

УДК 517.977 + 519.685

Роксолана Лахва, здобувач третього (освітньо-наукового) рівня вищої освіти, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ, Україна

Вікторія Могильова, кандидат фізико-математичних наук, доцент, Національний технічний університет України «КПІ ім. Ігоря Сікорського», м. Київ, Україна

ЛІНІЙНА ЗА КЕРУВАННЯМ ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ НА СКІНЧЕННОМУ ІНТЕРВАЛІ ТА ВІДПОВІДНА УСЕРЕДНЕНА ЗАДАЧА НА ПІВОСІ

Анотація. У роботі розглянуто задачу оптимального керування для лінійної за керуванням інтегро-диференціальної системи зі швидкоосцилюючими параметрами. Головним результатом є обґрунтування методу усереднення, за допомогою якого точна задача оптимального керування на півосі апроксимується відповідною усередненою задачею на скінченному відрізку $[0, T]$ при $T \rightarrow \infty$ та прямуванні малого параметра $\varepsilon \rightarrow 0$. Доведено теорему про граничний зв'язок між ними: встановлено збіжність мінімумів функціоналів якості, сильну збіжність оптимальних траєкторій та слабку збіжність оптимальних керувань.

Ключові слова: оптимальне керування, метод усереднення, інтегро-диференціальні системи, апроксимація задач, збіжність розв'язків.

Abstract. The paper considers an optimal control problem for an integro-differential system with fast-oscillating parameters. The main result is the justification of the averaging method, where the exact optimal control problem on the half-axis is approximated by the corresponding averaged problem on a finite interval $[0, T]$ as $T \rightarrow \infty$ and the small parameter $\varepsilon \rightarrow 0$. A theorem on the limit connection between them is proved, establishing the convergence of the cost functionals, the strong convergence of optimal trajectories, and the weak convergence of optimal controls.

Keywords: Optimal control, averaging method, integro-differential systems, problem approximation, convergence of solutions.

Розглядається задача керування зі швидкоосцилюючими параметрами, що є лінійною за керуванням

$$\dot{x}_\varepsilon = f\left(\frac{t}{\varepsilon}, x_\varepsilon(t), \int_0^t \varphi(t, s, x_\varepsilon(s)) ds\right) + f_1(x_\varepsilon(t))u(t), \quad (1)$$

$$x_\varepsilon(0) = x_0,$$

з критерієм якості

$$I_\varepsilon[u] = \int_0^\infty [A(t, x_\varepsilon(t)) + B(t, u(t))] dt + \Phi(x_\varepsilon(T)) \rightarrow \inf \quad (2)$$

Задачу (1), (2) на півосі апроксимуємо розв'язками усереднених задач керування на відрізку $[0, T]$, при $T \rightarrow \infty$. Тут $\varepsilon > 0$ – малий параметр, x – вектор стану в \mathbb{R}^d , $u(t)$ — m -вимірний вектор керування.

Якщо наступна границя існує рівномірно за $x \in \mathbb{R}^d$:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t \left| f\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x, \varphi_1(t, x)\right) - f_0(x) \right| d\tau = 0, \quad (3)$$

де $\varphi_1(t, x) = \int_0^t \varphi(t, s, x) ds$, $t, s \in [0, T]$.

Нехай $(x_\varepsilon^*(t), u_\varepsilon^*(t))$ розв'язок задачі (1), (2) на півосі. Зафіксуємо $T > 0$ і розглянемо усереднену задачу

$$\dot{\xi} = f_0(\xi) + f_1(\xi) u(t), \quad \xi(0) = x_0, \quad (4)$$

із критерієм якості

$$I_{0T}[u] = \int_0^T [A(t, \xi(t)) + B(t, u(t))] dt + \Phi(\xi(T)) \rightarrow \inf \quad (5)$$

на відрізку $[0, T]$. Тоді з Теорема 3.3 [1] випливає, що ця задача має розв'язок (ξ_T^*, u_T^*) на $[0, T]$.

Для задачі (4) визначимо допустиме керування на $[0, \infty)$ наступним чином

$$\bar{u}_{T, \infty}(t) = \begin{cases} u_T^*(t), & t \in [0, T], \\ 0, & t > T, \end{cases}$$

а через $\xi_{T, \infty}$ позначимо відповідну даному керуванню допустиму траєкторію.

Для коректності задачі припускається виконання таких умов.

Умова 1. Допустиме керування—це m -вимірна вектор-функція $u(\cdot) \in L^p((0, T); V)$, $p > 1$, яка набуває значень у замкненій опуклій множині $V \subset \mathbb{R}^m$;

Умова 2. $f(t, x, u)$ визначена й неперервна за сукупністю змінних в $Q_0 = \{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d, u \in \mathbb{R}^n\}$ та виконуються умови лінійного росту та Ліпшиця.

Умова 3. Функція $\varphi(t, s, x)$ визначена та неперервна в області $Q_1 = \{t \in [0, T], s \in [0, T], x \in \mathbb{R}^d\}$ набуває значень у просторі \mathbb{R}^n та задовольняє умови лінійного росту та умову Лівшиця відносно x .

Умова 4. Рівномірно за $x \in \mathbb{R}^d$ існує границя (3).

Умова 5. Скалярні функції $A(t, x), B(t, u)$ визначені при $t \in [0, T], x \in \mathbb{R}^d, u \in W$, і неперервні за сукупністю змінних, при цьому:

- 1) $A(t, x) \geq 0, B(t, u) \geq a|u|^p$ з деякою сталою $a > 0$ для всіх $t \in [0, T]$, а функція $B(t, u)$ опукла за $u \in W$;
- 2) Функція $\Phi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ невід'ємна та неперервна за x .

Позначимо $I_\varepsilon^* = \inf_u I_\varepsilon[u], I_{0T}^* = \inf_u I_{0T}[u]$, де інфімум береться за всіма допустимими керуваннями.

Теорема. Нехай виконуються Умови 1-5. Тоді

- 1) $|I_\varepsilon^* - I_{0T}^*| \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0, T \rightarrow \infty$;
- 2) існують послідовності $T_n \rightarrow \infty, \varepsilon_n \rightarrow 0$, такі, що для будь-якого $t > 0$

виконується

$$|x_{\varepsilon_n}^*(t) - \xi_{T_n, \infty}(t)| \rightarrow 0, T_n \rightarrow \infty, \varepsilon_n \rightarrow 0; \quad (6)$$

$$|u_{\varepsilon_n}^*(t) - \bar{u}_{T_n, \infty}(t)| \rightarrow 0, T_n \rightarrow \infty, \varepsilon_n \rightarrow 0; \quad (7)$$

слабко в $L^p(0, \infty)$.

Якщо при цьому усереднена задача (4), (5) має єдиний розв'язок, то збіжність у (6), (7) має місце при всіх $T \rightarrow \infty$.

Список використаних джерел

1. Stanzhytskyi O., Lakhva R., Mogylova V. The averaging method for optimal control problems of integro-differential systems on the half-axis. *Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics*. 2026. V. 97. P. 169-182.