УДК 517.44

Любомир Луцюк, здобувач вищої освіти
факультету інформаційних технологій і математики,
Волинський національний університет
імені Лесі Українки, м. Луцьк, Україна

ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕГРАЛЬНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ГАНКЕЛЯ

Анотація. У роботі досліджено застосування інтегрального перетворення Ганкеля до розв’язання крайових задач математичної фізики, що мають осьову симетрію. Показано, що використання цього методу дозволяє ефективно виключати диференціальні операції за радіальною змінною з рівнянь, лапласіан яких записано в циліндричних координатах. Наведено практичний приклад знаходження потенціалу, утвореного плоским круглим наелектризованим диском.

Ключові слова: інтегральні перетворення, перетворення Ганкеля, математична фізика, осьова симетрія, циліндричні координати, функція Бесселя.

Abstract. The paper investigates the application of the Hankel integral transform to solving boundary value problems of mathematical physics with axial symmetry. It is shown that the use of this method allows effectively eliminating differential operations with respect to the radial variable from equations whose Laplacian is written in cylindrical coordinates. A practical example of finding the potential generated by a flat circular electrified disk is given.

Keywords: integral transforms, Hankel transform, mathematical physics, axial symmetry, cylindrical coordinates, Bessel function.

При моделюванні реальних фізичних процесів часто виникають задачі, які характеризуються просторовою симетрією. Перетворення Ганкеля зручно застосовувати до розв’язання задач, що мають осьову симетрію. У таких випадках доцільно використовувати циліндричні координати: $x = r\cos\varphi\,, y = r\sin\varphi\,, z = z$.

Якщо інтеграл $\int_0^{+\infty} |f(r)|\sqrt{r}\,dr$ збіжний, а функція $f(r)$ має обмежену варіацію, то перетворення Ганкеля порядку ν для функції $f(r)$ задається співвідношенням:

$$\hat{f}(\tau) = \int_0^{+\infty} f(r) J_\nu(\tau r) r dr, \quad (0 \le \tau < \infty)$$

де J_ν — функція Бесселя 1-го роду. Формула обернення для цього перетворення має вигляд:

$$f(r) = \int_0^{+\infty} \hat{f}(\tau) J_\nu(\tau r) \tau d\tau, \quad (0 \le r < \infty)$$

Оператор Лапласа в циліндричних координатах має вигляд:

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial^2 \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial^2 z^2}$$

Головна перевага застосування перетворення Ганкеля полягає в тому, що воно дозволяє виключати диференціальні операції за змінною r із рівнянь, у яких лапласіан записано у наведеній вище формі. Це зводить диференціальне рівняння в частинних похідних до значно простішого звичайного диференціального рівняння в просторі зображень.

Ефективність методу можна продемонструвати на класичній задачі теорії потенціалу – знаходженні потенціалу, утвореного наелектризованим диском радіуса, що дорівнює одиниці. Якщо початок координат умістити в центр диска, а вісь Oz спрямувати вздовж його осі, виникає потреба розв'язати рівняння Лапласа $\Delta V = 0$. Зважаючи на симетрію поля щодо площини $z = 0$, крайові умови мають вигляд: $V = V_0$ при $0 \le r < 1,\ z = 0$, та $\frac{\partial V}{\partial z} = 0$ при $r > 1,\ z = 0$.

Застосувавши до цього рівняння інтегральне перетворення Ганкеля та використавши властивості функції Бесселя, ми одержимо в класі зображень просте рівняння:

$$\frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial z^2} = \rho^2\, \hat{V}$$

Оскільки потенціал має дорівнювати нулеві на нескінченності $(z \to \infty)$, розв'язком цього рівняння є функція $\hat{V} = A(\rho) e^{-\rho z}$. Після застосування формули обернення перетворення Ганкеля та використання крайових умов, отримаємо парні інтегральні рівняння, розв'язання яких дає аналітичний розв'язок задачі.

Отже, застосування інтегрального перетворення Ганкеля є потужним аналітичним інструментом для задач із циліндричною геометрією. Воно суттєво спрощує процес знаходження розв’язків шляхом зниження мірності задачі та усунення складних просторових похідних.

Список використаних джерел

1. Банах С. С. Курс функціонального аналізу. Київ : Радянська школа, 1947. 216 с.
2. Вірченко Н. О. Узагальнені інтегральні перетворення. Київ : Задруга, 2013. 397 с.