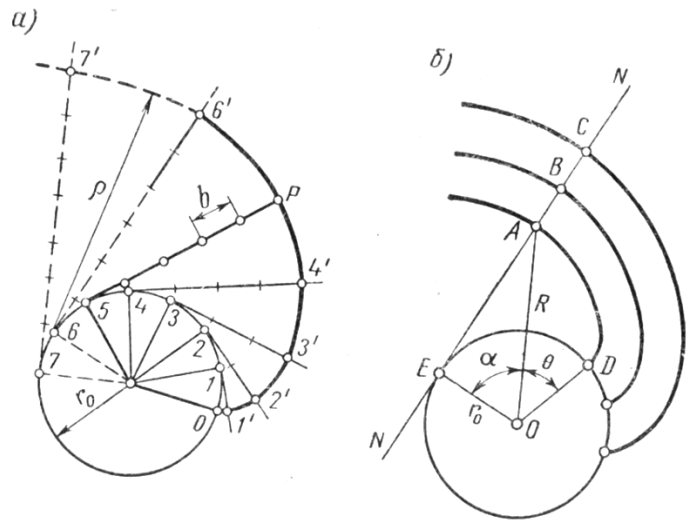


Рисунок 4.19 – Побудова евольвенти

Якщо потрібно продовжити евольвент далі за точку  $P$ , то потрібно вже вліво від точки 5 зробити шосту, сьому і т. ін. Зарубки, провести ще ряд дотичних і відкласти на них відповідне число відрізків  $b$ .

Широке використання евольвенти при проектуванні профілів зубів пояснюється рядом важливих властивостей. *Відзначимо основні властивості евольвенти.*

1. Пряма, що утворює евольвенту, є нормаллю до евольвенти та дотичної до основного кола. Дійсно, точка зіткнення дотичної прямою з основним колом являється, при утворенні евольвенти, миттєвим центром обертання дотичної прямою, а тому відповідні відрізки ( $1'-A_1$ ,  $2'-A_2$ ,  $3'-A_3$  і т. д.) є миттєвими радіусами кривизни евольвенти. Оскільки радіус кривизни завжди розташований нормально до кривої, то дотична пряма завжди нормальна до евольвенти.

2. Евольвента є кривою без перегинів, що дуже важливо при виготовленні різального інструменту. При використанні евольвентного профілю з перегинами були б удари.

3. Форма евольвенти залежить тільки від радіусу основного кола, тобто не залежить від параметрів зв'язаного колеса – це дозволяє використовувати евольвентні зубчасті колеса в коробках передач,

тобто в механізмах із змінними зубчастими колесами, в яких з одним колесом можуть входити в зачеплення колеса з різним числом зубів.

4. *Евольвента починається на основному колі і завжди розташована за її межами.*

5. *Радіус кривизни на початку евольвенти (на основному колі  $r_b$ ) дорівнює нулю* (а радіус основного кола, проведений через початок евольвенти, є плавним продовженням евольвенти в середині основного кола). У міру видалення від основного кола, радіус кривизни евольвенти збільшується. При  $r_b \rightarrow \infty$ , евольвента переходить в пряму лінію.

6. *Дві евольвенти одного основного кола є рівновіддаленими (еквідистантними) кривими, а відстань між ними по спільній нормалі є евольвентним кроком  $P_a$  і дорівнює довжині дуги кола між початками кривими, тобто дорівнює основному кроку  $P_b$ .*

Евольвента має дві гілки. Позитивну гілку отримуємо при перекочуванні твірної прямою проти годинникової стрілки, негативну – при перекоці за годинниковою стрілкою.

7. *При евольвентному зачепленні профіль зуба рейки має прямолінійний контур.*

Розміри коліс, а також усього зачеплення, залежать від чисел  $z_1$  і  $z_2$  зубів коліс, від модуля  $m$  зачеплення (визначуваного з розрахунку зуба колеса на міцність), загального для обох коліс, а також від методу їх обробки.

Якщо колесо виготовлене по методу обкатки (обгинання) інструментом рейкового типу (інструментальною рейкою, черв'ячною фрезою), то приступаючи до виготовлення коліс, що утворюють зубчасте зачеплення, треба для кожного з них виточити заготівлю радіусом кола виступів, а також підрахувати радіус ділильного кола і загальний для обох коліс крок на ділільних колах. Усі інші розміри кожного з коліс визначаються геометричними параметрами інструментальної рейки, а також положенням її по відношенню до оброблюваного колеса в процесі його виготовлення.

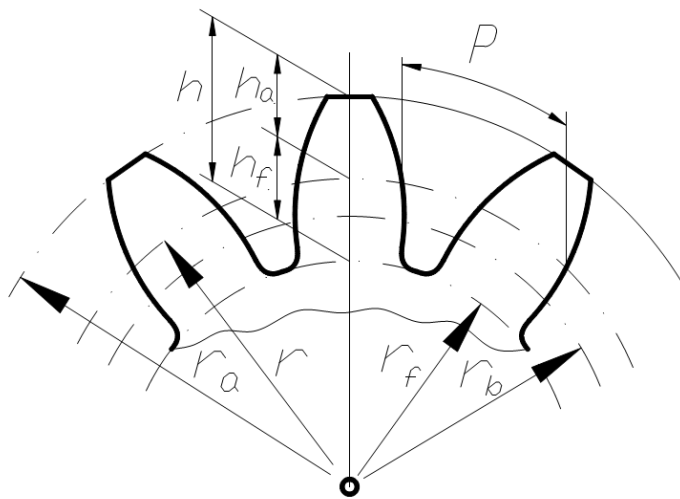


Рисунок 4.20 – Геометричні параметри зубчастого колеса

Основними параметрами зубчастого колеса є (рис. 3.3):  $z$  – число зубів;

$r_a$  – радіус кола виступів;

$r_f$  – радіус кола западин;

$r_b$  – радіус основного кола;

$r_w$  – радіус початкового кола ( $r$  – радіус ділительного кола) – при нарізці нормального колеса ці

радіуси збігаються;

$S$  – товщина зуба по ділительному колу;

$e$  – ширина западини по ділительному колу;

$p_t$  – крок по ділительному колу;

$h$  – висота зуба, рівна  $h = h_a + h_f$ ,

де:  $h_a$  – висота головки зуба;

$h_f$  – висота ніжки зуба;

$\epsilon_a$  – коефіцієнт перекриття;

$m$  – модуль зачеплення, який визначається з умови:  $m = \frac{p_t}{\pi}$ .

**Модуль зачеплення** - це число міліметрів діаметра ділительного кола, яке припадає на один зуб колеса.

Величина модуля  $m$  визначається з розрахунку зубів на міцність за формулами, що наводиться в курсі деталей машин

$$m = \frac{p_t}{\pi} \quad (4.10)$$

Знайдена за допомогою такого розрахунку величина модуля  $m$  обов'язково замінюється найближчій величиною, взятої з таблиці стандартних модулів. Модуль коліс необхідно приймати мінімальним, так як з його збільшенням збільшуються габарити і маса передач. З іншого боку, приймати значення модуля менше 1,5 мм ( $m \geq 1,5$ ) на силових передачах не рекомендується.

Якщо число зубців -  $z$ , тоді множення  $z \cdot p_t$  виразить собою довжину повного кола колеса:

$$2\pi r = z p_t, \quad r = \frac{z}{2} \cdot \frac{p_t}{\pi} \text{ (тобто вимірюється в мм).}$$

З міркувань, пов'язаних з раціональним конструюванням і зручністю виробництва зубчастих коліс, бажано, щоб радіус

початкового кола колеса виражався, по можливості, закругленим числом міліметрів. З формули (4.10) виходить, що ця умова може бути виконана лише у тому випадку, якщо відношення буде раціональним числом. Відношення кроку зачеплення  $p_t$  до числа  $\pi$  називається **модулем зачеплення**, позначається  $m$ , тобто. *Модуль - це число міліметрів діаметру ділильного кола, яке доводиться на один зуб колеса.*

Величина модуля  $m$  визначається з розрахунку зубців на міцність по формулах, що приводиться в курсі деталей машин. Знайдена за допомогою такого розрахунку величина модуля  $m$  обов'язково замінюється найближчою величиною, узятую з таблиці стандартних модулів. Модуль коліс необхідно приймати мінімальним, оскільки з його збільшенням збільшуються габарити і маса передач. З іншого боку, набувати значення модуля менше 1,5 мм ( $m \geq 1,5$ ) на силових передачах не рекомендується.

Зазвичай розміри зубчастого колеса і зубів виражаються через  $m$ .

Так, наприклад:  $h_a = h_a^* \cdot m$ ,

де  $h_a^*$  - коефіцієнт висоти голівки зуба;

$h_f = (h_a^* + c^*) \cdot m$ , де  $c^*$  - коефіцієнт радіального проміжку.

$r = 0,5 \cdot m \cdot z$ ;  $r_t = \pi \cdot m$ ;  $r_b = r \cdot \cos \alpha = 0,5 \cdot m \cdot z \cdot \cos \alpha$ ;

де  $\alpha$  - кут початкового різального інструменту.

Зазвичай для стандартних зубчастих коліс:  $h_a^* = 1$ ;  $c^* = 0,25$ ;  $\alpha = 20^\circ$ . Колеса з однаковим модулем і з однаковим числом зубців можуть відрізнятися завтовшки зубців по ділильному колу. Залежно від цього розрізняють три види коліс :

✓ нормальні (стандартні), у яких  $S = e$  (тобто коефіцієнт зміщення дорівнює нулю,  $z > 17$  у обох коліс);

✓ позитивні, у яких  $S > e$  – для коліс із зовнішнім зачепленням і  $S < e$  – для коліс з внутрішнім зачепленням (відсовуємо рейку, тобто збільшуємо діаметр,  $z < 17$  і може у нульових);

✓ негативні, у яких  $S < e$  – для коліс із зовнішнім зачепленням і  $S > e$  – для коліс з внутрішнім зачепленням ( $z < 17$  посуваємо рейку до осі).

*Резюме: Вимоги, яким повинні задовольняти зв'язані профілі зубів для збереження постійного передавального відношення, визначаються основною теоремою зачеплення (теоремою Віліса), яка встановлює зв'язок між заданим передавальним відношенням і геометричними характеристиками зв'язаних профілів.*

*Умовою основної теореми зачеплення відповідає евольвента, яку найбільше використовують для визначення профілів зубів.*

*Для графічної побудови евольвенти профілю зуба вистачає знати тільки радіус основного кола  $r_b$ .*

*Евольвента зачеплення має переваги перед іншими видами зачеплень, завдяки високій технологічності.*

*Розміри зубчастих коліс і передачі визначаються у функції модуля  $m$  і числа зубів  $z$ .*

#### **4.5. Методи виготовлення зубчастих коліс. Вихідний контур рейки, рейкове зачеплення.**

Методи виготовлення зубчастих коліс тісно пов'язані з теорією зачеплення. Зубчасті колеса з евольвентним профілем виготовляють головним чином методом нарізування на спеціальних зуборізальних верстатах двома методами: *методом копіювання* (рис.4.21) і *методом обкочування* (обкатки, рис. 4.22). Нарізуванням зубців називають технологічною операцією, сутність якої складається у вирізанні матеріалу розташованого на місці майбутньої впадини. В наслідок на заготовці залишаються виступи – зубці. Заготівка прямозубого циліндричного колеса із зовнішніми зубцями уявляє із себе циліндр, діаметр якого дорівнює діаметру вершин зубців.

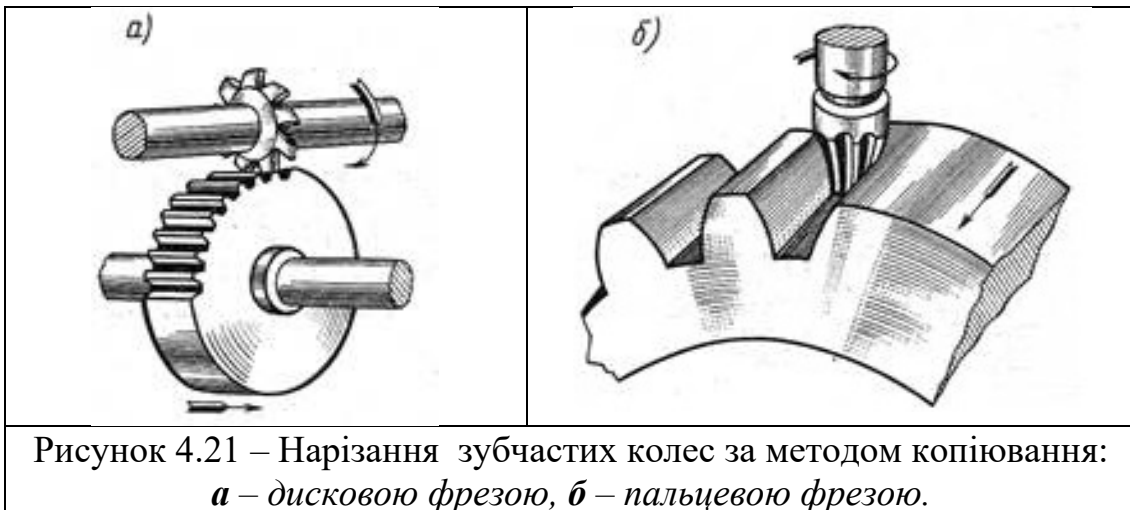
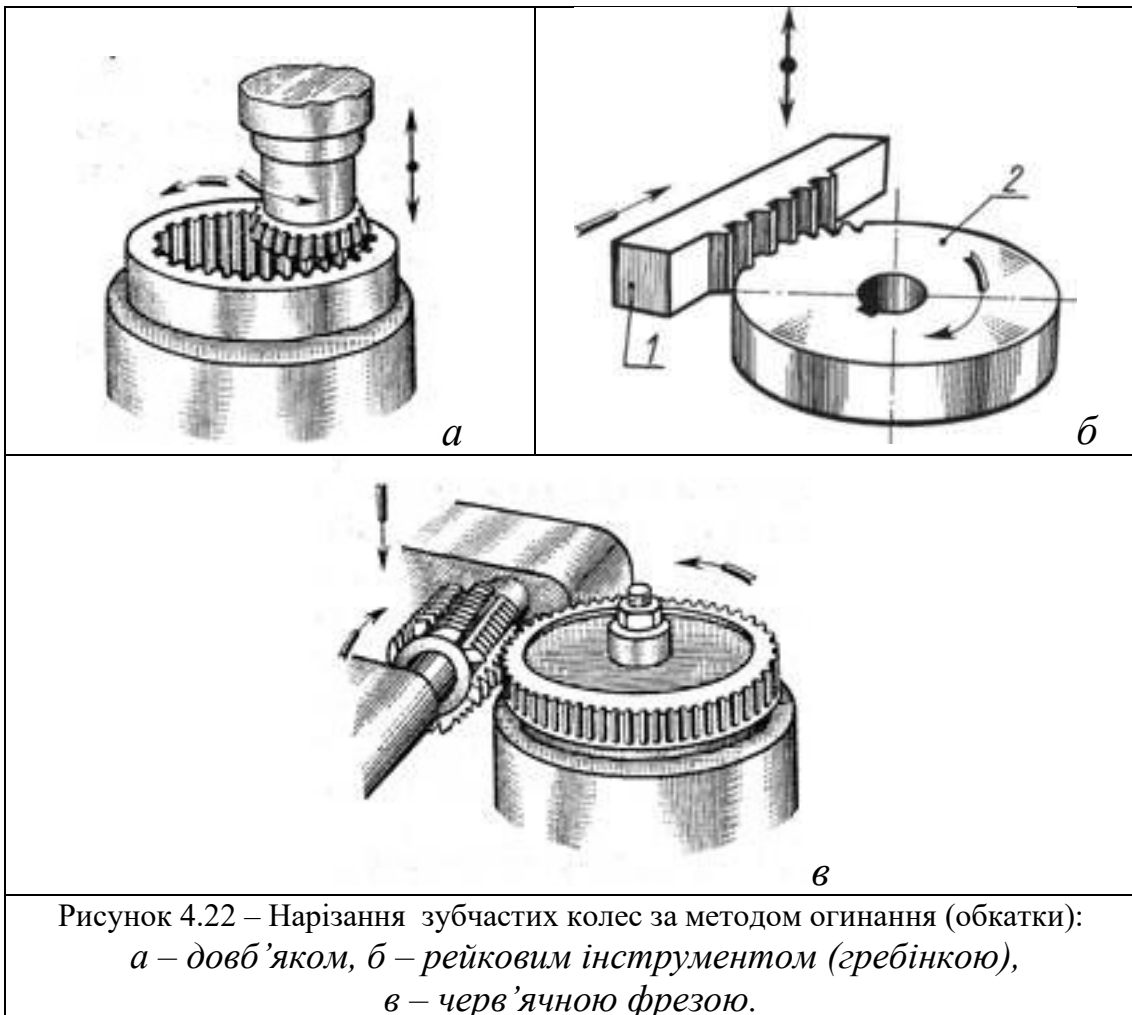


Рисунок 4.21 – Нарізування зубчастих коліс за методом копіювання:  
*а – дисковою фрезною, б – пальцевою фрезною.*

При застосуванні метода копіювання впадина між зубцями вирізується спеціально профільованим інструментом – фрезною, протяжкою, шліфувальним кругом. В процесі обробки фрезі повідомляється обертальний рух, а заготівлі – поступальне, назустріч фрезі. За один прохід фрези робиться нарізування однієї западини. Потім заготівлю повертають на кут  $360^\circ/z$ , де  $z$  – число зубців колеса, що виготовляється, і нарізують наступну западину. Цей процес автоматизований. При цьому використовується ділильна голівка, а також є набори фрез для нарізування коліс з різним модулем і різним числом зубців.

Річ у тому, що контури западин між зубами коліс, що мають один і той же модуль, при різних числах зубів неоднакові. Тому фреза, призначена для виготовлення колеса з числом зубців, рівним 22,

непридатна для виробництва колеса, яке повинне мати, наприклад, 26 зубів. Відмінність в контурах западин буде проте тим меншим, чим менше різниця в числах зубців колеса. Але основний недолік метода копіювання – використання фасонного інструмента (має криволінійні ріжучі кромки) і для точного виготовлення зубців треба багато різального інструменту. При його використанні похибки переносяться на колесо, що нарізується; цей метод мало виробничий і застосовується в дрібносерійному і одиничному виробництві.



Більш поширено виготовлення зубчастих коліс методом огинання (обкатки). В основі метода огинання лежить властивість зубчатого зачеплення – профілі зубців коліс, що знаходяться в зачепленні, є взаємно обгорненими кривими. В процесі нарізування зубців цим методом інструменту і майбутньому колесу повідомляється такий же відносний рух, яке вони мали б, знаходячись в дійсному зачепленні. При цьому інструмент зрізає ті ділянки заготовлі, які заважають йому знаходитися в зачепленні з нарізуваним колесом. Якщо контур різальних кромки зубців довб'яку або рейки виконані по евольвентним

кривим, то і зубчасте колесо отримаємо з зубцями евольвентного профілю. Для цього застосовують спеціальний різальний інструмент – рейка (або гребінка), довб'як (у формі шестерні) або черв'ячна фреза. Параметри і положення різального інструменту відносно заготовки визначають геометрію зубчастого колеса. Цей метод високопродуктивний і застосовується в масовому і великосерійному виробництві.

На рисунку 4.22, а показано нарізування зубчастого колеса зубчастим довб'яком. Цей інструмент виконується у вигляді зубчастого колеса із зубами, заточеними знизу як різці. У площині торця профіль зуба довб'яка обкреслюється по евольвенті. В процесі нарізування довб'яку і заготівлі повідомляється обертальний рух з кутовими швидкостями, обернено пропорційними до чисел їх зубів. Крім того, довб'яку повідомляється ще зворотно-поступальний рух уздовж його осі. При русі вниз (робочий хід) довб'як зрізає стружку з бічної поверхні зуба нарізуваного колеса. Після того, як заготівля зробить повний оберт, усі западини між зубами прорізатимуть.

Дуже часто описаний спосіб застосовується для остаточної обробки зубчастого колеса, западини якого заздалегідь (начорно) прорізаються яким-небудь іншим інструментом.

Верстати, на яких зубчасті колеса виготовляються за допомогою зубчастого довб'яка, називаються зубодовбежними.

На зубодовбежних верстатах можна виготовляти зубчасті колеса, як із зовнішнім, так і з внутрішнім розташуванням зубів. При цьому за допомогою одного і того ж зубчастого довб'яку можна виготовляти зубчасті колеса з будь-яким числом зубів (але одного і того ж модуля). Таким чином, при виготовленні зубчастих коліс методом обкату досить мати всього один інструмент потрібного модуля  $m$ , щоб робити колеса того ж модуля  $m$  з будь-яким числом зубів  $z$ . Крім того, верстати, що працюють по методу обкату, мають дуже високу продуктивність. Отже, метод обкату є досконалішим методом виробництва зубчастих коліс (порівняно з методом копіювання) і набув нині широкого поширення.

Менш продуктивним, але значно точнішим способом виготовлення коліс по методу обкату є спосіб нарізування зубів за допомогою інструментальної рейки (гребінки). Як відзначалося вище, при евольвентному зачепленні профіль зуба рейки має прямолінійний контур. Інструментальна рейка, маючи прямолінійний контур зубів, може бути виготовлена дуже точно.

В процесі нарізування гребінка здійснює зворотно-поступальний рух паралельно осі нарізуваного колеса (робочий і холостий хід). Заготівля має подвійний рух: обертаючись навколо своєї осі, вона одночасно переміщається уздовж гребінки. Швидкість обертання заготівлі і швидкість її поступального переміщення уздовж гребінки

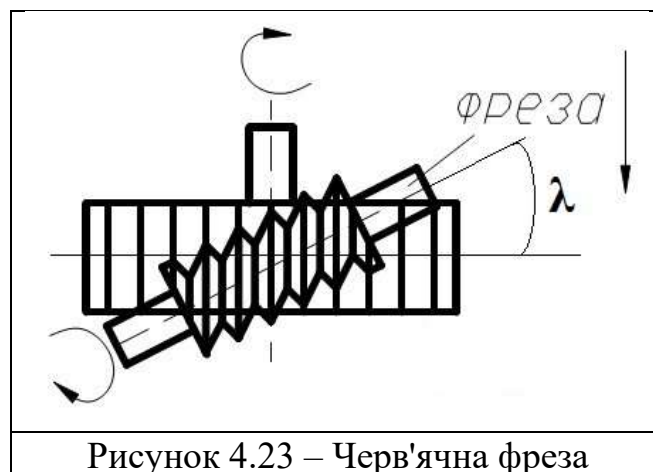
мають бути певним чином узгоджена один з одним. Це необхідно для того, щоб надати заготівлі і гребінці такий же відносний рух, яке було б у разі зачеплення аналогічної рейки із зубчастим колесом з таким же числом зубів  $z$ , що і у нарізованого колеса. Тоді гребінка, рухаючись перпендикулярно площини креслення, зрізатиме все ті ділянки заготівлі, які заважають зачепленню, тобто прорізатиме западини між зубами.

За допомогою гребінки можуть бути виготовлені зубчасті колеса тільки із зовнішнім розташуванням зубів.

Нарізування за допомогою інструментальної рейки (гребінки) імітує рейкове зачеплення (рис. 4.22, б), де профіль зуба утворюється як огинаюча послідовних положень профілю інструменту, кут початкового контуру якого  $\alpha=20^\circ$  (рис. 4.24, а). Зачеплення між різальним інструментом і нарізуваним колесом називається верстатним. У верстатному зачепленні початкове коло завжди співпадає з ділильним.

Перевага рейки над довб'яком полягає у тому, що зубці рейки мають прямолінійний профіль, що полегшує її виготовлення і заточку. Недоліком є те, що рейкою можна виготовляти тільки колеса зовнішнього зачеплення, а довб'яком – ще внутрішнього зачеплення.

Найпродуктивнішим з розглянутих методів є зубофрезерування за допомогою черв'ячних фрез, які знаходяться в зачепленні із заготівлею по аналогії з черв'ячною передачею (рис. 4.22, в). Черв'ячна фреза встановлюється по відношенню до торцевої площини заготівлі під кутом  $\lambda$ , рівним куту підйому середньої лінії гвинтової поверхні фрези (рис. 4.23).



Черв'ячна фреза в перерізі площиною, перпендикулярній осі заготівлі, має контур евольвентної рейки. В процесі нарізування зубців фрези і заготівлі повідомляються обертальні рухи з певним чином узгодженими, кутовими швидкостями. Обертанню фрези відповідає переміщення вказаного перерізу у напрямі пунктирної стрілки. Таким

чином, процес нарізування зубців черв'ячною фрезою аналогічний процесу нарізування зубців гребінкою. Для нарізування зубців по усій ширині вінця заготовлі фрезі повідомляється також рух, паралельний осі заготовлі.

Основна перевага методу огинання – висока точність і можливість одним тим самим інструментом нарізати евольвентні профілі з різними параметрами.

Усі розглянуті методи використовуються для нарізування циліндричних коліс як з прямими, так і з косими зубами.

Контур гребінки і згаданого перерізу черв'ячної фрези називають початковим контуром інструментальної рейки. Його розміри нормалізовані. Зубчастий контур рейки, прийнятий за базовий для визначення теоретичних форм і розмірів зуборізального інструмента та колеса, називається *вихідним контуром* так званої основної рейки (рис.4.24 *a*; показаний основною лінією). Контршаблон до контуру основної рейки відповідає початковому контуру інструментальної рейки, який відрізняється від основного контуру довгастою головкою зубців для створення радіального зазору (штрихова лінія). Позитивна властивість інструментальної рейки є простота форми різальної кромки – пряма лінія.

Параметри початкового контуру виражаються в частках модуля і регламентовані для циліндричних зубчастих передач для загального і важкого машинобудування ДСТУ ISO 53-2001 і ДСТУ ISO 54-2001. ДСТУ ISO 701-2001 – Міжнародна система позначень зубчастих передач.

Стандартом встановлені такі параметри і коефіцієнти:

- $\alpha=20^\circ$  – кут головного профілю;
- $h_t=2h_a^*m$  – глибина заходу;
- $h_a^*=1$  – коефіцієнт висоти головки зуба;
- $h_f^*=1,25$  – коефіцієнт висоти ніжки зуба;
- $s=0,5p$  – товщина зуба на ділильній прямій;
- $c=c^*m$  – радіальний зазор;  $c^*=0,25$  – коефіцієнт радіального зазору;
- $\rho_f=0,38m$  – радіус округлення (фланця) у коріння зуба.

З усіх горизонтальних прямих рейки можна виділити таку, уздовж якої товщина зуба дорівнює ширині западини, тобто кожна з цих величин дорівнює половині кроку. Цю пряму називатимемо, ділильної прямої рейки. *Ділильна пряма рейки* – пряма, що дотикається ділильного кола колеса. В процесі нарізування зубців одна з горизонтальних прямих гребінки котитиметься без ковзання по одному з кіл нарізаного колеса. Саме по цьому колу крок колеса дорівнюватиме кроку гребінки, а модуль – модулю гребінки. Це коло дістало назву ділильного кола. *Ділильне коло колеса* – коло, на якому

крок зачеплення дорівнює кроку інструментальної рейки. *Модульна пряма рейки* – середня пряма, на якій товщина зуба дорівнює ширині западини і складає половину кроку.

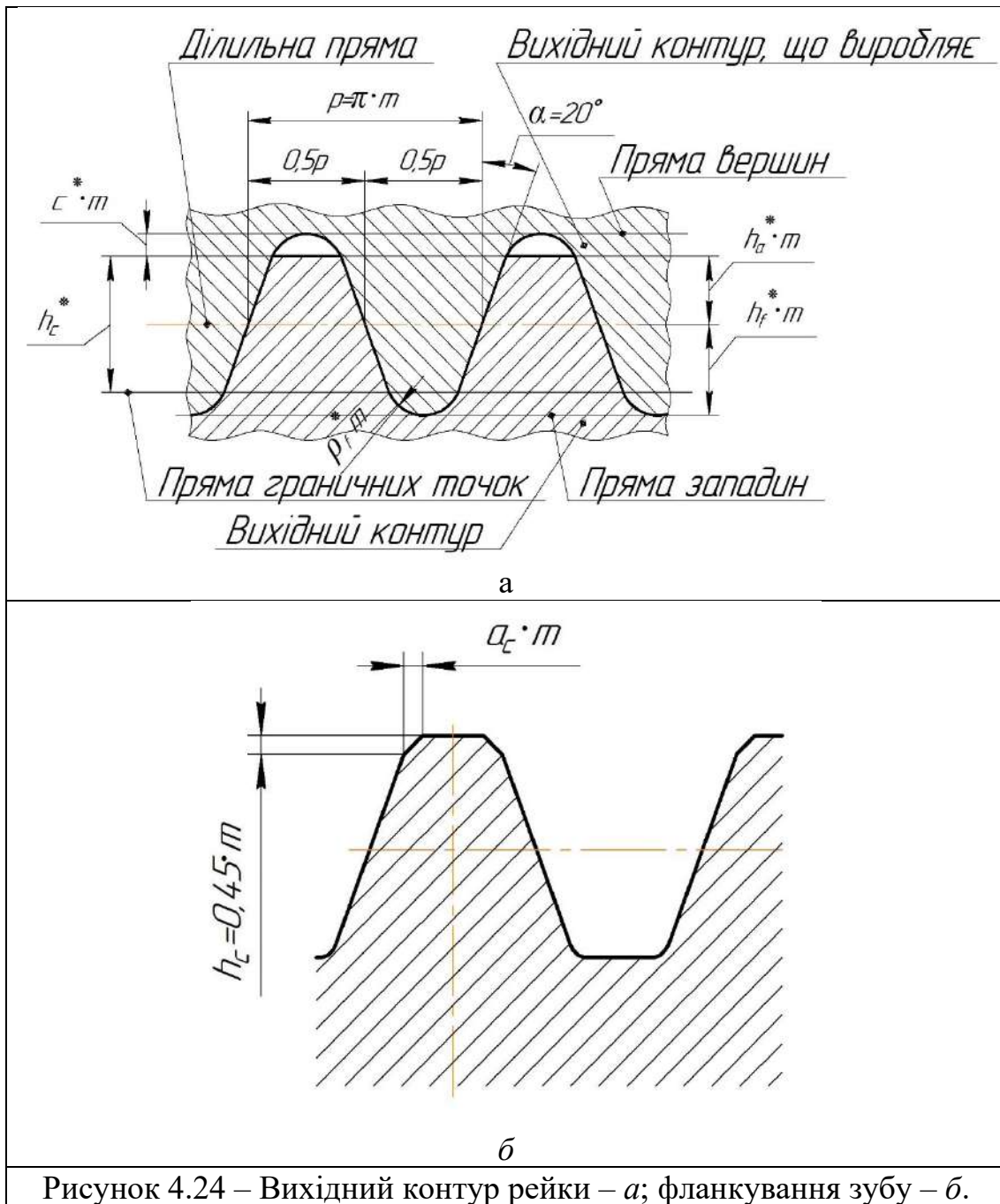


Рисунок 4.24 – Вихідний контур рейки – а; фланкування зубу – б.

Крок рейки постійний для будь-якої прямій, що паралельна модульній прямій у межах прямолінійного профілю зуба; тому заготовку можна встановлювати так, що ділильне коло колеса дотикається будь-якої цієї прямої, яка і буде ділильною. Якщо ділильне коло колеса дотикається модульній прямій рейки, то профіль зуба буде *нормальним* (або *нульовим*). У такого колеса висота головки

зуба дорівнює модулю, а товщина зуба по ділильному колу дорівнює ширині западини. Якщо інструментальну рейку зміщати, то у цьому випадку ділильне коло колеса з модульною прямою рейки не дотикаються. Відстань між модульною (середньою прямою) і той ділильною прямою, що в процесі огинання перекочується по ділильному колу колеса, називається *зміщенням рейки -  $x$* . Зміщення рейки порівняно з її положенням для нормальних (нульових) коліс у напрямку від центра колеса називається *позитивним зміщенням „+  $x$ ”* (отримуються *позитивні або додатні колеса*), а в напрямку до центра – *негативним зміщенням „-  $x$ ”* (отримуються *негативні або від’ємні колеса*).

$$x = \xi \cdot m, \quad (4.11)$$

де  $\xi$  - коефіцієнт зміщення або відносне зміщення.

При нарізанні профілю зуба ділильна пряма котиться по ділильному колу без ковзання і, отож, обидві лінії є *центроїдами* у відносному русі рейки і колеса. Точка дотикання центроїд буде *полюсом зачеплення* при нарізанні зубчастого колеса.

Для забезпечення плавного входження зубців в зачеплення і зниження динамічного тиску на вершині зубців (менше викришувались на вершинах) зуб на вершині вихідного контуру дещо потоншується – зрізується по прямій лінії. Зрізана частина профілю називається *фланком*, а процес зрізування – *фланкуванням*. Щоб зробити фланки, на зубах інструменту роблять деякі потовщення на ніжці його біля округлення.  $h_c = 0,45m$  (рис.4.24, б).

#### 4.6. Найменше число зубців зубчастих коліс. Підрізування і загострення зубців. виправлення (коригування) зубчастих коліс.

При нарізуванні нульових коліс з малим числом зубців може виникнути явище урізування голівок зубів різального інструменту в ніжки зубців колеса. Це явище називається *підрізуванням* зуба. Це відбувається внаслідок того, що робоча ділянка лінії зачеплення виходить поза межі теоретичної лінії зачеплення; вершина ніжки зуба рейки накладається на ніжку зуба колеса (відбувається *інтерференція* або *підріз* зубців). Явищем підрізування в теорії зачеплення називається перетин траєкторії відносного руху кінця профілю зуба одного колеса з евольвентною частиною профілю зуба зв'язаного з ним колеса. При цьому зменшується його міцність і збільшується знос робочої частини зуба (рис. 4.25, а). Згідно з властивостями евольвентного зачеплення точки контакту зубів евольвентного профілю співпадають з лінією  $NP$ , починаючи з точки  $N$  (рис. 4.25, б), тобто висота прямолінійної частини голівки зуба різального інструменту (рейки)  $h_a^* \cdot m$  має бути менше відрізка  $PF$ , інакше

частина голівки зуба рейки контактуватиме із заготівлею (нарізувати її) не по евольвенті.

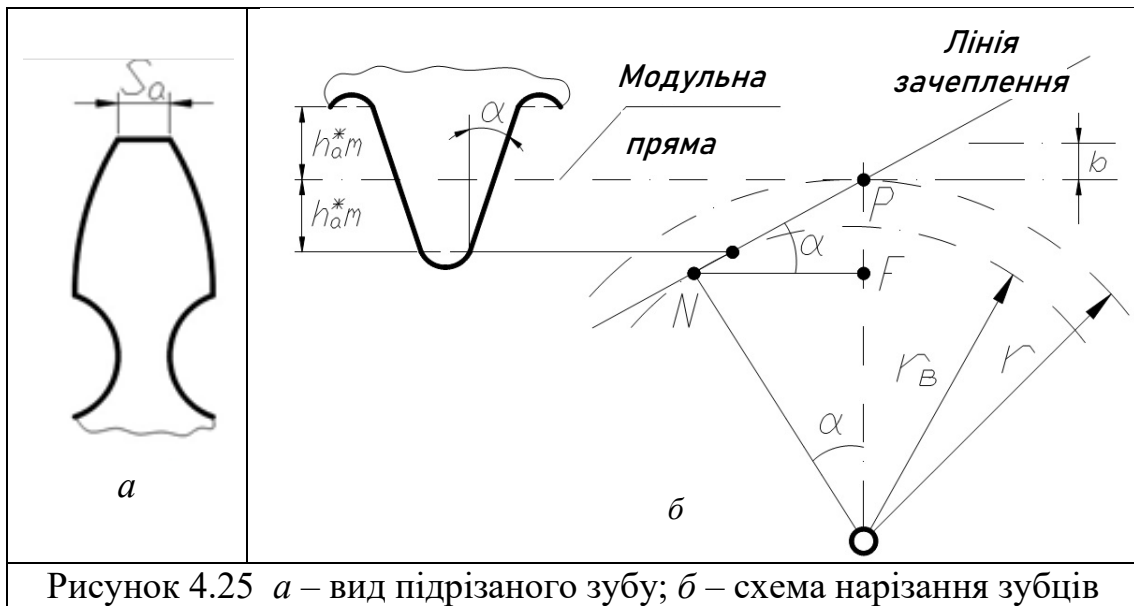


Рисунок 4.25 а – вид підрізаного зуба; б – схема нарізання зубців

Оскільки  $h_a^* \cdot m \leq PF$ , а  $PF = r \cdot \sin^2 \alpha = 0,5 \cdot m \cdot Z \cdot \sin^2 \alpha$ , то

$$Z \geq \frac{2 \cdot h_a^*}{\sin^2 \alpha} \quad (4.12)$$

і  $Z_{min}=17$  при стандартних значеннях  $h_a^* = 1$ ;  $\alpha = 20^\circ$ .

Отже, за межами лінії зачеплення не задовольняється основний закон зачеплення ( $P_r < ab \leq N_1 N_2$ ).

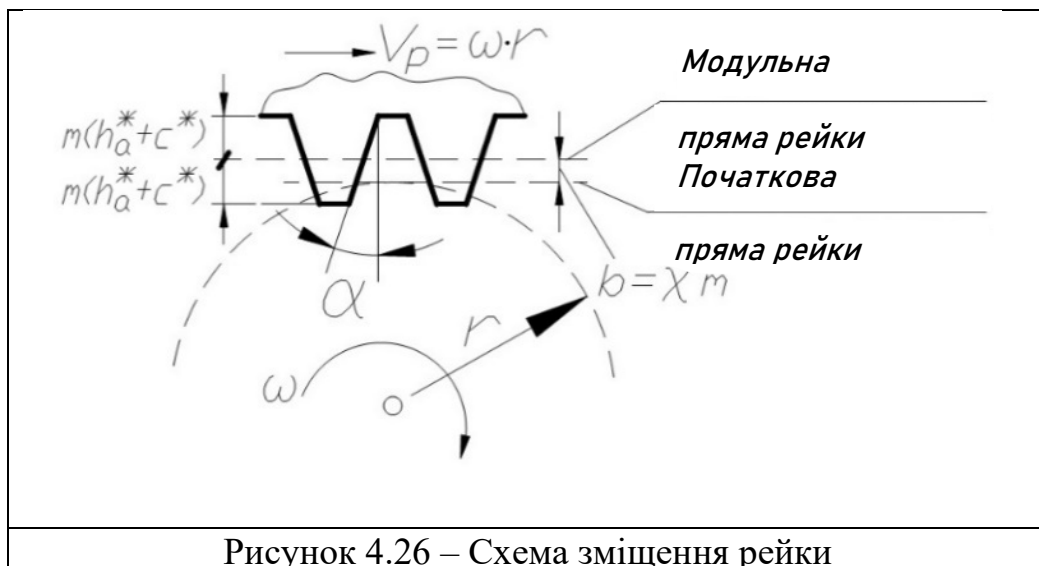


Рисунок 4.26 – Схема зміщення рейки

При нарізуванні коліс (як було сказано раніше) різальний інструмент можна розташовувати ближче до заготівлі або далі від неї. Положення інструменту визначається відстанню між ділительним колом колеса і так званої модульної прямої рейки, що проходить через середину висоти зуба різального інструменту (рис.4.26). Залежно від

положення рейки по ділильному колу може перекочуватися без ковзання або модульна пряма рейки, або початкова пряма, віддалена від модульної прямої на величину зміщення «b», яке називається зрушенням або корекцією, а коефіцієнт  $\xi$  (хі), рівний  $\xi = b/m$ , називається *коефіцієнтом зміщення інструменту*. Якщо інструмент зміщений від нарізуваного колеса, то  $\xi$  вважається позитивним (позитивна корекція), а якщо – до центру колеса, то  $\xi$  негативний (негативна корекція). При  $\xi=0$  нарізуване колесо називається нормальним (нульовим). Товщина зуба і ширина, западини такого колеса по ділильному колу рівні.

Мінімальний коефіцієнт відносного зміщення, необхідний для усунення підрізу ніжки зуба при коефіцієнті висоти головки зуба  $h_a=1$  і куті профілю  $\alpha = 20^\circ$  дорівнює

$$\xi_{min} = \frac{17-z}{17} \quad (4.13)$$

Зачеплення двох зубчастих коліс характеризується сумарним коефіцієнтом корекції  $\xi \Sigma = \xi_1 + \xi_2$ , причому можливі три випадки:

1)  $\xi \Sigma = 0$  при  $\xi_1 = \xi_2 = 0$ , коли в зачепленні знаходяться два нульові зубчасті колеса (нульове зачеплення);

2)  $\xi \Sigma = 0$  при  $\xi_1 = -\xi_2$ , коли в зачепленні знаходяться два кориговані зубчасті колеса, коефіцієнти корекції яких рівні за величиною і протилежні по знаку (рівнозміщене зачеплення з висотною корекцією);

3)  $\xi \Sigma \neq 0$ , коли в зачепленні знаходяться два кориговані колеса, що мають:

а)  $\xi \Sigma > 0$  - позитивне невідношене зачеплення з кутовою корекцією;

б)  $\xi \Sigma < 0$  - негативне невідношене зачеплення з кутовою корекцією.

В перших двох випадках ( $\xi \Sigma = 0$ ) ділильні кола співпадають з початковими, кут зачеплення  $a_w$  дорівнює куту початкового контуру рейки  $a$  і міжосьова відстань рівна, на відміну від нерівнозміщеного зачеплення, де ділильні і початкові кола не співпадають,  $a_w \neq a$ , а міжосьова відстань рівна:

$$a_w = r_{w1} + r_{w2}$$

Виготовлення позитивних і негативних коліс (так званих коригованих) робиться з метою збільшення міцності зубів (усунення підрізу профілю малого колеса), зменшення найбільших значень питомого ковзання, зменшення габаритів передачі (застосування коліс з малим числом зубів), отримання заданої міжцентрної відстані. Кориговані колеса можуть бути введені в зачеплення між собою і з нульовими колесами.

При виготовленні зубчастих передач необхідно уникати *загострення зубів коліс* (рис.4.25, а), бо зменшується міцність головок

зубів. Загострення зубів коліс підсилюється з збільшенням коефіцієнта зміщення, прийнятого при його виготовленні. Максимальний коефіцієнт зміщення не може бути визначеним безпосередньо – відсутність загострення може бути виявлено після підрахунку товщини зубів по окружностям вершин. Загострення зубу характеризується його товщиною  $S_a$  на окружності виступів. Необхідно, щоб товщина зубів на колі вершин  $S_a \geq 0,3m$ . Тому, проектуючи передачу, треба перевіряти цю умову. Разом ці умови можна записати так:

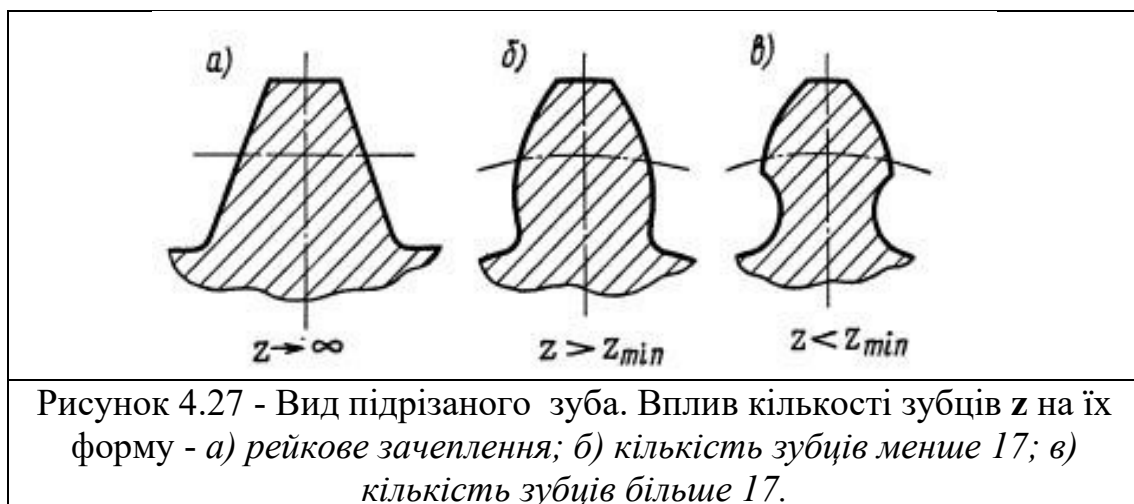
$$x_{0,3} \leq x \leq x_{\min} \quad (4.14)$$

Коефіцієнт зміщення виправлених зубчастих коліс має бути таким, щоб коефіцієнт перекриття був  $\xi \geq 1,1$ .

Коефіцієнти зміщення треба обрати такими, щоб не було заклинювання зубчастих коліс, тобто, щоб головки зубів одного з коліс не впиралися в галтелі зуба другого колеса.

Підбір коефіцієнтів зміщення, які задовольняють всім переліченим вимогам, уявляє собою важку задачу.

Зубчасті колеса, що виготовлені зі зміщеним інструментом називаються *коригованими*, а процес нарізання *коригуванням*. Коригування зубчастих коліс роблять з метою зменшення габаритів і поліпшення якості зачеплення: усунення підрізу ніжки зуба, збільшення коефіцієнта перекриття, зменшення зносу, збільшення міцності зуба.



При коригуванні остаються незмінними радіуси основних і ділільних кіл, крок зачеплення. Змінюються в залежності від коефіцієнта зміщення товщина зуба і ширина западини по ділільному колу.

Позитивне зміщення приводить до збільшення товщини зубу (збільшується міцність зуба) в основі і зменшенню кривини профілю (зменшується довжина лінії зачеплення, а отже і коефіцієнт перекриття

$\xi$ ), тому що зуб креслиться більш віддаленою від основного кола ділянкою евольвенти. У позитивних коліс товщина зуба по ділильному колу збільшується порівняно з нормальним колесом, у негативних коліс – зменшується, тобто зміщення впливає на товщину зуба по ділильному колу і на розташування ділянки евольвенти, яку використовують – збільшується плавність і безшумність роботи передачі, але міцність зуба зменшується.

#### 4.7. Побудова картини зовнішнього евольвентного зачепленням.

Для розрахунку геометричних параметрів зубчастого зачеплення достатньо трьох показників, а саме кількість зубців першого та другого колеса –  $z_1, z_2$  та модуль зачеплення  $m$ , мм.

Підраховуємо передаточне відношення з формули:

$$U_{12} = \frac{z_2}{z_1}, \quad (4.15)$$

В залежності від результату, який отримали –  $2 > U_{12} > 1$  або  $2 > U_{12} > 5$  з таблиці додатків, згідно числу зубців знаходимо коефіцієнти відносного зсуву  $x_1$  та  $x_2$ .

Визначаємо інволюту кута зачеплення з формули:

$$inv \alpha_w = \frac{2 \cdot (x_1 + x_2) \cdot tg \alpha}{z_1 + z_2} + inv \alpha, \quad (4.16)$$

де  $\alpha$  – кут профілю рейки, дорівнює  $\alpha = 20^\circ$ ,  $tg \alpha = tg 20^\circ = 0,364$ ;  $inv 20^\circ$  – еволюта функції  $20^\circ$ , визначається з таблиці додатків і дорівнює  $inv 20^\circ = 0,014904$ .

Після розрахунку еволюти кута зачеплення знову з таблиці додатків, по числу, яке отримали, визначаємо кут  $\alpha_w$  – кут між лінією зачеплення і дотичної до початкових кіл називається **кутом зачеплення**.

Визначаємо міжосьову відстань  $a_w$  передачі:

$$\alpha_w = \frac{m \cdot (z_1 + z_2)}{2} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w}, \quad (4.17)$$

Визначаємо радіуси початкових кіл  $r_{w1}, r_{w2}$ :

$$r_{w1} = \frac{a_w}{U_{12} + 1}, \quad (4.18)$$

$$r_{w2} = \frac{a_w \cdot U_{12}}{U_{12} + 1}, \quad (4.19)$$

Визначаємо радіуси ділильних кіл  $r_1, r_2$ :

$$r_1 = \frac{m \cdot z_1}{2}, \quad (4.20)$$

$$r_2 = \frac{m \cdot z_2}{2}, \quad (4.21)$$

Визначаємо радіуси основних кіл  $r_{b_1}, r_{b_2}$ :

$$r_{b_1} = r_1 \cdot \cos \alpha, \quad (4.22)$$

$$r_{b_2} = r_2 \cdot \cos \alpha, \quad (4.23)$$

Визначаємо радіуси кіл вершин  $r_{a_1}, r_{a_2}$ :

$$r_{a_1} = r_1 + (h_a^* + x_1 - \Delta y) \cdot m, \quad (4.24)$$

$$r_{a_2} = r_2 + (h_a^* + x_2 - \Delta y) \cdot m, \quad (4.25)$$

де  $h_a^*$  – коефіцієнт висоти головки зуба,  $h_a^* = 1$ ;

$\Delta y$  – коефіцієнт зрівняльного зсування визначаємо з таблиці додатків згідно кількості зубців першого колеса  $z_1$ .

Визначаємо радіуси кіл западин  $r_{f_1}, r_{f_2}$ :

$$r_{f_1} = r_1 - (h_a^* + c^* - x_1) \cdot m, \quad (4.26)$$

$$r_{f_2} = r_2 - (h_a^* + c^* - x_2) \cdot m, \quad (4.27)$$

де  $c^*$  – коефіцієнт радіального зазору  $c^* = 0,25$ .

Визначаємо крок по ділильному колу  $p_t$ :

$$p_t = \pi \cdot m, \quad (4.28)$$

Визначаємо товщину зубців по ділильним колам  $S_1, S_2$ :

$$S_1 = 0,5 \cdot p_t + 2 \cdot x_1 \cdot m \cdot \operatorname{tg} \alpha, \quad (4.29)$$

$$S_2 = 0,5 \cdot p_t + 2 \cdot x_2 \cdot m \cdot \operatorname{tg} \alpha, \quad (4.30)$$

Визначаємо кути профілів зубців по колам вершин:

$$\alpha_{a_1} = \arccos \frac{r_{b_1}}{r_{a_1}}, \quad (4.31)$$

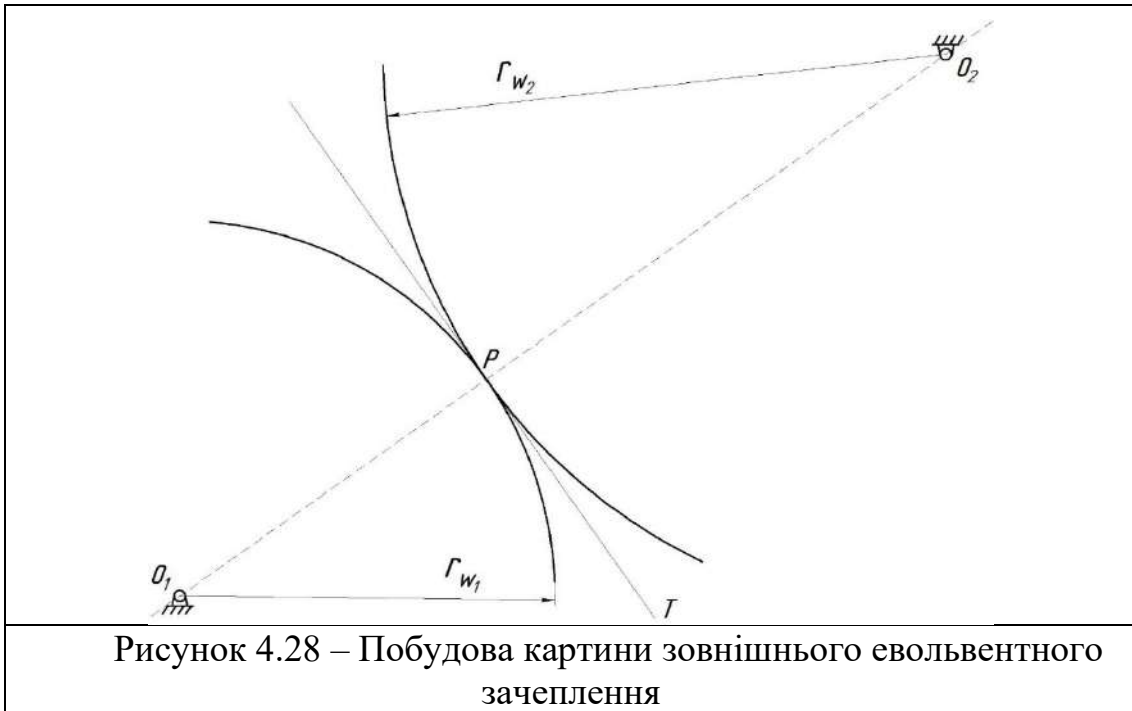
$$\alpha_{a_2} = \arccos \frac{r_{b_2}}{r_{a_2}}, \quad (4.32)$$

Визначаємо коефіцієнт перекриття  $\varepsilon_\alpha$ :

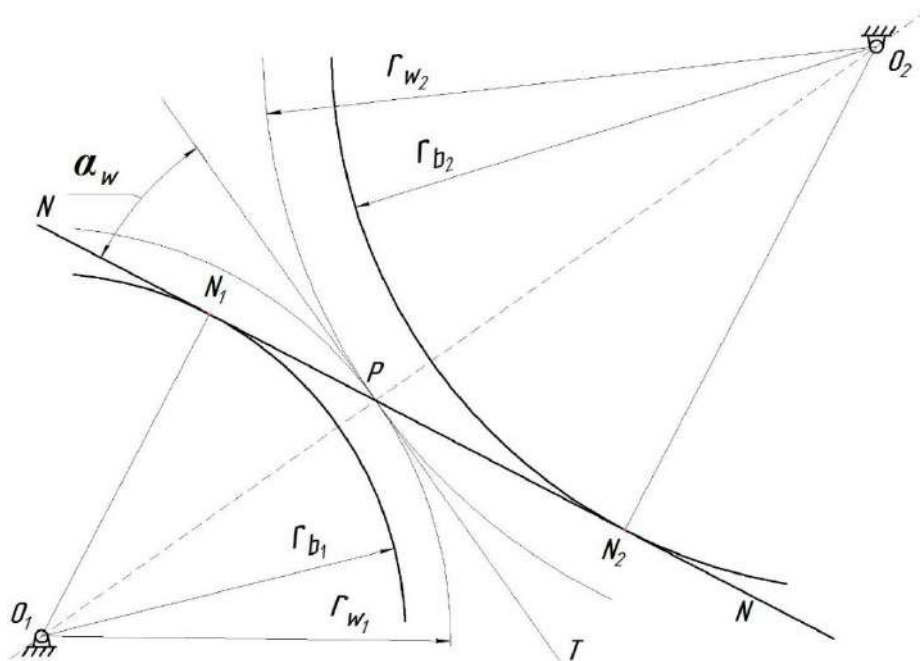
$$\varepsilon_\alpha = \frac{z_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_{a_1} + z_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha_{a_2} - (z_1 + z_2) \cdot \operatorname{tg} \alpha_w}{2 \cdot \pi}, \quad (4.33)$$

Далі будуємо картини зовнішнього евольвентного зачеплення (рис. 4.37)

Проводимо лінію центрів і в обраному масштабі відкладаємо міжосьову відстань  $a_w = 180,79$  мм. З точки  $O_1$  і  $O_2$  проводимо початкові кола  $r_{w_1}, r_{w_2}$ .



Вони повинні торкатися одне одного на лінії центрів. Отримуємо точку торкання  $P$  – полюс зачеплення. Через полюс  $P$  проводимо спільну дотичну  $T—T$  (рис. 4.28).



Проводимо лінію зачеплення  $N—N$  під кутом  $\alpha_w = 26^\circ 55'$  до лінії  $T—T$  відповідно до рисунка 4.29.

Проводимо основні кола радіусами  $r_{b_1}, r_{b_2}$ . Перевірка: ці окружності повинні торкатися лінії  $N-N$  (але не перетинатися). Точки дотику позначимо  $N_1$  і  $N_2$ . Відрізок  $N_1 - N_2$  теоретична лінія зачеплення (рис. 4.29).

Далі проводимо окружності (рис. 4.30): ділильні  $r_1, r_2$ , вершин  $r_{a_1}, r_{a_2}$  і западин  $r_{f_1}, r_{f_2}$ .

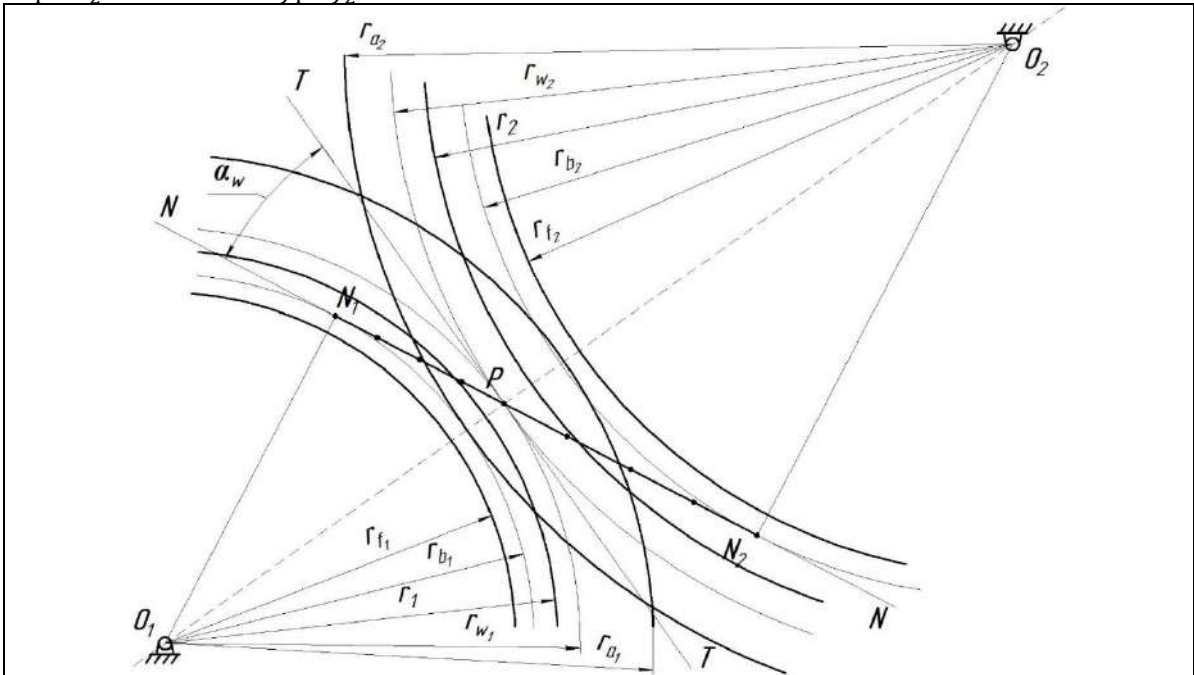


Рисунок 4.30 – Побудова картини зовнішнього евольвентного зачеплення

Ділимо відрізок  $N_1-P$  та  $N_2-P$  на рівні (на чотири) частини і будемо евольвенти для обох коліс (рис. 4.30).

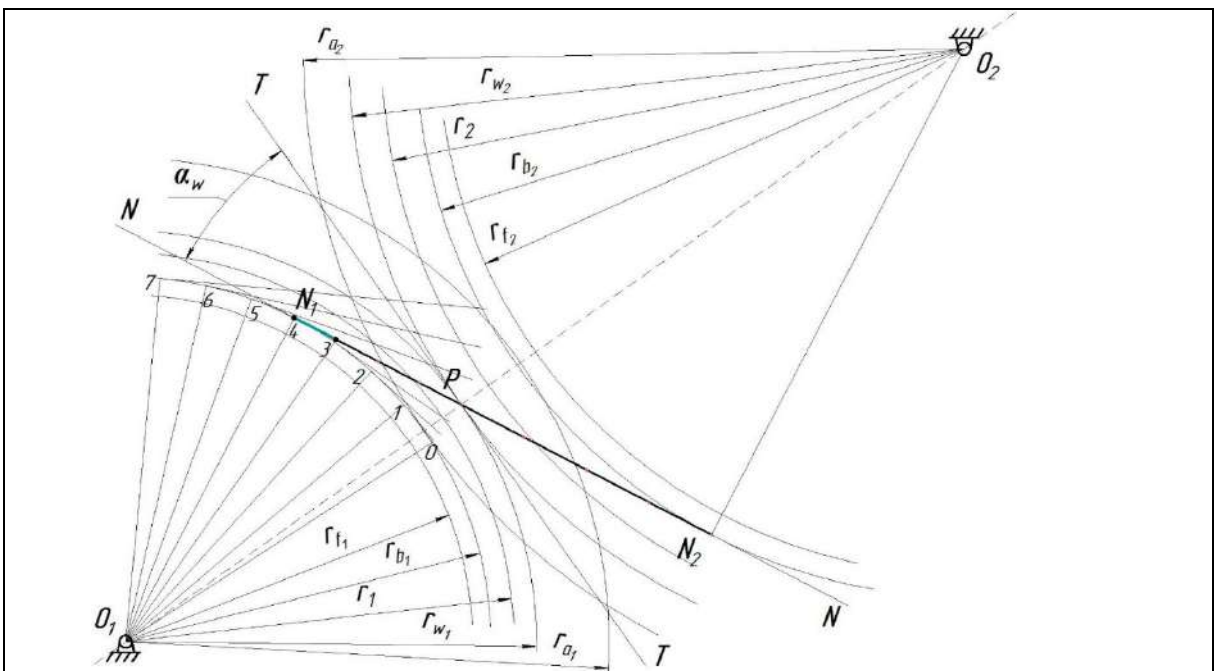


Рисунок 4.31 – Побудова картини зовнішнього евольвентного зачеплення

Для цього від точки  $N_1$  відкладаємо на основному колі хорди  $N_1—3, 3—2, 2—1, 1—0$ , відповідно рівні довжині четвертої частини відрізка  $N_1—P$  (рис. 4.31).

З'єднуємо точки  $1, 2$  і т. ін. з точкою  $O_1$  і до ліній  $O_1 1, O_1 2$ , і т. ін. проводимо перпендикуляри, на котрих відкладаємо таку кількість відрізків, який номер перпендикуляра. Наприклад, перпендикуляр  $2$ , значить два відрізки (рис. 4.31).

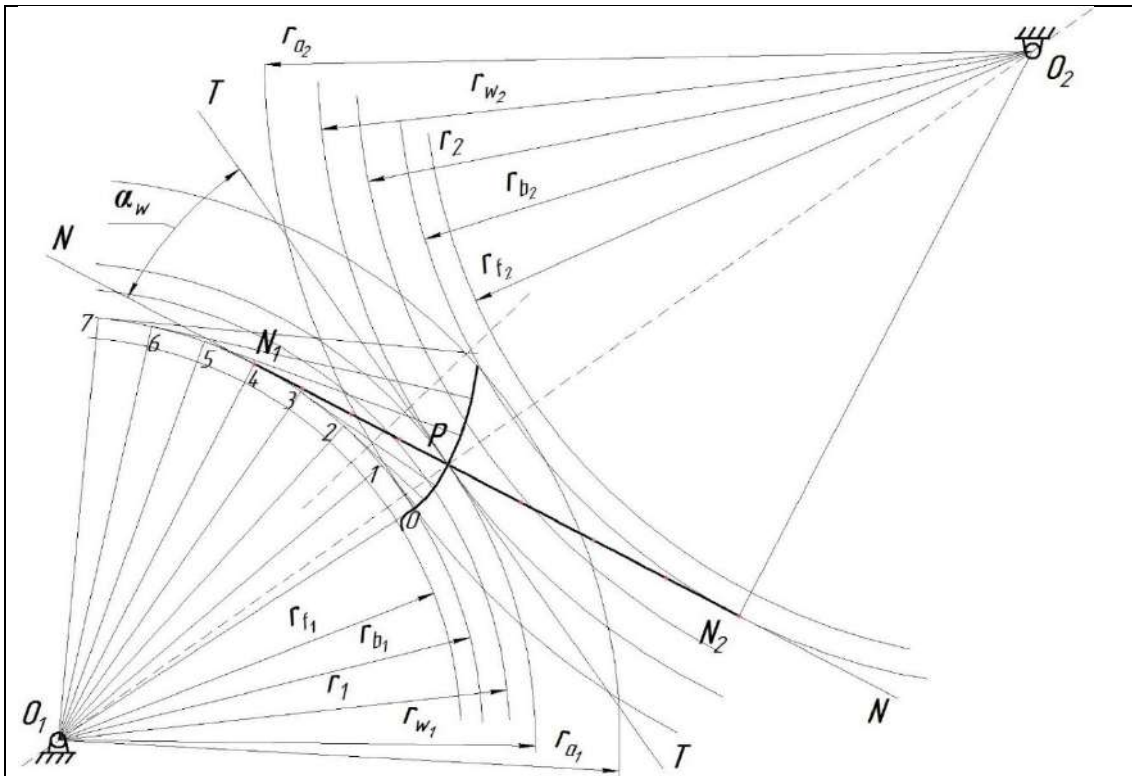


Рисунок 4.32 – Побудова картини зовнішнього евольвентного зачеплення

Кінці перпендикулярів з'єднуємо плавною лінією (рис. 4.32).

Від полюса  $P$  по ділільному колу відкладаємо крок зачеплення  $p_t=14,13$  мм і товщину зубця  $S_1 (S_2)$  (рис. 4.33).

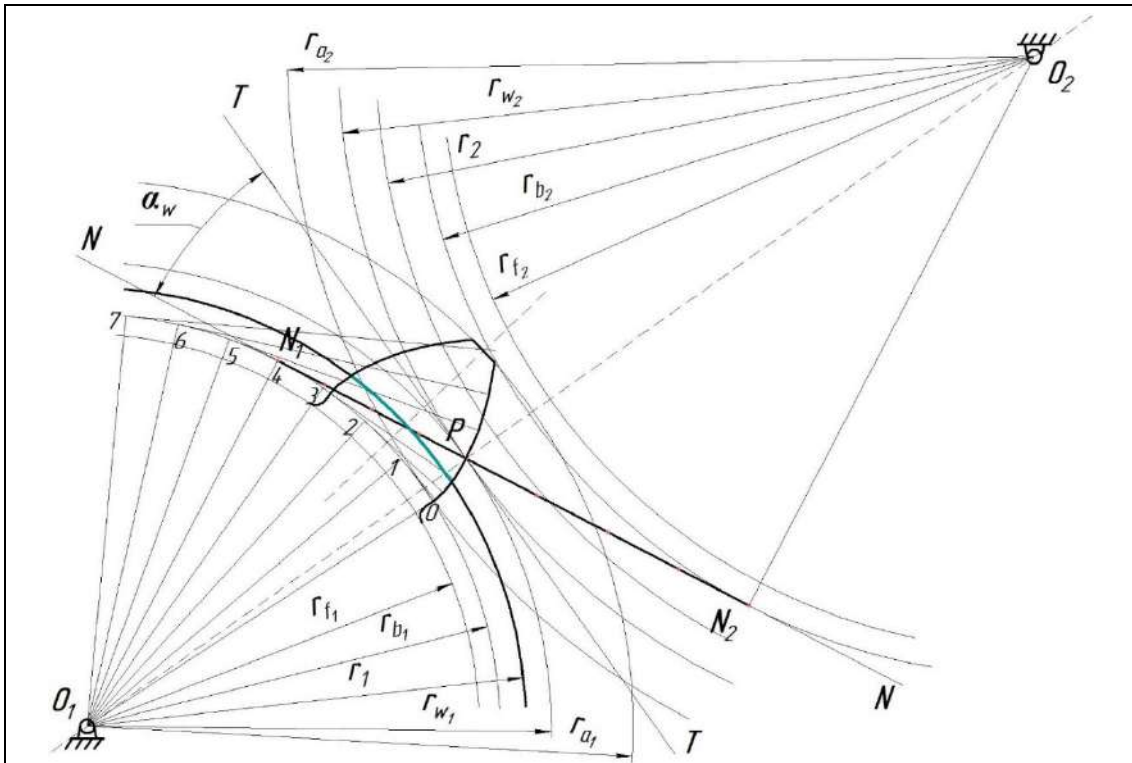


Рисунок 4.33 – Побудова картини зовнішнього евольвентного зачеплення

Побудова евольвенти для другого колеса аналогічне (рис. 4.34).

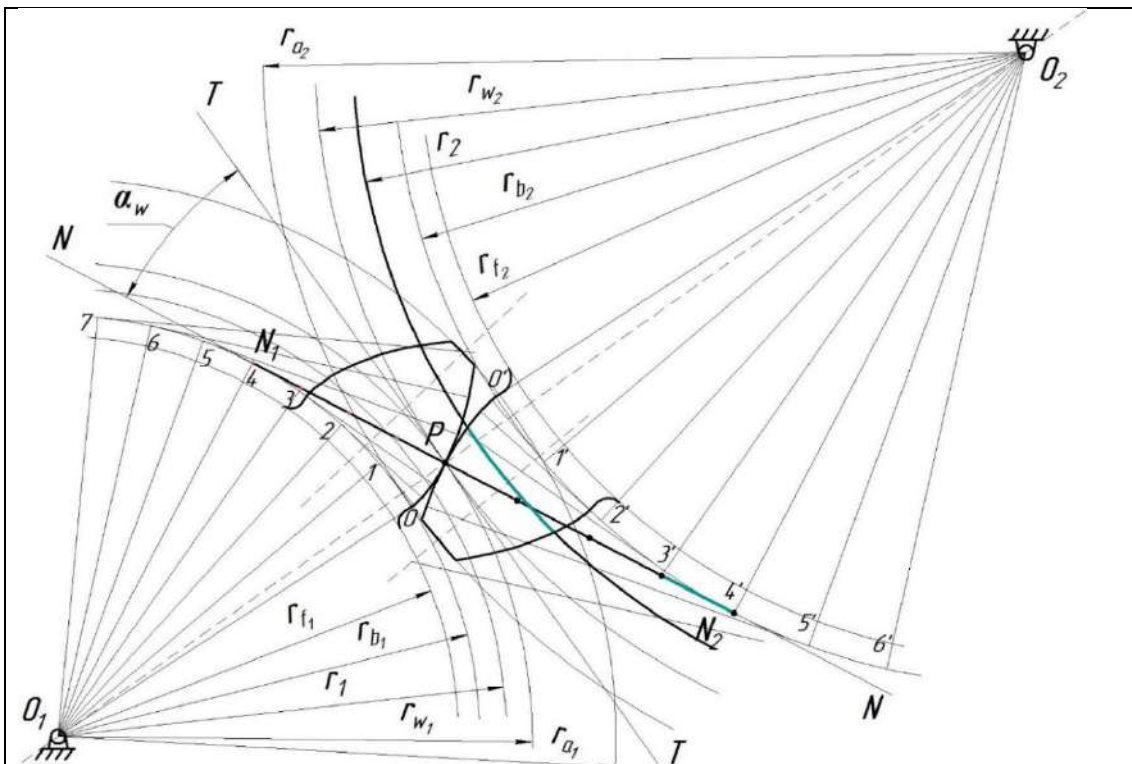


Рисунок 4.34 – Побудова картини зовнішнього евольвентного зачеплення

Бокові профілі решти зубців будуємо по шаблону (рис.4.35).

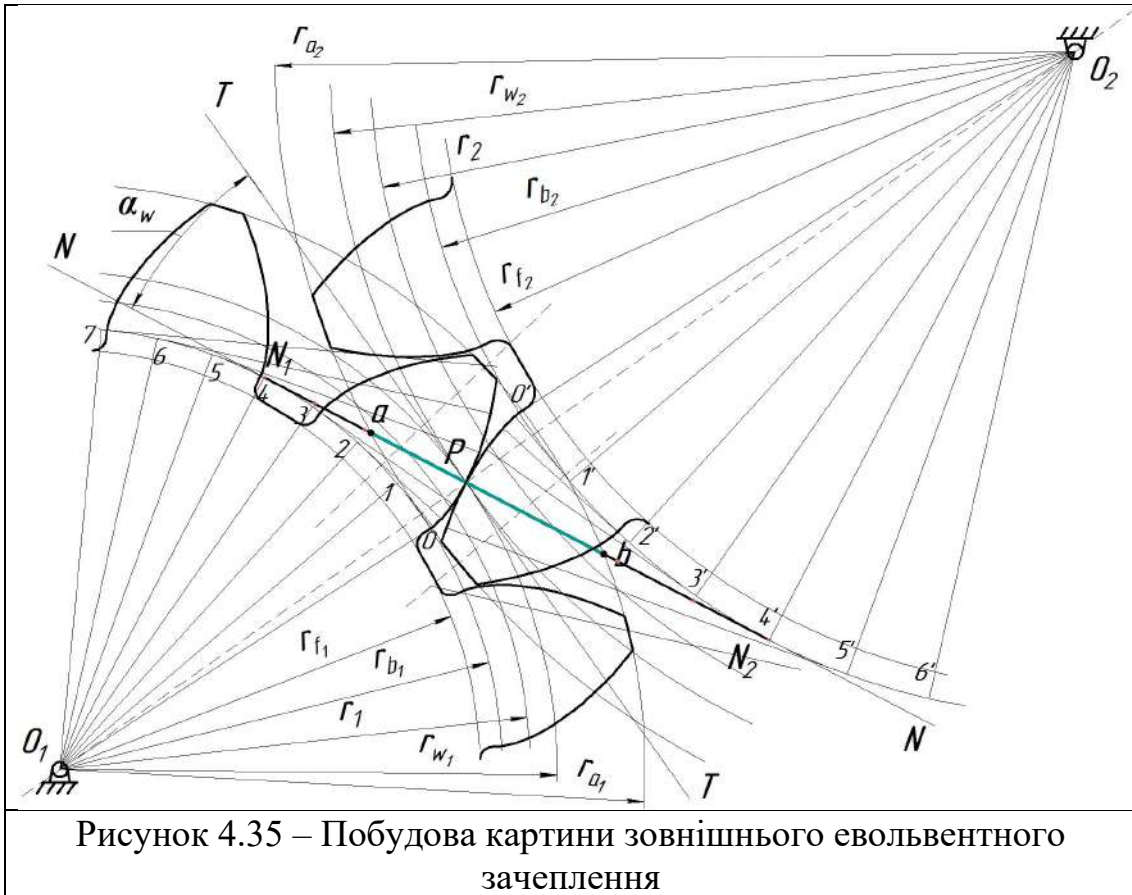


Рисунок 4.35 – Побудова картини зовнішнього евольвентного зачеплення

Точки перетинання кіл вершин з теоретичною лінією зачеплення дадуть відрізок  $ab$  – практичну лінію зачеплення (рис.4.35).

Визначаємо робочі ділянки профілів (рис. 4.36). Радіусом, який дорівнює відрізку  $O_1a$ , з центру  $O_1$  проводимо дугу до перетину з боковим профілем зуба. Точка перетину є кінцем робочої ділянки профілю зуба малого колеса. Робоча ділянка виділена чорно-білим кольором (штрихуванням). Аналогічно визначається робоча ділянка для іншого колеса.

Визначаємо коефіцієнт перекриття (рис.4.37).  $p_w$  – крок зачеплення за початковим колом. Визначаємо дугу зачеплення.

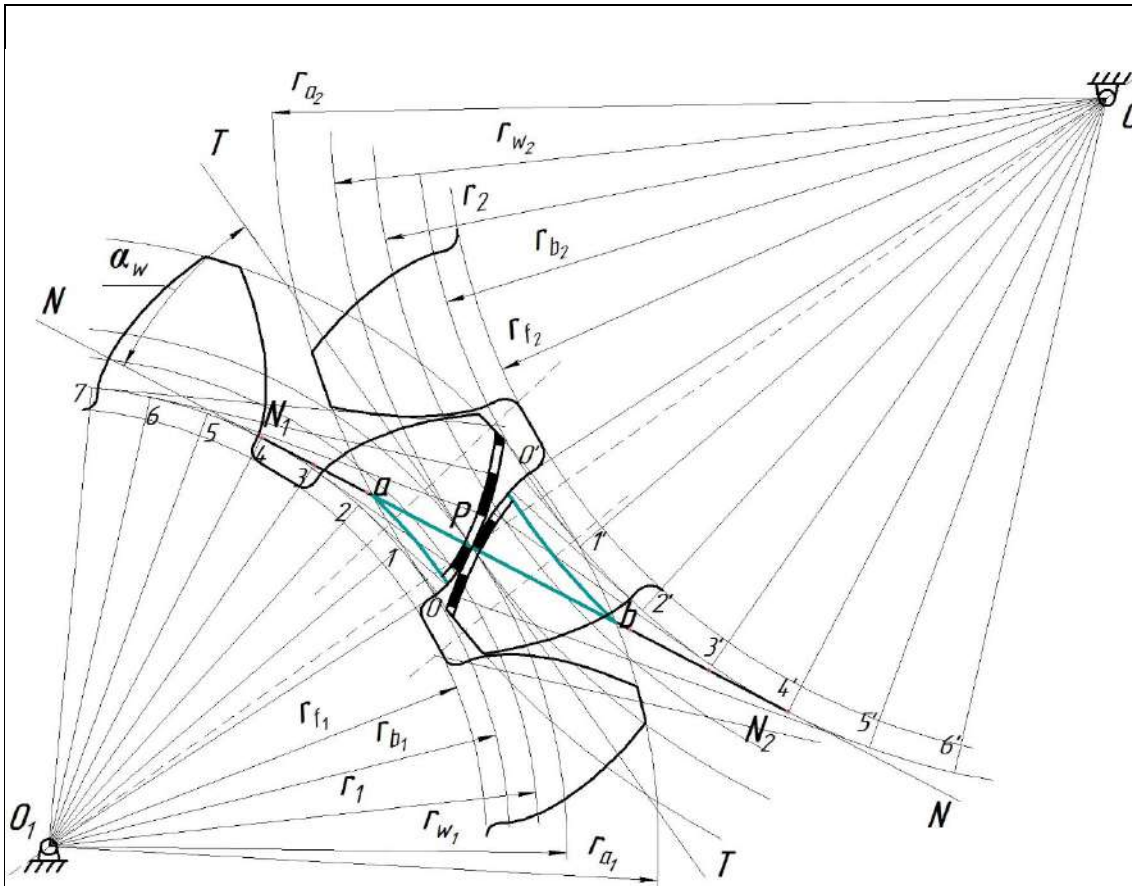


Рисунок 4.36 – Побудова картини зовнішнього евольвентного зачеплення

Зображуємо бічний профіль зуба (показаний штриховими лініями) на початку і в кінці практичної лінії зачеплення, тобто проходить через точки *a* і *b*. Дуга *dd'* початкової окружності, відтята бічним профілем, є дугою зачеплення.

Використовуючи дугу зачеплення, визначаємо коефіцієнт перекриття за формулою

$$\varepsilon'_\alpha = \frac{dd'}{P_w}, \quad (4.34)$$

$$\varepsilon'_\alpha = \frac{169,84}{149,36} = 1,137.$$

Порівнюємо результати розрахунків коефіцієнта перекриття  $\varepsilon_\alpha$

$$\Delta = \left| \frac{\varepsilon'_\alpha - \varepsilon_\alpha}{\varepsilon_\alpha} \right|, \quad (4.35)$$

$$\Delta = \frac{1,137 - 1,14}{1,14} \cdot 100\% = 0,2\%.$$

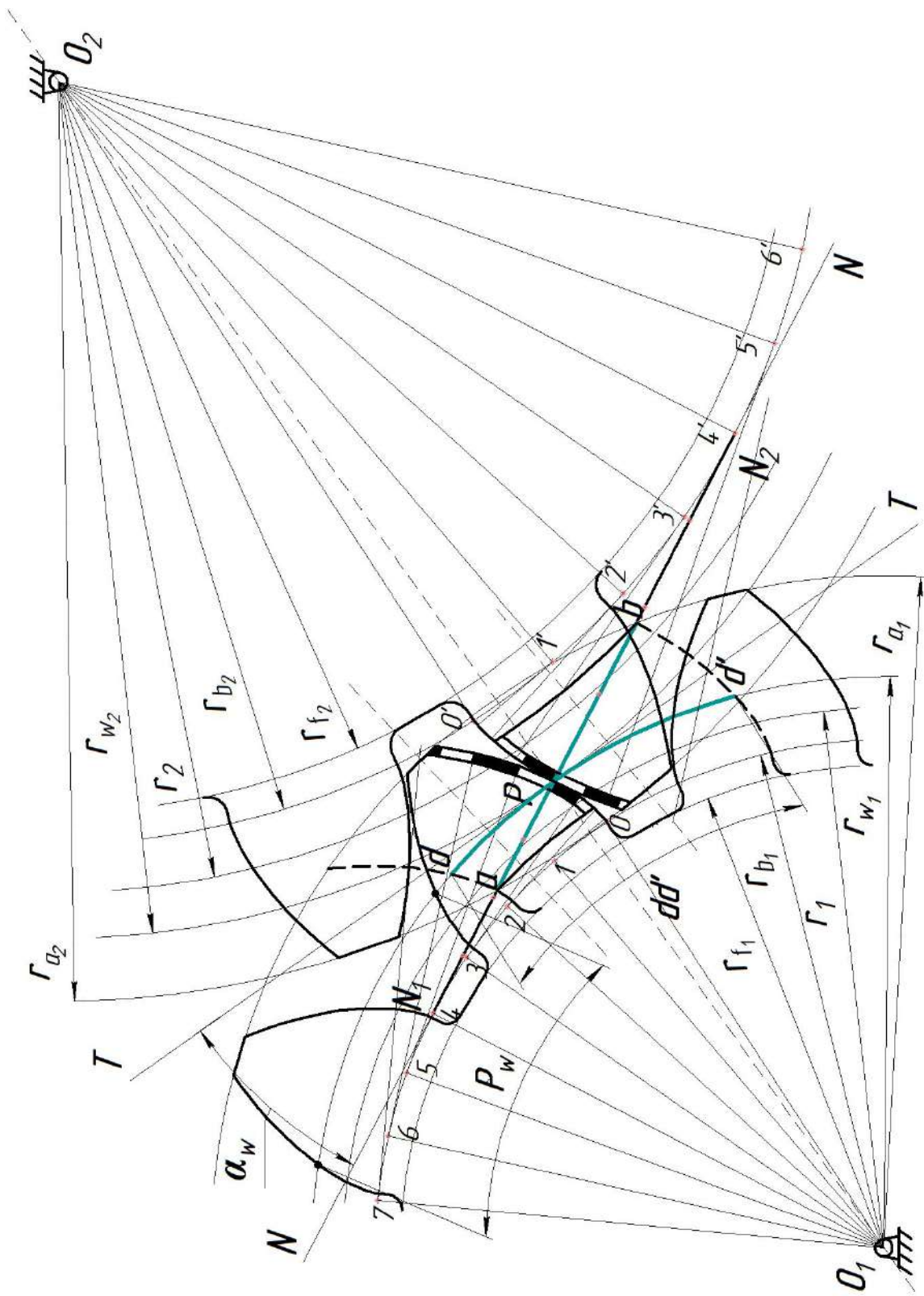
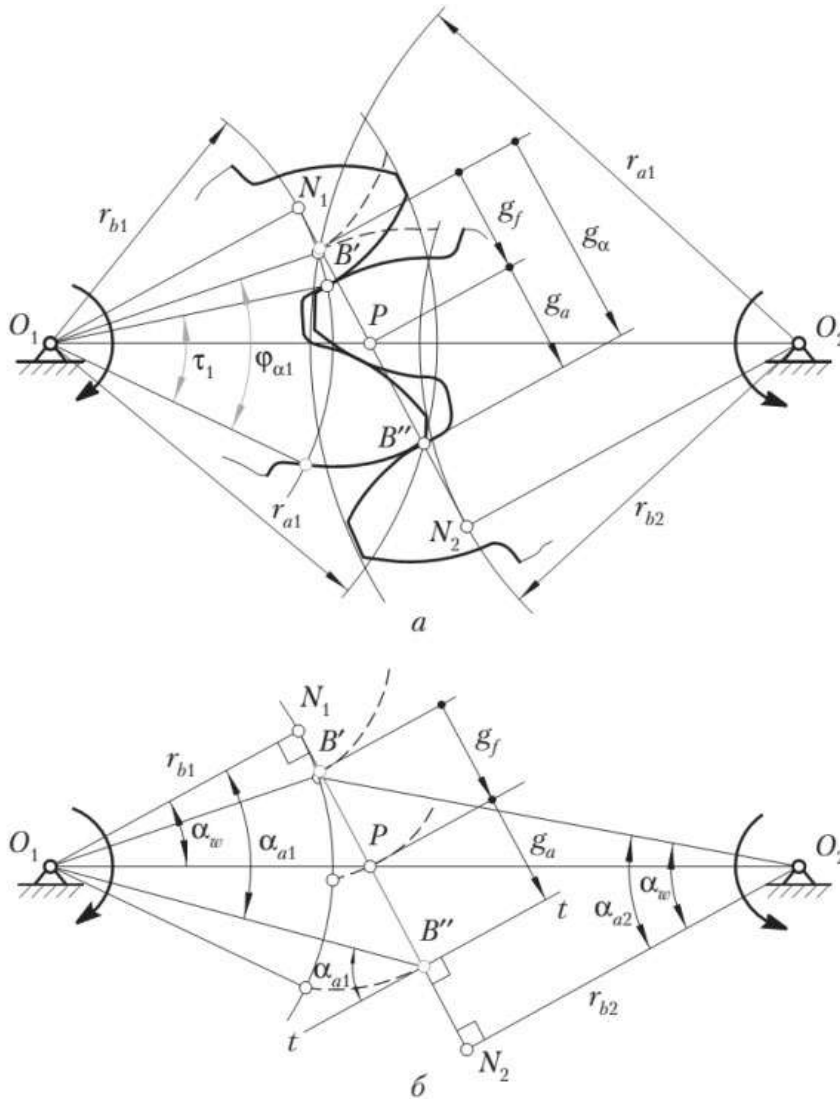


Рисунок 4.37 – Побудова картини зовнішнього евольвентного зачеплення

#### 4.8. Визначення геометричних якісних показників передачі.

**Коефіцієнт перекриття.** Розглянемо якісні показники, які дають можливість оцінити передачу відносно плавності і безшумності



зачеплення, можливого зносу і міцності зубів, а також порівняти ряд передач по тих же показниках. Така оцінка важлива для раціонального призначення розрахункових коефіцієнтів зміщення при проектуванні зубчастих передач.

Якісними показниками зачеплення є коефіцієнти перекриття  $\epsilon_a$ , відносного ковзання  $\lambda$  і питомого

тиску  $\vartheta$ .

Рисунок 4.38 – Коефіцієнт перекриття  $\epsilon_a$

Коефіцієнт перекриття враховує безперервність і плавність зачеплення в передачі. Такі якості передачі забезпечуються перекриттям роботи однієї пари зубців роботою іншої пари. Для цього кожна наступна пара зубців повинна увійти до зачеплення ще до того, як попередня пара вийде із зачеплення. Про величину перекриття судять по коефіцієнту перекриття, який показується відношенням кута торцевого перекриття до кутового кроку. Кут торцевого перекриття  $\varphi_a$  - це кут повороту колеса від положення зубців при вході в зачеплення, коли вони торкаються в точці  $B'$ , до положення зубців при виході із

зачеплення, коли вони торкаються в точці  $B''$  (рис 4.38, *a*). Отже, коефіцієнт перекриття прямозубій передачі

$$\varepsilon_a = \frac{\varphi_{a_1}}{\tau_1} = \frac{\varphi_{a_2}}{\tau_2} \quad (4.36)$$

Тут  $\tau_1 = 2\pi/z_1$  – кутовий крок;  $\varphi_{a_1} = g_a/r_{b_1}$ , де  $g_a = g_f + g_a$  – довжина активної лінії зачеплення. Вона складається з довжин доплоскої  $g_f$  і заплоскої  $g_a$  частин активної лінії зачеплення (рис. 4.38):

$$g_f = r_{b_2} (tg\alpha_{a_2} - tg\alpha_w) \quad (4.37)$$

$$g_a = r_{b_1} (tg\alpha_{a_1} - tg\alpha_w) \quad (4.38)$$

Підстановка (4.37) і (4.38) в (4.36) з врахуванням  $r = mz/2$  дає формулу для визначення коефіцієнта перекриття прямозубій передачі:

$$\varepsilon_a = \frac{z_1 tg\alpha_{a_1} + z_2 tg\alpha_{a_2} - (z_1 + z_2) tg\alpha_w}{2\pi} \quad (4.33)$$

Якщо при визначенні за формулою (4.33) вийде  $\varepsilon_a < 1$ , то в цьому випадку безперервності процесу зачеплення зубців не буде (коефіцієнт перекриття  $\varepsilon_a$  не має бути менше одиниці, оскільки це призводить до перерв в передачі руху від провідного колеса до веденого і до ударів зубців коліс): одна пара зубців встигне вийти із зачеплення ще до того, як наступна пара зубців увійде до нього. Тому мінімально допустимим значенням  $\varepsilon_a$  є 1,05, яке забезпечує безперервність процесу зачеплення з **5%-м** запасом. При проєктуванні зачеплення коефіцієнт перекриття беруть не менше 1,1.

Важливо відмітити, що коефіцієнт перекриття  $\varepsilon_a$  зменшується при збільшенні коефіцієнтів зміщення  $x_1$  і  $x_2$ . Тому при проєктуванні передачі коефіцієнти зміщення потрібно призначати так, щоб  $\varepsilon_a$  не вийшов би менше 1,05.

Коефіцієнтом перекриття називають відношення довжини дуги  $dd'$  зачеплення до довжини кроку  $p_w$  по початкових колах коліс:

$$\varepsilon_a = \frac{dd'}{p_w}$$

Коефіцієнт перекриття  $\varepsilon_a$  дає можливість визначити число пар профілів зубців, що знаходяться одночасно в зачепленні. Для цього треба скористатися тими цілими позитивними числами, між якими знаходиться числове значення коефіцієнта  $\varepsilon_a$ . Ці цілі числа визначають ті числа пар профілів зубців, які поперемінно беруть участь в зачепленні. Якщо, наприклад,  $\varepsilon_a=1,3$ , тобто  $2 > \varepsilon_a > 1$ , в зачепленні поперемінно знаходяться одна або дві пари профілів:

$2 - 1,3 = 0,7$  – таким чином, 70% часу в зачепленні знаходиться одна пара зубів;

$1,3 - 1 = 0,3$  – таким чином, 30% часу в зачепленні знаходяться дві пари зубів.

Визначаємо погрішність – допускається не більше 5% розбіжності.

Коефіцієнт перекриття  $\varepsilon_a$  дозволяє визначити (при рівномірному обертанні коліс) ті проміжки часу, впродовж яких відбувається зачеплення відповідних чисел пар профілів зубів. Наприклад, якщо  $\varepsilon_a = 1,3$  і час, впродовж якого повз полюс проходить крок зачеплення, рівне  $\tau$ , то проміжки часу  $\tau_1$  і  $\tau_2$  зачеплення одній і двох пар профілів визначаються по формулах:

$$\tau_1 = (2 - \varepsilon_a)\tau = 0,7\tau$$

$$\tau_2 = (\varepsilon_a - 1)\tau = 0,3\tau$$

**Коефіцієнти відносного ковзання.** Оскільки робочі ділянки профілів зубців перекочуються один по одному з ковзанням, то на цих ділянках виникають сили тертя і відбувається процес зношування. Коефіцієнт ковзання враховує вплив геометричних і кінематичних чинників на величину прослизання профілів в процесі зачеплення. Наявність ковзання при одночасному натисненні одного профілю на іншій призводить до зносу профілів. За час одного обороту колеса з меншим числом зубців  $z_1$  друге колесо не завершує повний оберт. Отже, його зуби в  $u_{12}$  разів рідше вступають в контакт, чим зуби першого колеса, і тому менше зношуються. Характеристикою шкідливого впливу ковзання є коефіцієнти  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$  відносного ковзання, які визначаються за формулах:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= 1 + u_{21} - \frac{e}{x} \cdot u_{21} \\ \lambda_2 &= 1 + u_{12} - \frac{e}{e-x} \cdot u_{12} \end{aligned} \right\} \quad (4.34)$$

де  $e = N_1 N_2$  – довжина теоретичної лінії зачеплення, а  $x$  - відстань від точки  $N_1$  торкання теоретичної лінії зачеплення з основним колом першого (меншого) колеса, відлічуване у напрямі до точки  $N_2$ .

В процесі зачеплення точка контакту  $K$  зубців рухається уздовж лінії зачеплення від положення  $B'$  (вхід зубів в зачеплення) до положення  $B''$  (вихід зубців з зачеплення). Звідси витікає, що відстань  $l_k$  (де  $l_k$  – величина алгебраїчна, що виражає відстань від полюса зачеплення  $P$  до поточного положення точки  $K$  контакту пари зубців (рис 4.39);  $l_{P1}$  і  $l_{P2}$  – абсолютні значення довжин відрізків  $PN_1$  і  $PN_2$ )

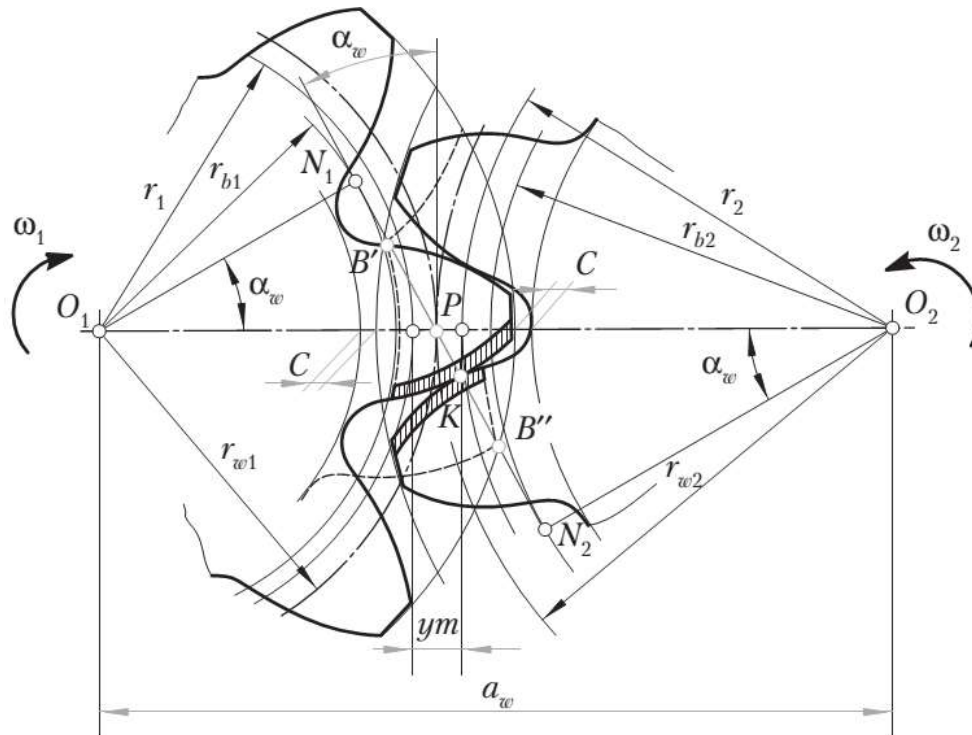


Рисунок 4.39 – Коефіцієнти відносного ковзання  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$

змінюється від значення  $(-B'P)$  до нуля і потім від нуля до значення  $(+B''P)$ . Тому, як витікає з формул (4.34), коефіцієнти ковзання  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$  також змінюються в процесі зачеплення.

Найбільше значення  $\lambda_1$  придбаває в положенні  $B'$ , а  $\lambda_2$  – в положенні  $B''$  (рис. 4.40). Необхідно

знати, що в полюсі зачеплення  $P$  коефіцієнти  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$  дорівнюють нулю. Коефіцієнти ковзання  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$  залежать від коефіцієнтів зміщення  $x_1$  і  $x_2$ . Впливаючи на  $x_1$  і  $x_2$ , конструктор набуває значень коефіцієнтів  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$ , що відповідають умовам експлуатації.

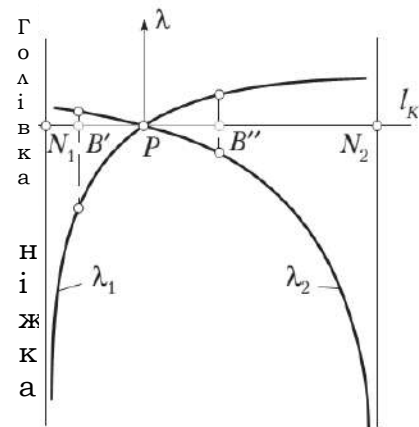


Рисунок 4.40 – Схема максимумів  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$

**Коефіцієнт питомого тиску.** Цей коефіцієнт має значення при розрахунку зубців коліс на контактну міцність (коефіцієнт питомого тиску враховує вплив геометрії зубців (радіусів кривизни їх профілів) на величину контактної напруги, що виникає в місцях зіткнення зубців. При надмірному навантаженні контактна напруга може бути така значна, що викличуть викришування матеріалу на робочій поверхні зубців і визначається за формулою:

$$\vartheta = \frac{m}{\rho_{np}} \quad (4.35)$$

для теперішнього моменту зачеплення зубців (рис. 4.39):

$$\rho_{np} = \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}, \quad (4.36)$$

де  $e=N_1N_2$  - приведений радіус кривизни евольвентних профілів в точці контакту, за допомогою якого визначається вплив геометрії зуба на контактні напруження ( $\rho_1$  і  $\rho_2$  - радіуси кривизни профілів зубів в точці зачеплення К).

Маємо  $\rho_1 + \rho_2 = N_1N_2 = e$ , звідси отримуємо остаточно

$$\vartheta = \frac{me}{\rho_1(e-\rho_1)} \quad (4.37)$$

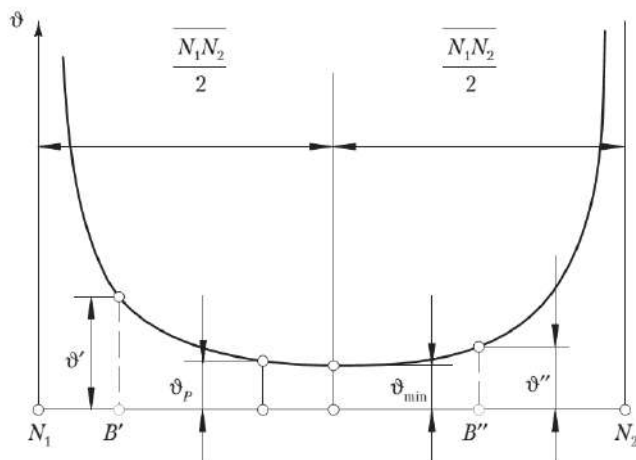
Чи,  $\frac{1}{\rho_{np}} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \rho_2}$  або згідно з властивостями евольвентних профілів  $\frac{1}{\rho_{np}} = \frac{N_1N_2}{N_1K \cdot N_2K}$ .

Коефіцієнтом питомого тиску називається відношення

$$\vartheta = \frac{m}{\rho_{np}} = \frac{mN_1N_2}{N_1K \cdot N_2K} \quad (4.38)$$

Коефіцієнт  $\vartheta$  - величина безрозмірна, не залежна від модуля  $m$ , оскільки  $\rho_{np}$  пропорційний модулю.

Оскільки точка К контакту зубців рухається упродовж лінії зачеплення, відстань  $N_1K$  збільшується, а відстань  $N_2K$  зменшується (рис. 4.39). Тому, як впливає з рівняння (4.38), коефіцієнт питомого тиску  $\vartheta$  змінюється в процесі зачеплення. Графік цієї зміни представлений на рис. 4.32.



Коефіцієнт питомого тиску  $\vartheta$  зменшується при збільшенні коефіцієнтів зміщення  $x_1$  і  $x_2$ . Тому конструктор може знижувати контактну напругу, призначаючи коефіцієнти зміщення  $x_1$  і  $x_2$  так, щоб коефіцієнт  $\vartheta$  мав можливо менше значення. Коефіцієнт  $\vartheta$  має мінімальне значення в

Рисунок 4.41 – Коефіцієнт питомого тиску

середині теоретичної лінії зачеплення  $N_1N_2$ .

При розрахунку зубів па міцність особливо важливе значення має коефіцієнт  $\mathcal{G}_p$  в полюсі зачеплення  $P$ :

$$\mathcal{G} = \frac{m}{\rho_{np}} = \frac{mN_1N_2}{N_1K \cdot N_2K}. \quad (4.39)$$

*Вибір розрахункових коефіцієнтів зміщення для передач зовнішнього зачеплення.* При призначенні коефіцієнтів зміщення  $x_1$  і  $x_2$  для будь-якої передачі мають бути виконані наступні три умови: 1) відсутність підризування; 2) відсутність загострення; 3) безперервність зачеплення. Перша умова стосовно шестерні виконується, якщо її коефіцієнт зміщення  $x_1$  перевершує свій мінімальний рівень  $x_{min}$ . Друга і третя умови обмежують коефіцієнт зміщення  $x_1$  шестерні верхніми межами  $x'_{max1}$  і  $x''_{max1}$ . Ці межі неоднакові, і для розрахунку зубчастої передачі важливий той  $x_{max1}$ , який має менше значення. Таким чином, коефіцієнт зміщення  $x_1$  шестерні потрібно призначати так, щоб дотримувалося співвідношення  $x_{min1} < x_1 \leq x_{max1}$ . Те ж саме слід сказати і об коефіцієнті зміщення  $x_2$  колеса,  $x_{min2} < x_2 \leq x_{max2}$ .

У середині вказаних меж коефіцієнти зміщення  $x_1$  і  $x_2$  потрібно призначати так, щоб залежні від них якісні показники передачі, властивості (плавність ходу, зносостійкість, міцність), що характеризують її, мали б оптимальне значення. При цьому потрібно враховувати конкретні умови роботи передачі: швидкохідність, характер навантаження, наявність або відсутність закритої масляної ванни, матеріали шестерні і колеса і вид їх термообробки та ін.

#### **4.9. Властивості евольвентного зачеплення.**

Перерахуємо (без доказу) найбільш важливі властивості евольвентного зовнішнього зачеплення (рис. 4.42):

1) *дві евольвенти при міжосьовій відстані завжди взаємні пов'язані, тобто забезпечують передачу обертання з постійним передавальним відношенням, рівним*

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_{b2}}{r_{b1}} = const; \quad (4.40)$$

2) з (4.40) витікає, що кінематика евольвентного зачеплення нечутлива до погрешності міжосьової відстані; відмітимо, що таку властивість має тільки евольвентне зачеплення;

3) *контактна точка  $Y$  в процесі зачеплення переміщається по деякій траєкторії, яку називають лінією зачеплення (можна також сказати, що лінія зачеплення є геометричним місцем контактних точок); у евольвентному зачепленні такою лінією є пряма  $N_1N_2$ ,*

дотична до обох основних кіл, вона ж у будь-який момент зачеплення є і контактною нормаллю;

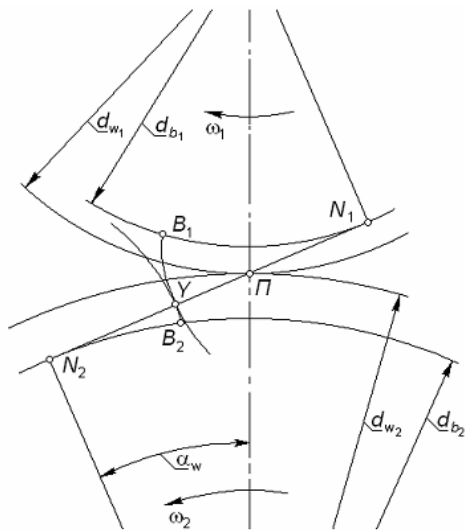


Рисунок 4.42 – Схема зовнішнього евольвентного зачеплення

яким би він не був, кут зачеплення  $\alpha_w$  буде, очевидно, таким самим, тобто  $\alpha_w = \alpha_p$ .

4) кут  $\alpha_w$  між міжосьовою лінією і напрямом дотичної до профілів в контактній точці  $Y$  називають кутом зачеплення; у евольвентному зачепленні кут  $\alpha_w = \text{const}$  (ніяке інше зачеплення не має властивості постійності кута  $\alpha_w$ ); кут зачеплення пов'язаний з міжосьовою відстанню формулою

$$\alpha_w = \arccos \frac{r_{b1} + r_{b2}}{a_w}; \quad (4.41)$$

5) в зубчасто-рейковому евольвентному зачепленні (рис. 4.43) рейка має прямолінійний профіль; при цьому кут профілю рейки  $\alpha_p$  може бути будь-яким, але

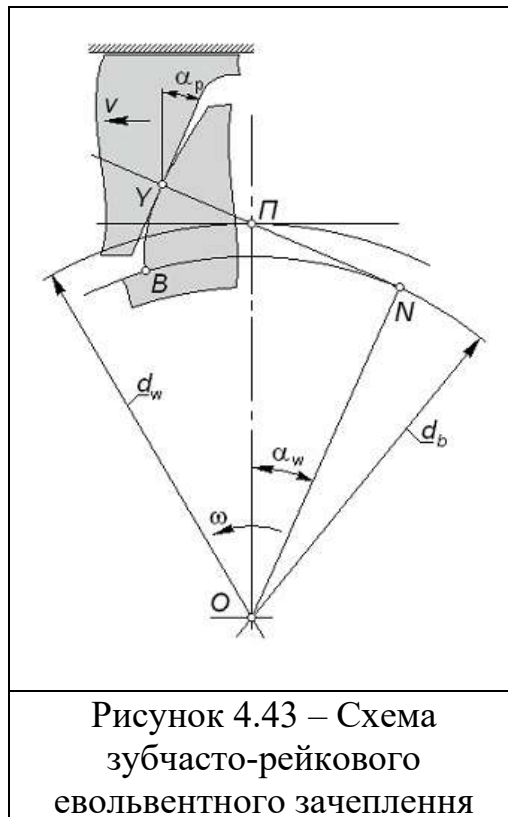
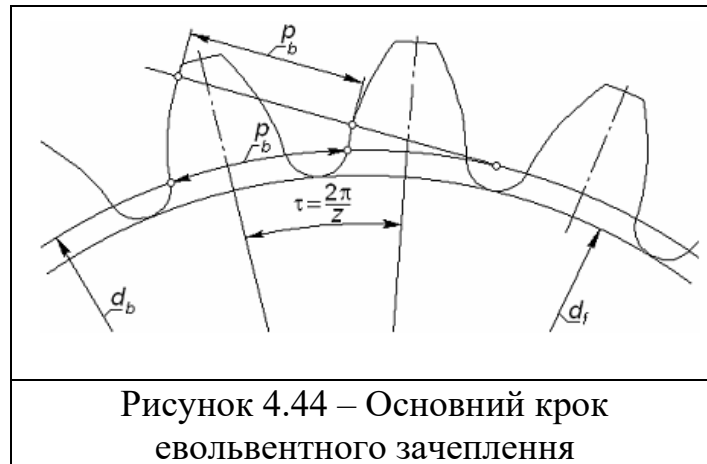


Рисунок 4.43 – Схема зубчасто-рейкового евольвентного зачеплення

Відмітимо, що зв'язаність такого зачеплення покладена в основу геометрії і кінематики процесу нарізування евольвентних зубців інструментом рейкового типу з прямолінійним профілем зуба; якщо інструментальна рейка переміщається уздовж своєї початкової прямої із швидкістю  $v$ , а нарізуване колесо обертається з кутовою швидкістю  $\omega$ , то в процесі такого верстатного зачеплення буде сформована евольвента кола діаметру;



б) важливим параметром евольвентного колеса є основний крок - відстань  $p_b$  між сусідніми однойменними евольвентними профілями зубів по дузі основного кола. Величину  $p_b$  можна також виміряти, як відстань між цими ж евольвентами по будь-якій прямій, дотичній до основного кола, тобто по нормалі до обох евольвент (рис. 4.44); очевидно, що два евольвентних колеса (як і евольвентне колесо з рейкою) можуть утворити зубчасту пару тільки при рівних основних кроках.

### **Контрольні питання**

1. Кінематика зубчастих механізмів з нерухомими осями коліс.
2. Коробка швидкостей. Редуктор. Мультиплікатор.
3. Багатоланкові зубчасті механізми з рухомими осями коліс (планетарні, диференціальні).
4. Ступінь рухомості зубчастих механізмів.
5. Формула Вілліса.
6. Зовнішнє циліндричне евольвентне зачеплення.
7. Основна теорема теорії плоского зачеплення.
8. Властивості евольвенти.
9. Загальні властивості зовнішнього циліндричного евольвентного зачеплення.

10. Загальні відомості про рейкове зачеплення. Види зубчастих коліс.
11. Способи виготовлення зубчастих коліс.
12. Вихідна рейка.
13. Мета коригування зубчастих коліс.
14. Що таке відносне і абсолютне зміщення інструменту.
15. Основні параметрами зубчастого колеса.
16. Основні геометричні розміри зубчастого колеса, яке виготовляється рейковим інструментом.
17. Модуль зачеплення.
18. Методика побудови евольвенти.
19. Основні залежності зовнішнього евольвентного циліндричного зачеплення.
20. Інвалюта кута зачеплення.
21. Якісні показники зубчастого зачеплення.
22. Побудова картини зовнішнього евольвентного зачеплення.
23. Явище підрізування евольвентного профілю зуба.
24. Найменше число зубців на колесі.
25. Як визначаються робочі ділянки профілів зубів.
26. Коефіцієнт перекриття.
27. Вибір раціональних коефіцієнтів зміщення.
28. Як залежить товщина зуба колеса по ділильному колу від абсолютного зміщення.
29. Чим відрізняється геометрія зуба коригованого колеса від нульового.

## **ЛЕКЦІЯ 5. КІНЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ І СИНТЕЗ КУЛАЧКОВИХ МЕХАНІЗМІВ.**

### **ПЛАН**

- 5.1. Загальні відомості.
- 5.2. Класифікація кулачкових механізмів.
- 5.3. Основні параметри кулачкового механізму. Закон руху вихідної ланки.
- 5.4. Кут тиску і його вплив на працездатність механізму.
- 5.5. Побудова кінематичних діаграм штовхача.
- 5.6. Визначення мінімального радіусу кулачка.
- 5.7. Побудова профілю кулачка.

### **5.1. Загальні відомості.**

Кулачкові механізми містять хоч би одну вищу кінематичну пару і складаються з кулачка, штовхача і стійки. Міра рухливості такого

механізму дорівнює одиниці. Розрахунок ведеться за формулою Чебишева. Вища кінематична пара – кулачок з штовхачем – дворухливою парою четвертого класу.

*Кулачкові механізми, подібно до інших механізмів, служать для перетворення одного виду руху (на вході), що змінюється за певним законом, в інший вид руху (на виході) іншого закону з одночасним перетворенням передавальних силових параметрів (сил, моментів).*

Перевагою кулачкових механізмів є володіння деякими важливими властивостями, яких немає у розглянутих раніше важільних механізмів. З їх допомогою можна легко отримувати уривчасті рухи веденої ланки, тобто його рух із зупинками, і практично будь-який закон руху штовхача за допомогою кулачка. Різновид кулачкових механізмів в залежності від характеру руху кулачка, взаємного розташування кулачка і вихідної ланки, геометричних форм елемента, що належить вихідній ланці.

Кінематичний ланцюг простого кулачкового механізму складається з двох рухливих ланок (кулачка і штовхача), що утворюють вищу кінематичну пару, і стійкі, з якою кожна з цих ланок входить в нижчу кінематичну пару.

Провідною ланкою механізму зазвичай є кулачок, який в більшості випадків здійснює безперервний обертальний рух. Кулачок володіє складним профілем (бічна поверхня), форма якого залежить від заданої схеми механізму і закону руху веденої ланки.

Кулачкові механізми широко використовуються в самих різних машинах, де вимагається автоматично виконувати узгоджені рухи вихідних ланок: в металорізальних верстатах, в автоматах і автоматичних лініях, для приводу клапанів двигунів і інших енергетичних машин; у багатьох приладах і апаратах. Кулачкові механізми, як правило, використовуються в машинах автоматичної або напіваавтоматичної дії і забезпечують функції «жорсткого» управління виконуваного процесу. До недоліків слід віднести складність виготовлення профілю кулачка. Проте основний недолік кулачкових механізмів – можливість появи великої контактної напруги (чи питомого тиску в точці контакту кулачка зі штовхачем) у вищій парі - не дозволяє застосовувати їх в головних кінематичних ланцюгах для передачі великої потужності. Тому кулачкові механізми, як правило, використовують у допоміжних ланцюгах, що виконують функції управління, де потужності, які передаються, невеликі.

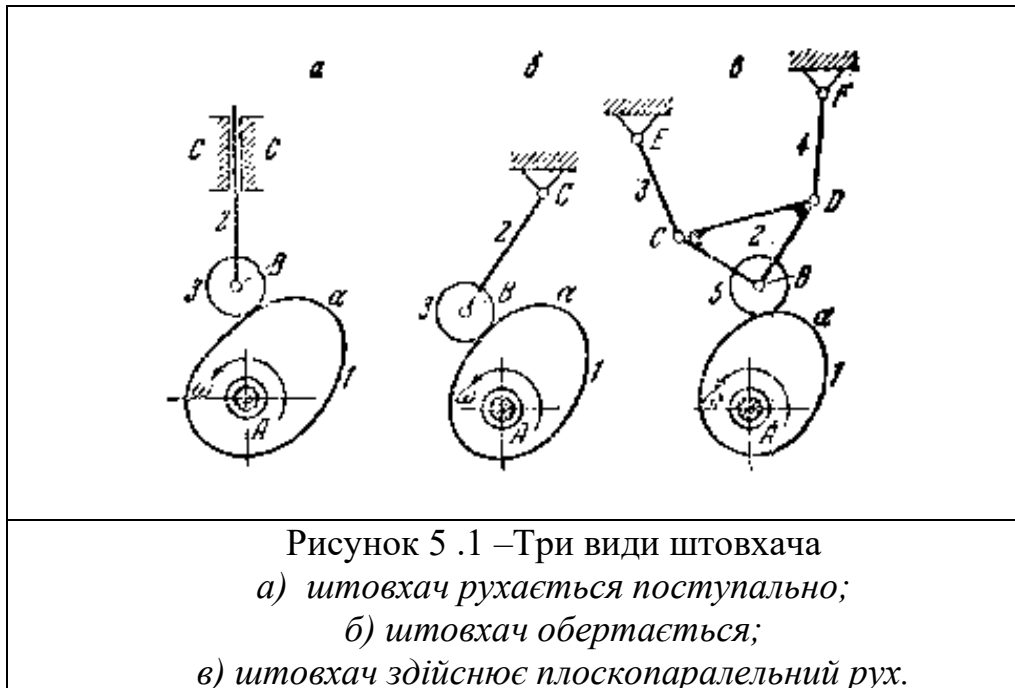
## **5.2. Класифікація кулачкових механізмів.**

Ведена ланка, звана штовхачем, залежно від здійснюваного руху, відносно стійки, діляться на три види:

1) *штовхач рухається поступово*: кулачок *1*, обертається навколо осі *A* із заданою кутовою швидкістю  $\omega$ . Діючи на ролик *3*, що вільно обертається навколо осі, кулачок *1* змушує штовхач *2* рухатися поступово в напрямних *C - C*. Крива *a* - профіль кулачка (рис. 5.1 *a*).

2) *штовхач рухається обертається*: на рис. 5.1 *б* показаний другий вид кулачкового механізму. Кулачок *1* обертається із заданою кутовою швидкістю  $\omega$ . Діючи на ролик *3*, кулачок *1* примушує штовхач *2* обертатися навколо осі *C*. Штовхач *2*, що обертається навколо нерухомої осі, носить назву коромисла.

3) *штовхач здійснює плоскопаралельний рух*: На рис. 5.1 *в* показаний третій вид кулачкового механізму. Кулачок *1* обертається навколо осі з кутовою швидкістю  $\omega$ . Діючи на ролик *5*, кулачок *1* примушує штовхач *2* здійснювати плоскопаралельний рух (штовхач *2*, називається шатуном), в той час, як ланки *3* і *4* обертаються відповідно навколо осей *E* і *F*.



Найбільшого поширення набули кулачкові механізми з роликівим штовхачем що рухається прямолінійно (рис. 5.2, в) і з коромислом роликівим штовхачем (рис. 5.2, д).

На рис. 4.2 приведені приклади кулачкових механізмів. Кулачок *1* утворює вищу кінематичну пару з штовхачем *2* (рис. 4.2 *a, б, и, г, е*) або з роликом *4*, шарнірно встановленим на штовхачі (рис. 2, *в, д, ж, е, з, и*). Контакт ланок може бути лінійним або точковим.

Класифікація за способом замикання елементів вищої пари: силове і геометричне замикання. Постійне з'єднання елементів вищої кінематичної пари здійснюється, як правило, під дією пружини (силове

замикання). У деяких механізмах на куркульці виконують паз (рис. 4.2, з, и), усередині якого переміщається ролик штовхача (геометричне замикання); такі кулачки складніше виготовити, вони мають великі габарити.

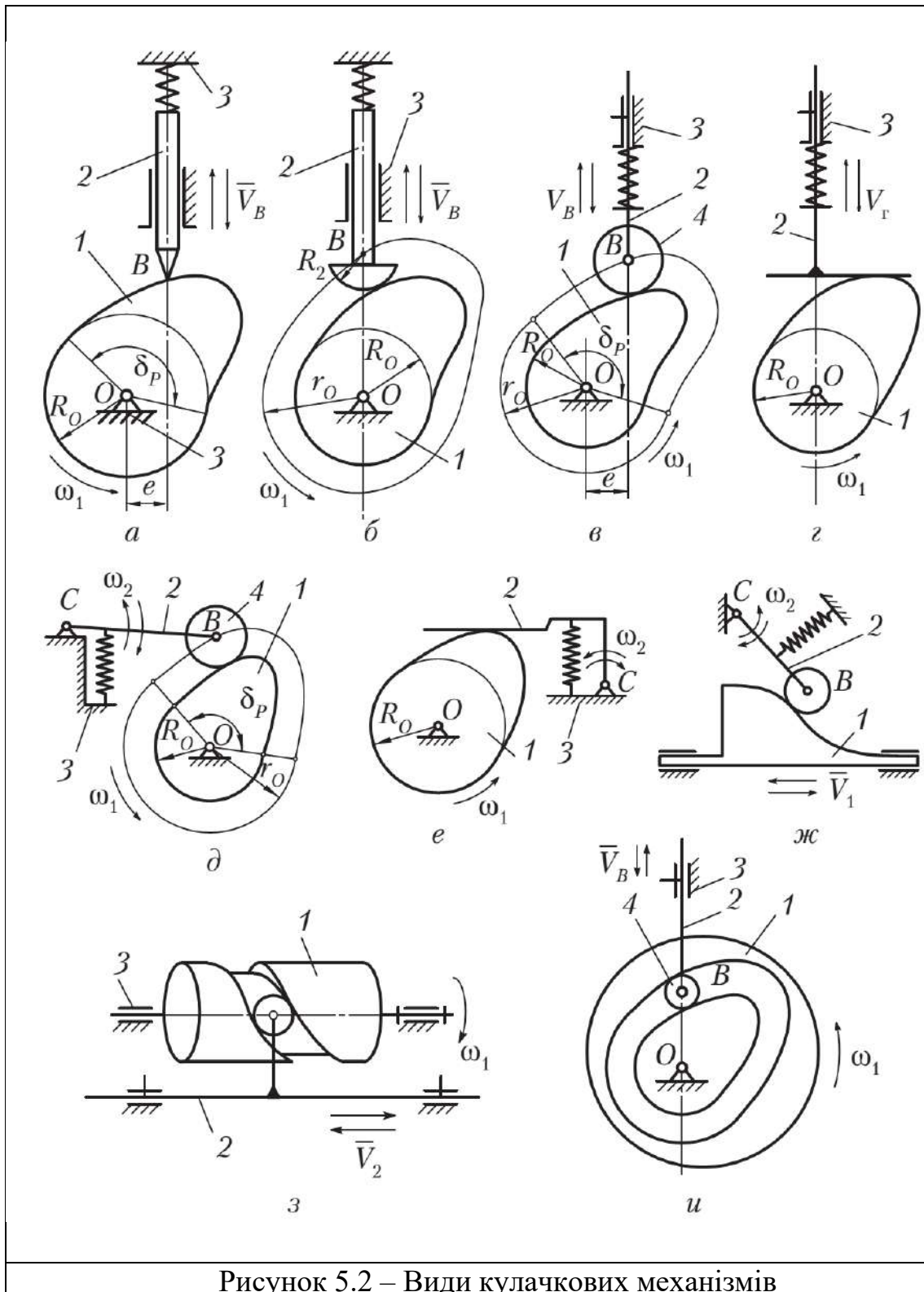


Рисунок 5.2 – Види кулачкових механізмів

Класифікація по характеру руху кулачка: обертальний, зворотно-поступовий і гвинтовий рух. Зазвичай кулачок здійснює обертальний рух, який перетвориться в зворотно-поступовий прямолінійний або в зворотно-обертальний рух штовхача. У деяких механізмах кулачок здійснює зворотно-поступовий рух (рис. 5.2, *ж*). У плоских кулачкових механізмах, як правило, застосовуються дискові куркульки (рис. 5.2, *а* - *е*, *и*), в просторових – циліндричні (рис. 5.2, *з*), конічні, сферичні, глобоїдальні.

Класифікація за формою робочої поверхні штовхача:

- тарілчасті;
- загострені;
- роликові;
- грибоподібні.

Для зниження зносу елементів вищої кінематичної пари і для зменшення втрат на тертя замість загострених штовхачів (рис. 5.2, *а*) застосовують штовхачі із закругленим кінцем (рис. 5.2, *б*), плоскі (рис. 5.2, *е*) або роликові (рис. 5.2, *в*, *д*, *же*, *з*, *и*).

У плоских механізмах зі штовхачем, що прямолінійно рухається, останній може бути центральним (рис. 5.2, *г*, *и*) або позавісним (рис. 5.2, *а*, *в*).

*Поняття теоретичного профілю кулачка.* При кінематичному дослідженні і проектуванні механізмів з роликовим або закругленим штовхачем вводять поняття теоретичного профілю кулачка (на рис. 5.2 *б*, *и*, *в*, *д* він показаний тонкою лінією). Теоретичний профіль проходить через центр *В* ролику або закруглення і еквідистантен (еквідистантна пряма до теоретичного профілю) конструктивному профілю кулачка. Це дає можливість умовно виключити ролик із складу механізму або ліквідувати закруглення штовхача і розглядати точку як точку, що знаходиться на кінці штовхача і безпосередньо контактує з теоретичним профілем, що замінив конструктивний. В результаті схема механізму спрощується. Наприклад, замість схеми на рис. 5.2, *в* розглядають схему, яка показана на рис. 5.2, *а*. Такий перехід від конструктивного профілю кулачка до теоретичного допустимий, оскільки не змінюється закон руху штовхача.

### **5.3. Основні параметри кулачкового механізму. Закон руху вихідної ланки.**

Більшість кулачкових механізмів відносяться до циклових механізмів з періодом циклу рівним  $2\pi$ . В циклі руху штовхач в загальному випадку можна виділити чотири фази: видалення, дальнього відстою, наближення і ближнього відстою.

Згідно з цим, кути повороту кулачка або фазові кути діляться на:

- $\varphi_{від}$  – кут видалення;
- $\varphi_{д.в.}$  – кут дальнього відстою;
- $\varphi_n$  – кут наближення;
- $\varphi_{б.в.}$  – кут ближнього відстою.

Розглянемо кулачковий механізм (рис. 5.3) з центральним штовхачем, що рухається поступально. Лінія руху штовхача в такому механізмі проходить через вісь обертання кулачка. Розрізняють елементи кулачка:

1. Основне коло, обкреслене найменшим радіусом  $r_o$ .

2. Профіль видалення – ділянка  $av$  із зростаючими радіусами-векторами. Кут повороту кулачка, що відповідає проходженню цього кулачка під вістрям штовхача, називається кутом видалення і позначається  $\varphi_{від}$ . Штовхач за цей час піднімається з крайнього нижнього положення в крайнє верхнє положення і проходить шлях  $h$ , званий ходом штовхача.

3. Профіль дальнього відстою – ділянка  $bc$ , обкреслена максимальним радіусом  $r_{max}$ . Йому відповідає кут повороту кулачка  $\varphi_{д.в.}$ , званий кут дальнього відстою. Штовхач в цей час залишається нерухомим в крайньому верхньому положенні.

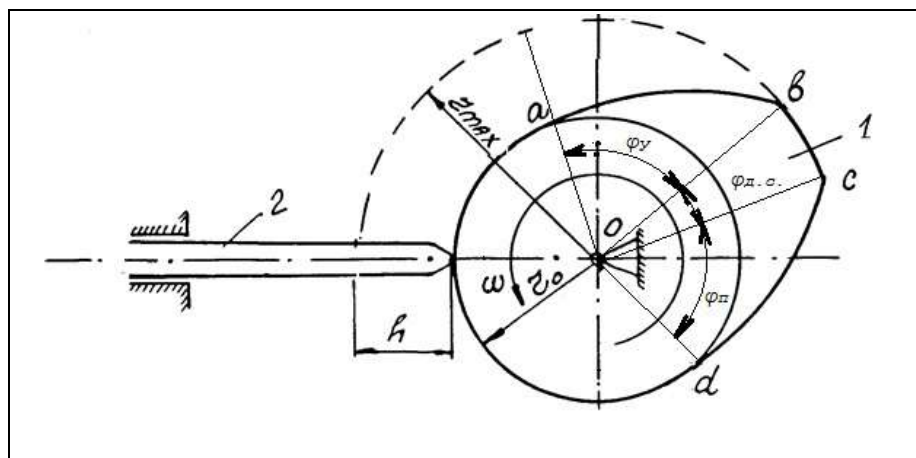


Рисунок 5.3 – Параметри кулачкового механізму

4. Профіль наближення – ділянка  $cd$  з радіусами-векторами, що зменшуються. При проходженні під вістрям штовхача цієї ділянки, штовхач опускається з крайнього верхнього в крайнє нижнє положення, а кулачок обертається на кут наближення  $\varphi_n$ .

5. Профіль ближнього відстою – ділянка  $da$ , обкреслена найменшим радіусом  $r_o$ . Під час проходження цієї ділянки під вістрям штовхача останній залишається нерухомим в крайньому нижньому положенні. Кут повороту кулачка, що відповідає цій ділянці профілю, називається кутом ближнього відстою і позначається  $\varphi_{б.в.}$ .

6. Профіль кулачка, обкреслений кривими  $av$ ,  $bc$  і  $cd$  називається робочим профілем, а сума кутів повороту кулачка, що відповідають цьому профілю, зветься робочим кутом, тобто:

$$\varphi_{роб} = \varphi_{від} + \varphi_{д.в} + \varphi_{наб}.$$

Теоретично кулачковими механізмами можна здійснювати самі різні закони руху, але на практиці користуються тільки тими, які забезпечують простішу технологію обробки профілю кулачка і задовольняють кінематичним і динамічним вимогам до кулачкового механізму. Розгляд цих законів вестимемо для чотирьох характерних фаз руху вихідної ланки: фази віддалення  $\varphi_{від}$  (підйому), фази верхнього відстою  $\varphi_{в.в.}$ , фази наближення  $\varphi_{наб}$ , (опущення), і фази нижнього відстою  $\varphi_{н.в.}$ . Сума цих кутів дорівнює  $2\pi$ . Фази верхнього або нижнього положень в деяких випадках можуть бути відсутніми.

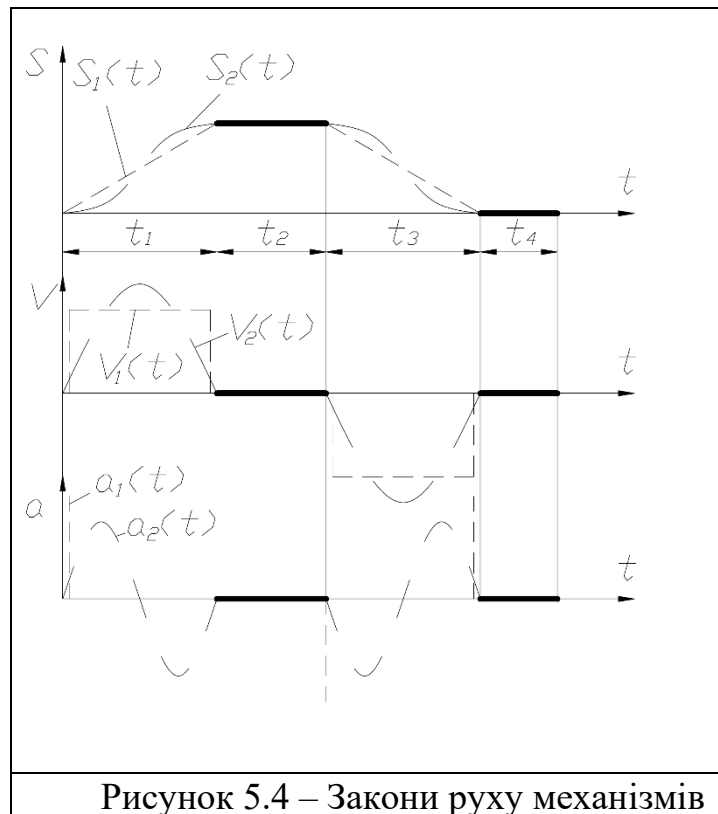


Рисунок 5.4 – Закони руху механізмів

При виборі закону руху штовхача в практиці зазвичай приходиться мати справу з двома випадками: 1) штовхач, як на ділянці підйому, так і на ділянці опускання повинен переміщатися за цілком певними законами (вид кривих **1** і **2** на рис. 5.4 буде цілком визначеним і залежним від робочого органу, який виконує технологічний процес); 2) штовхач на ділянці підйому (опущення) має бути переміщений на задану відстань  $H$  (чи повернут на кут  $\theta$ ); при цьому сам закон переміщення не впливає на технологічний процес і може бути довільним. У останньому випадку при довільному виборі закону руху

треба мати на увазі можливість виникнення ударів в кулачковому механізмі.

Розрізняють три групи законів руху:

- а) з жорсткими ударами (лінійна залежність);
- б) з м'якими ударами (косинусоїдальна залежність);
- в) без ударів (синусоїдальна залежність).

В якості прикладу рухи з жорсткими ударами розглянемо випадок, коли під'їм (чи опущення) штовхача відбувається з постійною швидкістю. На рис. 5.4,  $S_1(t)$  представлена діаграма зміни за часом шляху, швидкості і прискорення штовхача, підйом якого відбувається рівномірно. Для цього закону руху залежності між шляхом і часом буде лінійною. Швидкість штовхача буде постійною увесь час підйому, виключаючи початкові і кінцеві моменти. У початковий момент швидкість миттєво зростає, в кінцевий – миттєво падає до нуля. Прискорення штовхача увесь час підйому буде рівним нулю, виключаючи знову початковий і кінцевий моменти, коли прискорення теоретично буде нескінченно великим. Нескінченно великим прискоренням будуть відповідати і нескінченно великі сили інерції. Рух штовхача, отже, супроводжуватиметься жорсткими ударами.

Нескінченно великі сили, очевидно, повинні руйнувати механізм ще в початковий момент, до того, як почнеться рух.

Практично все ж існують механізми, що працюють за цим законом руху. Пояснюється це тим, що із зростанням сил відбуватиметься деформація ланок, внаслідок чого зміниться характер протікання шляху, а значить, і швидкості штовхача. Тому швидкість в початковий і кінцевий моменти змінюватиметься не миттєво, а лише дуже швидко.

Цей закон руху в чистому вигляді можна застосовувати лише в випадках, коли ланки, що приводяться в рух кулачком, мають малі ваги. На практиці зазвичай цей закон руху застосовують рідко. Частіше застосовують змішаний закон руху, коли швидкість в проміжках часу поблизу початкової і кінцевої точок змінюється плавно, а решта часу залишається постійною.

Прикладом руху, що супроводжується м'якими ударами, може служити рух штовхача, що працює по так званому параболічному кулачку.

В якості прикладу закону руху з відсутністю, коли крива шляху складена з трьох кубічних парабол, що плавно сполучаються між (рис. 5.4  $S_2(t)$ ).

При виборі того або іншого закону руху потрібне знання аналогів швидкостей і прискорень руху вихідної ланки. Зазвичай при проєктуванні кулачкових механізмів задаються аналогами прискорень вихідної ланки. По заданих аналогах прискорень і початковим умовам визначають аналогі швидкостей і закон руху вихідної ланки.

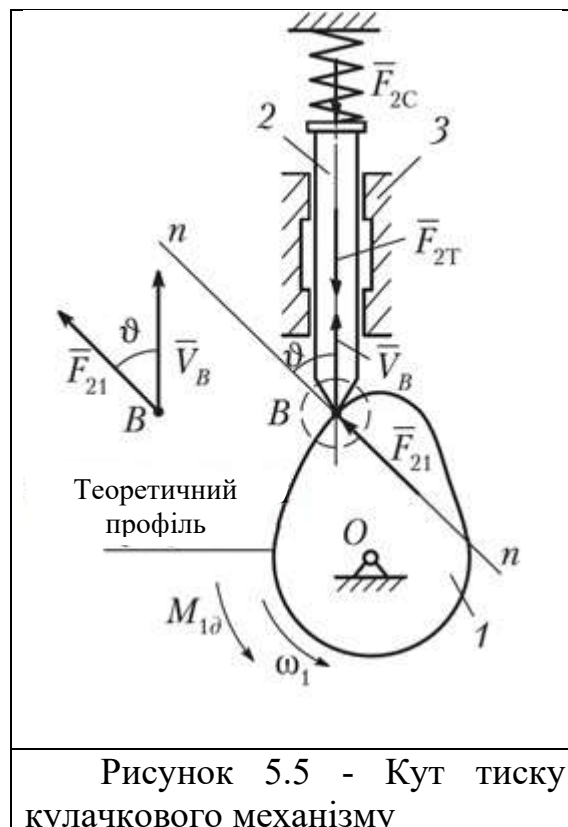
Закони зміни аналогів прискорень на фазі підйому:

а) рівноприскорений (м'які удари), б) синусоїдальним (без жорстких і м'яких ударів), в) косинусоїдальний (рух вихідної ланки відбувається з м'яким ударом на початку і кінці ходу вихідної ланки), г) лінійно-спадний (рух вихідної ланки відбувається з м'яким ударом на початку і кінці ходу вихідної ланки), д) трапецеїдальний (жорсткі і м'які удари відсутні) та ін.

Можливі і інші закони руху вихідної ланки кулачкового механізму. В деяких випадках застосовуються закони рухи, що є комбінацією простих законів. В якості прикладу – трапецеїдальний закон зміни аналога прискорення.

#### 5.4. Кут тиску і його вплив на працездатність механізму.

Розглянемо яким чином кут тиску впливає на працездатність механізму. Відповідно до напрямку руху штовхача – від центру обертання кулачка або до центру – розрізняють чотири фази циклу роботи кулачкового механізму: видалення, дальнього відстою, наближення і ближнього відстою.



Рух штовхача 2 на фазі його видалення відбувається під дією сили, діючої з боку кулачка 1 (рис. 5.5). При цьому штовхач, долаючи силу опору  $\vec{F}_{2O}$  і силу тертя  $\vec{F}_{2T}$  в напрямних стійки, (умовно показані на осі штовхача), переміщається із швидкістю. Сила в механізмі з роликівим

штовхачем спрямована практично по нормалі  $n-n$  до теоретичного профілю кулачка, оскільки тертя кочення в парі кулачок-ролик незначно.

*Кут  $\vartheta$  між вектором сили, діючої з боку провідної ланки на ведену, і вектором швидкості точки веденої ланки, в якій прикладена сила, називається кутом тиску.*

Неспівпадання напрямку рушійної сили  $\bar{F}_{21}$  і напрямлення руху штовхача на фазі його видалення визиває перекіс штовхача в напрямних стійки. Чим більше кут тиску, тим сильніше притиснутий штовхач до напрямних, тим більше тертя в них і їх знос. При цьому збільшення сили тертя  $\bar{F}_{2T}$  викликає необхідність збільшити рушійну силу  $\bar{F}_{21}$ , внаслідок чого зростають згинальні і контактні напруження в ланках механізму. При більшому значенні кута тиску сила тертя  $\bar{F}_{2T}$  настільки збільшується, що штовхач заклинюється в напрямних і залишається нерухомим, скільки великою не була б рушійна сила  $\bar{F}_{21}$  – механізм стає непрацездатним. *Кут тиску, при якому відбувається заклинювання, називається кутом заклинювання.*

У механізмах з коромисловим штовхачем (рис 5.2,  $d, e$ ) збільшення кута тиску на фазі видалення також небажано, а при великих кутах  $\vartheta$  механізм стає недієздатним.

На фазі зближення, коли кулачок не є провідною ланкою і штовхач переміщається від пружини (у механізмах з силовим замиканням), заклинювання не відбувається.

Величина кута тиску  $\vartheta$  змінюється впродовж циклу і залежить від геометричних і кінематичних параметрів кулачкового механізму.

$$tg\vartheta = \frac{V_{qB} \mp e}{\sqrt{r_0^2 - e^2 + s_B}} \quad \text{— формула показує, що при постійному}$$

ексцентриситеті  $e$  і заданих змінах і  $s_B$  зменшення початкового радіусу  $r_0$  викликає збільшення кута тиску (оскільки  $r_0$  в знаменнику). І навпаки, щоб зменшити кут тиску, доводиться збільшувати габарити кулачкового механізму. Взаємозв'язок кута тиску і розмірів в кулачковому механізмі з коромисловим штовхачем аналогічний.

Слід враховувати, що в різних положеннях механізму кут тиску не однаковий. Тому при проектуванні кулачкового механізму зазвичай прагнуть до того, щоб величина цього кута ні в одному з положень не перевершувала деякої величини  $\vartheta_{дон}$ .

Із сказаного вище ясно, наскільки бажано, щоб робота механізму відбувалася з можливо меншими кутами тиску. Проте треба мати на увазі, що зменшення значення  $\vartheta_{дон}$  спричиняє за собою збільшення габаритів кулачкового механізму. Дійсно, якщо при повороті кулачка на кут  $\varphi_1$  штовхач повинен переміститися на відстань  $H$ , то чим менше кулачок, тим крутіше буде його профіль і тим більшим буде кут тиску.

В процесі проектування кулачкового механізму прагнуть зменшити розміри його ланок за рахунок збільшення кута тиску  $\vartheta$ , враховуючи при цьому, що збільшення кута тиску  $\vartheta$  можливо лише до деякої максимальної допустимої межі (допустимого кута тиску  $\vartheta_{дон}$ , що гарантує надійну і довговічну роботу механізму). Таким чином, обов'язковою умовою проектування є виконання нерівності  $\vartheta \leq \vartheta_{дон}$ .

У механізмах з силовим замиканням (рис. 5.2, а – ж) ця умова повинна виконуватися тільки на фазі видалення, коли кулачок є провідною ланкою. У механізмах з геометричним замиканням (рис. 5.2, з, и) обов'язкову умову  $\vartheta \leq \vartheta_{дон}$  необхідно виконувати і на фазі віддалення, і на фазі наближення.

Величина допустимого кута тиску значно менше величини кута заклинювання. Багаторічна практика рекомендує наступні значення  $\vartheta_{дон}$ : для механізмів з роликівим штовхачем  $\vartheta_{дон}=30^\circ \dots 35^\circ$ , що рухається прямолінійно, для механізмів з коромислом штовхачем  $\vartheta_{дон} = 40^\circ \dots 50^\circ$ .

До початкових даних для проектування кулачкових механізмів відноситься також вибір основних розмірів їх ланок. Тут спочатку потрібно відмітити бажаність отримання найменших габаритів механізму, досить високого його ККД, встановлення розмірів для напрямних штовхачів, визначення діаметру ролика або розмірів плоскої тарілки штовхача і коромисла та ін. Основні конструктивні розміри ланок кулачкових механізмів також пов'язані і з розрахунком на міцність цих ланок, зносом профілів елементів вищої кінематичної пари, надійності роботи механізму та ін.

Як завжди, при конкретному проектуванні важко спроектувати кулачковий механізм, який задовольняв би усім необхідним показникам однаковою мірою. Тому в процесі проектування конструктор зазвичай прораховує декілька варіантів схем механізму і вибирає з них оптимальний варіант або прагне, враховуючи технологічне завдання, задовільнити в тій або іншій мірі основним кінематичним, динамічним, конструктивним і технологічним вимогам до раціональної конструкції механізму.

### **5.5. Побудова кінематичних діаграм штовхача.**

При проектуванні кулачкових механізмів використовуються різні методи синтезу.

Якщо відомий мінімальний радіус кулачка  $r_{min}$  і закон його руху, то побудова профілю – завдання кінематичного синтезу. Якщо мінімальний радіус кулачка  $r_{min}$  повинен визначатися з умовою відсутності заклинювання, то побудова профілю – завдання динамічного синтезу.

Основним завданням кінематичного аналізу є визначення

переміщень, швидкостей і прискорень штовхача при заданих схемі механізму і профілі кулачка. Рішення цієї задачі може бути здійснене аналітичними і графічними методами, перший з яких точніший, але складніший, а другий – менш точний, але простий.

Завдання динамічного синтезу полягає в знаходженні центру обертання кулачка, за умови мінімізації розмірів механізму, коли задані: закон руху штовхача і гранично допустимий кут тиску  $\vartheta_{доп}$ . Зрештою завдання полягає у визначенні мінімального радіуса кулачка  $r_{min}$ , після чого може бути вирішене завдання кінематичного синтезу - профілізація.

Задача синтезу кулачкових механізмів складається в побудові профілю кулачкової шайби, який задовольняється потребам технологічного процесу. Для цього задаються: закон руху кулачка в формі  $\varphi = \varphi(t)$  або  $\omega = \omega(t)$ , закон змінення прискорення штовхача, деякі розміри, які дозволяють вибрати серед багатьох рішень одне повністю визначене рішення. Якщо задається допустиме мінімальне значення кута передачі руху  $\gamma_{min}$  виконується рішення задачі «динамічний синтез кулачкового механізму» при якому знаходимо значення мінімального радіуса кулачка  $r_{min}$  що дає мінімальні розміри механізму та є прийнятним з конструктивної точки зору та по відношенню міцності. Закон змінення прискорення штовхача задається в параметричній формі з аргументом у вигляді кута повороту кулачка  $\varphi$ , аргументом якого є час  $t$ . При такому способі завдання закону руху штовхача радіус-вектор кулачка та профіль кулачка будується безпосередньо по куту повороту  $\varphi$ .

У відповідності методиці динамічного синтезу задану діаграму аналогу прискорень  $\frac{d^2S}{d\varphi^2} = f(\varphi)$  необхідно графічно інтегрувати, получивши діаграму аналогу швидкості  $\frac{dS}{d\varphi} = f(\varphi)$ , інтегрувати ще раз, получить діаграму переміщень штовхача  $S = f(\varphi)$ . Якщо кулачок симетричний, кут віддалення дорівнює куту наближення  $\varphi_{від} = \varphi_{наб}$ , на осі абсцис достатньо відкласти тільки кут віддалення та на ньому будувати діаграми. Якщо кулачок асиметричний на осі абсцис необхідно відкладати  $\varphi_{від} + \varphi_{д.в} + \varphi_{наб}$ .

Рекомендовано визначати масштаби кінематичних діаграм по наступним формулам:

- нехай по осі абсцис відкладено відрізок довжиною  $L$ , мм, який представляє кут повороту кулачка  $\varphi_{від}$  переведений в радіанну міру

$$\mu_{\varphi} = \frac{\pi \cdot \varphi_{від}}{180^\circ \cdot l}, \frac{\text{рад}}{\text{мм}} \quad (5.1)$$

- для визначення масштабу діаграми переміщень задано максимальний хід штовхача  $h$  [м], та вимірюємо максимальну ординату переміщень  $Y_{max}$  [мм] на діаграмі

$$\mu_S = \frac{H}{y_{max}}, \frac{\text{м}}{\text{мм}} \quad (5.2)$$

- для визначення масштабу діаграми швидкості використаємо масштаб діаграми переміщень, масштаб діаграми кута повороту кулачка та  $H_2$  – відстань полюсу від точки  $O$  на осі абсцис діаграми

$$\mu_{\frac{dS}{d\varphi}} = \frac{\mu_S}{H_2 \cdot \mu_\varphi}, \frac{1}{\text{мм}} \quad (5.3)$$

- для визначення масштабу діаграми прискорень використаємо масштаб діаграми швидкостей, масштаб діаграми кута повороту кулачка та  $H_1$  – відстань полюсу від точки  $O$  на осі абсцис діаграми

$$\mu_{\frac{d^2S}{d\varphi^2}} = \frac{\mu_{\frac{dS}{d\varphi}}}{H_1 \cdot \mu_\varphi}, \frac{1}{\text{рад} \cdot \text{мм}} \quad (5.4)$$

Мінімальний радіус кулачка визначається за допомогою сумісної діаграми яка будується графічним виключенням параметру  $\varphi$  з двох відомих діаграм:

- для кулачкового механізму з роликівим штовхачем поєднується діаграма переміщень та діаграма аналога швидкості,

- для кулачкового механізму з плоским штовхачем поєднується діаграма переміщень та діаграма аналога прискорень.

В усіх випадках методика побудови аналогічна:

1) В системі координат  $SO$   $\frac{d^2S}{d\varphi^2}$  по осі  $S$  відкладаються ординати  $S_i$ , а по осі  $\frac{d^2S}{d\varphi^2}$  відкладаються значення які визначаються по формулі

$$b_i = y_i'' \cdot \frac{\mu_{\frac{d^2S}{d\varphi^2}}}{\mu_S}, i=1,2,3,\dots,n \quad (5.5)$$

2) По координатам  $(\frac{d^2S}{d\varphi^2})_i$  і  $S_i$  будуються  $n$  точок, з'єднуючи які послідовно плавною кривою, отримуємо діаграму  $S = f(\frac{d^2S}{d\varphi^2})$ .

3) Проводимо під кутом  $\gamma_{min}$  до осі  $\frac{d^2S}{d\varphi^2}$  дотичну лінію до побудованій кривої. Перетинаючи ось  $S$  дотична і ось обмежують деяку

частину площини. Кожна точка, що знаходиться в цій частині може слугувати центром обертання кулачка. Відстань від точки  $S_0$  сумісної діаграми до точки перетину осі  $S$  та дотичної є мінімальним радіусом кулачка в масштабі побудови сумісного графіка.

Для побудови руху штовхача задається залежність аналога прискорень штовхача від кута повороту кулачка у вигляді діаграми (рис.5.6).

1) На осі абсцис відкладаємо відрізок довжиною  $L$  та ділимо його на 8 рівних частин  $0-1, 1-2, 2-3, 3-4, 4-5, 5-6, 6-7, 7-8$ .

2) Інтегруємо цю діаграму у наступній послідовності:

- на осі абсцис відмічаємо точки, що відповідають серединам інтервалів  $0-1, 1-2, 2-3, 3-4, 4-5, 5-6, 6-7, 7-8$ ;

- з них проводимо вертикаль до перетину з графіком і отримуємо точки  $1'', 2'', 3'', 4'', 5'', 6'', 7'', 8''$ ;

- визначаємо ординати графіка. Для цього з цих точок проводимо горизонталь до перетину з віссю ординат;

- на осі абсцис зліва від точки нуль відкладаємо відрізок  $0-H_2$  та цю точку приймаємо за полюс графічного інтегрування  $P_2$ ;

- з'єднуємо полюс  $P_2$  з кожною точкою на осі ординат. Маємо похилі лінії від  $P_2$  до точки на ординаті горизонталі, яка виходить з точки  $1''$ ,  $P_2$  до точки на ординаті горизонталі, яка виходить з точки  $2''$ , ...,  $P_2$  до точки на ординаті горизонталі, яка виходить з точки  $8''$ ;

- на діаграмі аналога швидкості з точки  $0$  проводимо луч паралельно похилій лінії  $P_2$  до точки на ординаті горизонталі, яка виходить з точки  $1''$  до перетину з вертикальною лінією проведеною з точки  $1$  (тобто в інтервалі  $0-1$ ). На перетині маємо першу точку діаграми аналога швидкості ( $1'$ );

- з точки  $1'$  проводимо луч паралельно похилій лінії  $P_2$  до точки на ординаті горизонталі, яка виходить з точки  $2''$  до перетину з вертикальною лінією проведеною з точки  $2$  (тобто в інтервалі  $1-2$ ). На перетині маємо другу точку діаграми аналога швидкості ( $2'$ );

- аналогічно знаходимо положення точок  $3', 4', 5', 6', 7', 8'$ ;

- маємо ломану лінію, яка в графічному вигляді є першим інтегралом заданої залежності з урахуванням масштабу. Через точки  $0, 1', 2', 3', \dots, 8'$  проводимо плавну криву лінію, яка відображує змінення швидкості в залежності від кута обертання кулачка;

3) Аналогічним способом, інтегруючи криву аналога швидкості маємо другу інтегральну криву переміщення штовхача з урахуванням масштабу.

- на осі абсцис відмічаємо точки, що відповідають серединам інтервалів  $0-1, 1-2, 2-3, 3-4, 4-5, 5-6, 6-7, 7-8$ ;

- з них проводимо вертикаль до перетину з графіком і отримуємо точки  $1', 2', 3', 4', 5', 6', 7', 8'$ ;

- визначаємо ординати графіка. Для цього з цих точок проводимо горизонталь до перетину з віссю ординат;

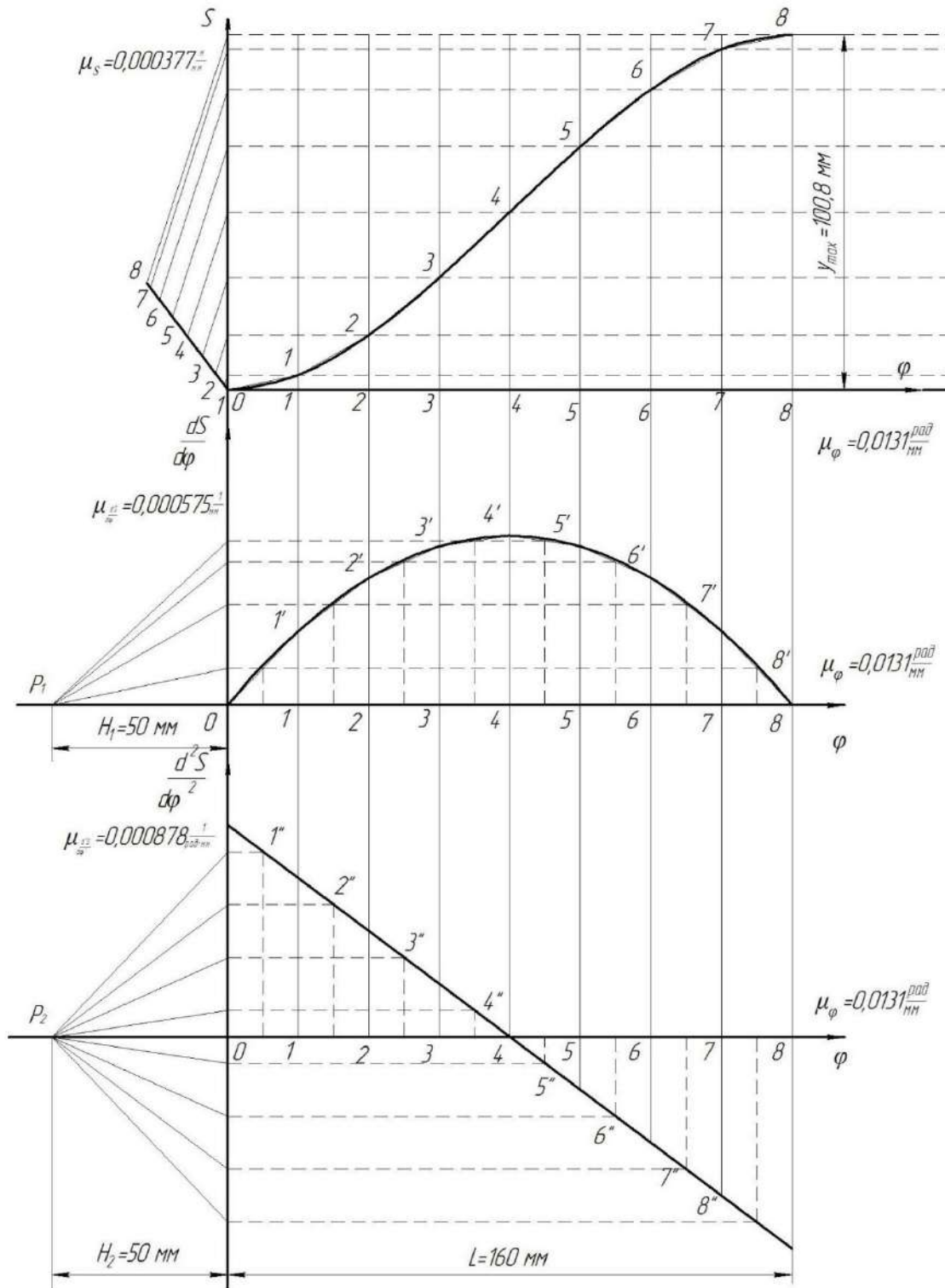


Рисунок – 5.6 Діаграма руху штовхача

- на осі абсцис зліва від точки нуль відкладаємо відрізок  $0-H_1$  та цю точку приймаємо за полюс графічного інтегрування  $P_1$ ;

- з'єднуємо полюс  $P_1$  з кожною точкою на осі ординат. Маємо похилі лінії  $P_1$  до точки на ординаті горизонталі, яка виходить з

точки  $1'$ ,  $P_1$  до точки на ординаті горизонталі, яка виходить з точки  $2'$ , ...,  $P_1$  до точки на ординаті горизонталі, яка виходить з точки  $8'$ ;

- на діаграмі аналога швидкості з точки  $0$  проводимо луч паралельно похилій лінії  $P_1$  до точки на ординаті горизонталі, яка виходить з точки  $1'$  до перетину з вертикальною лінією проведеною з точки  $1$  (тобто в інтервалі 0-1). На перетині маємо першу точку діаграми аналога руху штовхача ( $1$ );

- з точки  $1$  проводимо луч паралельно похилій лінії  $P_1$  до точки на ординаті горизонталі, яка виходить з точки  $2'$  до перетину з вертикальною лінією проведеною з точки  $2$  (тобто в інтервалі 1-2). На перетині маємо другу точку діаграми аналога руху штовхача ( $2$ );

- аналогічно знаходимо положення точок  $3, 4, 5, 6, 7, 8$ ;

- маємо лому лінію, яка в графічному вигляді є першим інтегралом аналога швидкості та другим інтегралом аналога прискорення з урахуванням масштабу. Через точки  $0, 1, 2, 3, \dots, 8$  проводимо плавну криву лінію, яка відображує змінення руху штовхача в залежності від кута обертання кулачка;

4) визначаємо масштаби кінематичних діаграм по формулам (5.1) - (5.4).

### 5.6. Визначення мінімального радіусу кулачка.

Для визначення мінімального радіусу кулачка  $r_{min}$  для механізму з тарілчастим штовхачем, що рухається поступово, необхідно поєднати діаграми переміщень і аналогів прискорень, які мають бути викреслені в єдиному масштабі. Для визначення мінімального радіусу кулачка  $r_{min}$  для механізму з роликівим штовхачем, що рухається поступово, необхідно поєднати діаграми переміщень і аналогів швидкості, які мають бути викреслені в єдиному масштабі.

1.1. Сумісну діаграму для плоского тарілчастого штовхача  $S=f(d^2S/d\varphi^2)$  будуємо в наступній послідовності (рис 5.7):

- графічно виключаємо параметр  $\varphi$  з діаграм  $S=f(\varphi)$  та  $d^2S/d\varphi^2=f(\varphi)$  наступним чином: на осі  $S$  відкладаємо ординати  $S$  діаграми переміщень, на осі  $d^2S/d\varphi^2$  значення абсцис, які визначаємо по формулі

$$x_i = y_i'' \frac{\mu \frac{d^2S}{d\varphi^2}}{\mu_S}$$

де  $y_i''$  – значення  $1, 2, \dots, 8$  ординат діаграми аналога прискорень;

-  $\mu \frac{d^2S}{d\varphi^2}$  – масштаб діаграми аналога прискорень;

Діаграми руху штовхача

Визначення мінімального радіусу кулачка

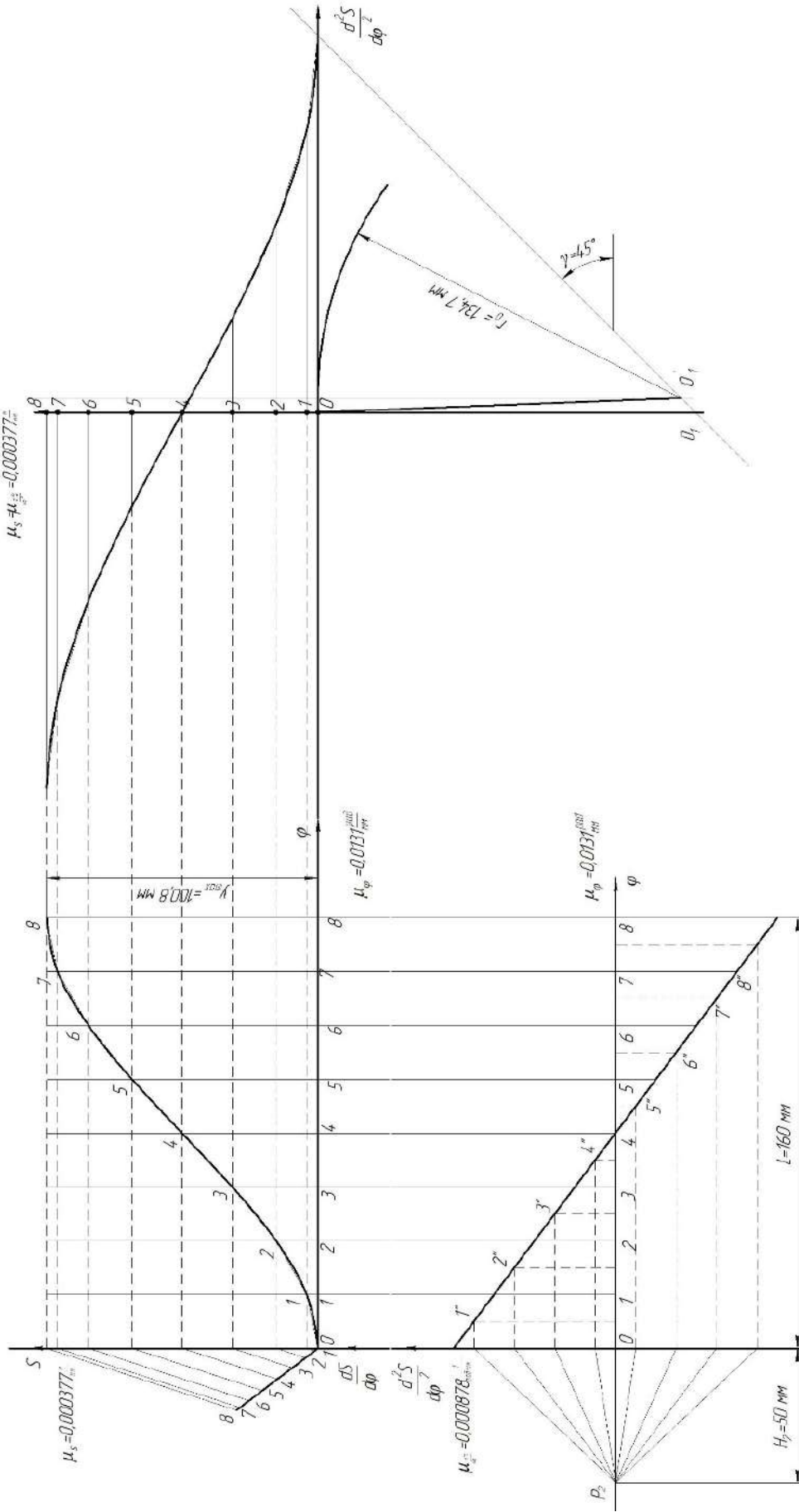


Рисунок 5.7 – Побудова сумісного графіку тарічастого штовхача та визначення мінімального радіусу кулачка

- $\mu_S$  – масштаб діаграми переміщень штовхача;
- в результаті маємо 8 точок сумісної діаграми, з'єднуємо послідовно ці точки плавною кривою, отримуємо діаграму.

Або побудувати сумісний графік, коли задані діаграми переміщень і аналогів швидкостей, за формулою для визначення кута проекції поєднаних графіків:

$$- \Psi = \arctg(H_1 \cdot \mu_\varphi),$$

- де  $\Psi$  – кут, під яким проводиться лінія, за допомогою якої отримуємо сумісний графік.

- потім до суміжної діаграми проводимо дотичну під кутом  $\gamma_{min} = 45^\circ$ , яка на перетині з віссю ординат  $S$  дає точку  $O_I$ ;

1.2. Сумісну діаграму для плоского роликвого штовхача  $S = f(dS/d\varphi)$  будуємо в послідовності:

- графічно виключаємо параметр  $\varphi$  з діаграм  $S=f(\varphi)$  та  $dS/d\varphi=f(\varphi)$  наступним чином: на осі  $S$  відкладаємо ординати  $S$  діаграми переміщень, на осі  $dS/d\varphi$  значення абсцис, які визначаємо по формулі

$$x_i = y_i' \frac{\mu \frac{dS}{d\varphi_{вид}}}{\mu_S}$$

де  $y_i'$  – значення 1, 2, ..., 8 ординат діаграми аналога швидкості;

- $\mu \frac{dS}{d\varphi_{вид}}$  – масштаб діаграми аналога швидкості;
- $\mu_S$  - масштаб діаграми переміщень штовхача;
- в результаті маємо 8 точок сумісної діаграми, з'єднуємо послідовно ці точки плавною кривою, отримуємо діаграму.

- потім до суміжної діаграми проводимо дотичну під кутом  $\gamma_{min} = 60^\circ$ , яка на перетині з віссю ординат  $S$  дає точку  $O_I$ ;

2. Проводимо вертикально додаткову ось ординат  $S'$  яка зміщена на відстань  $E = \frac{e}{\mu_S}$ , мм від осі  $S$ ;

- на перетині з додатковою віссю ординат  $S'$  отримуємо точку  $O'_1$ , яка є центром обертання кулачка;

$$r_o = OO'_1 \cdot \mu_S, \text{ мм}$$

- перетинаючись дотична та ось  $S'$  обмежують деяку частину площини, яку штрихуємо; кожна точка  $O'_1$ , яка знаходиться на прямій  $S'$  у середині заштрихованої області, може бути центром обертання кулачка

- маємо  $R_{min} = r_o + \rho$ , де  $\gamma \geq \gamma_{min}$  де  $\rho = 10 \dots 15$  мм

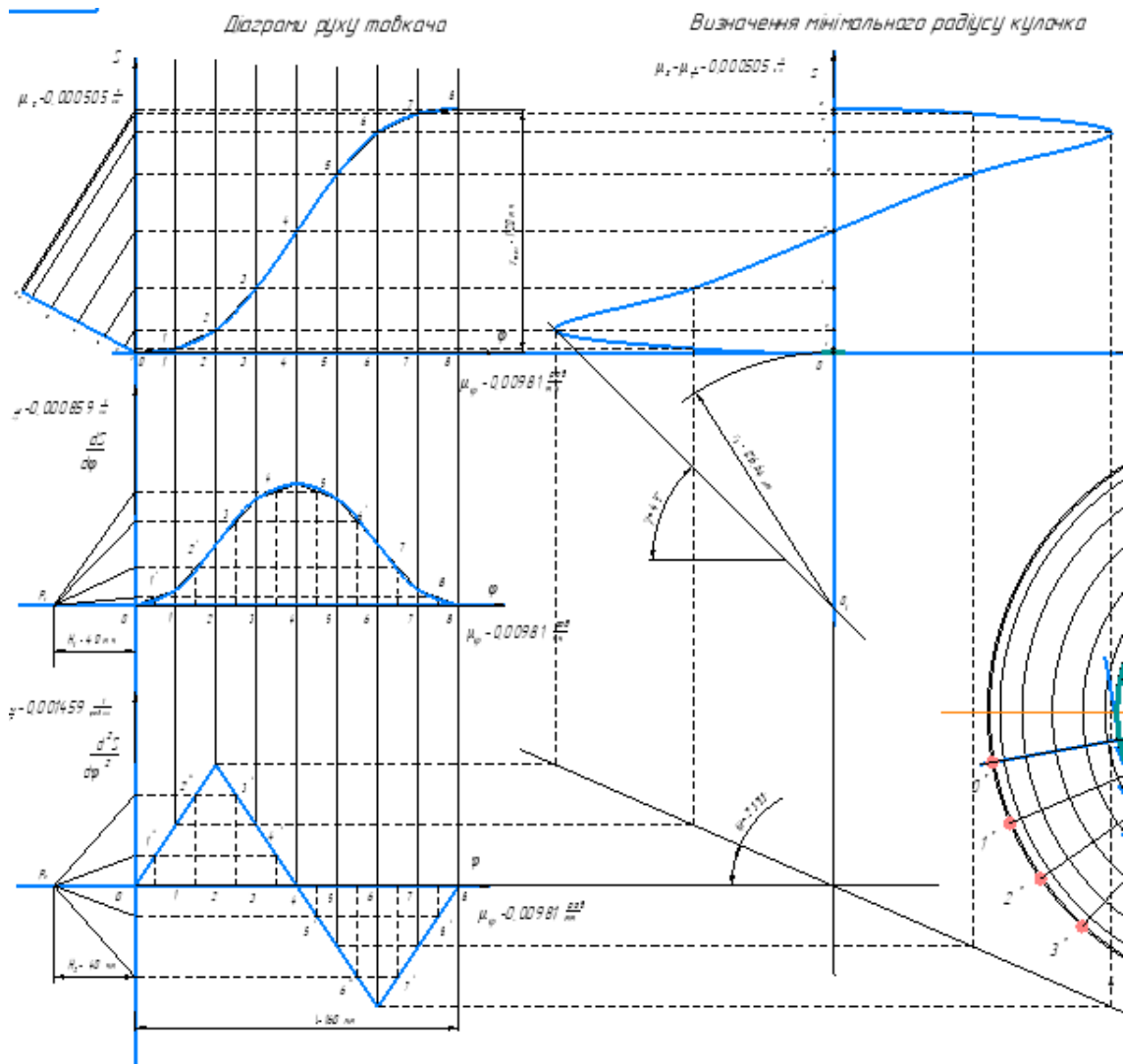


Рисунок 5.8 – Побудова сумісного графіку тарілкового штовхача та визначення мінімального радіусу кулачка

### 5.7. Побудова профілю кулачка.

Рішення задачі кінематичного синтезу кулачкового механізму значно полегшується якщо при її рішенні використовувати метод обертання руху, який складається з наступного:

- якщо системі, яка складається з декількох тіл, додати загальний для всіх тіл рух, то відносний рух системи тіл не змінюється:

- в задачі кінематичного синтезу кулачкових механізмів уявно додаємо механізму (кулачкової шайбі, штовхачу, стойці) обертання навколо центру обертання кулачка з кутовою швидкістю  $(-\omega_k)$ , що дорівнює, але направленою у протилежний бік кутовий швидкості кулачка;

- в результаті кулачок умовно стає нерухомим, штовхач, окрім свого абсолютного руху, набуває додаткових рух – обертання навколо осі кулачка з кутовий швидкістю  $(-\omega_k)$ ;

- таким чином метод обернення руху дозволяє при проектуванні розглядати замість абсолютного руху штовхача його рух відносно кулачка, кулачок при цьому стає умовно нерухомою ланкою.

- Визначаємось масштабом побудови профілю кулачка, який вибираємо одним з стандартних машинобудівних масштабів;

- з свавільно призначеного центру  $O$  проводимо три кола радіусами  $R_{min}$ ,  $e$  (ексцентриситет) та  $(R_{min} + H - \text{хід штовхача})$  у визначеному масштабі побудови;

- відштовхуючись від лінії руху штовхача відкладаємо послідовно кути в зворотному русі кутової швидкості кулачка:  $\varphi_{від}$  – кут віддалення,  $\varphi_{д.в.}$  - кут дальнього відстою,  $\varphi_{наб}$  – кут наближення,  $\varphi_{б.в.}$  – кут ближнього відстою, які у сумі дають  $360^\circ$ ;

- поділимо кут віддалення  $\varphi_{від}$  та кут наближення  $\varphi_{наб}$  кожен на  $\delta$  рівних частин та проводимо проміні від  $1$  до  $\delta$  дотичними до ексцентриситету;

- під будь-яким кутом на діаграмі переміщення з початку координат в точці  $0$  креслимо лінію в обраному масштабі, довжиною ходу штовхача. Кінець цієї лінії з'єднуємо з ординатою, де отримали останнє поєднання горизонтальної лінії, проведеної через точку  $\delta$ . Потім проводимо паралелі до цієї лінії з кожного поєднання горизонтальної лінії точок  $7,6,5,4,3,2,1$ . Таким чином отримали точки переміщення штовхача для восьми положень;

- відстані, отриманих точок переносимо на місце побудови профілю кулачка, де відклали відстань переміщення штовхача  $H$ ;

- через кожен точку з центру проводимо коло;

- **для тарілчастого штовхача** в частині кута віддалення  $\varphi_{від}$  маємо 9 промінів. На перетині першого промінню з колом мінімального радіусу кулачка проводимо перпендикуляр який є положення площини штовхача в його оберненому русі;

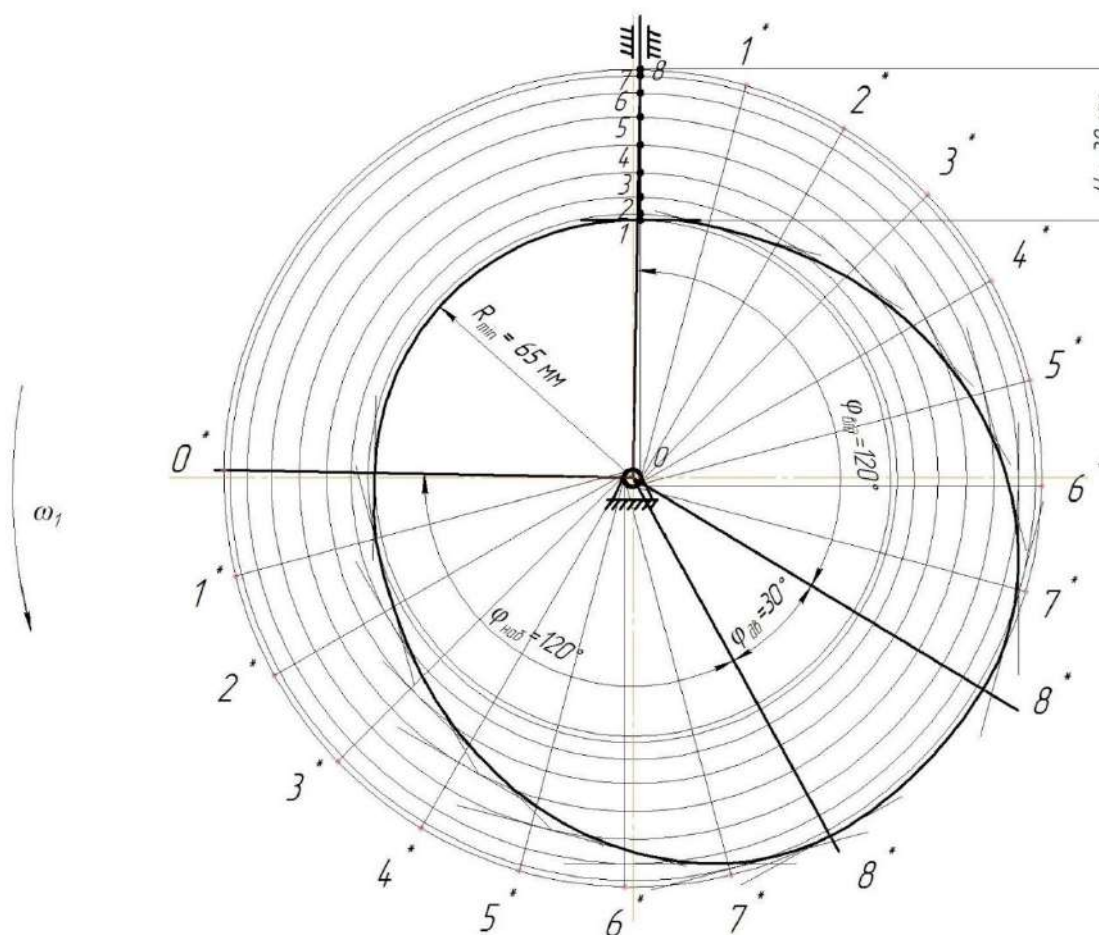
- аналогічно на перетині другого промінню з другим колом мінімального радіусу кулачка проводимо перпендикуляр який є положення площини штовхача в його оберненому русі;

- аналогічно будуємо перпендикуляри для точок  $3, 4, 5, 6, 7, 8$ ;

- таким же чином будуємо перпендикуляри від  $\delta$  до  $0$  положень на куту повернення штовхача до центру  $\varphi_{наб}$ ;

- вписуємо криву лінію дотичною до кожного перпендикуляра, яка є практичним профілем кулачка з тарілчастим штовхачем (рис. 5.9)

## Побудова профілю кулачка М 1:1



### Характеристика кулачкового механізму

$H, \text{mm}$	$\varphi_{\text{від}}^{\circ}$	$\varphi_{\text{до}}^{\circ}$	$\varphi_{\text{с}}^{\circ}$	$E, \text{mm}$	$\gamma_{\text{ср}}^{\circ}$
38	120	30	120	2	45

Рисунок 5.9 - Побудова профілю кулачка

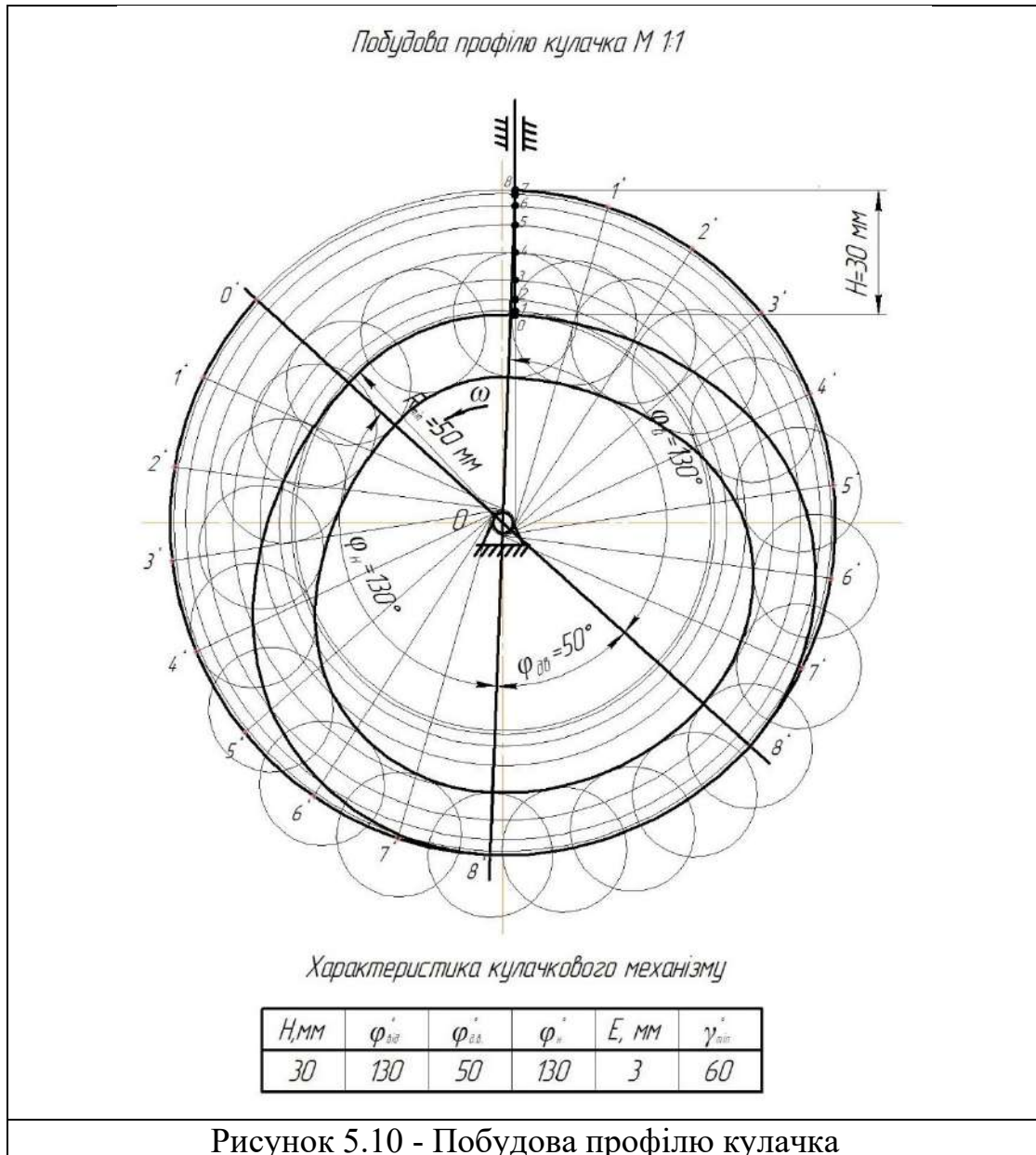
- для роликів у частині кута віддалення  $\varphi_{\text{від}}$  маємо 9 промінів. На перетині першого промінню з колом мінімального радіусу кулачка проводимо коло, радіусом роликів, який дорівнює

$$r_p \leq 0,4R_{\text{min}}$$

- аналогічно на перетині другого промінню з другим колом мінімального радіусу кулачка проводимо коло, радіусом роликів;

- аналогічно будемо кола, радіусом роликів для точок 3, 4, 5, 6, 7, 8;

- таким же чином будуємо кола, радіусом ролика від  $\delta$  до  $\theta$  положень на куту повернення штовхача до центру  $\varphi_{наб}$ ;
- проводимо криву лінію через кожний центр ролика, яка є теоретичним профілем кулачка з роликівим штовхачем.
- практичним профілем кулачка буде крива, яка знаходиться на рівновіддаленій відстані від теоретичного профілю і є дотичній до роликів (рис. 5.10)



Таким чином, штовхач в оберненому русі рухатиметься навколо нерухомого кулачка, а центр ролика опише криву, що віддалена від практичного профілю кулачка на відстань радіусу  $r_p$  ролика і звану еквідистантой.

### **Контрольні питання**

1. Види кулачкових механізмів, сфера їх застосування.
2. Ступінь рухомості кулачкового механізму.
3. Переваги та недоліки кулачкового механізму.
4. Класифікація кулачкового механізму по характеру замикання.
5. Класифікація кулачкового механізму по формі штовхача.
6. Класифікація кулачкового механізму по характеру руху штовхача.
7. Класифікація кулачкового механізму по характеру руху кулачка.
8. Фазові кути повороту і кути профілю кулачка.
9. Метод обернення руху.
10. Параметри кулачкових механізмів.
11. Аналіз основних законів руху вихідної ланки.
12. Коли виникають удари в кулачковому механізмі.
13. Кут тиску на рухому ланку кулачкового механізму та кут передачі руху.
14. Залежність розмірів кулачкового механізму від кута тиску на рухому ланку.
15. Робочий профіль кулачка.
16. Вибір припустимого кута тиску.
17. Що таке ексцентриситет в кулачковому механізмі.
18. Масштаби кінематичних діаграм.
19. Побудова діаграми руху штовхача.
20. В яких випадках виникає заклинювання в кулачковому механізмі.
21. Як робиться вибір радіуса ролика.
22. Динамічний синтез кулачкового механізму з роликовим штовхачем, що рухається поступово.
23. Динамічний синтез кулачкового механізму з тарілчастим штовхачем, що рухається поступово.
24. Динамічний синтез кулачкового механізму з коромисловим штовхачем.
25. Кінематичний синтез кулачкового механізму з роликовим штовхачем, що рухається поступово.
26. Побудова сумісної діаграми для роликового штовхача.
27. Кінематичний синтез кулачкового механізму з тарілчастим штовхачем, що рухається поступово.
28. Побудова сумісної діаграми для плоского штовхача.
29. Кінематичний синтез кулачкового механізму з коромисловим штовхачем.
30. Що таке теоретичний профіль кулачка.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Інженерна механіка. Частина 2. Теорія механізмів і машин: Підручник для здобувачів ступеня вищої освіти закладів вищої освіти/ О.І. Єременко. Вінниця: Нова книга, 2009. 368 с., іл.
2. Теорія механізмів технологічних машин: Підручник. Збільшений формат В5/ Попов С.В., Бучинський М.Я., Гнітько С.М., Чернявський А.М. Ліра, К: 2020. 268 с., іл.
3. Структурне, кінематичне та силове дослідження важільного механізму: посібник-практикум/ О.Ю. Михайленко, та ін. Мелітополь: Люкс, 2020. 116 с.
4. Структурний, кінематичний та динамічний аналіз механізмів з вищими парами/ О.Ю. Михайленко та ін. Мелітополь: Люкс, 2022. 117 с.
5. Теорія механізмів і машин: Частина 1: навч. пос./ О.М. Черниш та ін. ЦУЛ, 2019. 464 с., іл.
6. Технічна механіка. Розділ «Теорія механізмів і машин»/ С. Кошель, та ін. Центр навчальної літератури: 2020. 156 с., іл.
7. Акінін Ю. М. Теорія механізмів і машин: підручник. – Київ : Вища школа, 2018. – 420 с.
8. Антонов В. А. Основи теорії механізмів і машин. – Харків : ХНАДУ, 2020. – 312 с.
9. Бойко І. П. Теорія машин і механізмів: навчальний посібник. – Львів : НУ «Львівська політехніка», 2019. – 275 с.
10. Григор'єв О. І. Механіка машин. – Київ : НАУ, 2017. – 290 с.
11. Жуков І. А. Теорія механізмів і машин: курс лекцій. – Запоріжжя : ЗНТУ, 2015. – 210 с.
12. Ільченко М. Є. Основи кінематики та динаміки машин. – Київ : КПІ ім. І. Сікорського, 2021. – 345 с.
13. Корнійчук І. М. Механізми та машини: підручник. – Тернопіль : ТНТУ, 2016. – 380 с.
14. Коваль М. О. Теорія машин і механізмів: практикум. – Дніпро : ДНУ, 2020. – 180 с.
15. Norton R. L. Design of Machinery: An Introduction to the Synthesis and Analysis of Mechanisms and Machines. – New York : McGraw-Hill Education, 2020. – 864 p.
16. Uicker J. J., Pennock G. R., Shigley J. E. Theory of Machines and Mechanisms. – Oxford : Oxford University Press, 2022. – 812 p.
17. Erdman A. G., Sandor G. N. Mechanism Design: Analysis and Synthesis. – Englewood Cliffs : Prentice Hall, 2017. – 720 p.

18. Mabie H. H., Reinholtz C. F. Mechanisms and Dynamics of Machinery. – New York : Wiley, 2019. – 610 p.
19. Rao J. S. Theory of Machines. – New Delhi : New Age International, 2018. – 480 p.
20. Bevan T. Theory of Machines. – London : Pearson Education, 2016. – 540 p.
21. Hartenberg R. S., Denavit J. Kinematic Synthesis of Linkages. – New York : McGraw-Hill, 1964. – 456 p.
22. Angeles J. Fundamentals of Robotic Mechanical Systems: Theory, Methods, and Algorithms. – Berlin : Springer, 2014. – 580 p.
23. Meriam J. L., Kraige L. G. Engineering Mechanics: Dynamics. – Hoboken : Wiley, 2021. – 780 p.
24. Waldron K. J., Kinzel G. L. Kinematics, Dynamics, and Design of Machinery. – Hoboken : Wiley, 2017. – 768 p.
25. Paul B. Kinematics and Dynamics of Planar Machinery. – Upper Saddle River : Prentice Hall, 2015. – 500 p.
26. Saha S. K. Introduction to Robotics. – New York : McGraw-Hill, 2020. – 610 p.
27. Кузьменко С. В. Теорія механізмів і машин у прикладах і задачах. – Харків : НТУ «ХПІ», 2019. – 240 с.
28. Поліщук В. О. Основи проєктування машин і механізмів. – Київ : НУБіП України, 2022. – 328 с.
29. Труш О. І. Теорія механізмів і машин: навчальний посібник. – Вінниця : ВНТУ, 2021. – 260 с.
30. Федоренко В. П. Динаміка машин: навчальний посібник. – Одеса : ОНАХТ, 2018. – 298 с.
31. Яцун С. Ф. Комп'ютерне моделювання механізмів і машин. – Суми : СумДУ, 2020. – 355 с.