

УДК 517.518

Світлана Гембарська, кандидат фізико-математичних наук, доцент,
завідувач кафедри теорії
функцій та методики навчання математики,

Костянтин Жигалло, кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри теорії
функцій та методики навчання математики,

Леонід Войтюк, здобувач першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
факультету інформаційних технологій і математики,
Волинський національний університет імені Лесі Українки,
м. Луцьк, Україна

АПРОКСИМАТИВНІ ВЛАСТИВОСТІ БІГАРМОНІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ ПУАСОНА НА КЛАСАХ ФУНКЦІЙ ГЕЛЬДЕРА

Отримано точне значення верхньої межі відхилення бігармонійного інтеграла Пуассона від функцій класу Гельдера H^1 в рівномірній та інтегральній метриках.

Через $L_{2\pi}^1$ будемо позначати клас 2π -періодичних інтегровних функцій з нормою

$$\|f\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx,$$

Множину функцій $f \in L_{2\pi}^1$, які задовольняють нерівність

$$\|f(x+t) - f(x)\|_1 \leq |t|, \quad (1)$$

будемо позначати, як прийнято, через H_1^1 і називати класом Гельдера. Якщо ж $f \in L_{2\pi}^1$, і виконується нерівність

$$\|f(x+t) - 2f(x) + f(x-t)\|_1 \leq 2|t|,$$

то множину таких функцій позначають через H_1^2 і називають класом квазігладких функцій [7].

Для 2π періодичної сумовної функції f через $A_2(\rho)$, $0 \leq \rho < 1$, будемо позначати (див., наприклад, [1]) бігармонійний інтеграл Пуассона:

$$A_2(\rho) = A_2(\rho, f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) P_{\rho}(t) dt,$$

де $P_{\rho}(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{k}{2}(1 - \rho^2) \right) \rho^k \cos kt$ – бігармонійне ядро Пуассона.

Покладемо $\rho = e^{-\frac{1}{\delta}}, \delta > 0$, і надалі бігармонійний інтеграл Пуассона будемо записувати у вигляді

$$A_{2,\delta}(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) P_{\delta}(t) dt,$$

де $P_{\delta}(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{k}{2} \left(1 - e^{-\frac{2}{\delta}} \right) \right) e^{-\frac{k}{\delta}} \cos kt$, як і раніше, – бігармонійне ядро Пуассона.

В даній роботі вивчається поведінка величин

$$E(H_1^1; A_{2,\delta})_1 = \sup_{f \in H_1^1} \|A_{2,\delta}(f, x) - f(x)\|_1, \quad (2)$$

коли $\delta \rightarrow \infty$,

Якщо в явному вигляді знайдена функція $\varphi(\delta) = \varphi(H_1^1; \delta)$ така, що при $\delta \rightarrow \infty$,

$$E(H_1^1; A_{2,\delta})_1 = \varphi(\delta) + o(\varphi(\delta)),$$

то, наслідуючи О.І. Степанця [6, с. 198], будемо казати, що розв'язана задача Колмогорова--Нікольського для бігармонійного інтеграла Пуассона на класі H_1^1 .

С. Канієв [4] для величини $E(H_{\infty}^2; A_2(\rho))$ при $\rho \rightarrow 1 - 0$ встановив таку асимптотичну рівність:

$$E(H_{\infty}^2; A_2(\rho))_{\infty} = \frac{2}{\pi}(1 - \rho) + \frac{\varepsilon_{\rho}}{\pi}, \quad \varepsilon_{\rho} = o(1 - \rho). \quad (3)$$

В роботі Р. Руч [5] отримано такий результат:

$$E(H_{\infty}^2; A_2(\rho))_{\infty} = \frac{2}{\pi}(1 - \rho) + O\left((1 - \rho)^2 \ln \frac{1}{1 - \rho}\right), \quad \rho \rightarrow 1 - 0. \quad (4)$$

При наближенні функцій класу H_{∞}^2 їх бігармонійними інтегралами Пуассона оцінки (3) і (4) дають можливість встановити першу асимптотичну константу

(константу Колмогорова — Нікольського) (див. [3]). Метою даної роботи є отримання точних значень верхньої межі відхилення бігармонійного інтеграла Пуассона від функцій класу Гельдера H_1^1 , в рівномірній та інтегральній метриках.

Теорема. При $\delta \rightarrow \infty$ має місце рівність

$$\begin{aligned} E(H_1^1; A_{2,\delta})_1 &= \frac{1 - e^{-\frac{2}{\delta}}}{\pi} \int_{\pi}^{\infty} \frac{[t]_{2\pi}}{t^2} dt + \\ &+ \left(\frac{2}{\pi\delta} - 2 \frac{1 - e^{-\frac{2}{\delta}}}{\pi} \right) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \int_{\pi}^{\infty} \frac{[t]_{2\pi}}{t^{2k}} dt \left(\frac{1}{\delta} \right)^{2k-2} + \\ &+ \frac{1 - e^{-\frac{2}{\delta}}}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\pi^{2k}} \left(\frac{1}{\delta} \right)^{2k} + \left(\frac{2}{\pi\delta} - \frac{1 - e^{-\frac{2}{\delta}}}{\pi} \right) (\ln \delta + \ln \pi) + \\ &+ \left(\frac{2}{\pi\delta} - \frac{1 - e^{-\frac{2}{\delta}}}{\pi} \right) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{2k\pi^{2k}} \left(\frac{1}{\delta} \right)^{2k}, \end{aligned} \quad (5)$$

де символ $[f(t)]_{2\pi}$ означає парне 2π -періодичне продовження функції $f(t)$.

Наслідок. При $\delta \rightarrow \infty$ мають місце асимптотичні рівності:

$$\begin{aligned} E(H_1^2; A_{2,\delta})_1 &= \frac{2}{\pi\delta} + O\left(\frac{\ln \delta}{\delta^2}\right), \\ E(H_1^2; A_{2,\delta})_1 &= \frac{2}{\pi\delta} - \frac{4 \ln \delta}{\pi\delta^2} + O\left(\frac{1}{\delta^2}\right). \end{aligned}$$

Співвідношення (5) дає можливість знаходити послідовно константи Колмогорова-Нікольського як завгодно високого порядку малості. Відмітимо, що аналогічну теорему для випадку наближення функцій класу Гельдера H_1^1 , сингулярними інтегралами Абеля-Пуассона отримано В. О. Баскаковим (див. [2]).

Список використаних джерел

1. Петров В. А. Бігармонійний інтеграл Пуассона. *Лит. мат. сб.* 1967. Т. 7, № 1. С. 137–142.
2. Baskakov V. A. Some properties of operators of Abel-Poisson type. *Mathematical Notes*. 1975. Vol. 17, no. 2. P. 101–107.

3. Erdélyi A. Asymptotic Expansions. New York : Dover Publications, 1956. 108 p.
4. Kaniev S. On the deviation from their boundary values of function which are biharmonic in the circle. *Soviet Mathematics – Doklady*. 1963. Vol. 4. P. 1541–1544.
5. Pych P. On biharmonic function in unit disc. *Ann. pol. math.* 1968. T. 20, № 3. P. 203–213.
6. Stepanets A. I. Methods of Approximation Theory. VSP : Leiden ; Boston, 2005. 919 p.
7. Timan A. F. Theory of Approximation of Functions of a Real Variable. Oxford : Pergamon Press, 1963. 631 p.