

DOI <https://doi.org/10.32782/2078-0877-2026-26-2-9>

УДК 004.942

Є. А. Гавриленко, д-р техн. наук

ORCID: 0000-0003-4501-445X

О. Є. Мацулевич, канд. техн. наук

ORCID: 0000-0001-5553-709X

*Таврійський державний агротехнологічний університет імені Дмитра Моторного*

e-mail: oleksandr.matsulevych.tsatu.edu.ua

## АЛГОРИТМ ФОРМУВАННЯ ОБВОДУ НА ОСНОВІ ОБЛАСТІ РОЗТАШУВАННЯ ЕВОЛЮТИ МОНОТОННОЇ КРИВОЇ

*Анотація.* Алгоритми геометричного моделювання кривих ліній із заданим поєднанням характеристик, що інтерполюють точкові ряди складної конфігурації, є основою розробки систем автоматизованого проектування виробів, обмежених функціональними поверхнями. Необхідні властивості поверхні забезпечуються характеристиками інтерполюючої кривої, яка використовується в якості елемента каркасу моделі, основними з яких є регулярна зміна значень кривини та мінімальна кількість особливих точок. У статті запропоновано спосіб формування послідовності, що складається із скільки завгодно великої кількості заданих вихідних і призначених проміжних точок, які можна інтерполювати монотонною кривою лінією. Спосіб є необхідним етапом створення алгоритму формування обводу, який із заданою точністю представляє криву лінію із заданими властивостями, що інтерполює послідовність точок довільної конфігурації. Коректність запропонованих у роботі рішень підтверджує розв'язання тестового прикладу.

*Ключові слова:* інтерполяція, монотонна крива лінія, проміжні точки, нормаль, центр кривини, еволюта, область розташування кривої, обвід, похибка.

*Постановка проблеми.* Системи автоматизованого проектування (САПР) є важливим складником сучасного виробництва. Їх застосування значною мірою забезпечує підвищення якості виготовлення виробів за нижчою вартістю та за менший час. Поряд із збільшенням обчислювальних потужностей комп'ютерів фундаментальним завданням ефективного застосування САПР є розробка досконалішого математичного забезпечення CAD/CAM/CAE систем.

Методи геометричного моделювання кривих ліній із заданим поєднанням характеристик, які інтерполюють точкові ряди складної конфігурації, є основою розробки САПР виробів, обмежених функціональними поверхнями [1, 6]. Геометричне моделювання поверхонь визначає функціональні якості великої кількості об'єктів. До таких об'єктів, насамперед, належать вироби з аеро- та гідродинамічними обводами в авіабудуванні, автомобілебудуванні, суднобудуванні, енергетичному та хімічному машинобудуванні [7]. Складні поверхні часто моделюються на основі лінійчатих каркасів, елементи яких формуються в результаті інтерполяції послідовностей точок, розташованих на поверхні. При цьому геометричні характеристики кривої, що інтерполює, забезпечують експлуатаційні якості виробу. Для зазначених виробів основною функціональною характеристикою є заданий характер обтікання середовищем поверхні. Основними характеристиками інтерполюючої кривої, що дозволяють забезпечити необхідні властивості поверхні, є регулярна зміна значень кривини та мінімальна кількість особливих точок [3, 8].

Залежно від способу представлення інформації, методи інтерполяції можна розділити на дві групи. До першої групи віднесемо методи безперервного геометричного моделювання, коли результатом є модель, представлена функцією чи сукупністю функцій. У даних методах завдання інтерполяції послідовності точок, вирішується шляхом формування обводу, що складається з ділянок аналітично заданих кривих, зістикованих у вихідних точках.



При формуванні інтерполюючої кривої з дуг кривих другого порядку [9, 19] гарантується відсутність неконтрольованого виникнення точок перегину, проте уникнути точок з екстремальними значеннями кривини неможливо. Коригування форми обводу здійснюється шляхом зміни положень дотичних у вихідних точках. Якщо положення дотичних у вихідних точках зафіксовані, локальне коригування можливе при використанні дуг еліпсів.

Використання для формування обводу B-сплайнів [10] забезпечує ширші можливості управління формою обводу. B-сплайн визначається контрольними точками, що його задають, кожній з яких відповідає функція сполучення. Крива апроксимує ламану лінію, що з'єднує контрольні точки. Порядок гладкості обводу, що формується, забезпечується ступенем функцій сполучення. При збільшенні порядку гладкості збільшується ступінь функцій сполучення і число вершин багатокутника, що задає сплайн. Це призводить до зменшення можливості локального коригування форми кривої. Одночасно зростає можливість виникнення осциляцій. Поліпшення стикування сегментів обводу вимагає збільшення ступеня сплайну, що спричиняє зростання кількості контрольних точок. Це ускладнює процес локального коригування форми та параметрів сплайну. Крім того, при інтерполяції великої кількості точок складно забезпечити монотонну зміну кривини вздовж сплайну.

Відсутність осциляції обводу, що формується на основі B-сплайну, можна забезпечити за рахунок контролю форми багатокутника, що його задає. Сучасні САД-системи дозволяють керувати формою багатокутника, що задає B-сплайн, в інтерактивному режимі [11]. За великої кількості вихідних точок забезпечити відсутність осциляції в ручному режимі важко чи неможливо. Ці особливості обмежують можливості забезпечення заданих характеристик обводів, що формуються на основі сплайнів.

Перевагою розглянутих методів безперервного геометричного моделювання є аналітичний опис ділянок кривих, що дозволяє однозначно визначити обвід, що формується, і характеристики в його вузлах. Одночасно це призводить до нав'язування кривої, що інтерполює точковий ряд, властивостей кривих, ділянками яких моделюється обвід. Збільшення числа умов, що накладаються на геометричний образ, що формується такими методами, вимагає збільшення параметричного числа кривих ліній, які становлять його визначник. Це призводить до неконтрольованого виникнення у кривих особливих точок, що знижує якість одержуваного рішення. Наразі зазначена проблема не має кардинального рішення.

До другої групи віднесемо дискретне геометричне моделювання, що передбачає рішення у вигляді впорядкованої множини точок [4, 12]. Такий підхід відкриває можливість контролю характеристик інтерполюючої кривої за рахунок відмови від її аналітичного подання та використання в якості інструмента формоутворення алгоритмів, що визначають положення проміжних точок кривої. Однак, дотепер ця потенційна можливість дискретного геометричного моделювання значною мірою не реалізована. Основними завданнями, вирішення яких дозволить підвищити ефективність дискретного підходу, є контроль геометричних властивостей кривої лінії через характеристики послідовностей точок, що їй належать, і оцінка точності дискретної інтерполяції. Завданням методу дискретної інтерполяції, що розробляється, є формування послідовності, що складається з вихідних і новопризначених проміжних точок, які можливо інтерполювати кривою лінією із заданими характеристиками. Основною характеристикою кривої, що інтерполює сформовану нашим методом послідовність точок, є мінімальна, виходячи з вихідних даних, кількість особливих точок.

Пропонується така схема дискретної інтерполяції.

1. Початкова послідовність точок розбивається на частини, які можна інтерполювати кривою лінією, що не містить особливих точок. Таку лінію називатимемо монотонною, тому що

вздовж неї значення кривини змінюються регулярно і монотонно. Будь-яку криву лінію можна розглядати як таку, що складається із монотонних частин, зістикованих в особливих точках.

2. Формуються послідовності, що складаються із скільки завгодно великої кількості точок, які задають монотонні частини інтерполюючої кривої. Це вихідні та проміжні точки, які призначаються у процесі моделювання. Формування зазначеної послідовності точок називатимемо згущенням. Новопризначені проміжні точки називатимемо точками згущення.

Згущення здійснюється до того часу, поки похибка дискретної інтерполяції стане менше заданої величини. Цю похибку оцінюватимемо розмірами області можливого розташування ділянок монотонної кривої, що інтерполює.

3. Формується обвід, що складається з ділянок безперервних ліній, який інтерполює згущену послідовність точок і розташовується всередині області можливого розташування монотонної кривої. Такий обвід з необхідною точністю представляє криву лінію із заданими геометричними характеристиками.

*Аналіз останніх досліджень.* Завдання формування області можливого розташування монотонної кривої, що інтерполює, як послідовності замкнених контурів, стикованих між собою у вихідних точках вирішена в статтях [5, 13, 14]. Область можливого розташування ділянки кривої  $i \dots i+1$ , обмежена дугами кіл. Це кола, стичні з кривою у вихідних точках ( $CK_i$  та  $CK_{i+1}$ ) і кола, які дотичні до стичного кола і дотичної прямої в іншій вихідній точці (рис. 1).

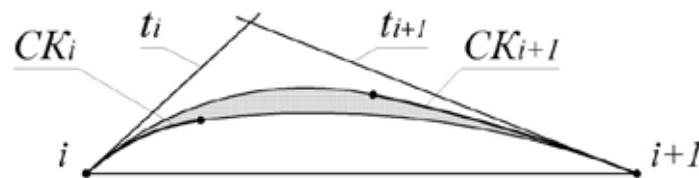


Рис. 1. Область можливого розташування ділянки монотонної інтерполюючої кривої

Межі області розташування ділянки однозначно визначаються положенням центрів кривини монотонної кривої, які відповідають точкам, що обмежують ділянку.

Завдання визначення положень центрів кривини, що відповідають вихідним точкам, для монотонної кривої лінії, яка інтерполює точковий ряд  $\dots i-1, i, i+1 \dots$  вирішено у статтях [2, 15].

Кожен із центрів кривини призначається в межах діапазону, межі якого визначені на основі аналізу взаємного розташування стичних, дотичних та прилеглих кіл, які визначаються точками, що належать монотонній кривій (рис. 2).

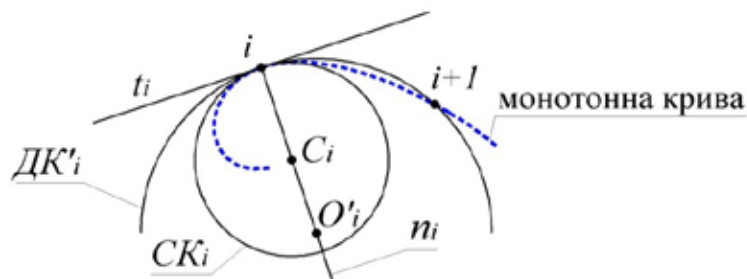


Рис. 2. Розташування стичних і дотичних кіл щодо монотонної кривої

Коло, що дотичне з кривою в точці  $i$  та перетинає криву у точці, яка розташована поза  $CK_i$ , позначено як  $DK'_i$ . Дотичне коло, що проходить через точку розташовану всередині  $CK_i$ , позначається як  $DK_i$ . На рисунку центри  $CK_i$  та  $DK'_i$  позначені як  $C_i$  та  $O'_i$  відповідно.

В результаті аналізу розташування та розмірів стичних та дотичних кіл, які визначаються послідовністю точок призначених на кривій, вздовж якої значення радіусів кривини монотонно збільшуються, отримано співвідношення:

$$\dots < R_{i-1} < R_{DK'_{i-1}} < R_{DK_i} < R_{DK'_i} < R_{DK_{i+1}} < R_{i+1} < \dots, \quad (1)$$

де  $R_i$ ,  $R_{DK_i}$ ,  $R_{DK'_i}$  – радіуси  $CK_i$ ,  $'DK_i$ ,  $DK'_i$ , відповідно.

Прилегле коло ( $PK_i$ ) проходить через три послідовні точки  $i-1$ ,  $i$ ,  $i+1$ , які призначені на кривій (рис. 3).

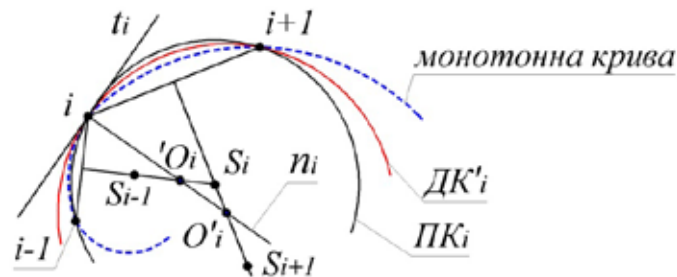


Рис. 3. Розташування прилеглих та дотичних кіл

В результаті аналізу розташування та розмірів прилеглих та дотичних кіл отримано співвідношення:

$$\dots < R_{PK_{i-1}} < R_{DK'_{i-1}} < R_{DK_i} < R_{PK_i} < R_{DK'_i} < R_{DK_{i+1}} < R_{PK_{i+1}} < \dots, \quad (2)$$

де  $R_{PK_i}$  – радіус  $PK_i$ .

Зі співвідношення (2) випливає умова, при виконанні якої послідовність точок можна інтерполювати монотонною кривою:

$$\dots < R_{PK_{i-1}} < R_{PK_i} < R_{PK_{i+1}} < \dots$$

Співвідношення (1) і (2) визначають діапазони, в межах яких повинні розташовуватися відповідні вихідним точкам нормалі та центри кривини монотонної кривої, що інтерполює.

Положення центрів  $PK_{i-1}$ ,  $PK_i$ ,  $PK_{i+1}$  (точки  $S_{i-1}$ ,  $S_i$ ,  $S_{i+1}$  відповідно) визначає межі можливого розташування нормалі  $n_i$  кривої у вихідній точці  $i$ . Для виконання (2) нормаль  $n_i$  повинна перетинати відрізки  $[S_{i-1}, S_i]$  та  $[S_i, S_{i+1}]$  одночасно. Точки  $O'_i$  та  $O'_i$ , у яких нормаль перетинає ці відрізки, є центрами  $'DK_i$  та  $DK'_i$  відповідно. Одночасно для виконання (1) нормаль  $n_{i-1}$  повинна перетинати відрізок  $[S_{i-1}, O'_i]$ , а нормаль  $n_{i+1}$  – відрізок  $[O'_i, S_{i+1}]$ . Для досягнення рівномірного збільшення значень кривини вздовж кривої, що формується, оптимальним буде положення нормалей  $n_i$  і  $n_{i+1}$ , при якому вони поділяють відрізок  $[S_i, S_{i+1}]$  на рівні частини:  $|S_i, O'_i| = |O'_i, S_{i+1}|$ . У статті [15] запропоновано алгоритм одночасного призначення нормалей у всіх вихідних точках, при яких вони поділяють відповідні відрізки, обмежені центрами прилеглих кіл, у пропорції близькій до оптимальної.

Призначене положення нормалі автоматично визначає діапазон можливого розташування центру кривини, що їй належить. Відповідно до (1) для нормалі  $n_i$  таким діапазоном є відрізок  $[O'_i, O'_i]$ . Положення центрів кривини призначається всередині зазначених діапазонів з урахуванням властивостей еволюти монотонної кривої [16]:

- еволюта є опуклою кривою лінією;
- нормалі кривої лінії є дотичні її еволюти у відповідних центрах кривини;
- довжина будь-якої ділянки еволюти дорівнює різниці значень радіусів кривини в точках, що обмежують відповідну ділянку вихідної кривої.

Призначені у вихідних точках нормалі інтерполюючої кривої і центри кривини, що їм належать, визначають послідовність базисних трикутників ( $BT_i$ ) (рис. 4).

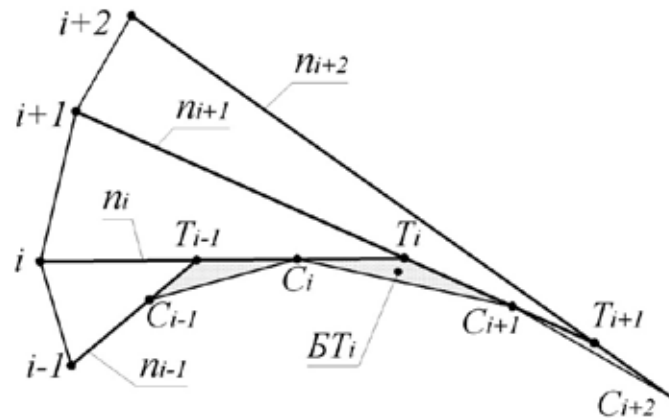


Рис. 4. Послідовність базисних трикутників

Методика призначення положень центрів кривини інтерполюючої кривої, які відповідають вихідним точкам, забезпечує виконання для кожного з базисних трикутників співвідношення:

$$|C_i, C_{i+1}|R_{i+1} - R_i|C_i, T_i| + |C_{i+1}, T_i|. \quad (3)$$

Співвідношення (3) є необхідною умовою формування в межах кожного з базисних трикутників ділянки еволюти монотонної кривої лінії, яка інтерполює задані вихідні точки. Отримана область розташування еволюти визначає криву, що інтерполює, з точністю, яка визначається вихідним точковим рядом. При вирішенні практичних завдань ця точність може бути недостатньою.

*Формулювання мети статті (постановка завдання).* Метою статті є розробка алгоритму інтерполяції, що реалізує спосіб формування на основі вихідної області розташування еволюти інтерполюючої кривої нової послідовності, що складається з будь-якої великої кількості вихідних і проміжних точок, які з заданою точністю представляють монотонну криву.

Для досягнення поставленої мети необхідно:

- розробити спосіб призначення положень нормалей та центрів кривини, що відповідають проміжним точкам кривої;
- розробити спосіб визначення положень проміжних точок інтерполюючої кривої, що відповідають призначеним для них характеристикам;
- запропонувати спосіб визначення абсолютної похибки, з якою послідовність точок, що формується, представляє монотонну криву;
- випробувати запропоновані способи щодо положень проміжних точок для вихідної послідовності точок, призначених на монотонній кривій лінії;
- сформулювати алгоритм інтерполяції, що реалізує запропоновані способи.

Розробка зазначених способів потребує вирішення наступних завдань:

- визначення області можливого розташування нормалі інтерполюючої монотонної кривої в проміжній точці;
- визначення області можливого розташування центру кривини, що відповідає проміжній точці;
- визначення області розташування проміжної точки.

*Основна частина.* Після призначення для вихідних точок центрів кривини згущення може здійснюватися локально на окремих ділянках і в довільній послідовності. Умовою призначення точки згущення є існування області можливого розташування монотонної кривої лінії,

яка інтерполуює послідовність точок, що формується. Кожен крок згущення передбачає послідовне визначення положення нормалі, центру кривини та відповідної точки згущення. Кожен із зазначених елементів призначається в межах діапазону, межі якого визначаються виходячи з характеристик кривої, що інтерполуює.

Призначивши нормаль  $n_{ce}$ , що відповідає точці згущення  $i$ -ї ділянки ( $i_{ce}$ ) і центр кривини ( $C_{ce}$ ), розташований на цій нормалі, всередині вихідного  $BT_i$  отримуємо два нових базисних трикутники –  $C_i, C_{ce}, T_1$  ( $'BT_{ce}$ ) та  $C_{ce}, C_{i+1}, T_2$  ( $BT'_{ce}$ ). За умови розташування ділянки еволюти монотонної кривої в межах  $'BT_{ce}$  та  $BT'_{ce}$  слід (рис. 5):

$$|C_b C_{ce}| + |C_{ce} C_{i+1}| \leq R_{i+1} - R_i \leq |C_b T_1| + |T_1 T_2| + |T_2 C_{i+1}|. \quad (4)$$

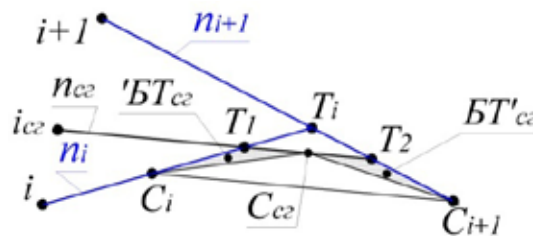


Рис. 5. Згущення ділянки вихідної послідовності точок

Визначимо межі діапазону, у кордонах якого має розташовуватися нормаль  $n_{ce}$  відповідно до умови (4). При цьому вимагаємо, щоб  $n_{ce}$  була паралельна прямій  $(C_b, C_{i+1})$ . Зазначене обмеження коректне, оскільки ділянка еволюти  $(C_b, C_{i+1})$  – опукла крива. Це гарантує наявність в одній із точок ділянки еволюти дотичної прямої, яка паралельна хорді  $[C_b, C_{i+1}]$ .

Положення  $n_{ce}$ , коли відстань між нормаллю та прямою  $(C_b, C_{i+1})$  мінімальна, визначається співвідношеннями:

$$\begin{cases} |C_i, T_1| + |T_1, T_2| + |T_2, C_{i+1}| = R_{i+1} - R_i; \\ |C_i, T_1| : |C_i, T_i| = |C_{i+1}, T_2| : |C_{i+1}, T_i|. \end{cases} \quad (5)$$

Виходячи з (5) і подоби трикутників  $C_i, C_{i+1}, T_i$  та  $T_1, T_2, T_i$  мінімальну відстань між  $n_{ce}$  і прямою  $(C_b, C_{i+1})$  ( $h_{min}$ ) можна виразити через параметри вихідного  $BT_i$ :

$$h_{min} = \frac{2S(R_{i+1} - R_i - c)}{c(a + b - c)}, \quad (6)$$

де  $S$  – площа  $BT_i$ ,  $a = |C_b, T_i|$ ,  $b = |C_{i+1}, T_i|$ ,  $c = |C_b, C_{i+1}|$ .

У разі коли відстань між  $n_{ce}$  і  $(C_b, C_{i+1})$  дорівнює  $h_{min}$ , ламана  $C_i - T_1 - T_2 - C_{i+1}$  є єдиним варіантом еволюти ділянки монотонної кривої  $(i, i+1)$  і ця ділянка складається з двох гладко зістигнених дуг кіл з центрами в точках  $T_1$  і  $T_2$ .

Максимально можлива відстань ( $h_{max}$ ) між  $n_{ce}$  та  $(C_b, C_{i+1})$  дорівнює висоті трикутника  $C_b, C_{i+1}, C_{ce}$ , сторони якого визначаються співвідношеннями:

$$\begin{cases} |C_i, C_{ce}| + |C_{ce}, C_{i+1}| = R_{i+1} - R_i; \\ |C_i, C_{ce}| = |C_{ce}, C_{i+1}|. \end{cases} \quad (7)$$

Відстань від точки  $C_{ce}$  до прямої  $(C_b, C_{i+1})$  не може перевищувати величину  $h_{max}$ , яку можна розрахувати за формулою:

$$h_{max} = \frac{1}{2} \sqrt{(R_{i+1} - R_i)^2 - |C_b, C_{i+1}|^2}. \quad (8)$$

Якщо відстань від точки  $C_{cr}$  до прямої  $(C_i, C_{i+1})$  дорівнює  $h_{max}$ , то ділянка монотонної кривої  $(i, i+1)$  складається з трьох гладко зістикованих дуг кіл з центрами в точках  $C_i, C_{cr}, C_{i+1}$ .

Призначення  $n_{cr}$ , відстань якої від  $(C_i, C_{i+1})$  знаходиться в діапазоні  $h_{min} < h_{cr} < h_{max}$  дозволяє формувати ділянку еволюти у вигляді гладкої опуклої лінії. Така еволюта задає евольвенту з регулярно і монотонною зміною кривини.

Після призначення положення нормалі  $n_{cr}$  на неї визначається діапазон можливого розташування центру кривини  $C_{cr}$ . Це відрізок  $[C_1, C_2]$ , де  $C_1$  – положення точки  $C_{cr}$ , при якому радіус кривини  $(R_{cr})$  у точці згущення мінімальний (з можливих положень точки  $C_{cr}$  найбільш наближена до точки  $i_{cr}$ );  $C_2$  – положення центру кривини, при якому  $R_{cr}$  максимальний.

Положення точок  $C_1$  і  $C_2$  визначається з умови  $|C_i, C_{cr}| + |C_{cr}, C_{i+1}| = R_{i+1} - R_i$ . Виконання умови означає, що у випадку коли  $R_{cr}$  максимальний або мінімальний еволюта ділянки кривої – ламана лінія  $C_i - C_{cr} - C_{i+1}$ , а геометричне місце положень точки  $C_{cr}$  – еліпс з фокусами в точках  $C_i, C_{i+1}$  та довжиною великої осі, що дорівнює  $R_{i+1} - R_i$  [17]. У прямокутній системі декартових координат з початком у центрі відрізка  $[C_i, C_{i+1}]$  і позитивним напрямом осі абсцис, що збігається з вектором  $\vec{C_i, C_{i+1}}$ , цей еліпс визначається рівнянням:

$$\frac{x^2}{(R_{i+1} - R_i)^2} + \frac{y^2}{(R_{i+1} - R_i)^2 - |C_{i+1}, C_i|^2} = \frac{1}{4}. \quad (9)$$

За різних положень нормалі  $n_{cr}$  межі діапазону  $[C_1, C_2]$  отримуємо в перетині нормалі та еліпса (рис. 6).

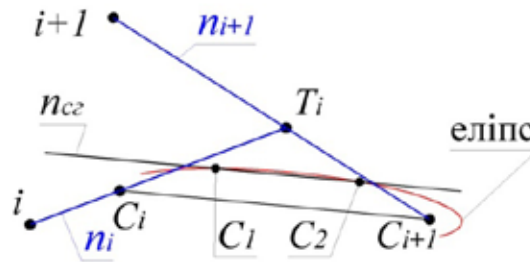


Рис. 6. Визначення діапазону розташування центру кривини

Якщо точки  $C_1$  чи  $C_2$  опиняються поза  $BT_i$ , то межею діапазону розташування  $C_{ce}$  є точка  $T_1$  чи  $T_2$  відповідно.

Завдання формування послідовності точок, що належать монотонній кривій, має рішення при призначенні центру кривини в будь-якій точці відрізка  $[C_1, C_2]$ . Якщо це не суперечить додатковим умовам, що накладаються на криву яка формується, то  $C_{ce}$  призначається в центрі  $[C_1, C_2]$ .

Діапазон розташування точки згущення  $i_{ce}$  визначається на нормалі  $n_{ce}$  виходячи з призначеного положення центру кривини  $C_{ce}$ . Цей діапазон обмежений мінімальним  $(R_{min})$  та максимальним  $(R_{max})$  значеннями, які може приймати радіус кривини інтерполюючої кривої в точці згущення:

$$R_{min} \leq R_{cr} \leq R_{max}. \quad (10)$$

Розташування еволюти монотонної кривої в межах  $'BT_{cr}$  та  $BT'_{cr}$  означає:

$$\begin{cases} |C_i, C_{ce}| \leq R_{ce} - R_i \leq |C_i, T_1| + |T_1, C_{ce}|; \\ |C_{i+1}, C_{ce}| \leq R_{i+1} - R_{ce} \leq |C_{ce}, T_2| + |T_2, C_{i+1}|. \end{cases} \quad (11)$$



Виходячи з (11) в якості нижньої межі діапазону (10) повинна бути призначена більша з величин  $R_i + |C_b, C_{cz}|$  або  $R_{i+1} - (|C_{i+1}, T_2| + |T_2, C_{cz}|)$ . Верхня межа діапазону дорівнює меншій із величин  $R_i + |C_b, T_1| + |T_1, C_{cz}|$  або  $R_{i+1} - |C_{i+1}, C_{cz}|$ .

Покажемо, що запропонована схема призначення положення нормалі  $n_{cz}$  та меж діапазону розташування центру кривини  $[C_1, C_2]$  гарантує наявність діапазону (10) при будь-якому співвідношенні величин, з яких вибираються значення  $R_{min}$  та  $R_{max}$ .

Якщо центр кривини займає крайнє положення  $C_{cz} \equiv C_2$ , то величини  $R_i + |C_b, C_{cz}|$  та  $R_{i+1} - |C_{i+1}, C_{cz}|$  рівні. Очевидно, що тоді  $|C_{i+1}, C_{cz}| < |C_{i+1}, T_2| + |T_2, C_{cz}|$  (рис. 5), а значить і

$$R_i + |C_b, C_{cz}| > R_{i+1} - (|C_{i+1}, T_2| + |T_2, C_{cz}|). \quad (12)$$

При переміщенні  $C_{cz}$  від  $C_2$  у бік  $C_1$  відстань  $|T_2, C_{cz}|$  збільшується швидше, ніж зменшується  $|C_b, C_{cz}|$ . Це означає, що співвідношення (12) зберігається, а значення  $R_{min} = R_i + |C_b, C_{cz}|$ .

Аналогічні міркування доводять:

$$R_{max} = R_{i+1} + |C_{i+1}, C_{cz}|.$$

Виходячи із співвідношень  $|C_b, C_{cz}| < |C_b, C_2|$ ,  $|C_{i+1}, C_{cz}| > |C_{i+1}, C_2|$  та  $R_i + |C_b, C_2| = R_{i+1} - |C_{i+1}, C_2|$  можна стверджувати, що розташування нормалі  $n_{cz}$  в межах діапазону  $h_{min} < h_{cz} < h_{max}$ , а центру кривизни  $C_{cz}$  у межах відрізка  $[C_1, C_2]$  гарантує виконання умови  $R_{min} < R_{max}$  отже, і наявність діапазону можливого розташування точки згущення.

Значення радіуса кривини в точці згущення призначається рівним  $R_{max} = 0,5(R_{min} + R_{max})$ . Положення точки згущення визначаємо відклавши від  $C_{cz}$  відрізок, довжина якого дорівнює  $R_{cz}$ .

Інтерполяція послідовності, що складається із скільки завгодно великого числа точок монотонною кривою лінією можлива за відповідності характеристик базисних трикутників, що задають її еволюту, вимозі (3). Запропонована схема призначення нормалі псг та центру кривини  $C_{cz}$ , відповідних точці згущення, гарантує формування всередині вихідного базисного трикутника двох нових базисних трикутників згущення, характеристики яких відповідають вимозі (3). Кожен вихідний або отриманий в результаті згущень базисний трикутник задає область можливого розташування відповідної ділянки інтерполюючої кривої [12].

Збереження заданих характеристик базисних трикутників, що формуються в процесі будь-якої кількості згущень, дозволяє стверджувати, що послідовне призначення нормалей, центрів кривини і точок згущення в межах діапазонів, що враховують область можливого вирішення задачі, гарантує формування точкового ряду, який можна інтерполювати монотонною кривою лінією.

Розв'язання задачі формування точкового ряду, який можна інтерполювати монотонною кривою лінією розглянемо на прикладі згущення послідовності точок, призначених на гілці параболи, яка задана рівнянням  $y = \frac{x^2}{300}$ . В якості вихідної взята послідовність точок, яка була використана в роботі [15] для визначення області розташування еволюти монотонної кривої лінії.

Характеристики вихідної послідовності точок наведені у таблиці 1.

Після призначення нормалей та центрів кривини монотонної кривої лінії, що відповідають вихідним точкам, отримана область розташування еволюти монотонної кривої. Характеристики вихідної області розташування еволюти наведено у таблиці 2.

Послідовність згущення точкового ряду покажемо на прикладі третьої вихідної ділянки.

Діапазон розташування нормалі монотонної кривої в точці згущення визначається мінімальною  $h_{min} = 0,887$  мм і максимальною  $h_{max} = 1,258$  мм відстанню між нормаллю та основою  $BT_3$ . Після призначення положення нормалі по центру зазначеного діапазону на ній визначено діапазон розташування центру кривини монотонної кривої у точці згущення:  $|C_1, C_2| = 9,873$  мм.



Призначені положення нормалі та центру кривини, що відповідають точці згущення, визначили діапазон її можливого розташування, величина якого дорівнює  $R_{\min} - R_{\max} = 0,009$  мм.

Після призначення за аналогічною схемою точок згущення інших ділянок отримано послідовність точок, характеристики якої наведені у таблиці 3.

Таблиця 1

## Характеристики вихідного точкового ряду

$i$	Координати точки, мм		Довжина хорди супровідної ламаної лінії, мм	Радіус прилеглого кола, мм	Сектор розташування нормалі, °
	$x$	$y$			
1	30	3	31,32	–	–
2	60	12	33,54	188,58	1,074
3	90	27	36,62	238,73	1,074
4	120	48	84,85	348,37	1,386
5	180	108	103,23	570,09	2,727
6	240	192	123,55	1002,64	2,244
7	300	300	–	–	–

Таблиця 2

## Характеристики області розташування еволюти монотонної кривої

$i$	Радіус дотичного кола, мм		Радіус кривини монотонної кривої, мм	Діапазон розташування нормалі, мм	Діапазон розташування центру кривини, мм	Діапазон розташування точки згущення, мм
	$R'_{ДК_i}$	$R_{ДК'_i}$				
1	–	166,74	155,10	0,274	6,782	0,008
2	176,10	201,94	184,56	0,312	7,895	0,008
3	218,66	260,65	239,79	0,371	9,873	0,009
4	319,22	384,88	350,61	0,428	38,581	0,011
5	468,62	693,55	569,53	0,527	52,231	0,023
6	837,83	1200,0	986,86	0,863	112,846	0,058
7	1422,14	–	1729,04	–	–	0,146

Таблиця 3

## Характеристики згущеного точкового ряду

$i$	Координати точки, мм		Довжина хорди супровідної ламаної лінії, мм	Радіус прилеглого кола, мм	Радіус дотичного кола, мм		Радіус кривини монотонної кривої, мм
	$x$	$y$			$R'_{ДК_i}$	$R_{ДК'_i}$	
1	30	3	14,62	–	–	153,27	155,10
2	44,2	6,5	16,73	167,13	161,14	173,61	165,84
3	60	12	15,44	187,53	182,48	196,5	184,56
4	74,1	18,3	18,12	212,79	205,80	221,59	212,81
5	90	27	17,28	237,99	231,11	247,40	239,79
6	104,5	36,4	19,36	266,25	258,71	277,96	266,26
7	120	48	18,03	352,14	342,08	358,21	350,61
8	148,3	73,4	46,93	428,94	392,05	474,50	426,13
9	180	108	45,19	564,34	519,17	626,10	569,53
10	207,7	143,7	58,10	741,47	704,36	800,27	741,70
11	240	192	52,09	949,93	887,12	1087,21	986,86
12	266,4	236,9	71,49	1448,43	1367,221	1666,43	1438,99
13	300	300	–	–	1694,45	–	1729,04



В результаті згущення сформовано нову послідовність точок. Значення радіусів прилеглих кіл уздовж отриманих точок послідовно збільшуються, що є необхідною умовою їхньої подальшої інтерполяції монотонною кривою. Нормалі, призначені у вихідних точках та точках згущення, визначають нову послідовність дотичних кіл. Співвідношення значень радіусів прилеглих, дотичних і стичних кіл відповідає умовам (1) і (2), що підтверджує коректність призначених характеристик інтерполюючої кривої.

Для оцінки абсолютної похибки, з якою отримана в результаті згущення послідовність точок задає криву, що інтерполіює, можна використовувати діапазон розташування точки згущення (10). Після того, як довжина діапазону для кожної з ділянок згущеної послідовності точок стає менше заданої величини, послідовність вважається сформованою. Залежно від умов поставленого завдання, крива, що інтерполіює, може бути представлена областю можливого розташування або обводом. У другому варіанті в межах області можливого розташування інтерполюючої кривої формується гладкий обвід, складений з дуг кіл [13], еліпсів або B-сплайном [14]. Запропонована в [13] методика формування обводу забезпечує найбільшу точність подання кривої, що інтерполіює.

В результаті проведених досліджень запропоновано алгоритм формування гладкого обводу, який із заданою точністю представляє криву, яка інтерполіює послідовність точок довільної конфігурації.

1. Вихідна послідовність точок поділяється на частини, вздовж яких радіуси прилеглих кіл збільшуються або зменшуються. Кожна з таких частин визначає монотонну криву лінію.

2. Для кожної вихідної точки визначається діапазон розташування нормалі монотонної кривої, у межах якого призначається положення нормалі. Положення центрів кривини призначаються у межах відрізків, які належать відповідним нормаліям, межі яких забезпечують виконання умови (3). Нормалі та призначені на них центри кривини задають послідовність базисних трикутників, яка є вихідною областю можливого розташування еволюти інтерполюючої кривої.

3. Виконується локальне згущення ділянок вихідної послідовності точок. Точка згущення призначається в межах діапазону, що визначається положенням нормалі та центру кривини, попередньо призначених для точки згущення, а також нормаліями та центрами кривини, що задають відповідний базисний трикутник. Точковий ряд вважається сформованим, коли діапазони розташування точки згущення на всіх ділянках стають меншими за задану точність інтерполяції.

4. Отримана послідовність базисних трикутників задає область можливого розташування інтерполюючої кривої в межах якої формується обвід.

*Висновки.* У роботі запропоновано спосіб формування послідовності, що складається із заданих вихідних та призначених проміжних точок, які можна інтерполювати монотонною кривою лінією.

Вихідними даними визначення положень проміжних точок є координати вихідних точок і конфігурація області можливого розташування еволюти інтерполюючої кривої. Область розташування еволюти обмежена послідовністю базисних трикутників, що визначається характеристиками кривої, що інтерполіює, – нормаліями, призначеними у вихідних точках, і центрами кривини, призначеними на цих нормаліях.

Алгоритм призначення положення проміжної точки засновано на формуванні області розташування еволюти монотонної кривої, що інтерполіює отриману послідовність точок. Основу алгоритму складають розроблені у роботі способи:

- призначення положень нормалей інтерполюючої кривої, що відповідають проміжним точкам;
- призначення положень центрів кривини, що належать цим нормаліям;



– визначення положень проміжних точок, що відповідають призначеним нормалям та центрам кривини.

Для кожної проміжної точки положення нормалі призначається в межах діапазону, межі якого однозначно визначаються положенням нормалей та центрів кривини, призначених для попередньої та наступної вихідних точок. Призначення нормалі всередині діапазону визначає відрізок, що належить їй, який є діапазоном можливого розташування центру кривини монотонної кривої в проміжній точці.

В результаті призначення нормалі та центру кривини, всередині вихідного базисного трикутника отримуємо два нових базисних трикутники, конфігурація яких визначає межі діапазону можливого розташування проміжної точки. Кожен із трикутників є областю розташування ділянки еволюти інтерполюючої кривої, яка обмежена призначеною проміжною точкою та однією з двох вихідних точок (попередньою або наступною).

Призначення нормалі, центру кривини або проміжної точки в крайньому з можливих положень задає відповідну ділянку еволюти у вигляді ламаної лінії, а ділянка кривої, що інтерполює, буде складатися з гладко зістикованих дуг кіл. В результаті призначення зазначених елементів усередині відповідних діапазонів отримуємо нову послідовність точок та характеристики регулярної монотонної кривої, яка інтерполює ці точки.

Після призначення проміжної точки вона розглядається як вихідна для призначення наступних точок. Проміжні точки можуть призначатися на вихідних ділянках у довільній послідовності, а їхнє остаточне число може бути як завгодно велике. Всі монотонні криві, що інтерполюють послідовність точок, що формується, і мають в них призначені характеристики, проходять всередині діапазону можливого розташування проміжної точки на кожній з ділянок. Довжиною зазначених діапазонів можна оцінювати абсолютну похибку, з якою послідовність точок задає криву, що інтерполює. Після того, як максимальна абсолютна похибка стає меншою за задану величину, послідовність точок вважається сформованою.

Коректність запропонованого алгоритму та його складових способів досліджена при інтерполяції послідовності точок, призначених на гілці параболи. Як вихідна взята послідовність з 7 точок, яка була використана в роботі [15] для визначення вихідної області розташування еволюти монотонної кривої лінії. В результаті призначення проміжної точки на кожній із ділянок, обмежених сусідніми вихідними точками, сформована нова послідовність з 13 точок. Конфігурація отриманої послідовності точок і призначені в них характеристики інтерполюючої кривої відповідають умовам належності точок до монотонної кривої лінії. Ця відповідність забезпечує подальше збільшення кількості проміжних точок при збереженні можливості інтерполяції послідовності точок, що формується, монотонною кривою лінією.

Призначення положень проміжних точок і характеристик кривої лінії, що інтерполює, на основі області можливого розташування її еволюти спрощує геометричну схему вирішення задачі, зменшує кількість необхідних обчислень, забезпечує задану точність дискретної інтерполяції.

Отримані у цій роботі результати доповнюють результати, отримані в роботах [13–15]. В результаті отримано метод та алгоритм формування обводу, який із заданою точністю представляє регулярну криву лінію, що містить мінімальну кількість особливих точок та інтерполює вихідну послідовність точок довільної конфігурації.

Алгоритм пропонує послідовне вирішення наступних завдань:

- вихідна послідовність точок розбивається на частини, які можна інтерполювати кривою лінією, яка не містить особливих точок;
- формуються послідовності, що складаються з вихідних та проміжних точок, які із заданою точністю задають монотонні частини інтерполюючої кривої;



- формуються області можливого розташування монотонних частин інтерполуючої кривої;
- формується обвід, що складається з ділянок безперервних ліній, який інтерполуює отриману послідовність точок і розташовується всередині області можливого розташування кривої, що інтерполуює.

### Список використаних джерел

1. Гавриленко Є.А., Холодняк Ю.В., Найдіш А.В., Лебедев В.А. Створення САД-моделей поверхонь із використанням спеціалізованого програмного забезпечення. *Прикладні питання математичного моделювання*. Херсон : ХНТУ, 2020. Т. 3, № 2.2. С. 66–75.
2. Гавриленко Є.А., Холодняк Ю.В., Тетервак І.Р. Метод інтерполяції точкових рядів для формування гладких обводів. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. К. : КНУБА, 2024. Вип. 107. С. 54–73. URL: <http://ageg.knuba.edu.ua/article/view/323559>
3. Ковальов Ю.М. Основи геометричного моделювання : навч. посіб., К. : Вища школа, 2003. 231 с.
4. Найдіш В.М. Дискретна інтерполяція : навч. посіб., Мелітополь : Люкс, 2008. 250 с.
5. Холодняк Ю. В. Варіативне дискретне геометричне моделювання обводів на основі базисних трикутників по заданому закону зміни кривини : автореф. дис. ... канд. техн. наук. Мелітополь, 2016. 24 с.
6. Werghi N., Fisher R., Robertson C., Ashbrook A.: Object reconstruction by incorporating geometric constraints in reverse engineering. *Comput. Aided Des.* 31, 1999, 363–399. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0010-4485\(99\)00038-X](https://doi.org/10.1016/S0010-4485(99)00038-X).
7. Cai C., Yang Y., Jia Y., Wu G., Zhang H., Yuan F., Qian Q., Li Q.: Aerodynamic load evaluation of leading edge and trailing edge windward states of large-scale wind turbine blade under parked condition. *Appl. Energy*. 350, 2023, 121744. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2023.121744>.
8. Hashemian A., Imani B. M.: A new quality appearance evaluation technique for automotive bodies including effect of flexible parts tolerances. *Mech. Based Des. Struct. Mach.* 46, 2018, 157–167. DOI: <https://doi.org/10.1080/15397734.2017.1321487>.
9. Hewett D. P., Ockendon J. R., Smyshlyaev, V. P.: Contour integral solution of the parabolic wave equation. *Wave Motion*. 84, 2019, 90–109 DOI: <https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2018.09.015>.
10. Hashemian A., Hosseini S. F.: An integrated fitting and fairing approach for object reconstruction using smooth NURBS curves and surfaces. *Comput. Math. with Appl.* 76(7), 2018, 1555–1575. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.camwa.2018.07.007>.
11. Massarwi F., Elber G. A B-spline based framework for volumetric object modeling. *Comput. Aided Design*. 78, 2016, 36–47. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cad.2016.05.003>.
12. Havrylenko Y., Cortez J. I., Kholodniak Y., Aliksieieva H., Garcia G. T.: Modelling of surfaces of engineering products on the basis of array of points. *Teh. Vjesn.* 27(6), 2020, 2034–2043. DOI: <https://doi.org/10.17559/TV-20190720081227>.
13. Havrylenko Y., Kholodniak Y., Halko S., Vershkov O., Bondarenko L., Suprun O., Miroshnyk O., Shchur T., Śrutek M., Gackowska M.: Interpolation with Specified Error of a Point Series Belonging to a Monotone Curve. *Entropy* 23(5), 2021, 493. DOI: <http://doi.org/10.3390/e23050493>.
14. Havrylenko Y., Kholodniak Y., Halko S., Vershkov O., Miroshnyk O., Suprun O., Dereza O., Shchur T., Śrutek M.: Representation of a Monotone Curve by a Contour with Regular Change in Curvature. *Entropy* 23(7), 2021, 923 DOI: <http://doi.org/10.3390/e23070923>.
15. Kholodniak Y., Havrylenko Y., Halko S., Hnatushenko V., Suprun O., Volina T., Miroshnyk O., Shchur T.: Improvement of the algorithm for setting the characteristics of interpolation monotone curve. *Informatyka, Automatyka, Pomiarzy W Gospodarce I Ochronie Środowiska*, 13(4), 2023, 44–50. DOI: <https://doi.org/10.35784/iapgos.5392>.
16. Robbin J. W., Salomon D. A.: Introduction to Differential Geometry. Springer Spektrum, Zürich 2022, 432.
17. MacLane S.: Mathematics Form and Function. Springer, 1986.

Дата першого надходження статті до видання: 20.03.2026

Дата прийняття статті до друку після рецензування: 10.04.2026

Дата публікації (оприлюднення) статті: 25.05.2026

Стаття поширюється на умовах ліцензії відкритого доступу (CC BY 4.0)



**Ye. Havrylenko, O. Matsulevych***Dmytro Motornyi Tavria State Agrotechnological University***ALGORITHM FOR FORMING A CONTOUR BASED ON THE LOCATION AREA OF THE EVOLUTE OF A MONOTONE CURVE*****Summary***

Algorithms for geometric modeling of curved lines with a given combination of characteristics interpolating point sequences of complex configurations form the basis for developing computer-aided design systems for products bounded by functional surfaces. The surface is modeled using ruled frameworks, the elements of which are formed by interpolating point sequences. The key characteristics of the interpolating curve, which ensure the required surface properties, are regular changes in curvature values and a minimal number of singular points. This article develops a method for generating a sequence consisting of an arbitrarily large number of specified initial and assigned intermediate points, which can be interpolated by a monotonic curve. The positions of the intermediate points are determined based on pre-assigned characteristics of the interpolating curve—the positions of normals and curvature values. All monotonic curves interpolating the generated point sequence and having assigned characteristics lie within the range of possible intermediate point locations in each section. The length of the specified ranges can be used to estimate the absolute error with which the resulting point sequence defines the interpolating curve. The method developed in this paper is a necessary step in creating a contour generation algorithm located within the boundaries of the possible location of a monotonic curved line. The results obtained in this paper complement those of previous studies. As a result, a contour generation algorithm has been proposed that, with a given accuracy, represents a regular curved line containing a minimum number of singular points and an interpolating sequence of points of arbitrary configuration. The correctness of the solutions proposed in this paper is confirmed by the solution to a test example.

*Keywords:* interpolation, monotonous curved line, intermediate points, normal, center of curvature, evolute, curve extension area, outline, distortion.