

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ТАВРІЙСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ АГРОТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ | Попова І.О.
ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ
частина 3

КУРС ЛЕКЦІЙ

Мелітополь
2018

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ТАВРІЙСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ АГРОТЕХНОЛОГІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ

І.О. Попова

**Теоретичні основи електротехніки,
частина 3**

Курс лекцій

Мелітополь

2018

УДК 621.3.01.001 (075.8)
П58

Автор: І.О. Попова

Рекомендовано до друку рішенням вченої ради Таврійського державного агротехнологічного університету від «30» жовтня 2018 р., № 3

Рецензенти:

В.Т. Діордієв – д.т.н., професор кафедри Електроенергетика і автоматизація, Таврійський державний агротехнологічний університет

О.Ю. Вовк – к.т.н., доцент кафедри Електротехніка і електромеханіка, Таврійський державний агротехнологічний університет.

Попова І.О.

Теоретичні основи електротехніки, частина 3: курс лекцій / І.О. Попова. – Мелітополь: ТДАТУ, 2018. – 184 с.

У курсі лекцій викладено зміст дисципліни ТОЕ, ч.3, розкриті питання, які охоплюють нелінійні кола постійного струму, магнітні кола при постійних потоках та синусоїдній напрузі, перехідні процеси в колах з постійною та змінною ЕРС, кола з розподіленими параметрами і проведений аналіз електромагнітного поля.

УДК 621.3.01.001 (075.8)

@ «Таврійський державний агротехнологічний університет», 2018

ЗМІСТ

Вступ.....	6
ЛЕКЦІЯ 1	
Тема 13 НЕЛІНІЙНІ КОЛА ПОСТІЙНОГО СТРУМУ	
13.1 Нелінійні елементи.....	7
13.2 Розрахунок кіл при послідовному з'єднанні нелінійних елементів.....	10
13.3 Розрахунок кіл при паралельному з'єднанні нелінійних елементів	12
ЛЕКЦІЯ 2	
ТЕМА 14 МАГНІТНІ КОЛА ПРИ ПОСТІЙНИХ МАГНІТНИХ ПОТОКАХ	
14.1 Явище і закон електромагнетизму	14
14.2. Магнітне коло і її конструктивна схема.....	17
14.3 Крива намагнічування.....	19
14.4 Петля гістерезисну.....	20
ЛЕКЦІЯ 3	
14.5 Аналогія між електричними і магнітними колами.....	21
14.6 Розрахункова схема магнітного кола.....	24
14.7 Закони магнітних кіл.....	25
14.8 Розрахунок нерозгалужених магнітних кіл.....	30
ЛЕКЦІЯ 4	
14.9 Розрахунок розгалужених магнітних кіл.....	33
14.10 Електромагніти та їх розрахунок.....	40
ЛЕКЦІЯ 5	
Тема 15 НЕЛІНІЙНІ КОЛА ЗМІННОГО СТРУМУ	
15.1. Загальні положення	42
15.2. Нелінійна індуктивність	43

15.3. Ідеальна котушка з феромагнітним осередком у колі змінного струму	45
ЛЕКЦІЯ 6	
15.4. Втрати активної потужності на гістерезис.....	52
15.5. Втрати активної потужності на вихрові струми	54
15.6 Реальна котушка з феромагнітним осередком у колі змінного струму.....	56
ЛЕКЦІЯ 7	
15.7 Ферорезонанс напруг і струмів.....	60
ЛЕКЦІЯ 8	
15.8 Трансформатор з феромагнітним осередком.....	72
15.9 Приведений трансформатор.....	81
ЛЕКЦІЯ 9	
Тема 16 ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ В ЛІНІЙНИХ КОЛАХ	
16.1. Причини виникнення перехідних процесів	85
16.2. Закони комутації	86
16.3. Класичний метод розрахунку	89
16.4. Підключення котушки до джерела постійної ЕРС.....	92
16.5. Коротке замикання котушки	97
ЛЕКЦІЯ 10	
16.6. Заряд конденсатора через резистор	101
16.7. Розряд конденсатора через резистор	105
ЛЕКЦІЯ 11	
16.8. Перехідний процес у колі з послідовно з'єднаними котушкою та конденсатором.....	108
16.9. Розряд конденсатора на котушку.....	116
ЛЕКЦІЯ 12	
16.10. Включення котушки при синусоїдній напрузі.....	121
16.11. Включення реального конденсатора при синусоїдній напрузі	124

ЛЕКЦІЯ 13	
16.12 Розрахунок перехідного процесу в розгалуженому колі	129
16.13. Перетворення Лапласа	135
16.14. Закону Ома і Кірхгофа в операторній формі	136
ЛЕКЦІЯ 14	
ТЕМА 17 КОЛА З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ	
17.1 Струми і напруги в довгих лініях. Загальні відомості про кола з розподіленими параметрами	139
17.2 Диференціальні рівняння однорідних ліній.....	140
17.3 Сталій режим в однорідній лінії	142
17.4 Хвилі в лінії при сталому режимі.....	147
17.5 Лінія без спотворень.....	150
ЛЕКЦІЯ 15	
ТЕМА 18 ЕЛЕКТРОМАГНІТНЕ ПОЛЕ ТА МЕТОДИ ЙОГО АНАЛІЗУ	
18.1 Опис основних параметрів електростатичного поля	152
18.2 Електричне поле постійного струму в електропровідному середовищі та його основні параметри	167
18.3 Магнітне поле постійного струму. Зв'язок основних величин, що характеризують магнітне поле.	174
18.4 Основні рівняння змінного електромагнітного поля.....	179
Список рекомендованої літератури	183

ВСТУП

Теоретичні основи електротехніки є фундаментальною дисципліною, на базі якої вивчаються всі інші електротехнічні дисципліни навчального плану спеціальності.

Даний курс лекцій сприяє самостійній пізнавальній діяльності студентів з вивчення ТОЕ, частина 3 на трьох рівнях: знань, умінь і творчого мислення, забезпечуючи як вивчення навчального матеріалу, так і розвиток мислення, що є основною вимогою болонського процесу.

На базі запропонованого курсу лекцій з ТОЕ, частина 3 з'являється можливість змінити парадигму навчального процесу від простої передачі знань викладачами студентам до самостійного здобування знань і вмінь студентами шляхом поєднання аудиторних та поза аудиторних занять в єдиний безперервний ланцюг самостійної пізнавальної діяльності студентів на двох рівнях: інформаційно-репродуктивному, практично-стереотипному.

Тому курсу лекцій з ТОЕ, частина 3 є досить актуальним і доцільним для організації пізнавальної діяльності студентів.

Науково-методична цінність курсу лекцій з ТОЕ, частина 3 полягає у тому, що він дає можливість організувати аудиторну і поза аудиторну діяльність студентів з вивчення дисципліни і є базою для науково-методичного комплексу дисципліни.

ЛЕКЦІЯ 1

ТЕМА 13. НЕЛІНІЙНІ КОЛА ПОСТІЙНОГО СТРУМУ

13.1. Нелінійні елементи

Відомо, що в реальних умовах всі електричні кола є нелінійними, а лінійними їх можна вважати в обмеженому діапазоні значень сил струмів і напруг. Наприклад, при проходженні струму по проводу спостерігається теплова дія струму, внаслідок чого збільшується опір проводу. Вольт-амперні характеристики нелінійних елементів мають вигляд кривих. На рис.1 показана вольт-амперна характеристика лампи розжарювання.

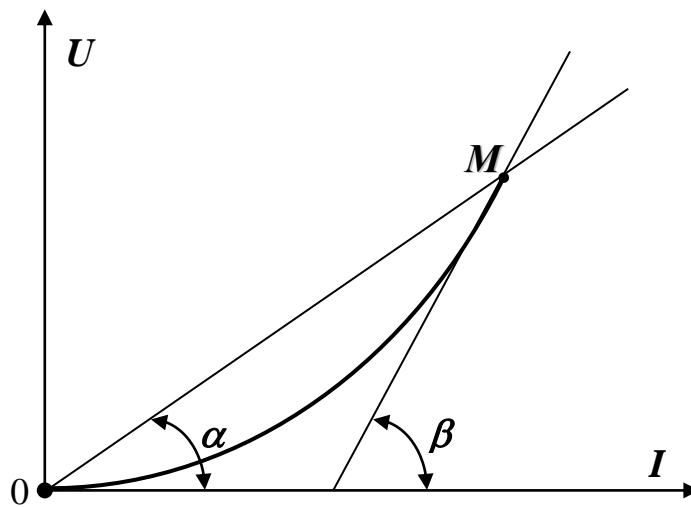


Рисунок 1 – Вольт-амперна характеристика нелінійного елемента

Робоча точка нелінійного елемента характеризується **статичним** і **динамічним** опорами.

Під **динамічним** опором розуміють скалярну величину, рівну межі відношення приросту напруги на нелінійному елементі до приросту струму в ній, коли приріст струму прагне до нуля.

$$r_{\text{д}} = \lim_{\Delta I \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{dU}{dI}, \quad (1)$$

Вольт-амперні характеристики нелінійних елементів не завжди можна описати аналітичним рівнянням. Динамічний опір нелінійного елемента в цьому випадку можна визначити графоаналітичним способом: якщо в робочій точці M провести дотичну, то вона утворить з віссю струму кут α . Значення динамічного опору пропорційно тангенсу кута α і визначають за рівнянням

$$r_{\text{д}} = m_{\text{r}} \operatorname{tg} \alpha, \quad (2)$$

де $r_{\text{д}}$ – динамічний опір, Ом;

m_{r} – масштаб опору, Ом/мм.

Масштаб опору дорівнює частці від ділення масштабу напруги на масштаб струму

$$m_{\text{r}} = \frac{m_{\text{U}}}{m_{\text{I}}}, \quad (3)$$

де m_{U} – масштаб напруги, В/мм;

m_{I} – масштаб струму, А/мм.

Під статичним опором розуміють величину, рівну відношенню постійної напруги на нелінійному елементі до постійного струму в ньому у робочій точці.

$$r_c = \frac{U}{I}, \quad (4)$$

де r_c – статичний опір, Ом.

Для визначення статичного опору графоаналітичним методом необхідно з'єднати робочу точку M з початком координат лінією, яка утворить з віссю струму кут β . Значення статичного опору пропорційно тангенсу кута β і визначають за рівнянням

$$r_c = m_r \operatorname{tg} \beta, \quad (5)$$

Зображення нелінійного елементу на розрахункових схемах наведено на рис. 2.

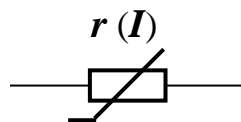
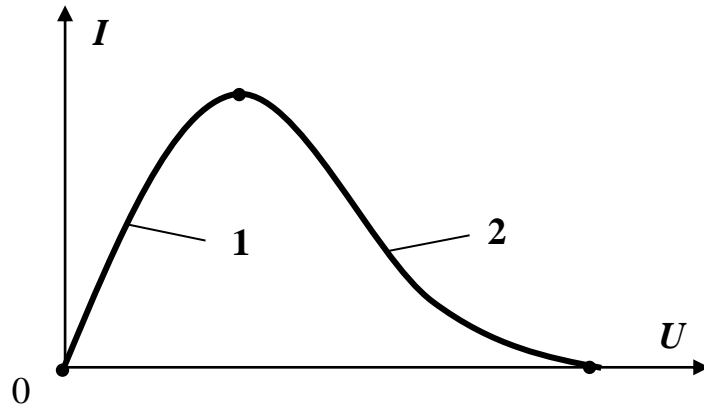


Рисунок 2 – Зображення нелінійного елементу на розрахункових схемах

Для нелінійного елементу статичний і динамічний опори різні за величиною.

Якщо динамічний опір зростає при збільшенні струму на нелінійному елементі, то такий динамічний опір є **позитивним**. Якщо динамічний опір зростає при зменшенні струму на нелінійному елементі,

то такий динамічний опір є **негативним**. Ділянки з позитивним і негативним опором має вольт-амперна характеристика лямбда-діода (рис. 3).



1 - ділянка ВАХ з позитивним динамічним опором; 2 - ділянка ВАХ з негативним динамічним опором

Рисунок 3 – Вольт-амперна характеристика аналог лямбда-діода

13.2. Розрахунок кіл з послідовним з'єднанням нелінійних елементів

Розрахункова схема двох послідовно з'єднаних нелінійних елементів $r_1(I_1)$ і $r_2(I_2)$ показана на рисунку 4, вольт-амперні характеристики яких $I_1(U_1)$ і $I_2(U_2)$ зображені на рисунку 5.

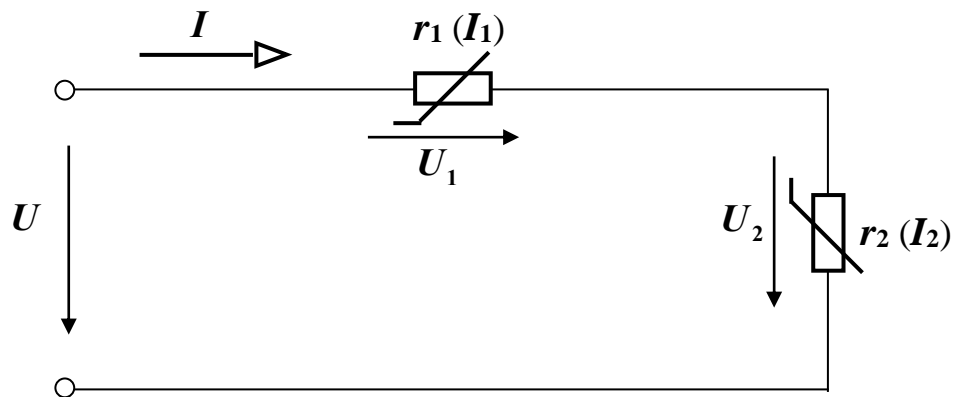


Рисунок 4 – Розрахункова схема двох послідовно з'єднаних нелінійних елементів $r_1(I_1)$ і $r_2(I_2)$

Якщо напруга на затискаках ділянки кола дорівнює U . Необхідно знайти струм I та напруги U_1 і U_2 на нелінійних елементах.

Розрахуємо таке коло графічним методом. З цією метою будуюмо допоміжну характеристику для всієї ділянки кола, яка являє собою залежність струму I від загальної напруги U . Оскільки в нерозгалуженому колі $I = I_1 = I_2$, то для побудови характеристики $I(U_1 + U_2)$ необхідно скласти напруги U_1 і U_2 для однієї і тієї ж сили струму I . Якщо після цього відкласти на осі напруг відрізок Oa , який у масштабі напруги m_U дорівнює напрузі U , а з точки a провести пряму ab , паралельну осі струму, до перетинання з кривою $I(U_1 + U_2)$, то одержимо відрізок ab , який у масштабі струму m_I дорівнює струму I . Потім із точки b проводимо пряму bc , паралельну осі напруги. У результаті одержимо відрізки cd і cf , які у масштабі напруги m_U дорівнюють відповідно напругам U_1 і U_2 .

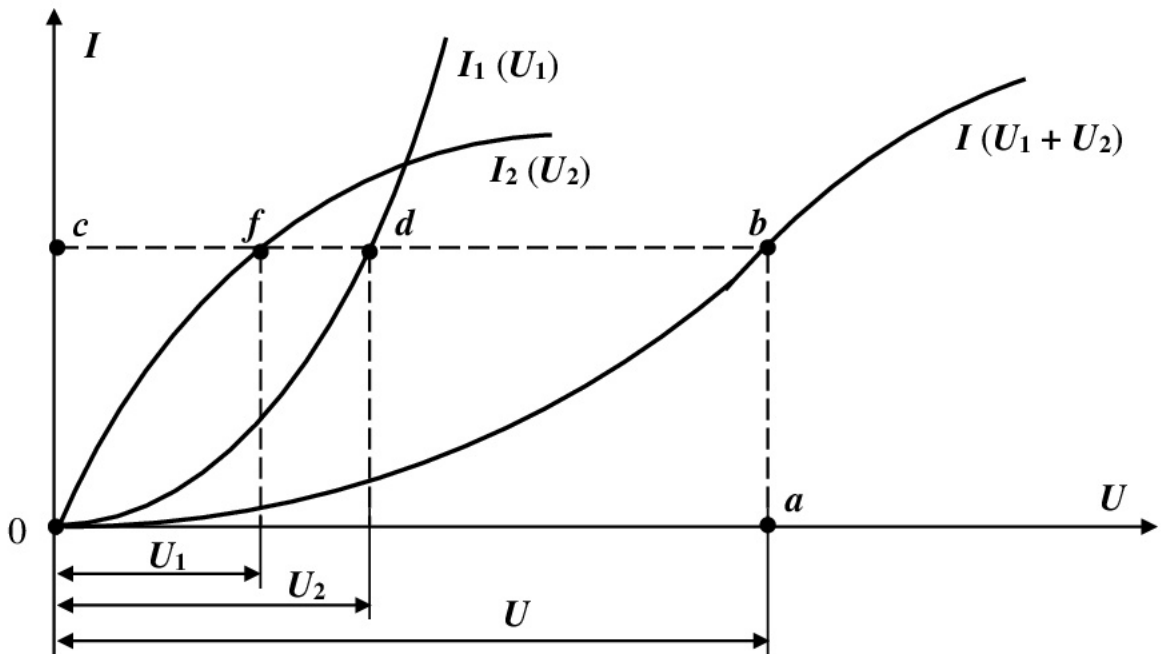


Рисунок 5 – Вольт-амперні характеристики $I_1(U_1)$ і $I_2(U_2)$ і побудова характеристики $I(U_1 + U_2)$ двох послідовно з'єднаних нелінійних елементів $r_1(I_1)$ і $r_2(I_2)$

Аналогічно розраховується коло, яке містить більшу кількість послідовно з'єднаних нелінійних елементів.

13.3. Розрахунок кіл з паралельним з'єднанням нелінійних елементів

На рисунку 6 показана розрахункова схема двох паралельно з'єднаних нелінійних елементів $r_1(I_1)$ і $r_2(I_2)$, вольт-амперні характеристики яких $I_1(U_1)$ і $I_2(U_2)$ зображені на рисунку 7.

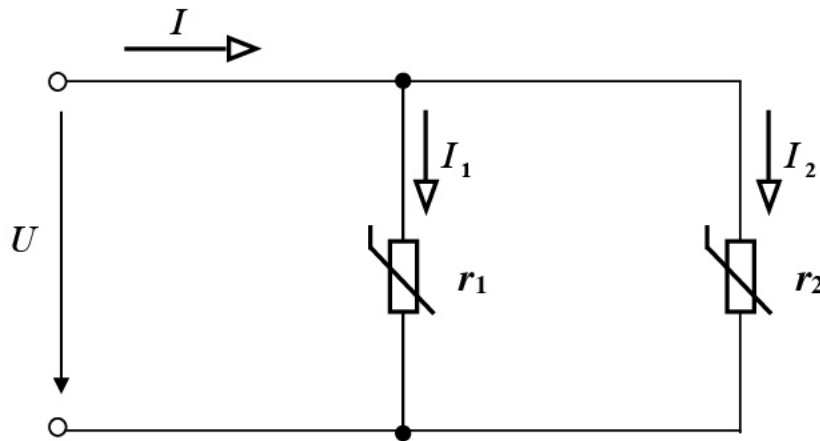


Рисунок 3 – Розрахункова схема двох паралельно з'єднаних нелінійних елементів $r_1(I_1)$ і $r_2(I_2)$

Якщо напругу на затискачах ділянки кола прийняти рівною U , то за вольт-амперними характеристиками $I_1(U_1)$ і $I_2(U_2)$ легко знайти струми I_1 і I_2 , а за допомогою рівняння за першим законом Кірхгофа $I_1 + I_2 = I$ – струм у нерозгалуженій ділянці кола. Якщо задано струм I , то для того, щоб знайти напругу U та струми I_1 і I_2 , необхідно побудувати допоміжну характеристику $I_1 + I_2 = I(U)$. Оскільки при паралель-

ному з'єднанні $U_1 = U_2 = U$, то відповідно до рівняння $I = I_1 + I_2$ необхідно скласти ординати кривих $I_1(U_1)$ і $I_2(U_2)$ для тих самих значень напруг $U_1 = U_2$. Якщо відкласти на осі ординат відрізок Oc , який у масштабі струму m_1 дорівнює струму I , а потім із точки c провести пряму лінію, паралельну осі абсцис, до перетинання з кривою $I_1 + I_2 = I(U)$, то можна легко знайти напругу $U = |Oa| \cdot m_U$. Пряма ba , проведена паралельно осі ординат до перетинання з вольт-амперними характеристиками нелінійних елементів, дозволяє безпосередньо знайти струми I_1 і I_2 .

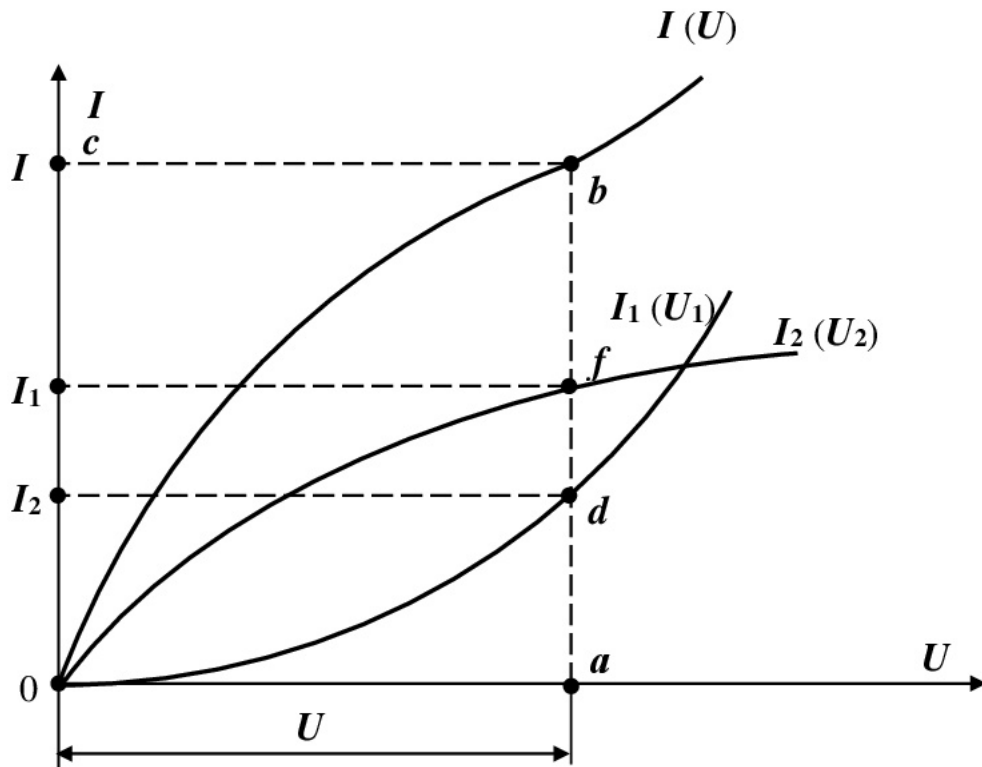


Рисунок 4 – Вольт-амперні характеристики $I_1(U_1)$ і $I_2(U_2)$ і побудова характеристики $I(U)$ двох паралельно з'єднаних нелінійних елементів $r_1(I_1)$ і $r_2(I_2)$

При змішаному з'єднанні нелінійних елементів розрахунок кола також проводиться аналогічно приведеному вище матеріалу.

ЛЕКЦІЯ 2

ТЕМА 14. МАГНІТНІ КОЛА ПРИ ПОСТІЙНИХ МАГНІТНИХ ПОТОКАХ

14.1. Явище і закон електромагнетизму

Явище електромагнетизму: навколо провідника зі струмом утворюється магнітне поле. Магнітне поле розглядають як стан середовища, яке оточує провід з електричним струмом. Воно створюється завдяки руху заряджених часток: електронів або іонів. Напрямок силових ліній магнітного поля визначається за правилом «буравчика» або «правового гвинта»: якщо утвинчувати буравчик (правий гвинт) за напрямом електричного струму, то напрям його обертання буде збігатися з напрямом силових ліній магнітного поля (рисунок 1).

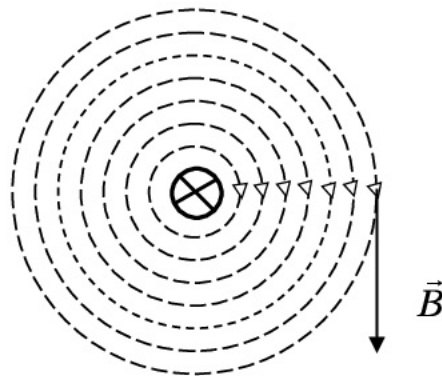


Рисунок 1 – Визначення напрямку силових ліній магнітного поля за правилом «буравчика»

Силова характеристика магнітного поля – **магнітна індукція** B . Вектор магнітної індукції в будь-якій точці магнітного поля є доти-

чна силовій лінії магнітного поля. За модулем магнітна індукція дорівнює відношенню обертаючого моменту рамки зі струмом (поміщеної в дану точку поля) до добутку площі рамки на силу струму в ній

$$B = \frac{M}{I \cdot S}, \quad (1)$$

де B – магнітна індукція, $Tл$;
 M – обертаючий момент, $H \cdot м$;
 I – сила струму, A ;
 S – площа рамки, $м^2$.

$$[B] = \frac{H \cdot м}{A \cdot м^2} = \frac{Дж}{A \cdot м^2} = \frac{B \cdot A \cdot c}{A \cdot м^2} = \frac{B \cdot c}{м^2} = Tл.$$

Для однорідного магнітного поля введене **поняття магнітного потоку**, під яким розуміється добуток магнітної індукції на площу, через яку проходить магнітне поле

$$\Phi = B \cdot S, \quad (2)$$

де Φ – магнітний потік, $Вб$;
 B – магнітна індукція, $Tл$;
 S – площа, через яку проходить магнітне поле, $м^2$.

$$[\Phi] = Tл \cdot м^2 = \frac{B \cdot c}{м^2} \cdot м^2 = B \cdot c = Вб.$$

Зв'язок між магнітним потоком, який створюється котушкою зі струмом та силою електричного струму встановлює **закон електромагнетизму: потокозчеплення** (добуток кількості витків котушки на магнітний потік) **прямо пропорційно добутку індуктивності котушки на силу електричного струму**

$$\psi = w \cdot \Phi = L \cdot I, \quad (3)$$

де ψ – потокозчеплення, Вб;

w – кількість витків котушки;

Φ – магнітний потік, Вб;

L – індуктивність котушки, Гн;

I – сила електричного струму, А.

Якщо провід з електричним струмом помістити в різні середовища, то в кожному середовищі значення магнітної індукції буде різним (рисунку 2).

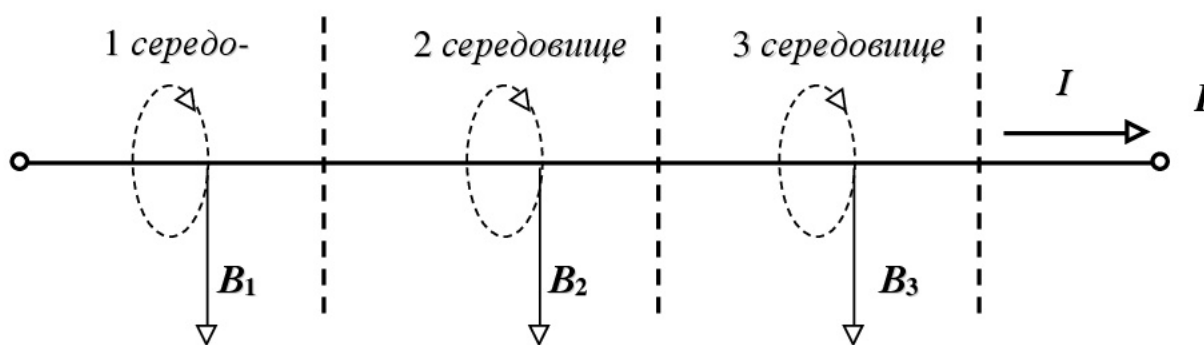


Рисунок 2 – Залежність значення магнітної індукції від середовища

Введемо поняття **напруженості магнітного поля**, під яким розуміється відношення магнітної індукції до магнітної проникності середовища

$$H = \frac{B}{\mu_c}, \quad (4)$$

де H – напруженість магнітного поля, A/m ;

B – магнітна індукція, $Tл$;

μ_c – магнітна проникність середовища, $Гн/м$.

Магнітна проникність середовища може бути знайдена так

$$\mu_c = \mu \mu_0, \quad (5)$$

де μ_c – магнітна проникність середовища, $Гн/м$;

μ – відносна магнітна проникність середовища;

μ_0 – магнітна постійна, $Гн/м$; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} Гн/м$.

14.2. Магнітне коло та його конструктивна схема

За аналогією з електричним колом під **магнітним колом розуміється** сукупність пристроїв, які забезпечують можливість створення магнітного потоку.

Магнітне коло містить магнітопровід (призначений для замикання і підсилення магнітного потоку), а також **котушку**, виконану з проводу (призначену для протікання еле-

ктричного струму і створення магнітного потоку), яка живиться від джерела постійного електричного струму. Приведемо приклад конструктивної схеми нерозгалуженого магнітного кола (рисунку 3).

Магнітопровід містить дві ділянки: перша ділянка довжиною l_1 , перетином S_1 ; друга ділянка довжиною l_2 , перетином S_2 . Котушка містить кількість витків w .

До котушки підведена напруга U , під дією якої протікає намагнічуючий струм I . В результаті буде спостерігатися явище електромагнетизму: котушка з намагнічуючим струмом I створить магнітний потік Φ .

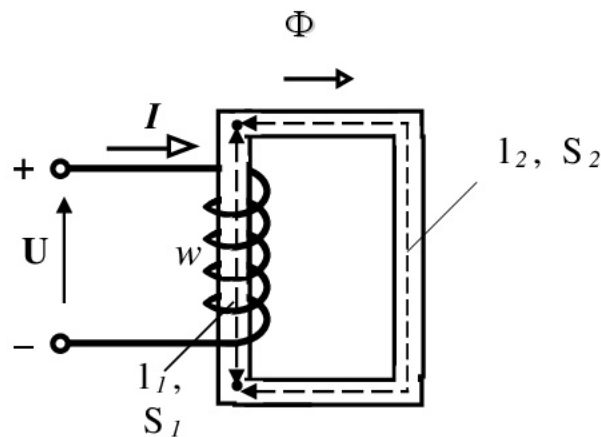


Рисунок 3 – Конструктивна нерозгалуженого магнітного кола

Для однорідного магнітного поля відомий **закон повного струму**: намагнічуюча сила (добуток кількості витків котушки на силу струму) прямо пропорційна добутку напруженості магнітного поля на довжину магнітопроводу

$$F = w I = H \cdot l , \quad (6)$$

де F – намагнічуюча сила котушки, A ;

w – кількість витків котушки;

I – сила струму, який протікає в котушці, A ;

H – напруженість магнітного поля, A/m ;

l – довжина магнітопроводу котушки, m .

З рівняння (6) можна знайти залежність напруженості магнітного поля від намагнічуючого струму:

$$H = \frac{w \cdot I}{l}. \quad (7)$$

Якщо по котушці пропускати електричний струм, змінюючи силу електричного струму від нуля до певного значення, то відповідно до виразу (4) буде змінюватися і магнітна індукція за законом:

$$B = \mu_c \cdot H. \quad (8)$$

Магнітний потік буде змінюватися за законом:

$$\Phi = \mu_c H S. \quad (9)$$

14.3. Крива намагнічування

З курсу фізики відомо, що з ростом магнітного потоку у феромагнетику його магнітна проникність буде зменшуватися. Тому залежність $\Phi = f(H)$ або $B = f(H)$ буде нелінійною. Така крива називається **кривою намагнічування** (рисунку 4), яка вперше була експеримен-

тально встановлена для м'якого заліза російським фізиком *Олександром Григоровичем Столетовим* у 1871 році.

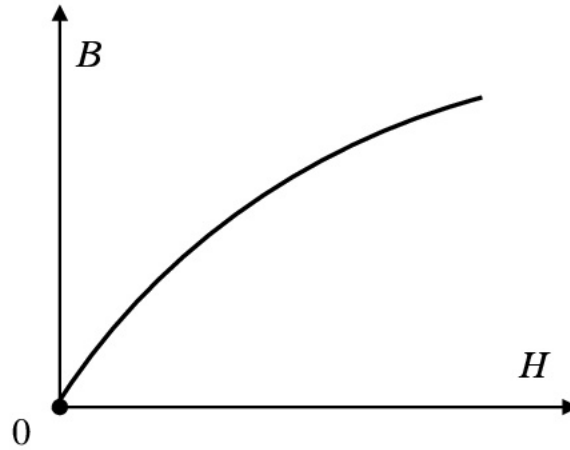


Рисунок 4 – Крива намагнічування $B = f(H)$

Як видно з кривої намагнічування на рисунку 4 з ростом напруженості поступово настає насичення феромагнітного матеріалу і магнітна індукція далі практично не зростає.

14.4. Петля гістерезису

Якщо спочатку збільшувати силу струму до режиму насичення (рисунку 5), а потім його зменшувати, то залежність $B = f(H)$ уже проходить вище (відрізок 1 рисунку 5). Для того, щоб магнітна індукція зменшилася до нуля, необхідно струм пропускати в зворотному напрямку (відрізок 2 рисунку 5). Якщо далі в зворотному напрямку пропускати струм, то поступово настає насичення (відрізок 3 рисунку 5).

Якщо тепер струм зменшувати до нуля, то залежність $B = f(H)$ буде мати вигляд відрізка 4. Змінюємо напрям струму і при певному значенні сили струму магнітна індукція дорівнює нулю (відрізок 5).

Підвищуючи силу струму далі, поступово настає насичення (відрізок б). Таким чином, ми одержали залежність $B = f(H)$ у вигляді так званої **петлі гістерезиса**.

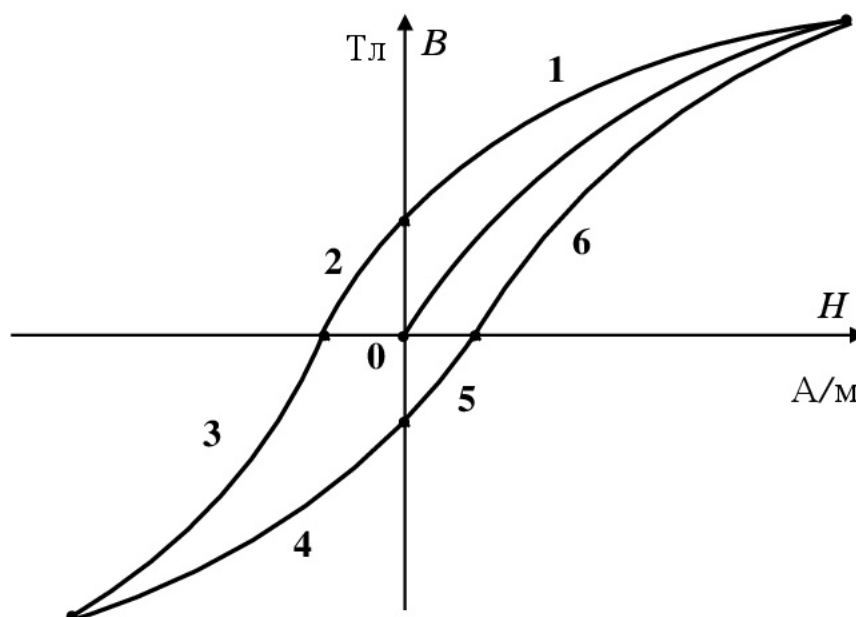


Рисунок 5 – Петля гістерезису феромагнітних матеріалів

З курсу фізики відомо, що площа петлі гістерезиса прямо пропорційна втратам енергії на перемагнічування магнітопроводу.

Для зменшення витрат потужності на гістерезис магнітопроводу електричних машин, трансформаторів та інших електротехнічних пристроїв, що містять феромагнітні магнітопроводи, виконують з холоднокатаної (м'якої) сталі, що має вузьку петлю гістерезису.

ЛЕКЦІЯ 3

14.5. Аналогія між електричними і магнітними колами

Приймемо наступну конструктивну схему нерозгалуженого магнітного поля (рисунок 1), що має дві ділянки з різними довжинами і перетинами.

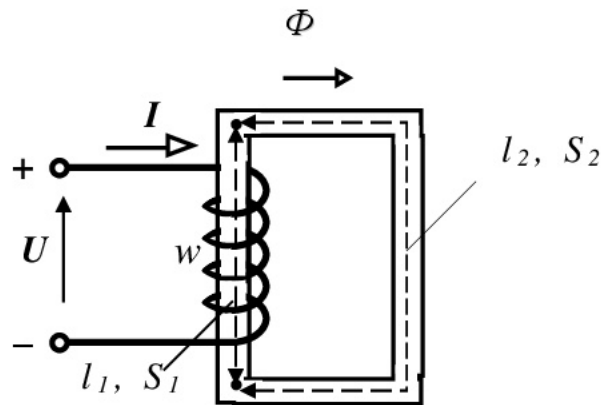


Рисунок 1 – Конструктивна нерозгалуженого магнітного кола

Запишемо рівняння для магнітного кола (рисунок 3) за законом повного струму для однорідного магнітного поля

$$wI = H_1 l_1 + H_2 l_2, \quad (1)$$

де H_1 і H_2 – відповідно напруженості магнітного поля на першій і другій ділянках, A/m ;

l_1 і l_2 – відповідно довжини першої і другої ділянок, m .

Підставимо в рівняння (1) напруженість магнітного поля, яка є відношенням магнітної індукції до магнітної проникності середовища. В результаті одержимо

$$wI = \frac{B_1}{\mu_{c1}} l_1 + \frac{B_2}{\mu_{c2}} l_2, \quad (2)$$

де B_1 і B_2 – відповідно магнітні індукції на першій і другій ділянках, $Tл$;

μ_{c1} і μ_{c2} – відповідно магнітні проникності першої і другої ділянок, $Гн/м$.

Запишемо в рівнянні (2) магнітні індукції ділянок кола через магнітний потік і перетин ділянок кола

$$wI = \Phi \frac{l_1}{\mu_{c1} S_1} + \Phi \frac{l_2}{\mu_{c2} S_2}. \quad (3)$$

Введемо поняття **магнітного опору** ділянки магнітного кола

$$R_M = \frac{l}{\mu_c S}, \quad (4)$$

де l – довжина ділянки, $м$;

S – площа поперечного перерізу ділянки, $м^2$;

μ_c – магнітна проникність ділянки магнітопроводу, $Гн/м$.

$$[R_M] = \frac{M}{\frac{\Gamma_H}{M} \cdot M^2} = \frac{1}{\Gamma_H} /$$

Перепишемо вираз (3) з урахуванням (4) у наступному вигляді

$$wI = R_{M1}\Phi + R_{M2}\Phi. \quad (5)$$

Введемо поняття **магнітної напруги** на ділянці магнітного кола

$$U_M = R_M \cdot \Phi. \quad (6)$$

Введемо поняття **намагнічуючої (магніторушійної) сили (МРС)**, під яким будемо розуміти добуток кількості витків обмотки на силу струму в ній

$$F = w \cdot I. \quad (7)$$

Перепишемо вираз (5) з урахуванням (6) і (7). В результаті одержимо наступне

$$F = U_{M1} + U_{M2}. \quad (8)$$

Таким чином, між електричними і магнітними колами існує наступна формальна аналогія:

Таблиця 1 – Аналогія між фізичними величинами електричного і магнітного поля

Електричні величини	Магнітні величини
E – електрорушійна сила	F – магніторушійна сила
R – опір електричному струму	R_M – опір магнітному потоку
I – сила електричного струму	Φ – магнітний потік
U – напруга на ділянці кола	U_M – магнітна напруга на ділянці кола

14.6. Розрахункова схема магнітного кола

За аналогією з розрахунковими схемами електричного кола складаються розрахункові схеми магнітного кола. Наприклад, для магнітного кола, приведеного на рисунку 1, розрахункова схема має вигляд, представлений на рисунку 2.

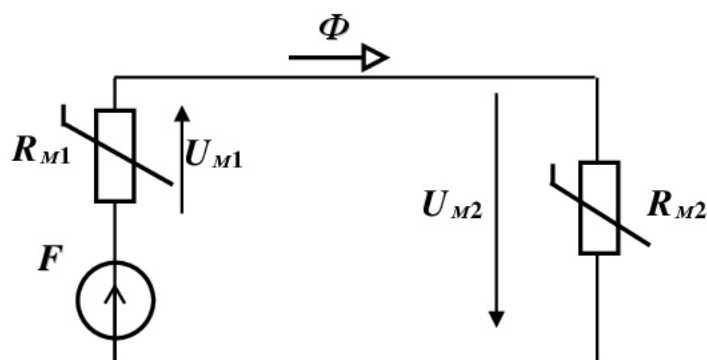


Рисунок 2 – Розрахункова схема магнітного кола

На даній схемі позначені наступні величини:

F – намагнічуюча сила або магніторушійна сила (МРС.), A ;

R_{M1} , R_{M2} – магнітні опори ділянок кола, $1/Гн$;

U_{M1} , U_{M2} – магнітні напруги на ділянках кола, A ;

Φ – магнітний потік, $Вб$.

14.7. Закони магнітних кіл

Закон Ома для ділянки магнітного кола без джерела МРС формулюється так: магнітний потік прямо пропорційний магнітній напрузі на ділянці кола і зворотно пропорційний магнітному опору ділянки кола.

Математичний запис закону

$$\Phi = \frac{U_M}{R_M}, \quad (9)$$

де Φ – магнітний потік на ділянці кола, $Вб$;

U_M – магнітна напруга на ділянці кола, A ;

R_M – магнітний опір ділянки кола, $1/Гн$.

За аналогією з електричним колом запишемо рівняння за законами Ома для магнітного кола (рисунок 2). Наприклад, для ділянки нерозгалуженого магнітного кола з магнітним опором R_{M1} даний вираз буде виглядати так

$$\Phi_1 = \frac{U_{M1}}{R_{M1}}. \quad (10)$$

Закон Ома для замкненого магнітного кола з джерелом МРС формулюється так: магнітний потік дорівнює відношенню магніторушійної сили до суми магнітних опорів кола.

Математичний запис даного закону

$$\Phi = \frac{F}{\sum R_M}, \quad (11)$$

де Φ – магнітний потік на ділянці кола, Вб;

F – магніторушійна сила, А;

$\sum R_M$ – сума магнітних опорів кола, 1/Гн.

Наприклад, для замкненого магнітного кола з однією МРС і двома ділянками з різним магнітним опором (рисунок 2) даний вираз буде виглядати так

$$\Phi = \frac{F}{R_{M1} + R_{M2}}. \quad (12)$$

Узагальнений закон Ома для магнітного кола виглядає так

$$\Phi = \frac{U_M + \sum F}{\sum R_M}, \quad (13)$$

де U_M – магнітна напруга на затисках кола, А.

$\sum F$ – алгебраїчна сума МРС у замкненому контурі кола, А.

Розглянемо розгалужене магнітне коло (рисунок 3).

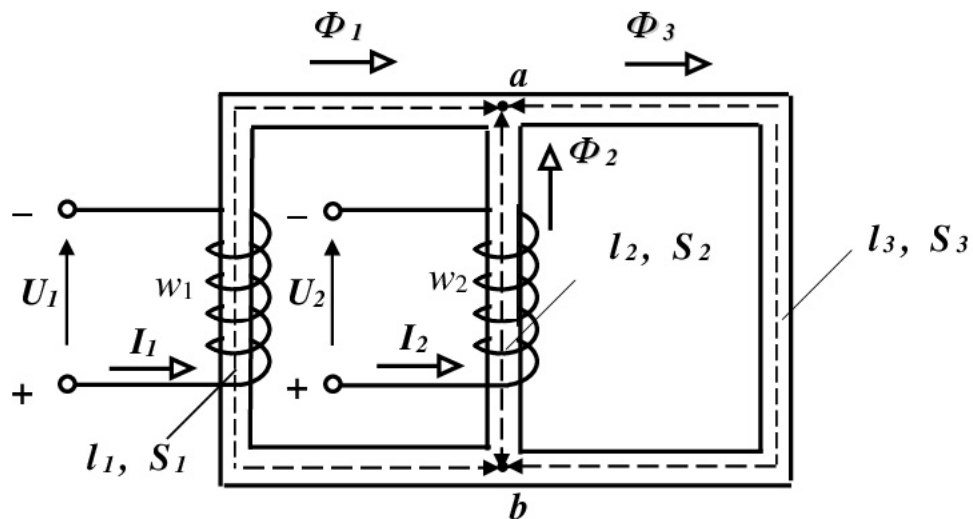


Рисунок 3 – Конструктивна схема розгалуженого магнітного кола

Складемо розрахункову схему даного розгалуженого магнітного кола (рисунок 4).

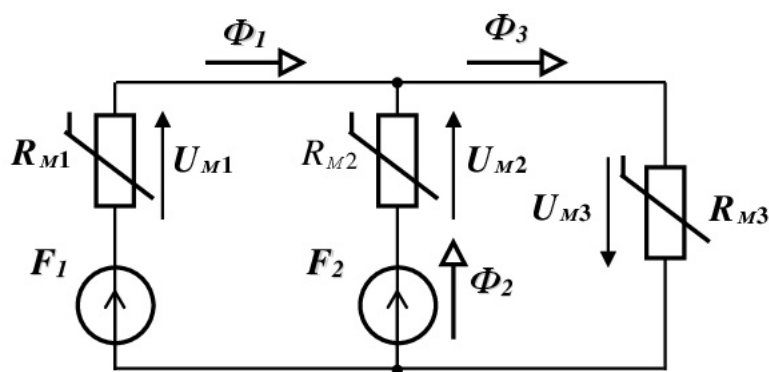


Рисунок 4 – Розрахункова схема розгалуженого магнітного кола

Перший закон Кірхгофа для розгалуженого магнітного кола формулюється так: алгебраїчна сума магнітних потоків у вузлі кола дорівнює нулю. При цьому магнітні потоки, що входять у вузол, записуються зі знаком «плюс», а магнітні потоки, що виходять з вузла, записуються зі знаком «мінус».

Математичний запис першого закону Кірхгофа:

$$\sum_{i=1}^n \Phi_i = 0. \quad (14)$$

Наприклад, для вузла a розгалуженого магнітного кола (рисунок 4), даний вираз буде виглядати так

$$\Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_3 = 0. \quad (15)$$

Другий закон Кірхгофа для замкненого контуру магнітного кола формулюється так: алгебраїчна сума магніторухійних сил у контурі дорівнює алгебраїчній сумі добутків магнітних опорів (які входять у контур) на магнітний потік (який протікає в даних опорах).

Математичний запис другого закону Кірхгофа:

$$\sum_{i=1}^n F_i = \sum_{i=1}^n R_{Mi} \Phi_i. \quad (16)$$

Наприклад, для замкнутого контуру розгалуженого магнітного кола (рисунок 4) з магнітними опорами R_{M1} , R_{M2} та джерелами магніторушійних сил F_1 , F_2 , даний вираз буде виглядати так:

$$F_1 - F_2 = R_{M1}\Phi_1 - R_{M2}\Phi_2. \quad (17)$$

14.8. Розрахунок нерозгалужених магнітних кіл

Нехай для П-подібного магнітопроводу електромагніта задані геометричні розміри, крива намагнічування та значення магнітного потоку. Необхідно визначити намагнічуючий струм, якщо відомо кількість витків w котушки (рисунок 5).

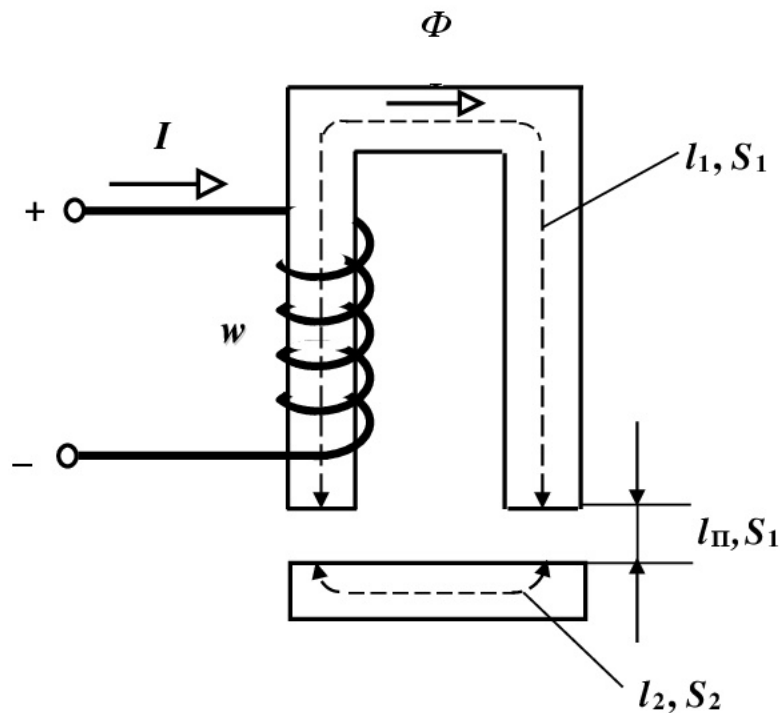


Рисунок 5– Конструктивна схема П-подібного магнітопроводу

Порядок розрахунку:

1. Позначаємо середню магнітну лінію та знаходимо довжину її окремих ділянок $l_1, 2l_{\Pi}, l_2$.

2. Складаємо еквівалентну розрахункову схему магнітного кола (рисунок 6).

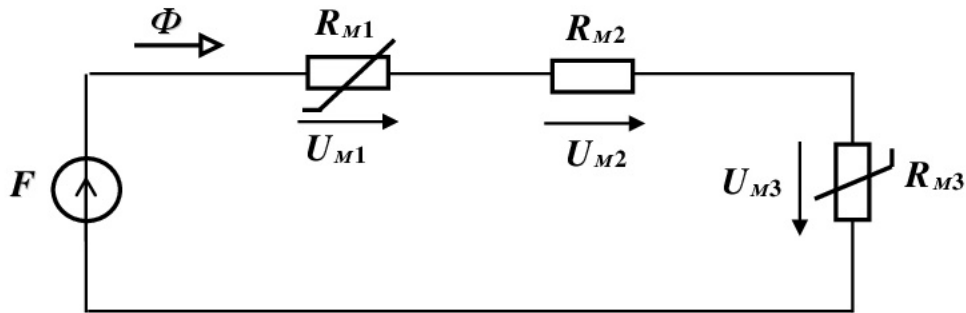


Рисунок 6 – Розрахункова схема П-подібного магнітопроводу

3. Записуємо рівняння за другим законом Кірхгофа

$$F = R_{M1} \Phi + R_{M\Pi} \Phi + R_{M2} \Phi = H_1 l_1 + 2H_{\Pi} l_{\Pi} + H_2 l_2 = w I ,$$

звідки

$$I = \frac{H_1 l_1 + 2H_{\Pi} l_{\Pi} + H_2 l_2}{w} .$$

4. Будуємо криву намагнічування $B = f(H)$ П-подібного магнітопроводу (рисунок 7)

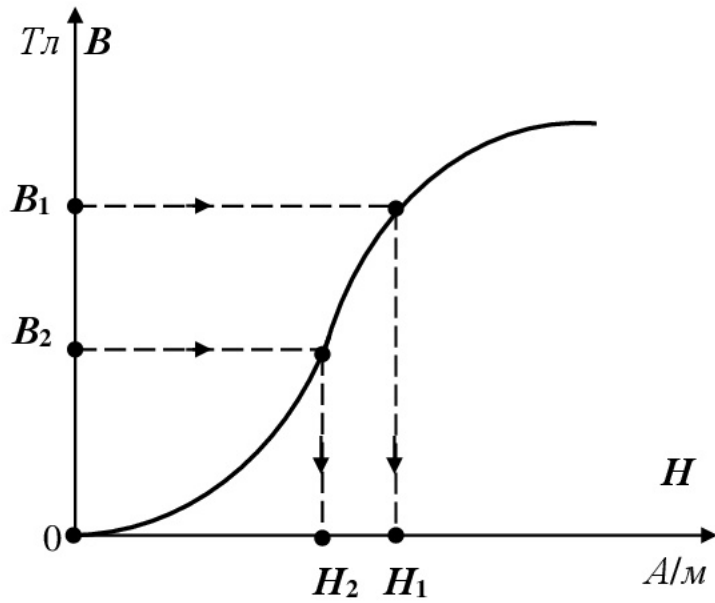


Рисунок 7 – Крива намагнічування П-подібного магнітопроводу

5. Визначаємо магнітні індукції B_1 та B_2 на окремих ділянках кола

$$B_1 = \frac{\Phi}{S_1}; \quad B_2 = \frac{\Phi}{S_2}.$$

6. За допомогою кривої намагнічування визначаємо напруженість магнітного поля H_1 та H_2 на окремих ділянках кола.

7. Визначаємо напруженість поля в повітряному прошарку

$$H_{\Pi} = \frac{B_{\Pi}}{\mu_{\Pi}}; \quad \mu_{\Pi} \approx \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м.}$$

Підставляємо знайдені значення напруженостей H_1 , H_2 та H_{Π} і визначаємо намагнічуючий струм I .

Нехай тепер задані значення намагнічуючої сили, геометричні розміри магнітопроводу, крива намагнічування. Необхідно визначити магнітний потік Φ .

Порядок розрахунку:

1. Задаємося кількома значеннями магнітного потоку і визначаємо, як і в попередньому випадку, відповідні значення намагнічуючої сили за формулою

$$F = H_1 l_1 + 2H_{II} l_{II} + H_2 l_2 .$$

2. Будуємо залежність $\Phi = f(F)$ (рисунок 8).

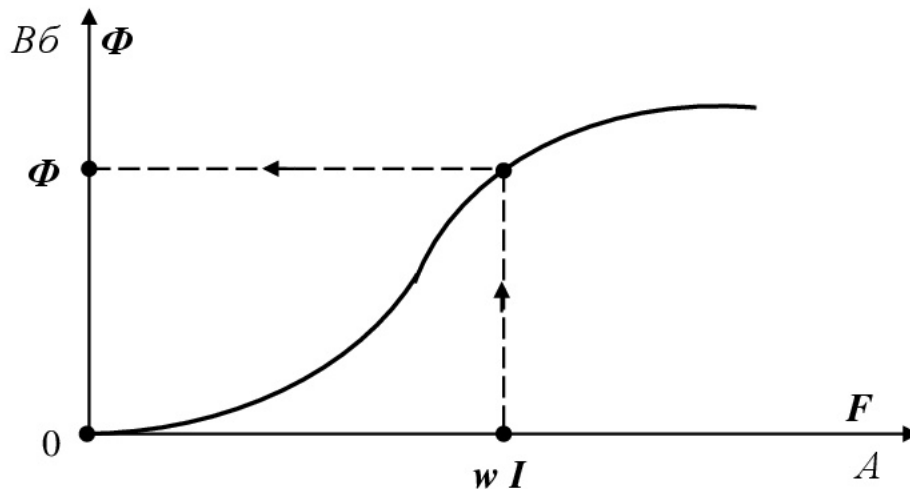


Рисунок 8 – Графік залежності магнітного потоку від намагнічуючої сили (МРС)

3. Відклавши значення заданої намагнічуючої сили, за допомогою кривої $\Phi = f(F)$ визначаємо відповідне значення магнітного потоку Φ .

ЛЕКЦІЯ 4

14.9. Розрахунок розгалужених магнітних кіл

Розрахунок розгалужених магнітних кіл ґрунтуються на застосуванні законів Кірхгофа і Ома для магнітного кола.

Для заданого магнітного кола (рисунок 1) відомі: геометричні розміри магнітопроводу l_1, S_1 , l_2, S_2 , l'_3, S_3 та l''_3, S_3 , крива намагнічування магнітопроводу з феромагнітного матеріалу $B=f(H)$, магнітний потік Φ_3 . Необхідно знайти намагнічуючу силу F .

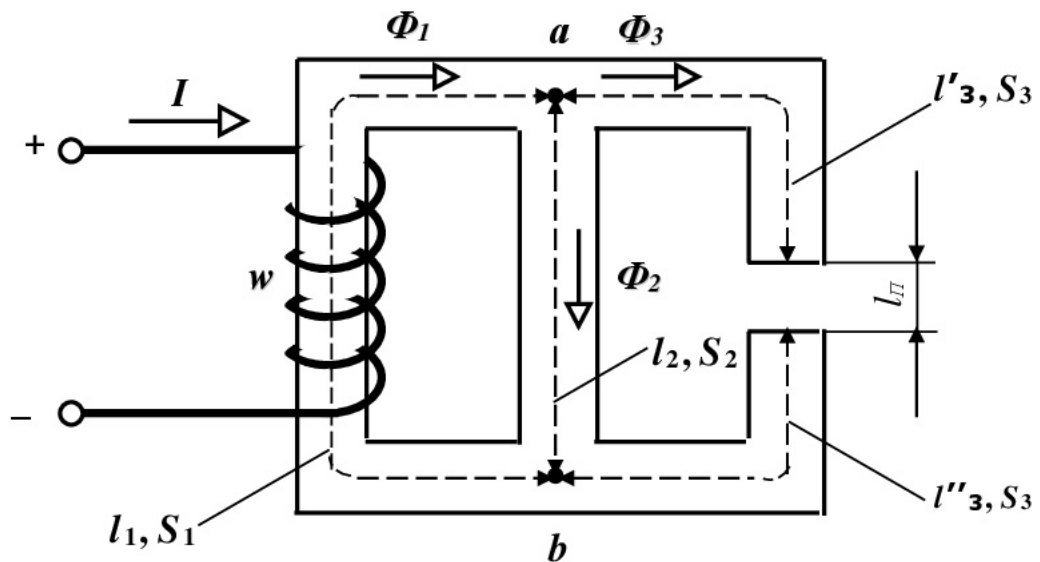


Рисунок 1 – Конструктивна схема заданого розгалуженого магнітного кола

Порядок розрахунку:

1. Складаємо еквівалентну розрахункову схему магнітного кола (рисунок 1) і вибираємо умовно позитивні напрямки магнітних потоків (рисунок 2).

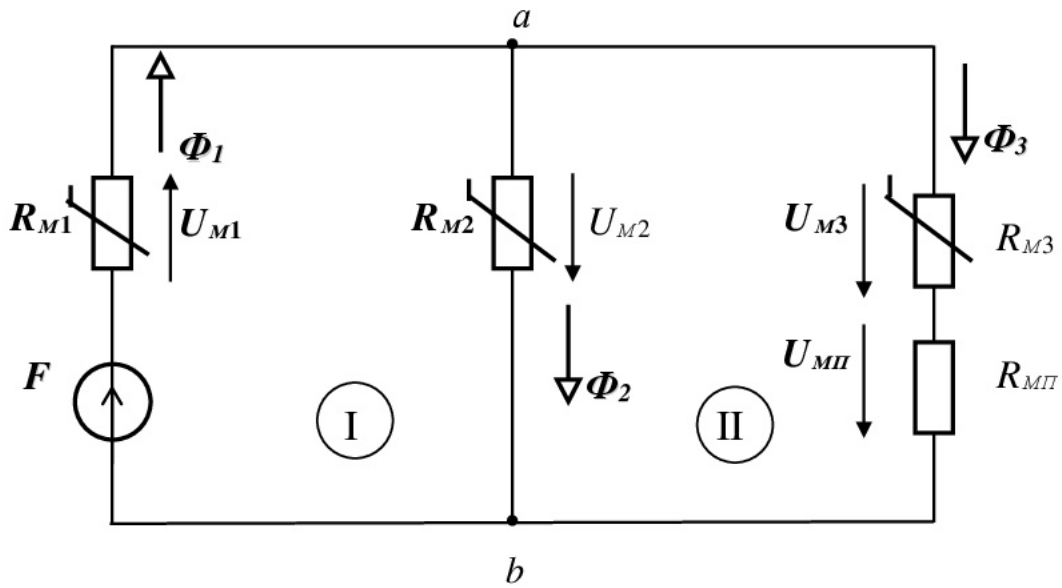


Рисунок 2 – Розрахункова схему розгалуженого магнітного кола

2. Для визначення намагнічуючої сили запишемо рівняння за другим законом Кірхгофа для першого контуру (I)

$$F = R_{M1} \Phi_1 + R_{M2} \Phi_2 \quad (1)$$

або за законом повного струму

$$F = H_1 l_1 + U_{M.ab} \quad (2)$$

Таким чином, задача зводиться до визначення H_1 та $U_{M.ab}$.

3. Магнітна напруга на ділянці ab для другого контуру (II)

$$U_{M.ab} = R_{M3} \Phi_3 + R_{M\Pi} \Phi_3 \quad (3)$$

або

$$U_{M.ab} = H_3 l_3 + H_{II} l_{II} , \quad (4)$$

де l_3 – довжина середньої лінії на третій ділянці $l_3 = l'_3 + l''_3$.

Знаючи Φ_3 , визначаємо $B_3 = \frac{\Phi_3}{S_3}$, а потім за допомогою кривої

намагнічування знаходимо H_3 . Оскільки $H_{II} = \frac{B_3}{\mu_0}$, то підставивши

значення, знаходимо $U_{M.ab}$.

4. Напруженість H_1 знаходимо за допомогою кривої намагнічування, визначивши спочатку магнітну індукцію $B_1 = \frac{\Phi_1}{S_1}$. Магнітний потік $\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3$. При цьому $\Phi_2 = B_2 S_2$. Для визначення магнітної індукції B_2 спочатку знаходимо напруженість магнітного поля на ділянці l_2 , скориставшись законом Ома

$$U_{M.ab} = R_{M2} \Phi_2 = H_2 l_2 . \quad (5)$$

звідки

$$H_2 = \frac{U_{M.ab}}{l_2} . \quad (6)$$

За допомогою кривої намагнічування знаходимо магнітну індукцію B_2 та розраховуємо магнітний потік Φ_2 . Після чого визначаємо магнітну індукцію B_1 за формулою $B_1 = \frac{\Phi_1}{S_1}$ та напруженість H_1 за допомогою кривої намагнічування.

5. За знайденими значеннями розраховуємо намагнічуючу силу F за формулою (2).

Нехай тепер задані всі геометричні розміри магнітопроводу, крива намагнічування і намагнічуюча сила. Необхідно знайти всі магнітні потоки в розгалуженнях кола.

Порядок розрахунку:

1. Складаємо розрахункову схему кола і вибираємо умовно позитивні напрями магнітних потоків.

2. Для вузла a записуємо рівняння за першим законом Кірхгофа

$$\Phi_1 - \Phi_2 - \Phi_3 = 0 \text{ або } \Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3 . \quad (7)$$

3. Оскільки коло нелінійне, задачу вирішуємо графоаналітичним методом. Для цього спочатку будемо допоміжні характеристики $\Phi_1 = f(U_{M.ab})$; $\Phi_2 = f'(U_{M.ab})$; $\Phi_3 = f''(U_{M.ab})$.

Для першого розгалуження за законом Ома можемо записати

$$\Phi_1 = \frac{(\varphi_{M.a} - \varphi_{M.b}) + F}{R_{M1}} = \frac{-U_{M.ab} + F}{R_{M1}} , \quad (8)$$

звідки

$$U_{M.ab} = F - R_{M1} \Phi_1 \quad (9)$$

або

$$U_{M.ab} = F - H_1 l_1 . \quad (10)$$

Щоб побудувати допоміжну характеристику $\Phi_1 = f(U_{M.ab})$, даємося кількома значеннями магнітної індукції B_1 , визначаємо за допомогою кривої намагнічування напруженість магнітного поля H_1 , потім магнітну напругу $U_{M.ab}$ та відповідні значення магнітного потоку Φ_1 .

Для другого розгалуження за законом Ома можемо записати

$$\Phi_2 = \frac{\varphi_{M.a} - \varphi_{M.b}}{R_{M2}} = \frac{U_{M.ab}}{R_{M2}} , \quad (11)$$

звідки

$$U_{M.ab} = R_{M2} \Phi_2 \quad (12)$$

або

$$U_{M.ab} = H_2 l_2 . \quad (13)$$

Щоб побудувати допоміжну характеристику $\Phi_2 = f'(U_{M.ab})$, даємося кількома значеннями магнітної індукції B_2 , визначаємо за допомогою кривої намагнічування напруженість магнітного поля H_2 , потім магнітну напругу $U_{M.ab}$ та відповідні значення магнітного потоку Φ_2 .

Для третього розгалуження за законом Ома можемо записати

$$\Phi_3 = \frac{\varphi_{M.a} - \varphi_{M.b}}{R_{M3} + R_{M.\Pi}} = \frac{U_{M.ab}}{R_{M3} + R_{M.\Pi}}, \quad (14)$$

звідки

$$U_{M.ab} = R_{M3}\Phi_3 + R_{M.\Pi}\Phi_3. \quad (15)$$

або

$$U_{M.ab} = H_1 l_1 + H_\Pi l_\Pi. \quad (16)$$

Щоб побудувати допоміжну характеристику $\Phi_3 = f''(U_{M.ab})$, задаємося кількома значеннями магнітної індукції B_3 , визначаємо за допомогою кривої намагнічування напруженість магнітного поля H_3 , потім магнітну напругу $U_{M.ab}$ та відповідні значення магнітного потоку Φ_3 .

Всі отримані залежності наносимо на одну площину (рисунку 3).

За першим законом Кірхгофа $\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3$. Тому будуємо допоміжну характеристику $\Phi_2 + \Phi_3 = f'''(U_{M.ab})$.

Точка перетинання «а» кривих $\Phi_1 = f(U_{M.ab})$ та $\Phi_2 + \Phi_3 = f'''(U_{M.ab})$ визначає магнітну напругу $U_{M.ab}$. Проводимо через точку перетинання a пряму, паралельну вісі магнітного потоку Φ .

Потім визначаємо магнітні потоки Φ_1, Φ_2, Φ_3 .

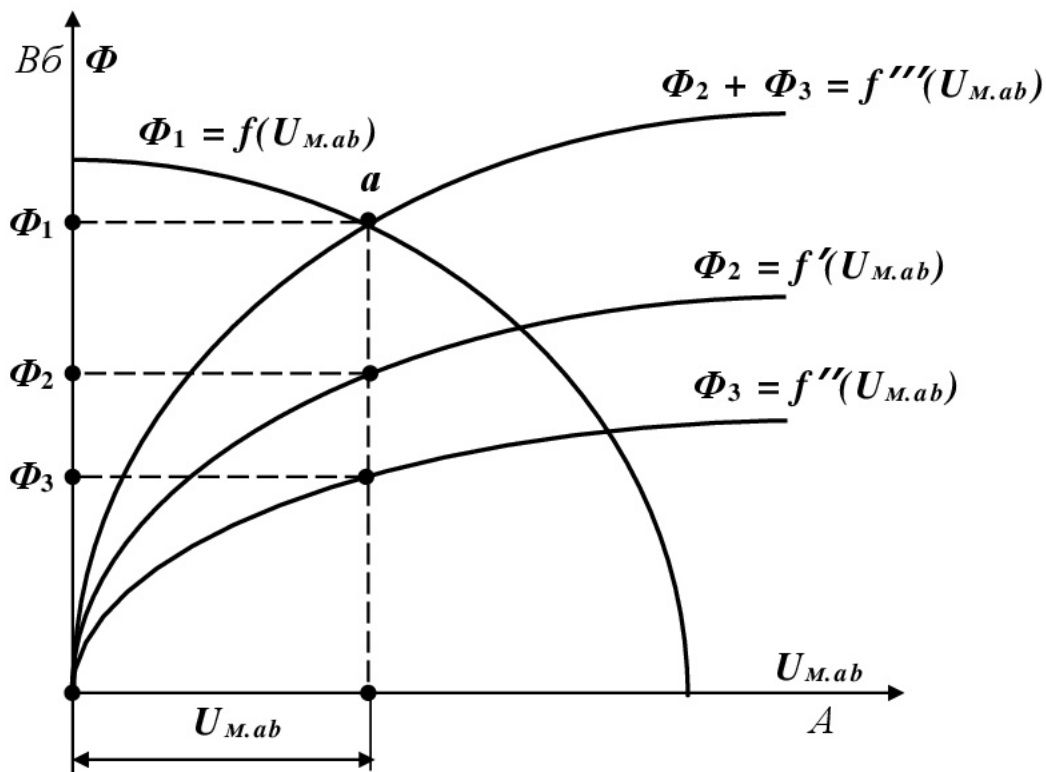


Рисунок 3 – Побудова залежностей $\Phi_1 = f(U_{M.ab})$,
 $\Phi_2 = f'(U_{M.ab})$, $\Phi_3 = f''(U_{M.ab})$, $\Phi_2 + \Phi_3 = f'''(U_{M.ab})$ і
 визначення магнітних потоків

14.10. Електромагніти та їх розрахунок

Електромагніти широко застосовуються в техніці. Вони служать для створення магнітного поля в електродвигунах, електродвигунах, трансформаторах, електровимірювальних приладах, електричних апаратах, а також для створення стискальних зусиль.

Електромагніт, призначений для стискальних зусиль, складається з нерухомого осердя (магнітопрово-

ду), рухливого якоря (магнітопроводу) та котушок збудження (виконаних із провідників). Котушки розташовані на осердді, а осердя відділене від якоря повітряним зазором (рисунок 4).

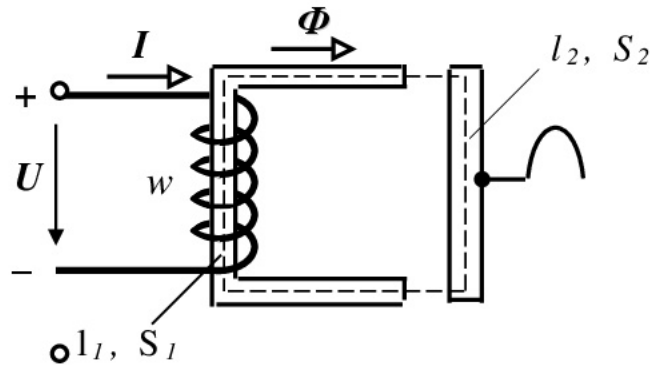


Рисунок 4 – Конструктивна схема електромагніту, призначеного для стискальних зусиль

Піднімальна сила електромагніта визначається за формулою

$$F_{EMM} = \frac{B^2 \cdot S}{2\mu_0}, \quad (17)$$

- де F_{EMM} – піднімальна сила електромагніта, H ;
 S – загальна площа поперечного перерізу полюсів електромагніта, m^2 .
 B – магнітна індукція, $Tл$;
 μ_0 – магнітна постійна, $Гн/м$.

ЛЕКЦІЯ 5

ТЕМА 15 НЕЛІНІЙНІ КОЛА ЗМІННОГО СТРУМУ

15.1. Загальні положення

Для лінійних кіл змінного струму залежності між напругою і струмом в активному опорі $u(i)$, між магнітним потоком і струмом в індуктивності $\Phi(i)$, між зарядом і напругою в ємності $q(u)$ мають лінійний характер (рисунок 1).

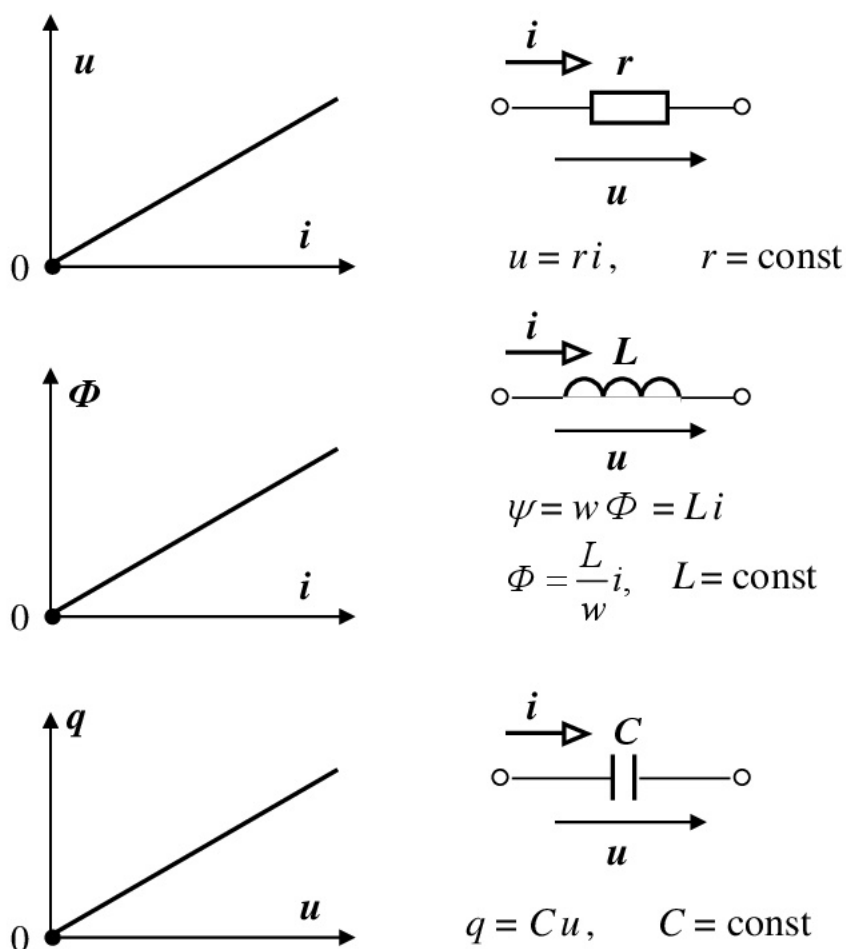


Рисунок – Графіки лінійних елементів і залежності між параметрами і величинами

Для нелінійних кіл – нелінійний характер, наприклад, на рисунку 2. Вебер-амперна характеристика нелінійного елемента.

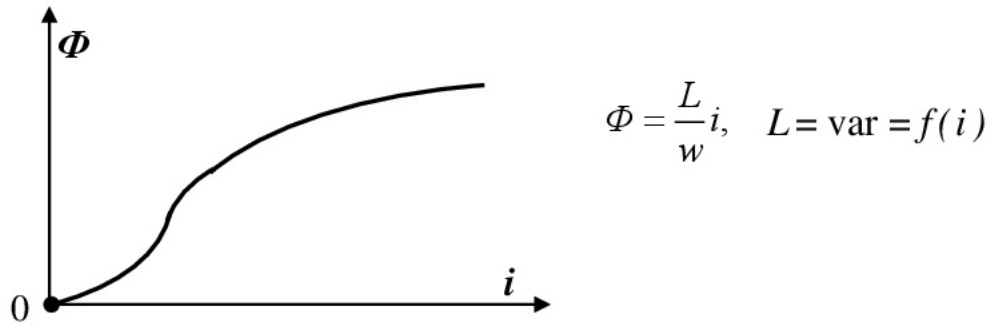


Рисунок 2 – Вебер-амперна характеристика нелінійного елемента

15.2. Нелінійна індуктивність

Розглянемо котушку з феромагнітним осердям, включену в коло постійного струму (рисунок 3).

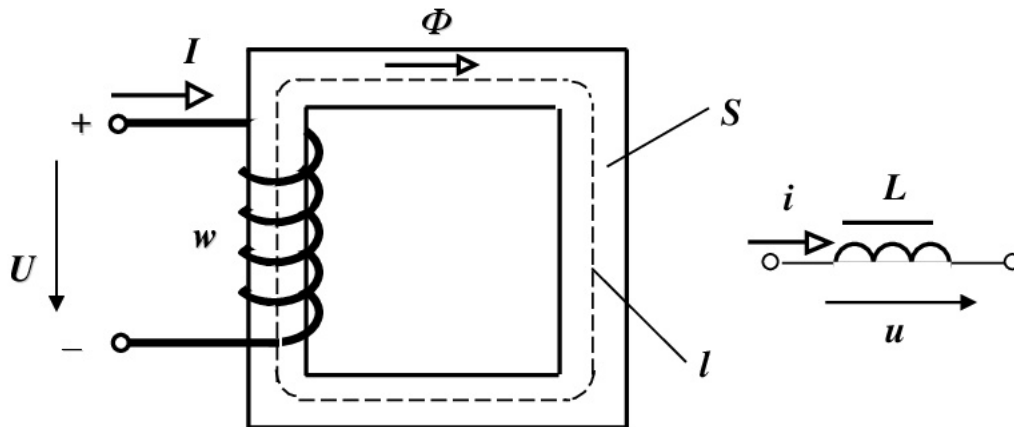


Рисунок 3 – Конструктивна схема та умовно графічне і літерне позначення котушки з феромагнітним осердям колі постійної ЕРС

При цьому будемо вважати, що магнітний потік, який замикається частково по повітрю (потік розсіювання), дорівнює нулю.

Запишемо основні співвідношення, одержані раніше:

$$\Phi = \frac{F}{R_m} = \frac{wi}{R_m}; \quad R_m = \frac{l}{\mu\mu_0 S}; \quad \psi = w\Phi = Li;$$

$$L = \frac{w\Phi}{i} = \frac{w^2}{R_m} = \frac{w^2 \mu\mu_0 S}{l}. \quad (1)$$

Знайдемо залежність $\Phi(I)$. Відомо, що $B = \frac{\Phi}{S}$, $H = \frac{wI}{l}$. Оскільки S , w , l – величини постійні, то залежність $\Phi(I)$ аналогічна залежності $B(H)$, тобто повторює криву намагнічування (рисунок 4.).

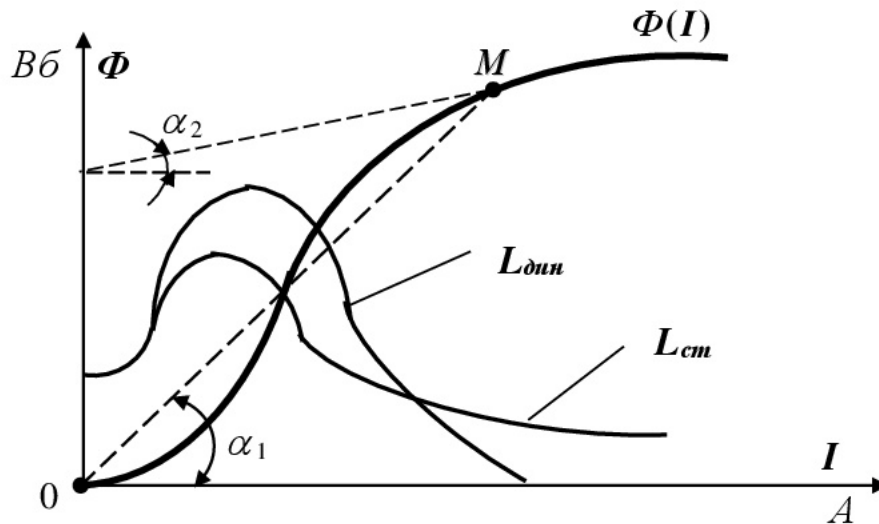


Рисунок 4 – Залежності магнітного потоку та статичної і динамічної індуктивностей від струму

Індуктивність котушки, як видно з формули, залежить тільки від змінної частини $\mu\mu_0 = \frac{B}{H}$. Якщо струм збільшувати, то збільшиться напруженість магнітного поля, а відповідно і магнітна індукція B . Але магнітна індукція на нелінійній частині характеристики збільшується не пропорційно напруженості. Так, в області, близької до насичення, магнітна індукція збільшується менше в порівнянні зі збільшенням напруженості, а це значить, що зменшується й індуктивність L .

Кожній точці характеристики $\Phi(I)$ відповідає певне значення статичної індуктивності

$$L_{cm} = w \frac{\Phi}{I} = m_L \operatorname{tg} \alpha_1 \quad (2)$$

і динамічної індуктивності

$$L_{дин} = w \frac{d\Phi}{dI} = m_L \operatorname{tg} \alpha_2 \quad (3)$$

де m_L – масштаб індуктивності, $\Gamma\text{н}/\text{см}$.

15.3. Ідеальна котушка з феромагнітним осердям у колі змінного струму

Підключимо ідеальну котушку з феромагнітним осердям до джерела змінного синусоїдного струму. При цьому будемо вважати, що ідеальна котушка з феромагнітним осердям не має петлі гістерези-

са, активний опір її дорівнює нулю, магнітний потік розсіювання відсутній (рисунок 5).

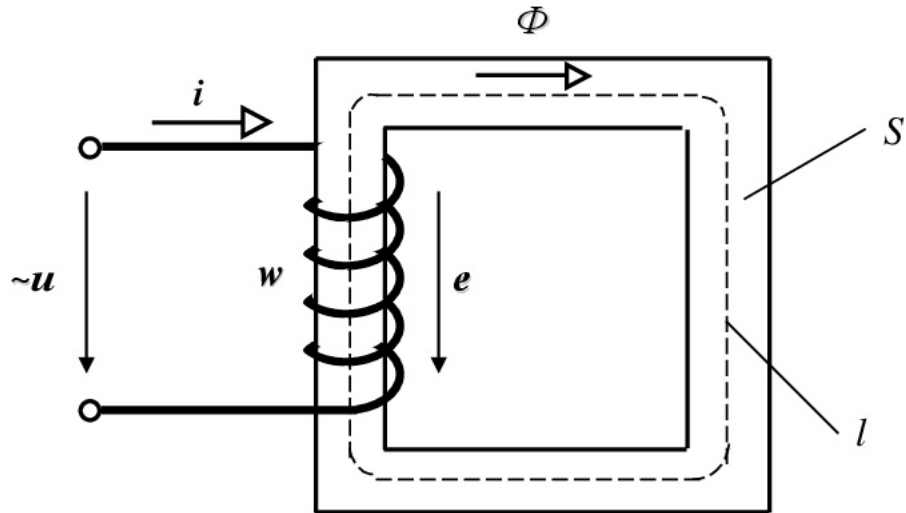


Рисунок 5 – Конструктивна схема котушки з феромагнітним осердям в колі синусоїдної напруги

Запишемо основні співвідношення для цього випадку

$$\Phi = \frac{F}{R_m} = \frac{wi}{R_m}; \quad R_m = \frac{l}{\mu\mu_0 S}; \quad \psi = w\Phi = Li;$$

$$L = \frac{w\Phi}{i} = \frac{w^2}{R_m} = \frac{w^2\mu\mu_0 S}{l}. \quad (4)$$

Залежність $\Phi(i)$ для котушки з феромагнітним осердям така ж, як і $\Phi(I)$ (рисунок 4).

Розглянемо форму кривої струму в колі з нелінійною індуктивністю при синусоїдній напрузі джерела. Припустимо, що на-

пруга джерела має початкову фазу 90^0 і рівняння миттєвого значення

$$u = U_m \sin(\omega t + 90^\circ). \quad (5)$$

Зневажаючи активним опором котушки з феромагнітним осердям і магнітним потоком розсіювання, можемо записати:

$$u = -e; \quad e = -w \frac{d\Phi}{dt}; \quad (6)$$

$$U_m \sin(\omega t + 90^\circ) = w \frac{d\Phi}{dt}, \quad (7)$$

звідки

$$d\Phi = \frac{U_m}{w} \sin(\omega t + 90^\circ) dt;$$

$$\Phi = \frac{U_m}{\omega w} \sin \omega t = \Phi_m \sin \omega t. \quad (8)$$

Таким чином, при синусоїдній напрузі магнітний потік також синусоїдний.

Для знаходження кривої струму в котушці з феромагнітним осердям, скористаємося залежностями $\Phi(t)$ і $\Phi(i)$ та побудуємо залежність $i(t)$ графічним способом (рисунок б).

Отже, крива струму несинусоїдна. Замінімо її еквівалентною синусоїдою (7)

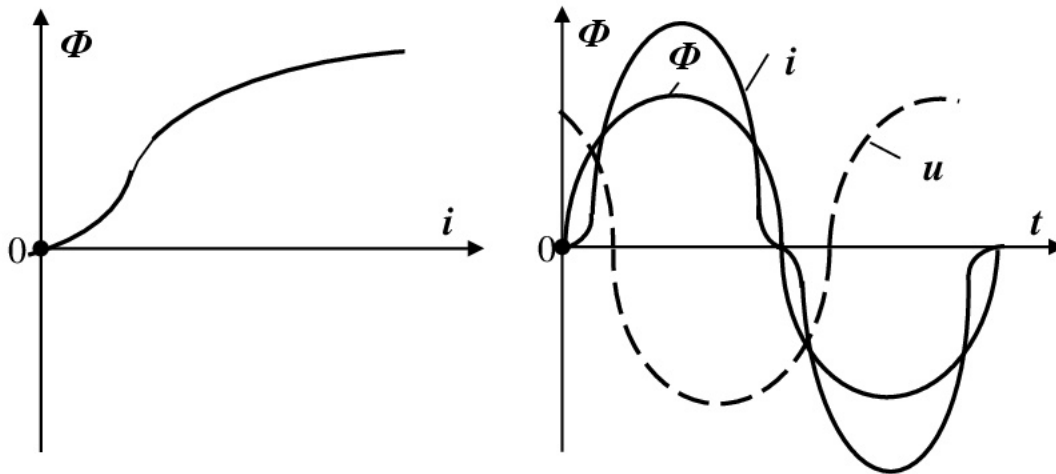


Рисунок 6 – Графічні залежності $\Phi(i)$, $i(t)$, $\Phi(t)$, $u(t)$ в ідеальній котушці з феромагнітним осердям

$$i = I_m \sin \omega t; \quad I_m = \sqrt{2} \cdot I, \quad (9)$$

де I – діюче значення несинусоїдного струму, A ;

Рівняння миттєвої електрорушійної сили самоіндукції в котушці з феромагнітним осердям

$$e = E_m \sin(\omega t - 90^\circ). \quad (10)$$

Запишемо рівняння для ідеальної котушки з феромагнітним осердям

$$\dot{U} = jxI_p, \quad (11)$$

де I_p – реактивний (намагнічуючий) струм, A ;

$x = \omega \cdot L$ – індуктивний опір, Om ,

L – еквівалентна індуктивність, $Гн$.

Потокозчеплення котушки

$$\psi = w\Phi = LI_p. \quad (12)$$

Побудуємо векторну діаграму ідеальної котушки з феромагнітним осердям та складемо її схему заміщення (рисунок 7).

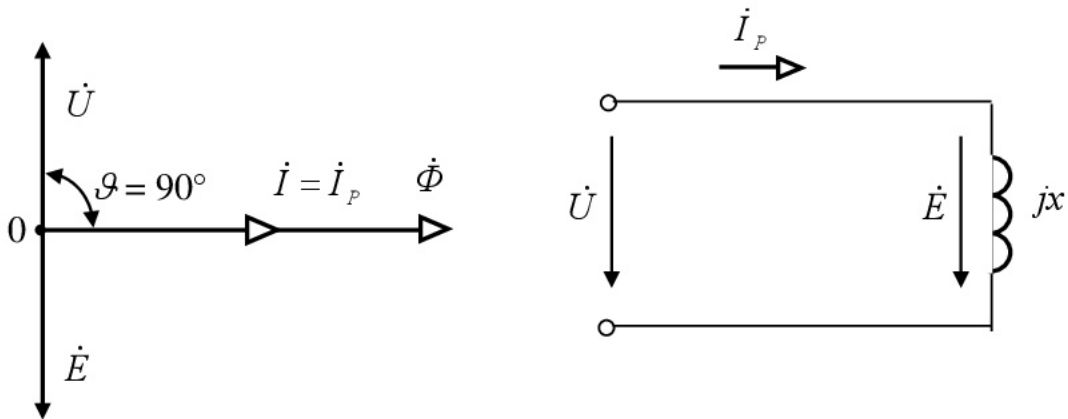


Рисунок 7 – Векторна діаграма і розрахункова схема ідеальної котушки з феромагнітним осердям

Розглянемо тепер котушку з феромагнітним осердям з **урахуванням петлі гістерезиса**.

Якщо несинусоїдну криву струму замінити еквівалентною синусоїдою, то можна записати вирази миттєвих: напруги сили струму, магнітного потоку і ЕРС самоіндукції ідеальної котушки з феромагнітним осердям з урахуванням петлі гістерезису

$$u = U_m \sin(\omega t + 90^\circ);$$

$$i = I_m \sin(\omega t + \delta),$$

(13)

$$\Phi = \Phi_m \sin \omega t ;$$

$$e = E_m \sin(\omega t - 90^\circ) .$$

де δ – кут втрат у котушці. Дорівнює $\delta = 90^\circ - \varphi$.

Якщо побудувати криву струму в цьому випадку на базі залежностей $\Phi(t)$ і $\Phi(i)$, яка має форму петлі гістерезиса, то одержимо несиносоїдну форму кривої струму (рисунок 8). Крива струму випереджає синусоїду магнітного потоку на кут втрат у котушці δ .

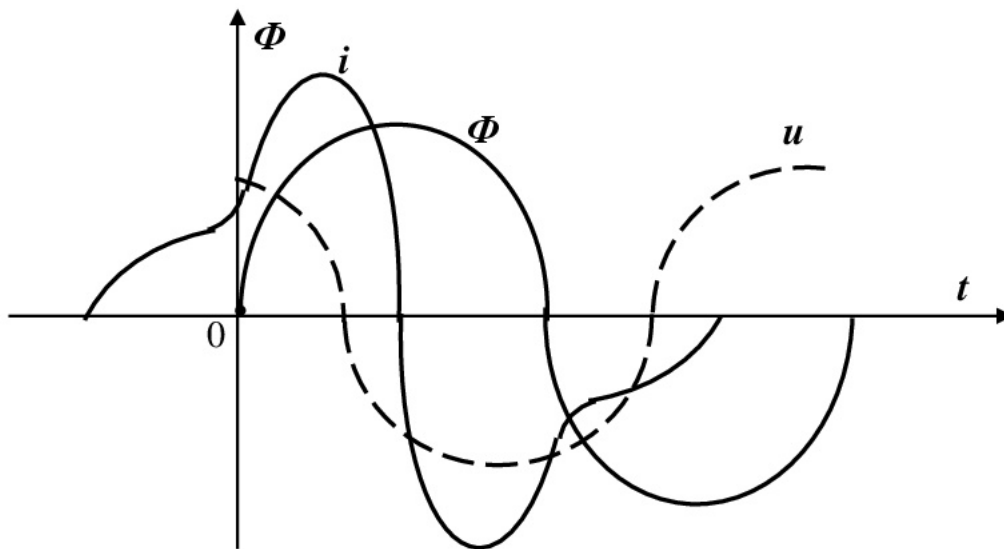


Рисунок 8 – Залежності $i(t)$, $\Phi(t)$, $u(t)$ в ідеальній котушці з ферромагнітним осердям з урахуванням петлі гістерезису

Побудуємо векторну діаграму напруги і струмів котушки з ферромагнітним осердям з урахуванням петлі гістерезису та складемо її схему заміщення для цього випадку (рисунок 9).

На схемі I_a – активна складова струму (втрати на вихрові струми і гістерезис), I_p – реактивна складова струму (основний магнітний потік).

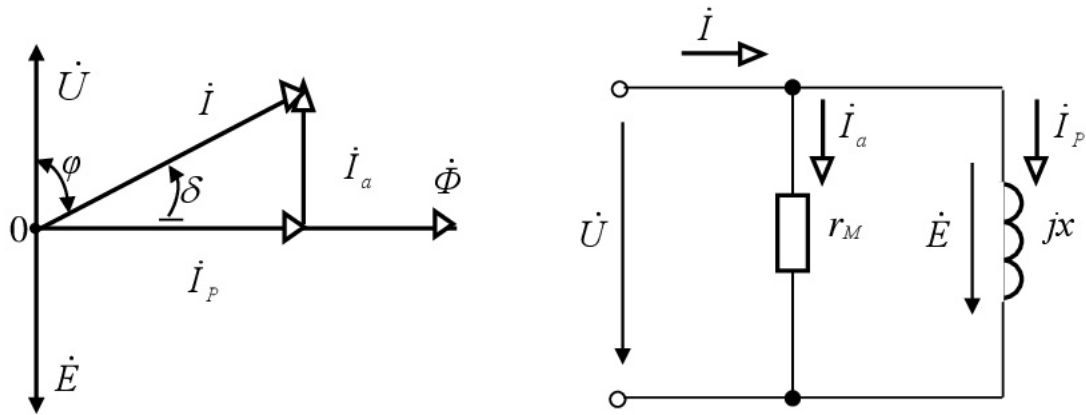


Рисунок 9 – Векторна діаграма та і розрахункова схема ідеальної котушки з феромагнітним осердям

На схемі (рисунок 9) I_a – активна складова струму характеризує втрати в магнітопроводі на вихрові струми і гістерезис, I_p – реактивна складова струму – створює основний магнітний потік.

Поява в схемі активного опору магнітопроводу r_m (активний опір проводу котушки дорівнює нулю) обумовлена споживанням котушкою з феромагнітним осердям активної потужності, яка втрачається на гістерезис і вихрові струми у магнітопроводі.

ЛЕКЦІЯ 6

15.4. Втрати активної потужності на гістерезис

Активна потужність, яку споживає ідеальна котушка, дорівнює

$$P_r = \frac{1}{T} \int_0^T u \cdot i \cdot dt . \quad (1)$$

Якщо вважати, що активний опір котушки дорівнює нулю, то прикладена напруга врівноважується ЕРС самоіндукції e , тобто

$$u = -e = w \frac{d\Phi}{dt} \quad (2)$$

У свою чергу $\Phi = B \cdot S$, тоді

$$u = w \cdot S \frac{dB}{dt} \quad (3)$$

Струм у котушці знайдемо, використовуючи закон повного струму

$$i = \frac{Hl}{w} . \quad (4)$$

Тоді втрати потужності на гістерезис

$$P_r = \frac{1}{T} \int_0^T wS \frac{dB}{dt} \cdot \frac{Hl}{w} dt = \frac{Sl}{T} \oint H dB = fV \oint H dB . \quad (5)$$

де V – об'єм осердя магнітопроводу, m^3 ;

f – частота струму, $Гц$.

Якщо розглянути петлю гістерезиса (рисунок 1), то її площа дорівнює $\oint H dB$. Таким чином, **втрати активної потужності на гістерезис прямо пропорційні частоті струму, об'єму осердя та площі петлі гістерезиса**. Для зменшення втрат активної потужності на гістерезис треба магнітопроводи виготовлять з феромагнітного матеріалу, що має вузьку петлю гістерезису. Вперше, вивчаючи феромагнітні матеріали і ряд закономірностей їх намагнічування, відкрив петлю гістерезиса О.Г. Столетов.

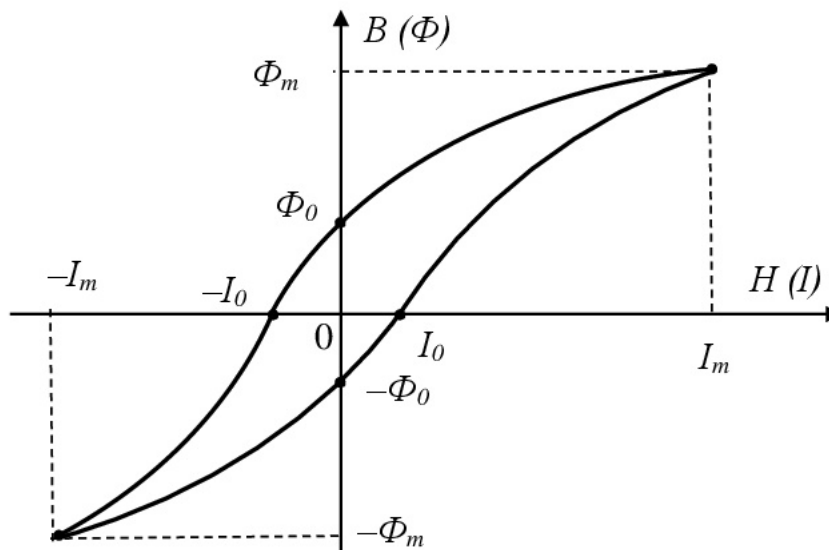


Рисунок 1 – Петля гістерезису феромагнітних матеріалів

На рисунку 1: Φ_0 і $-\Phi_0$ – залишковий магнітний потік у феромагнітному магнітопроводі котушки; I_0 і $-I_0$ – коерцитивна сила струму (*coercitio* – від *лат.* утримування).

В іншому вигляді можемо записати

$$P_r = r_{mr} I_a^2, \quad (6)$$

де r_{mr} – еквівалентний активний опір магнітопроводу, за допомогою якого враховуються втрати активної потужності на гістерезис, Ом;

P_r – втрати активної потужності на гістерезис, Вт.

15.5. Втрати активної потужності на вихрові струми

Змінний струм, який проходить по котушці, створює в магнітопроводі змінний магнітний потік (рисунок 2).

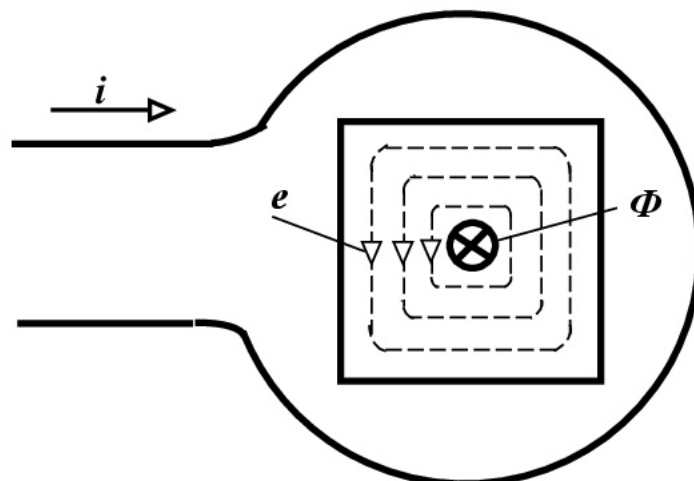


Рисунок 2 – Напрями ЕРС і магнітного потоку в залежності від напрямку струму в котушці

Останній наводить у осерді електрорушійну силу (ЕРС), під дією якої виникають вихрові струми, які замикаються по симетричних контурах. Ці вихрові струми нагрівають сталеве осердя, тобто в осерді мають місце втрати активної потужності. Крім цього, вихрові струми, які мають напрям, протилежний напрямку струму в провіді котушки, розмагнічують внутрішню частину осердя.

Для зменшення цих негативних явищ осердя складається з окремих ізольованих одна від іншої пластин (рисунок 3). При цьому опір проходженню вихрових струмів різко зростає, тому ці струми стають незначними. У цілому **втрати активної потужності на вихрові струми прямо пропорційні квадрату частоти струму, товщині окремих листів електротехнічної сталі та магнітній індукції.**

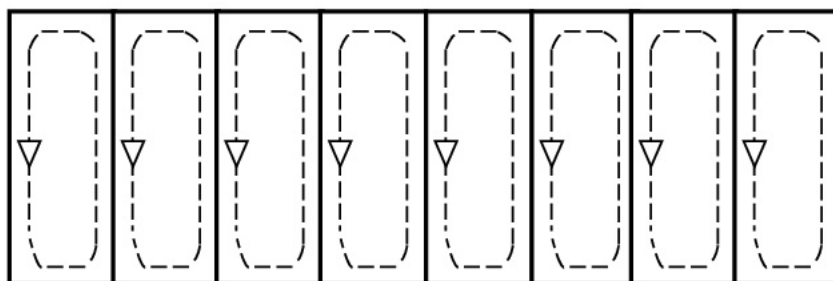


Рисунок 3 – Напрямок ЕРС у осерді при складанні його з окремих ізольованих одна від іншої пластин

Можемо записати в іншому вигляді

$$P_e = r_{ME} \cdot I_a^2, \quad (7)$$

де $r_{m\epsilon}$ – еквівалентний активний опір, за допомогою якого враховуються втрати активної потужності в магнітопроводі на вихрові струми, Om ;

P_ϵ – втрати активної потужності в магнітопроводі на вихрові струми, Bm .

В цілому втрати активної потужності в електротехнічній сталі можна визначити

$$P_c = P_r + P_\epsilon = (r_{m'} + r_{m\epsilon}) \cdot I_a^2 = r_m \cdot I_a^2, \quad (8)$$

де r_m – еквівалентний активний опір, який враховує втрати активної потужності в магнітопроводі з сталі, Om .

15.6. Реальна котушка з феромагнітним осердям у колі змінного струму

Розглянемо фізичні процеси, які виникають у котушці з феромагнітним осердям у колі змінного струму (рисунок 4).

Під дією синусоїдної напруги в колі котушки буде проходити змінний струм, який створить основний Φ і допоміжний потік розсіювання Φ_σ синусоїдні магнітні потоки, які будуть замикатися відповідно по осердю і повітрю. Під дією цих магнітних потоків у котушці будуть наводитися відповідно ЕРС самоіндукції e і ЕРС, що створюється допоміжним потоком розсіювання e_σ . Струм, який проходить по котушці, супроводжується виділенням теплоти в обмотці котушки. Ос-

новний магнітний потік Φ спричинює в магнітопроводі втрати активної потужності на гістерезис і вихрові струми.

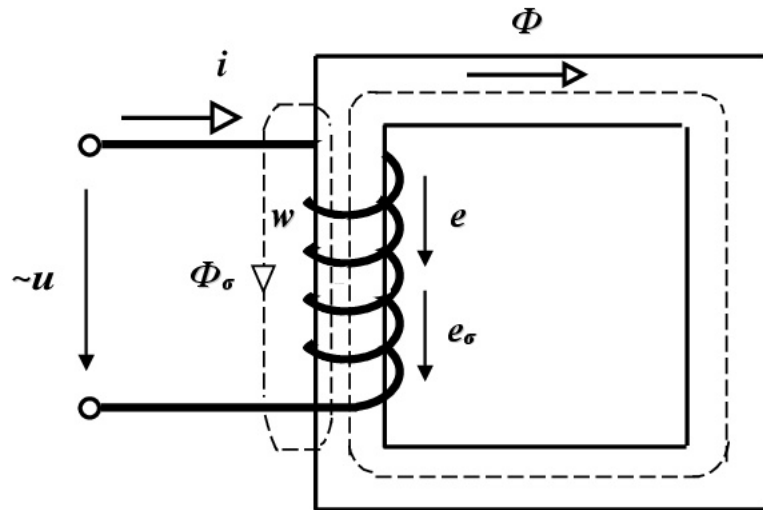


Рисунок 4 – Фізичні процеси, що виникають у котушці з феромагнітним осердям у колі змінного струму

Запишемо рівняння рівноваги напруги котушки з феромагнітним осердям

$$u = ri + L_\sigma \frac{di}{dt} - e, \quad (9)$$

Відповідно до рівняння (9) замінимо реальну котушку еквівалентною їй (рисунок 5). Вона буде складатися з ідеальної котушки з урахуванням петлі гістерезисну і послідовно з'єднаних з нею опорам r і x_σ .

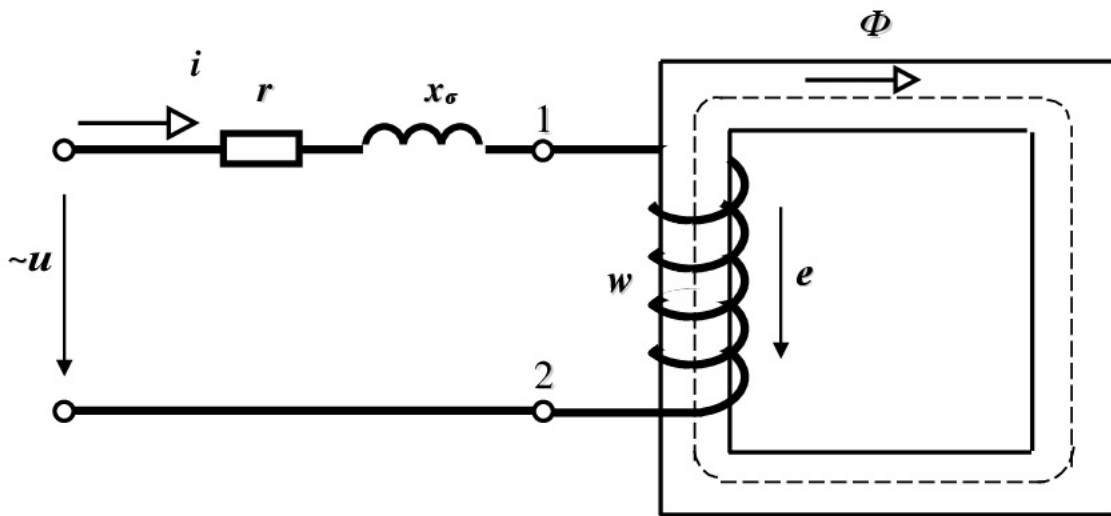


Рисунок 5 – Еквівалентна схема реальної котушки з ферромагнітним осердям

Побудуємо векторну діаграму реальної котушки з ферромагнітним осердям (рисунок 6).

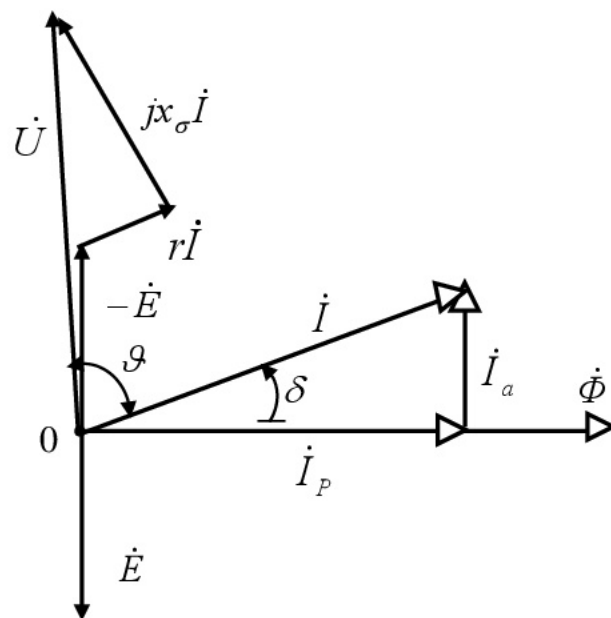


Рисунок 6 – Векторна діаграма напруги, сили струму, магнітного потоку і ЕРС самоіндукції реальної котушки з ферромагнітним осердям

Розрахункова схема реальної котушки з феромагнітним осердям (рисунок 7).

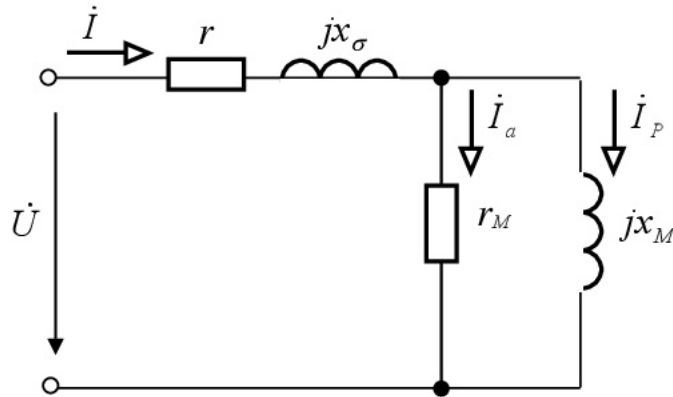


Рисунок 7 – Розрахункова схема індуктивної котушки з феромагнітним осердям

Запишемо рівняння котушки з феромагнітним осердям в комплексній формі

$$\dot{U} = r\dot{I} + jx_{\sigma}\dot{I} - \dot{E}. \quad (10)$$

Знайдемо діюче значення ЕРС самоіндукції, якщо миттєвий магнітний потік $\Phi = \Phi_m \sin \omega t$. Тоді вираз миттєвої ЕРС

$$e = -w \frac{d\Phi}{dt} = -w\omega\Phi_m \sin(\omega t + 90^\circ) = E_m \sin(\omega t - 90^\circ), \quad (11)$$

де максимальна ЕРС $E_m = w\omega\Phi_m$. Тоді діюче значення ЕРС

$$E = \frac{w\omega\Phi_m}{\sqrt{2}} = \frac{2\pi f w}{\sqrt{2}} \Phi_m = 4,44 f w \Phi_m. \quad (12)$$

ЛЕКЦІЯ 7

15.7 Ферорезонанс напруг і струмів

Резонанс напруги у колі, що містить котушку з насиченим феромагнітним магнітопроводом, з'єднану послідовно з конденсатором **називається ферорезонансом напруги**.

У колах з нелінійною індуктивністю, що містять ємність, плавна зміна напруги може викликати скачки фази й амплітуди основної гармоніки струму, і, навпаки, плавна зміна струму може супроводжуватися стрибкоподібною зміною фази й амплітуди основної гармоніки напруги на деяких ділянках кола.

Під **ферорезонансом напруги** розуміють стрибкоподібну зміну знака кута зсуву фаз між основними гармоніками напруги й струму, а також різку зміну величини силу струму при незначній зміні напруги на вході кола. Ці явища пов'язані з нелінійністю котушки зі сталлю. У лінійних колах подібні явища принципово неможливі. Розглянемо розрахункову схему (рисунок 1) послідовно з'єднаних ідеальних конденсатора й котушки з феромагнітним осереддям.

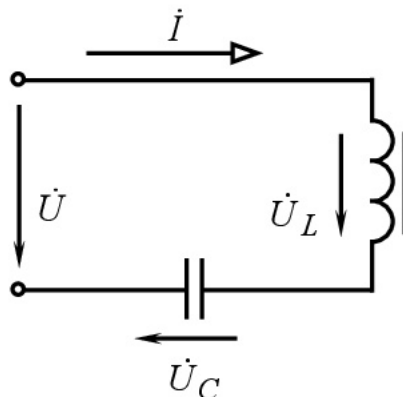


Рисунок 1 – Розрахункова схема послідовно з'єднаних ідеального конденсатора й котушки з феромагнітним осереддям

Котушка з феромагнітним осердям є нелінійним елементом, то при синусоїдній напрузі і синусоїдному магнітному потоці струм має несинусоїдну форму (рисунок 2).

Аналіз ферорезонансу з урахуванням несинусоїдності форми кривої струму представляє значні труднощі, тому застосуємо метод еквівалентних синусоїд (еквівалентний струм i_e).

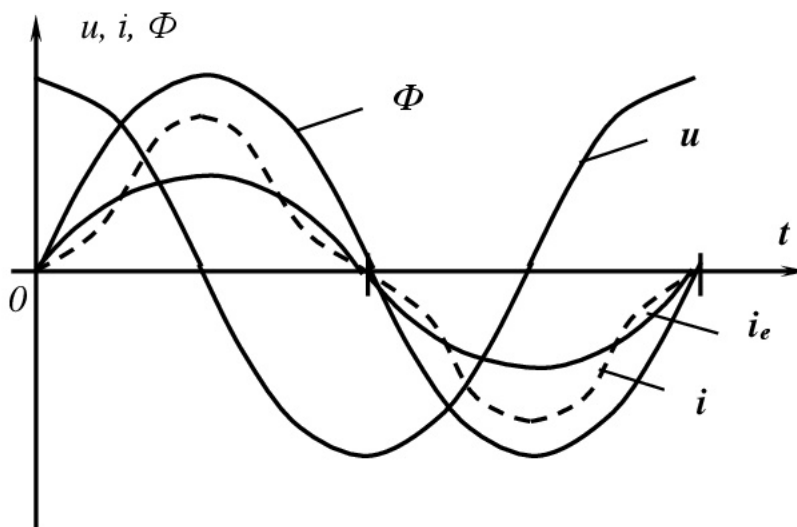


Рисунок 2 – Графічні залежності миттєвої напруги, магнітного потоку, струму і еквівалентного струму у котушці з феромагнітним осердям

Крім того, для спрощення міркувань приймемо, що котушка з феромагнітним магнітопроводом, яка включена в електричне коло, не має петлі гістерезису, вихрових струмів ($r_m = 0$), активний опір проводу обмотки дорівнює нулю ($r = 0$) тобто вона ідеальна і конденсатор ідеальний. Тоді векторна діаграма електричного кола з урахуванням спрощень має вигляд (рисунок 3).

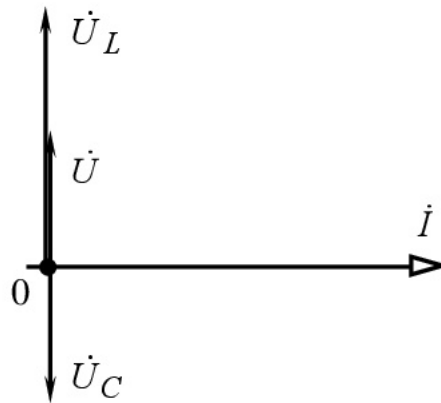


Рисунок 3 – Векторна діаграма напруг і струму з урахуванням спрощень при ферорезонансі напруг

Приймемо початкову фазу напруга на індуктивності \dot{U}_L рівною 90° , тобто напруга випереджає струм на 90° , напруга на ємності \dot{U}_C відстає від струму на 90° (рисунок 3).

Прикладена напруга на затискачах кола

$$\dot{U} = \dot{U}_L + \dot{U}_C. \quad (1)$$

Оскільки вектори \dot{U}_L й \dot{U}_C спрямовані протилежно (рисунок 3), тоді величина прикладеної напруги до затискачів кола визначається як

$$U = |U_L - U_C| \quad (2)$$

ВАХ котушки $U_L(I)$ є кривою лінією, ВАХ конденсатора $U_C(I)$ є похилою прямою, що проходять через початок координат

(рисунок 4). Величину ємності завжди можна вибрати такою, щоб ВАХ конденсатора перетнула ВАХ котушки з феромагнітним осердям. Різниця між залежностями $U_L(I)$ і $U_C(I)$ утворять криву $U(I)$, ординати якої визначають значення прикладеної напруги при різних значеннях струму (рисунок 4).

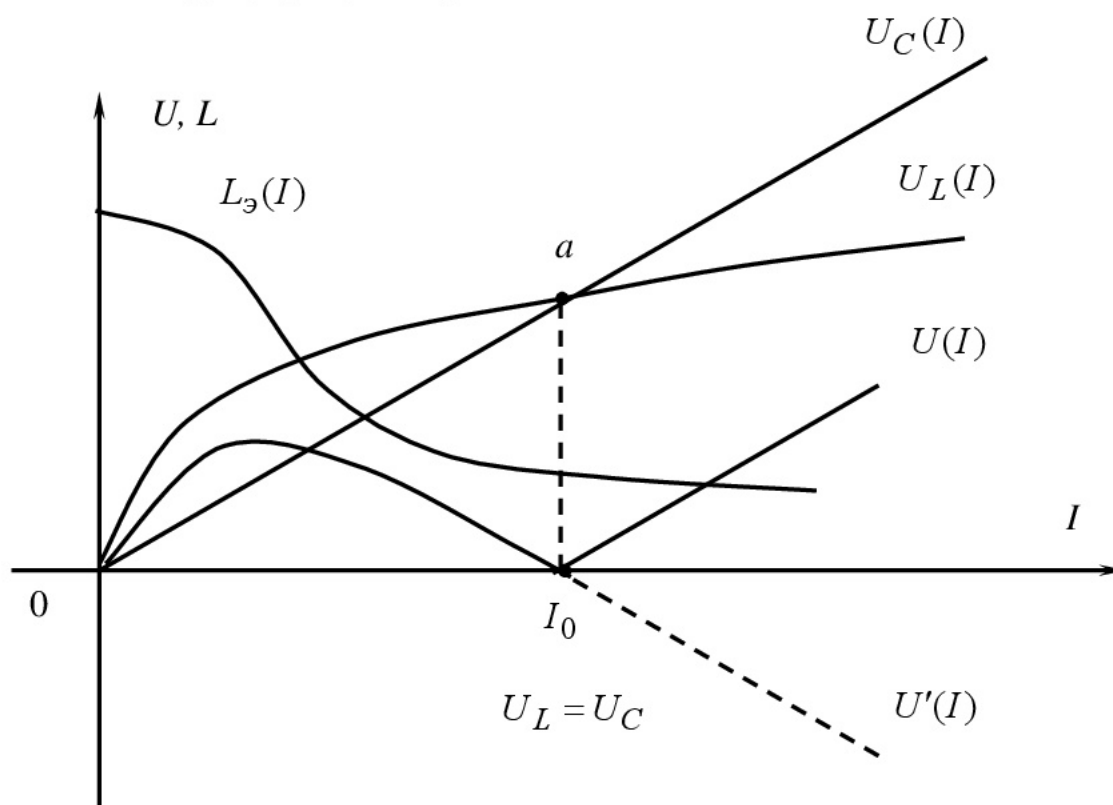


Рисунок 4 – ВАХ ідеальної котушки з феромагнітним осердям, ідеального конденсатора і електричного кола при послідовному з'єднанні котушки і конденсатора

Точка «а» перетину $U_L(I)$ і $U_C(I)$ відповідає ферорезонансу напруги ($U_L = U_C$).

Ферорезонанс напруг настає за рахунок зміни індуктивності і магнітної проникності феромагнітного матеріалу магнітопроводу котушки. Однак, на відміну від лінійних кіл, зміна індуктивності відбу-

вається не залежно від струму кола, наслідок залежності Еквівалентну індуктивність котушки з феромагнітним магнітопроводом можна визначити

$$L_a = \frac{U_L}{\omega I} \quad (3)$$

Область характеристики $U(I)$ поблизу точки I_0 носить теоретичний характер.

Практично через втрати в сталі і в проводі котушки, а особливо через несинусоїдну форми кривої струму, графічна залежність ВАХ $U(I)$ електричного кола має такий вигляд (рисунок 5)

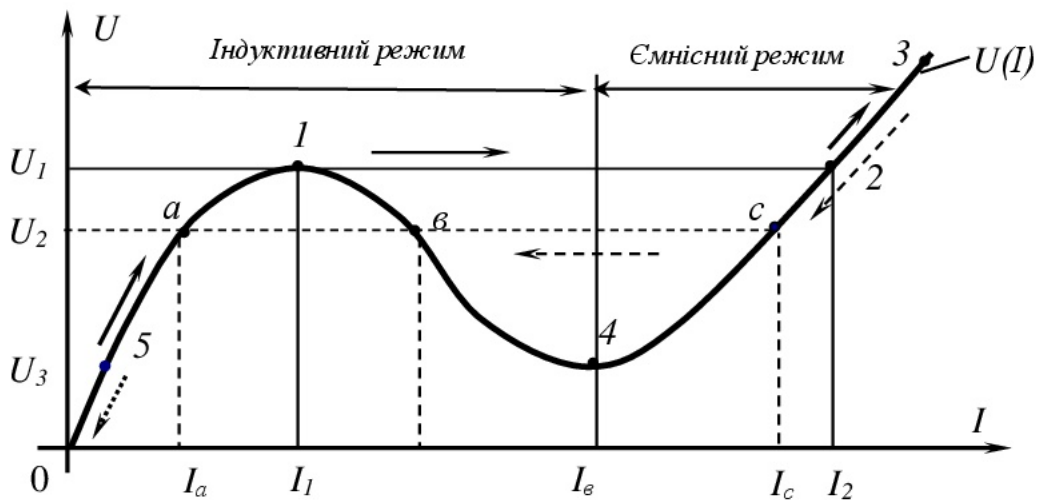


Рисунок 5 – ВАХ електричного кола з послідовно з'єднаними реальною котушкою зі сталлю і конденсатором

При зміні напруги U від нуля до U_1 струм по фазі відстає від напруги – індуктивний режим. Зміна режиму відбувається при досягненні точки 1. У точці 1 спостерігається стрибок струму, при якому

струм зростає з I_1 до величини I_2 , що відповідає точці 2. По фазі струм I_2 вже випереджає напругу (перекидання фази) – ємнісний режим. Подальше зростання напруги викликає плавне збільшення струму (точка 3).

Зменшення напруги до величини U_3 (точка c) знову викликає зворотній стрибок струму з I_c до I_a , що відповідає переходу із точки 3 у точку 5. З характеристики (рисунок 5) видно, що при одній напрузі U_2 на затискачах електричного кола можливі три значення струму: I_a , I_b , I_c . У двох перших випадках струм відстає по фазі від напруги ($U_L > U_C$). А у третьому випадку – випереджає його ($U_L < U_C$). Така невизначеність – декілька значень струму в колі при одній і тій же напрузі – може мати місце лише в колах з нелінійними характеристиками.

Режим роботи електричного кола при струмах I_a і I_1 стійкий, оскільки ділянці з підйомом характеристики при збільшенні напруги U струм зростає, а при зменшенні напруги зменшується.

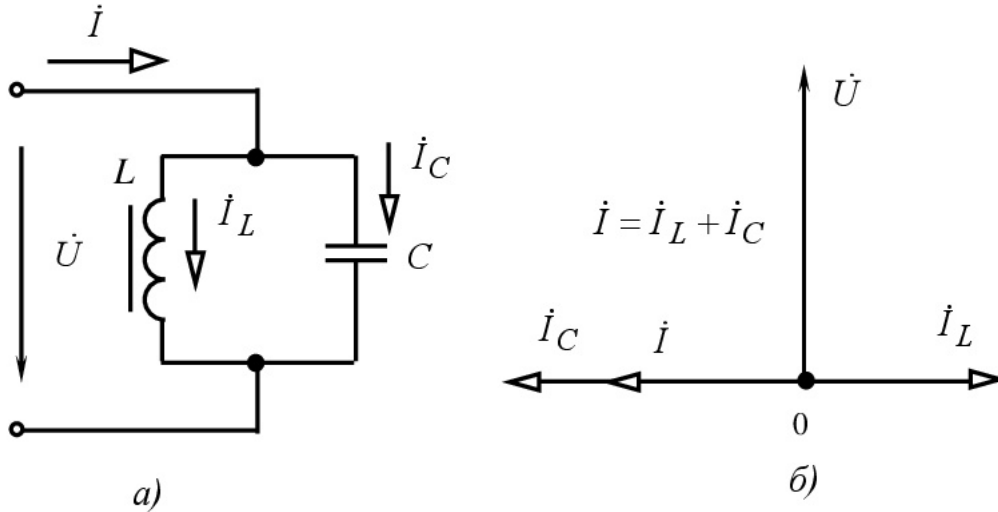
Режим при струмі I_2 – нестійкий, оскільки на спадаючій ділянці ВАХ із зменшенням U струм зростає і з підвищенням напруги спадає, таким чином, що найменша зміна напруги викликає перехід від даного режиму роботи електричного кола до першого або третього режиму.

Характерно, що при кожному стрибку фаза струму по відношенню до прикладеної напруги U змінюється на 180° .

Явище різкої зміни струму при незначній зміні напруги на вході називається тригерним ефектом у послідовному ферорезонансному колі.

Якщо котушка зі сталевим осереддям і конденсатор з'єднані паралельно (рисунок 6а), тоді в колі може виникнути **резонанс струмів**.

При розгляді даного явища приймемо умови, що зневажаємо втрати в котушці й вищих гармоніках. Тоді можна побудувати векторну діаграму (рисунок бб).



а) розрахункова схема кола; б) векторна діаграма струмів і напруги;

Рисунок б – Ферорезонанс струмів

Однак у цьому випадку при живленні кола від джерела заданої напруги не відбувається стрибків струму i , навпаки, при живленні кола від джерела заданого струму можливі стрибки напруги, що супроводжуються зміною знака кута зсуву фаз між напругою й струмом.

Спочатку струм у котушці I_L буде відставати від напруги \dot{U} на 90° , а струм I_C буде випереджати напругу на 90° .

Спожитий колом струм визначається таким чином

$$\dot{I} = \dot{I}_L + \dot{I}_C \quad (4)$$

Струм, спожитий колом по модулі дорівнює

$$I = |I_L + I_C|. \quad (5)$$

Побудова ВАХ котушки зі сталлю і конденсатора й всього кола має вигляд (рисунок 7).

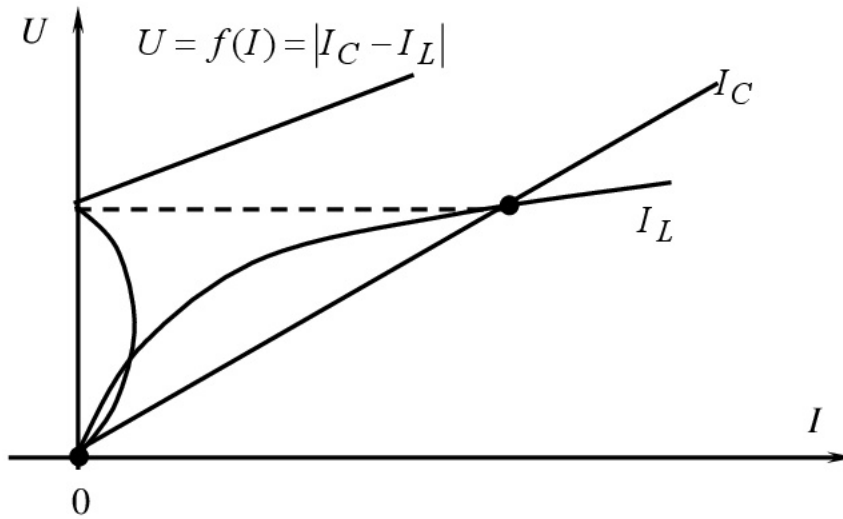


Рисунок 7 – Побудова ВАХ кола при ферорезонансі струмів

Отримана залежність $I(U)$ носить теоретичний характер.

Практично, через втрати в феромагнітному магнітопроводі і в активному опорі проводу котушки викривлення форми кривої струму, залежність між струмом і напругою всього кола має такий вигляд (рисунок 8).

Якщо живити схему не від джерела заданої напруги, а від джерела заданого струму, то в схемі спостерігаються стрибки напруги.

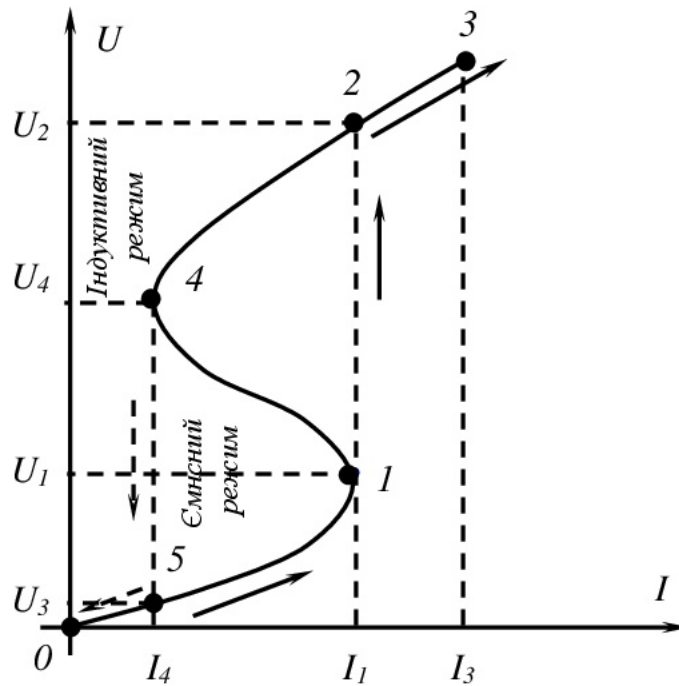


Рисунок 8 – ВАХ електричного кола з паралельно з'єднаними реальною котушкою зі сталлю і конденсатором

Якщо в наведеній розрахунковій схемі (рисунок 9) опір реостату R набагато більше опору іншого кола, то міняючи його величину можна плавно змінювати струм у колі.

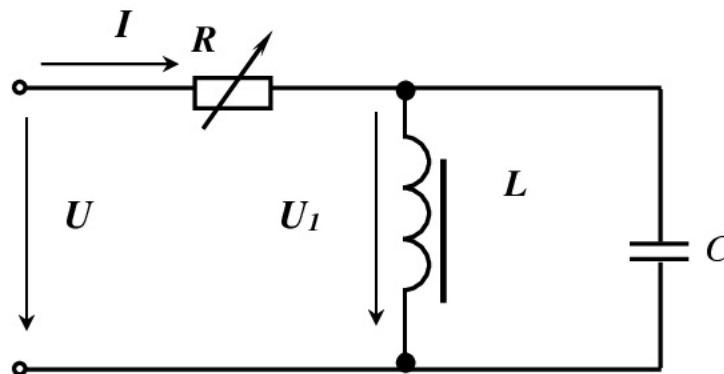


Рисунок 9 – Розрахункова схема регулювання струму при ферорезонансі струму

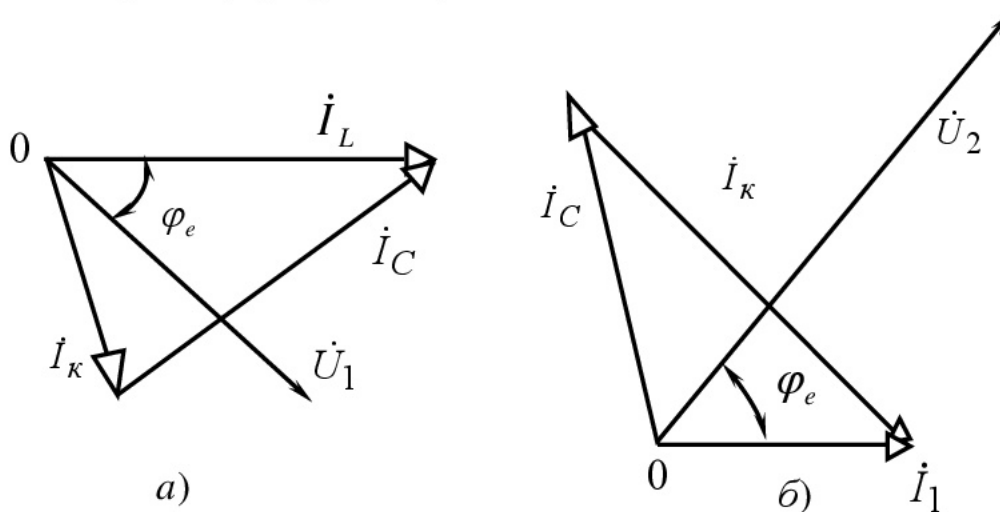
Плавне збільшення струму від нуля до I_1 приводить до зміни напруги по ділянці характеристики 0-1. Подальше збільшення струму приводить до різкого зростання напруги й зміни знаку кута зсуву фаз між \dot{U} і \dot{I} (перехід із точки 1 у точку 2).

При менших струмах реактивний опір кола носить ємнісної характер, а при більших струмах реактивний опір кола має індуктивний характер.

Подальше збільшення струму викликає плавне збільшення напруги (ділянка 2-3).

Зниження струму до величини I_4 знову викликає стрибок напруги, що відповідає переходу із точки 4 у точку 5.

Побудуємо векторні діаграми в точці 1 - до стрибка напруги (ємнісний режим) (рисунок 9а) і точці 2 - після стрибка напруги (індуктивний режим) (рисунок 9б).



а) до стрибка напруги (ємнісний режим); б) після стрибка напруги (індуктивний режим).

Рисунок 9 – Векторні діаграми при ферорезонансі струму

Явище різкої зміни напруги в колі при незначній зміні струму називається **тригерним ефектом у паралельному ферорезонансному колі**. Описане явище зветься **ферорезонансом струмів**.

Особливості кіл, що містять котушки з феромагнітним осередком й конденсатори, використовують для пристрою ферорезонансних **стабілізаторів напруги**, призначених для підтримки постійною напруги на затискачах приймача при зміні напруги живлючої мережі.

Стабілізатор напруги - це такий чотириполюсник, у якому значна зміна напруги на вході викликає лише незначна зміна напруги на виході.

Основна частина стабілізатора складається із двох послідовно з'єднаних опорів – **лінійного** (ємнісного опору) й **нелінійного** (індуктивного опору) (рисунок 10).

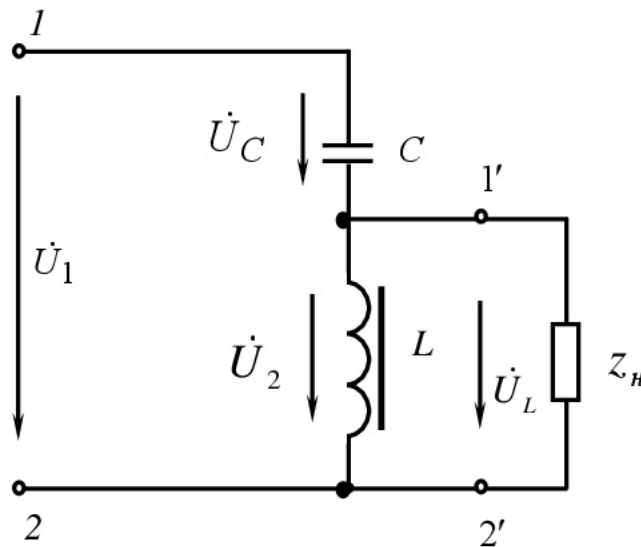


Рисунок 10 – Схема основної частини стабілізатор напруги

Розглянемо реальний випадок явища ферорезонансу напруг. Стабілізатор напруг працює в зоні насиченого магнітопроводу $U_{сmp}$ після стрибка струму. В цьому разі при значній зміні первинної напруги

U_1 на вході 1-2 стабілізатора, вторинна напруга U_2 на індуктивності 1'-2' змінюється незначно, оскільки нелінійна індуктивність незначно зменшується, індуктивний опір теж.

Визначивши для ряду значень U_1 відповідні значення U_2 , можна побудувати залежність $U_2 = f(U_1)$ (рисунок 11).

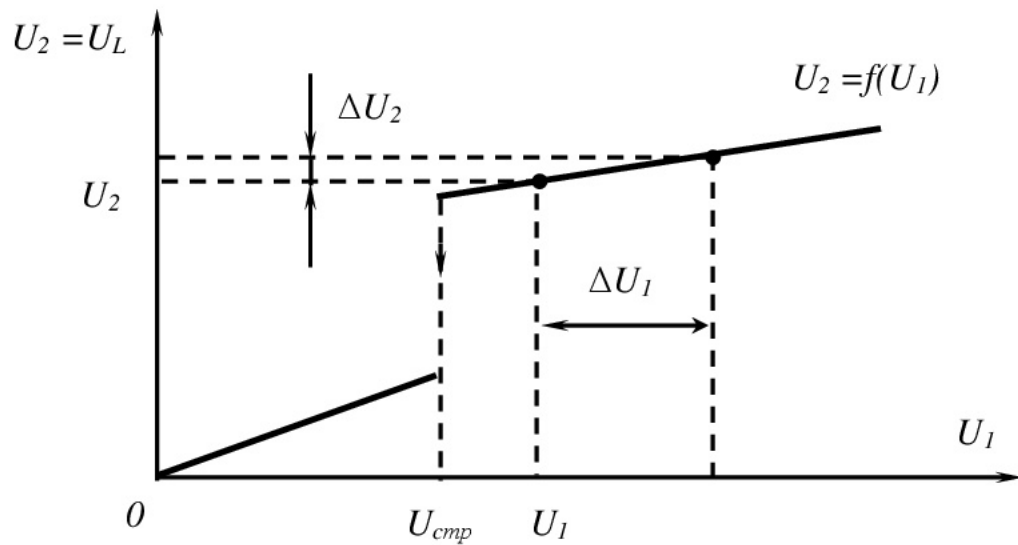


Рисунок 11 – Графічна залежність $U_2 = f(U_1)$ стабілізатора напруги

Стабілізатори характеризуються коефіцієнтом стабілізації

$$K_c = \frac{\Delta U_1}{U_1} : \frac{\Delta U_2}{U_2} = \frac{\Delta U_1 * U_2}{U_1 * \Delta U_2}, \quad (6)$$

де U_1 – напруга на вході стабілізатора, В;

U_2 – напруга на виході (на навантаженні), В;

$\Delta U_1, \Delta U_2$ – зміна напруги на вході й на виході, В.

ЛЕКЦІЯ 8

15.7. Трансформатор з феромагнітним осердям

Електромагнітні явища в трансформаторі з феромагнітним (сталевим) осердям подібні явищам у повітряному трансформаторі: явище електричного струму, електромагнетизм (основний і потік розсіювання у первинній обмотці), електромагнітної індукції (ЕРС самоіндукції і ЕРС розсіювання у первинній обмотці ЕРС взаємоіндукції у вторинній обмотці) і теплової дії струму у первинній обмотці. Якщо до вторинної обмотки підключити навантаження, то у вторинній обмотці: виникне явище електричного струму, явище електромагнетизму (потік розсіювання) і процес нагріву вторинної обмотки. В феромагнітному магнітопроводі але буде спостерігатися явища гістерезису і вихрових струмів.

На відміну від повітряного трансформатора магнітний потік, який пронизує обидві обмотки, замикається не по повітрю, а через сталеве осердя. Конструктивну схему трансформатора зі сталевим осердям наведено на рисунку 1.

При навантаженні трансформатора існують три магнітних потоки: Φ – основний у осерді, $\Phi_{\sigma 1}$ – розсіювання, зв'язаний тільки з первинною обмоткою, $\Phi_{\sigma 2}$ – розсіювання, зв'язаний тільки з вторинною обмоткою.

Напруга u_1 , прикладена до первинної обмотки, врівноважується спаданням напруги на активному опорі обмотки та електрорушійними силами $e_{\sigma 1}$ і $e_{\sigma 1}$, тобто

$$u_1 = r_1 i_1 + e_{\sigma 1} - e_1 = r_1 i_1 + L_{\sigma 1} \frac{di_1}{dt} - e_1, \quad (1)$$

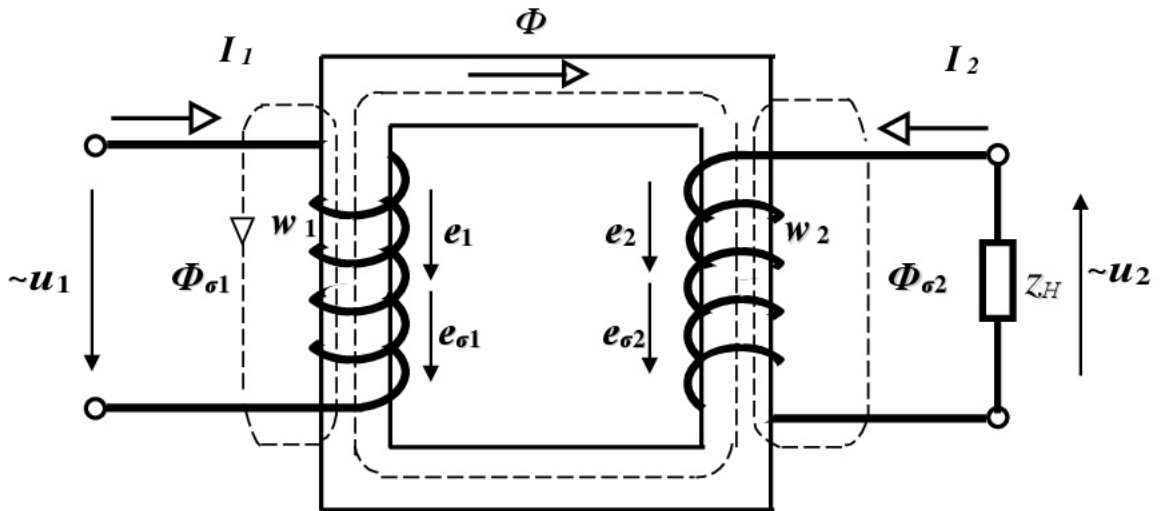


Рисунок 1 – Конструктивна схема трансформатора зі сталевим осердям

де $L_{\sigma 1}$ – індуктивність, обумовлена магнітним потоком розсіювання $\Phi_{\sigma 1}$, Гн.

У вторинній обмотці ЕРС, яка наводяться магнітними потоками Φ і $\Phi_{\sigma 2}$, врівноважується спаданням напруг на активному опорі обмотки та опорі навантаження, тобто

$$e_2 + e_{\sigma 2} = r_2 i_2 + u_2 \quad (2)$$

або

$$e_2 = r_2 i_2 - e_{\sigma 2} + u_2 = r_2 i_2 + L_{\sigma 2} \frac{di_2}{dt} + u_2, \quad (3)$$

де $L_{\sigma 2}$ – індуктивність, обумовлена магнітним потоком розсіювання $\Phi_{\sigma 2}$, Гн.

Замінімо реальний трансформатор еквівалентним конструктивною схемою (рисунок 2).

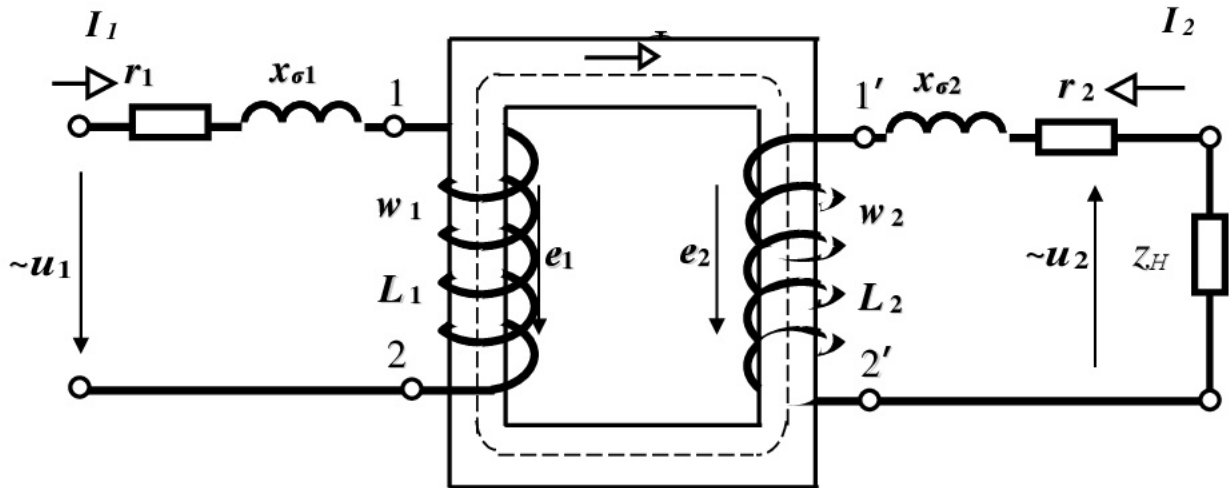


Рисунок 2 – Еквівалентна конструктивна схема трансформатора зі сталевим осердям

Трансформатор із затисками 1–2 і 1'–2' називається ідеальним трансформатором (в якому відсутні втрати на нагрів, від потоків розсіювання).

Коефіцієнт трансформації трансформатора

$$k = \frac{E_1}{E_2} = \frac{4,44 f w_1 \Phi_m}{4,44 f w_2 \Phi_m} = \frac{w_1}{w_2}. \quad (4)$$

Розглянемо спочатку ідеальний трансформатор, у якому $r_1 = 0$; $x_{\sigma 1} = 0$; $r_2 = 0$; $x_{\sigma 2} = 0$; $w_1 = w_2$.

При холостому ході такий трансформатор не відрізняється від звичайної ідеальної котушки і може бути зображений схемою заміщення (рисунок 3).

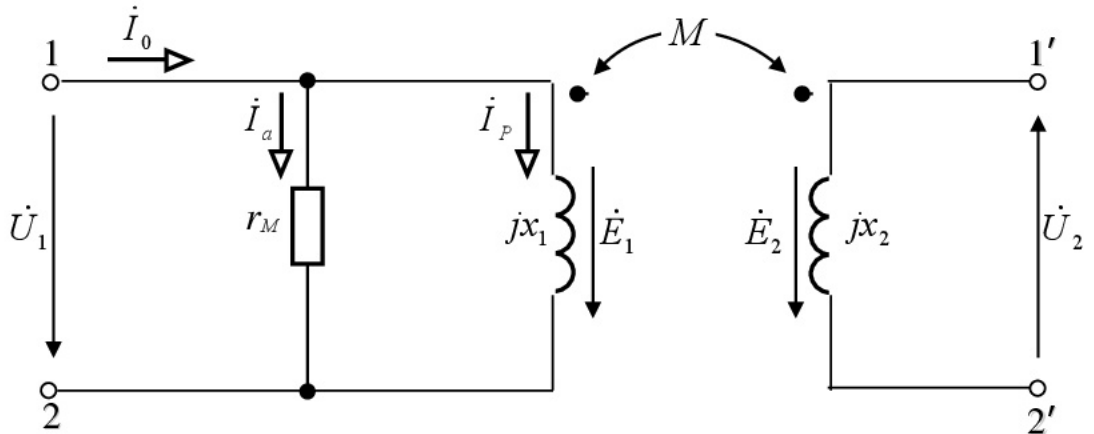


Рисунок 3 – Схема заміщення ідеального трансформатора при холостому ході

Побудуємо векторну діаграму ідеального трансформатора при холостому ході (рисунок 4).

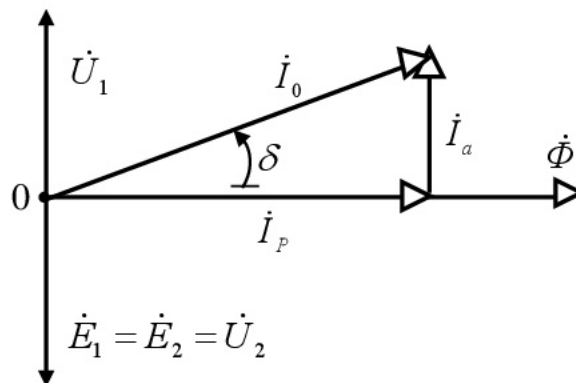


Рисунок 4 – Векторна діаграма ідеального трансформатора при холостому ході

Намагнічуюча сила при холостому ході (у первинній обмотці)

$$\dot{F}_0 = w_1 \dot{I}_0 = Z_m \dot{\Phi}, \quad (5)$$

де Z_m – комплекс магнітного опору осердя, $1/\Gamma_n$;

$\dot{\Phi}$ – комплекс основного магнітного потоку, Вб.

Рівняння для первинного контуру

$$\dot{U}_1 = -\dot{E}_1. \quad (6)$$

Складемо тепер схему заміщення ідеального трансформатора при його навантаженні (рисунок 5).

Якщо до затисків вторинної обмотки підключити навантаження з опором Z_H , то в ній буде проходити струм \dot{I}_2 , який, у свою чергу, буде намагатися зменшити магнітний потік $\dot{\Phi}$, а це приведе до ЕРС \dot{E}_1 , внаслідок чого струм \dot{I}_1 зросте до такої величини, при якій магнітний потік

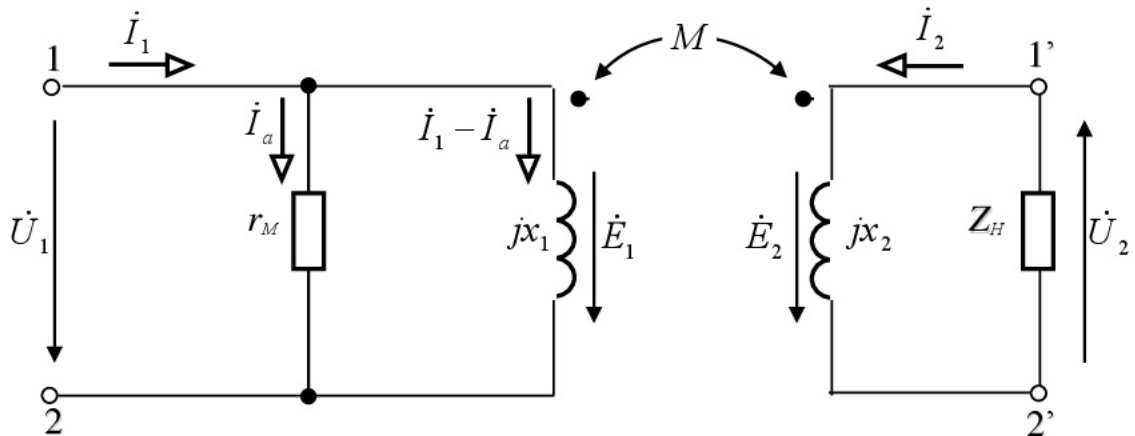


Рисунок 5 – Схема заміщення ідеального трансформатора при навантаженні

$\dot{\Phi}$ набуде початкового значення і буде виконуватися рівняння (6). Таким чином, поява струму у вторинному контурі приводить до збільшення струму в первинному контурі.

У навантаженому трансформаторі магнітний потік у осерді дорівнює магнітному потоку при холостому ході, тобто завжди $\Phi = \text{const}$.

При навантаженні магнітний потік $\dot{\Phi}$ створюється під дією на магнітуючих сил первинної і вторинної обмоток

$$\dot{F}_1 + \dot{F}_2 = w_1 \dot{I}_1 + w_2 \dot{I}_2 = Z_m \dot{\Phi}. \quad (7)$$

Порівнявши (5) і (6), знаходимо

$$w_1 \dot{I}_1 + w_2 \dot{I}_2 = w_1 \dot{I}_0. \quad (8)$$

При рівності кількості витків первинної і вторинної обмоток

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \dot{I}_0. \quad (9)$$

З рівняння (9)

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_0 - \dot{I}_2. \quad (10)$$

Побудуємо векторну діаграму ідеального трансформатора при навантаженні (рисунок 6).

Перетворимо схему заміщення ідеального трансформатора, для чого розв'яжемо індуктивний зв'язку. Якщо з'єднати однойменні затиски обмоток трансформатора між собою, то режим роботи трансформатора не зміниться.

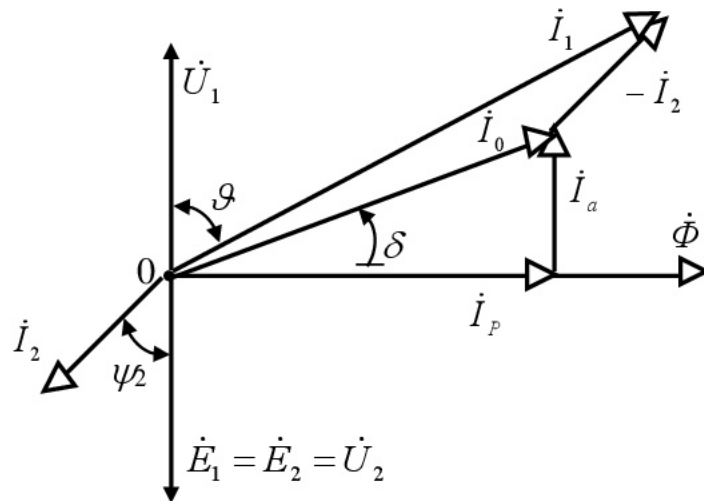


Рисунок 6 – Векторна діаграма ідеального трансформатора при навантаженні

Розглянемо спочатку індуктивно зв'язані елементи, які тепер мають загальну точку. Коефіцієнт зв'язку двох елементів у даному випадку дорівнює одиниці, оскільки весь магнітний потік повністю зчеплений з витками первинної і вторинної обмоток, тобто

$$K = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = 1, \quad (11)$$

тому, з огляду на те, що $w_1 = w_2$, знаходимо

$$M = L_1 = L_2. \quad (12)$$

Замінімо тепер частину схеми з загальною точкою (рисунок 7а) на еквівалентну схему (рисунок 7б). Тепер

$$L_1 - M = 0, \quad L_2 - M = 0, \quad (13)$$

$$\dot{I}_1 - \dot{I}_a + \dot{I}_2 = \dot{I}_0 - \dot{I}_a = \dot{I}_p. \quad (14)$$

З урахуванням (13), (14) схема заміщення ідеального трансформатора приймає вигляд (рисунок 7в). Розрахункова схема ідеального трансформатора з феромагнітним осердям має вигляд, зображений на рисунку 8.

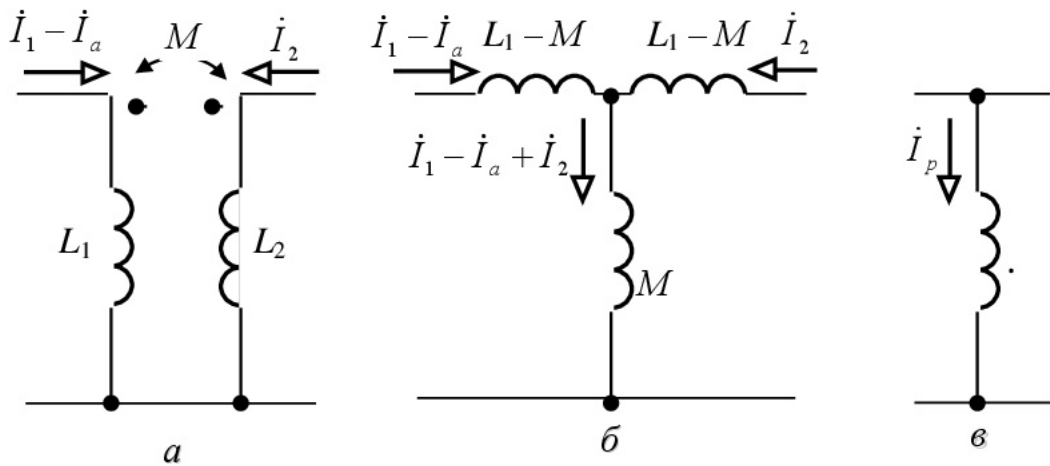


Рисунок 7 – Схеми еквівалентного перетворення ідеального трансформатора

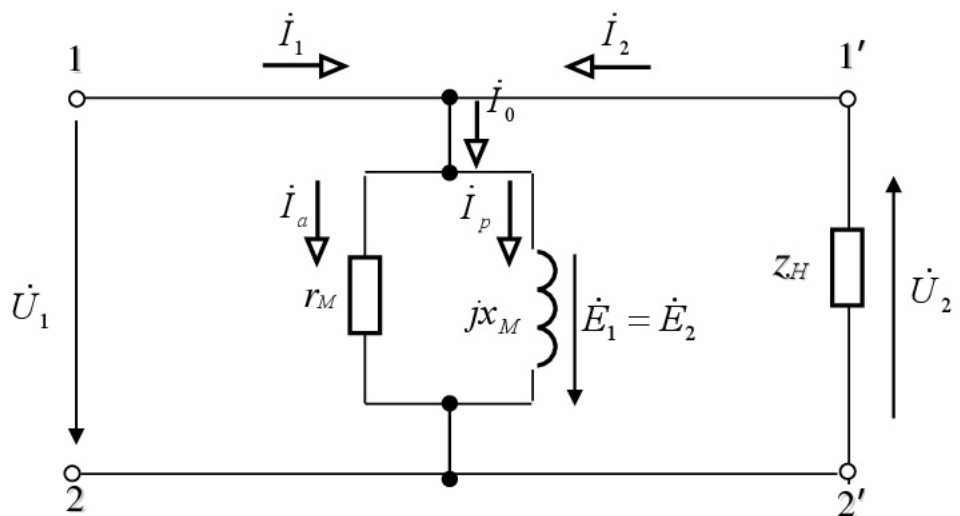


Рисунок 8 – Розрахункова схема ідеального трансформатора з феромагнітним осердям

Якщо тепер врахувати активні й індуктивні опори розсіювання обох обмоток, то для трансформатора, у якого $w_1 = w_2$, одержимо схему заміщення, приведену на рисунку 9.

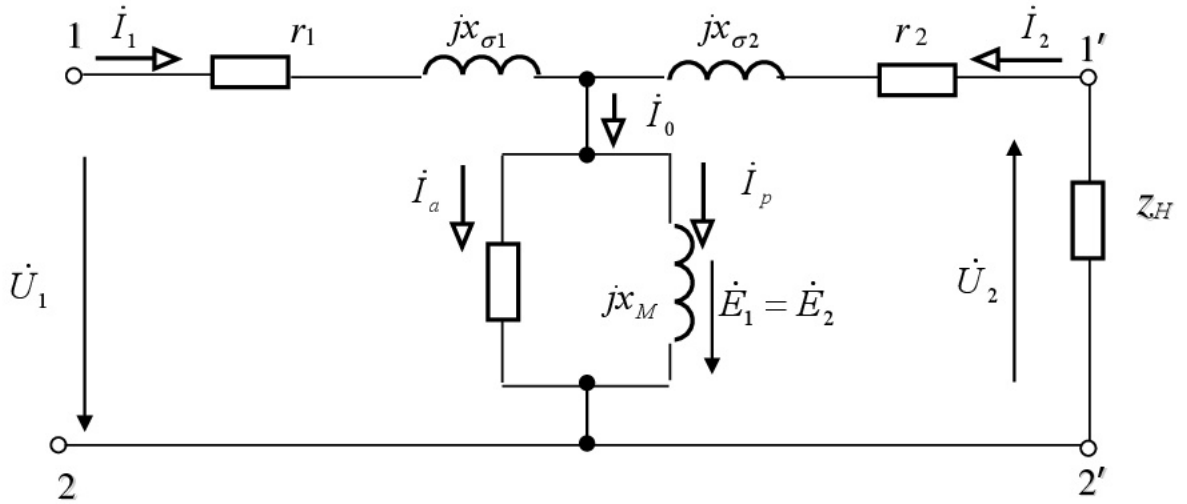


Рисунок 9 – Схема заміщення реального трансформатора з феромагнітним осердям

Побудуємо векторну діаграму кола (рисунок 10).

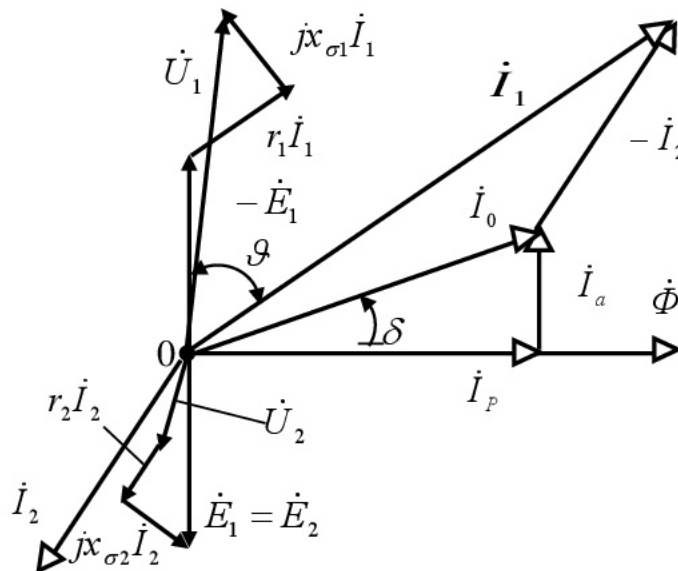


Рисунок 10 – Векторна діаграма напруг і струмів трансформатора з феромагнітним осердям

Запишемо рівняння первинного і вторинного контурів кола

$$\dot{U}_1 = r_1 \dot{I}_1 + jx_{\sigma 1} \dot{I}_1 - \dot{E}_1; \quad (15)$$

$$\dot{E}_2 = r_2 \dot{I}_2 + jx_{\sigma 2} \dot{I}_2 + \dot{U}_2. \quad (16)$$

15.8. Приведений трансформатор

Оскільки в загальному випадку $w_1 \neq w_2$, то і $E_1 \neq E_2$. Це ускладнює аналіз процесів у трансформаторі, тому обидві обмотки трансформатора приводять до однієї кількості витків. Як правило, вторинну обмотку з кількістю витків w_2 приводять до первинної обмотки з кількістю витків w_1 – **приведений трансформатор**.

Для цього вторинну обмотку заміняють еквівалентною з кількістю витків w_1 , але змінюють параметри та електричні величини вторинного контуру так, щоб магнітний потік і потужність трансформатора залишилися без змін. Приведені величини позначають так

$$\dot{E}'_2; \dot{I}'_2; r'_2; x'_{\sigma 2}; z'_H; \dot{U}'_2; w'_2.$$

Електрорушійна сила, яка наводиться у вторинній обмотці основним магнітним потоком, дорівнює

$$E_2 = 4,44 f w_2 \Phi_m, \quad (17)$$

звідки

$$\Phi_m = \frac{E_2}{4,44fw_2}. \quad (18)$$

При заміні дійсної вторинної обмотки з кількістю витків w_2 приведеною обмоткою з кількістю витків первинної обмотки $w'_2 = w_1$ основний магнітний потік буде наводити в ній електрорушійну силу

$$E'_2 = 4,44fw'_2\Phi_m = 4,44fw'_2 \frac{E_2}{4,44fw_2} = E_2 \frac{w_1}{w_2} = E_2k, \quad (19)$$

де k – коефіцієнт трансформації трансформатора.

Коефіцієнт трансформації визначається як відношення ЕРС первинної обмотки до ЕРС вторинної обмотки або відношення кількості витків первинної обмотки до кількості витків вторинної обмотки

$$k = \frac{E_1}{E_2} = \frac{w_1}{w_2}. \quad (20)$$

Якщо підставити значення k , то одержимо

$$E'_2 = E_1. \quad (21)$$

Аналогічно

$$U'_2 = U_2k, \quad (22)$$

Оскільки у випадку приведення вторинної обмотки до первинної магнітний потік залишається незмінним, то і вторинна намагнічуюча сила повинна залишатися незмінною, тобто

$$F_2 = w_2 I_2 = w_1 I'_2, \quad (23)$$

звідки

$$I'_2 = I_2 \frac{w_2}{w_1} = \frac{I_2}{k}. \quad (24)$$

Через те, що умовою приведення є постійність потужностей (активної, реактивної і повної), то і втрати в провідниках дійсної і приведенної вторинної обмоток повинні бути однаковими, тобто

$$r_2 I_2'^2 = r_2' I_2'^2, \quad (25)$$

звідки активний опір проводу приведенної вторинної обмотки

$$r_2' = r_2 \left(\frac{I_2}{I_2'} \right)^2 = r_2 \left(\frac{k I_2}{I_2} \right)^2 = r_2 k^2. \quad (26)$$

Реактивний опір проводу приведенної вторинної обмотки

$$x'_{\sigma 2} = x_{\sigma 2} k^2; \quad z'_H = z_H k^2. \quad (27)$$

Приведений повний опір навантаження

$$z'_H = z_H k^2. \quad (28)$$

Запишемо рівняння первинного і вторинного контурів трансформатора

$$\dot{U}_1 = r_1 \dot{I}_1 + jx_{\sigma 1} \dot{I}_1 - \dot{E}_1; \quad (29)$$

$$\dot{E}'_2 = r'_2 \dot{I}'_2 + jx'_{\sigma 2} \dot{I}'_2 + \dot{U}'_2. \quad (30)$$

Схема заміщення приведенного трансформатора (рисунок 11).

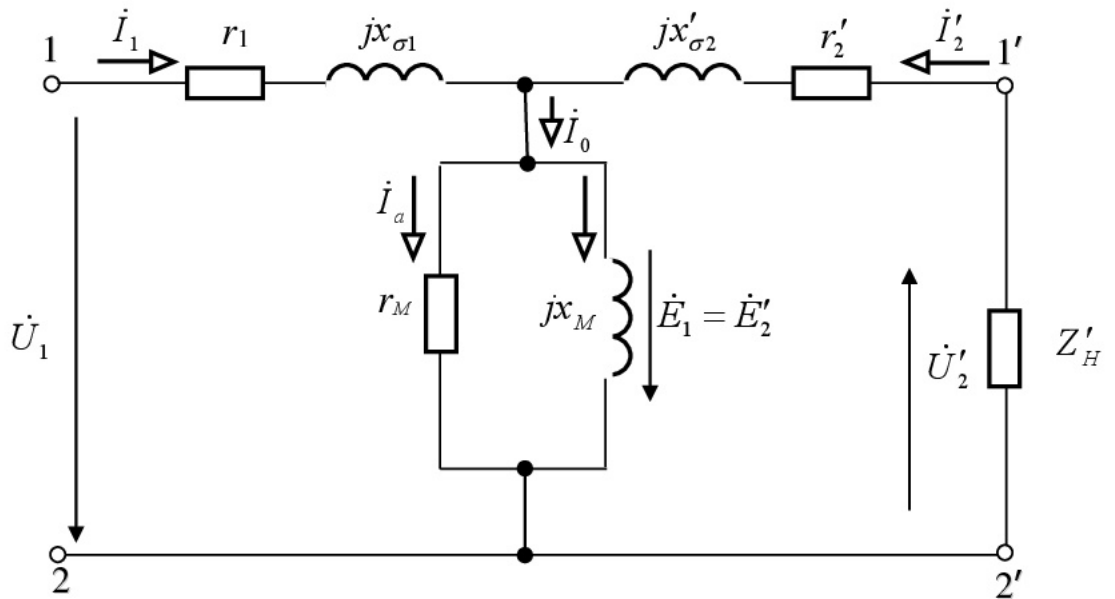


Рисунок. 11 – Схема заміщення приведенного трансформатора

Векторна діаграма струмів і напруг приведенного трансформатора має такий же вигляд, як і векторна діаграма, приведена на рисунку 10.

ЛЕКЦІЯ 9

ТЕМА 16. ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ В ЛІНІЙНИХ КОЛАХ

16.1. Причини виникнення перехідних процесів

Під **перехідними процесами** розуміють процеси переходу від одного усталеного режиму роботи електричного кола до іншого, будь чим відрізняється від попереднього: величиною ЕРС, параметрами тощо.

Перехідні процеси виникають внаслідок включення або вимикання пасивних або активних ділянок кола; коротких замикань окремих ділянок кола, різного роду переключень, раптової зміни параметрів і т.п.

Фізично перехідні процеси представляють перехід від одного енергетичного стану кола, що відповідають до комутаційному режиму, до енергетичного стану, що відповідають після комутаційному режиму. Всі ці зміни називаються **комутаційними змінами** або просто **комутацією**.

Замикання кола зображують на розрахункових схемах так:



Розмикання кола зображують на розрахункових схемах так:



Будемо вважати, що при замиканні і розмиканні електричного кола дуга не виникає, а комутація проходить у момент часу $t = 0$.

16.2. Закони комутації

Розглянемо включення ділянки кола з котушкою (рисунок 1).

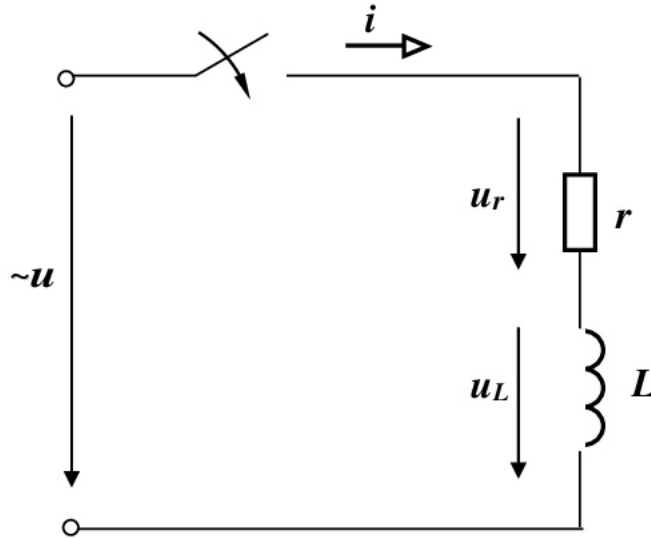


Рисунок 1 – Розрахункова схема включення ділянки кола з котушкою

До комутації струм у електричному колі дорівнював нулю. Після комутації у відповідності з другим законом Кірхгофа можна записати

$$u = u_r + u_L. \quad (1)$$

Якщо припустити, що в момент комутації ($t = 0$) струм зміниться стрибком, то $u = \infty$ і другий закон Кірхгофа не буде виконуватися. Тому в даному випадку в момент комутації сила струму дорівнює нулю.

З енергетичної точки зору неможливість миттєвої зміни струму в індуктивності пояснюється неможливістю зміни

стрибком енергії, накопиченої в котушці. Енергія магнітного поля котушки

$$W_L = \frac{Li^2}{2}. \quad (2)$$

Миттєва потужність в індуктивності

$$p_L = \frac{dW_L}{dt} = Li \frac{di}{dt}. \quad (3)$$

Якби струм у момент часу $t = 0$ змінився стрибком, це привело б до виділення в котушці нескінченно великої потужності, що неможливо з фізичної точки зору.

Таким чином, можна сформулювати **перший закон комутації**: у будь-якому розгалуженні з індуктивністю струм і магнітний потік у момент комутації зберігають ті значення, які вони мали до комутації, і далі починають змінюватися від цих значень.

Розглянемо тепер включення ділянки кола з ємністю (рисунок 2).

До комутації напруга на ємності дорівнювала нулю. Після комутації у відповідності з другим законом Кірхгофа можемо записати

$$u = u_r + u_C = ri + u_C. \quad (4)$$

Зі співвідношень

$$u_C = \frac{q}{C}, \quad i = \frac{dq}{dt}, \quad (5)$$

знаходимо

$$q = Cu_C, \quad i = C \frac{du_C}{dt}. \quad (6)$$

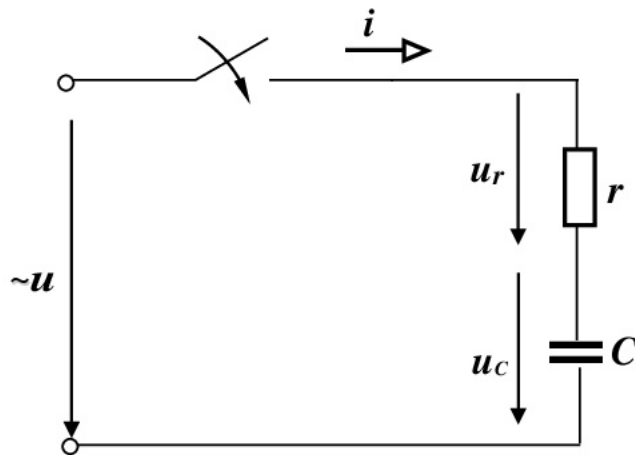


Рисунок 2 – Розрахункова схема включення ділянки кола з ємністю

Якщо припустити, що в момент комутації ($t = 0$) напруга на ємності зміниться стрибком, то $i = \infty$ і другий закон Кірхгофа не буде виконуватися. Тому в даному випадку в момент комутації напруга на ємності буде дорівнювати нулю.

З енергетичної точки зору неможливість миттєвої зміни напруги на ємності пояснюється неможливістю зміни стрибком потужності, накопиченої в конденсаторі. Енергія електричного поля конденсатора

$$W_c = \frac{Cu_c^2}{2}. \quad (7)$$

Миттєва потужність у ємності

$$p_c = \frac{dW_c}{dt} = Cu_c \frac{du_c}{dt}. \quad (8)$$

Якби напруга на ємності в момент часу $t = 0$ змінилася стрибком, то це привело б до виділення в ємності нескінченно великої потужності, що неможливо з фізичної точки зору.

Отже, можна сформулювати **другий закон комутації**: на будь-якій ділянці кола з ємністю напруга і заряд на ємності в момент комутації зберігають ті значення, які вони мали до комутації, і далі починають змінюватися від цих значень.

16.3. Класичний метод розрахунку

Розглянемо послідовне коло, яке містить активний опір, індуктивність і ємність, підключені до джерела напруги, яка змінюється в часі за довільним безперервним законом, заданим яким-небудь аналітичним виразом (рисунок 3).

Для будь-якого моменту часу за другим законом Кірхгофа можемо записати

$$u = u_r + u + u_c. = u = ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt, \quad (9)$$

де i – струм перехідного режиму, який далі будемо називати перехідним струмом або просто струмом, A .

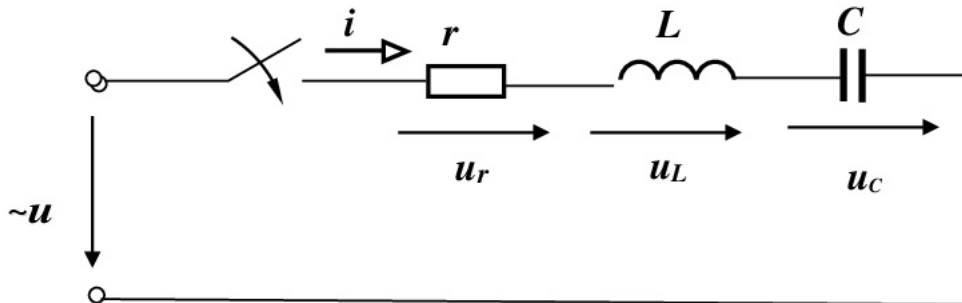


Рисунок 3 – Розрахункова схема послідовно з'єднаних активного опору, індуктивності і ємності

Перехідним режимом будемо називати стан кола, який буде спостерігатися в ньому протягом деякого (теоретично нескінченно великого) часу після комутації.

Коли настає примусовий режим, рівняння (9) приймає вигляд

$$u = ri_{np} + L \frac{di_{np}}{dt} + \frac{1}{C} \int i_{np} dt, \quad (10)$$

де i_{np} – струм примусового режиму або просто примусовий струм, A .

Примусовим режимом будемо називати стан кола, коли з перехідним режимом можна не рахуватись. Примусовий режим, який створюється вільною складовою періодичної напруги, інколи називають усталеним режимом.

Віднімаючи почленно рівняння (9) і (10) та знаючи, що

$$i - i_{np} = i_{\epsilon}, \quad (11)$$

одержимо

$$0 = ri_{\epsilon} + L \frac{di_{\epsilon}}{dt} + \frac{1}{C} \int i_{\epsilon} dt, \quad (12)$$

або

$$0 = u_{r\epsilon} + u_{L\epsilon} + u_{C\epsilon}. \quad (13)$$

Різниця струмів і напруг перехідного і примусового режимів називається відповідно **струмом і напругою вільного режиму** або просто **вільними струмом і напругою**.

Відповідно до рівняння (11) процес, який проходить у колі, можна розглядати як такий, що складається з накладених один на інший процесів – примусового, який наступив як би відразу, та вільного, який має місце тільки протягом перехідного режиму.

Звичайно, фізично існує тільки перехідний струм або напруга, а розкладання їх на примусову і вільну складові – це усього лише зручний спосіб, який полегшує розрахунки перехідних процесів у лінійних колах.

Розкладання перехідних струмів і напруг відповідає правилу рішення лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь, відповідно до якого загальне рішення таких рівнянь дорівнює сумі часткового рі-

шення неоднорідного рівняння і загального рішення однорідного рівняння.

Дійсно, рівняння (12) показує, що вільний струм являє собою загальне рішення однорідного диференціального рівняння і повинний мати постійні інтегрування, кількість яких дорівнює порядку диференціального рівняння.

У свою чергу рівняння (10) показує, що примусовий струм являє собою відповідне часткове рішення неоднорідного диференціального рівняння.

Класичний метод дослідження перехідних процесів зводиться до інтегрування диференціальних рівнянь, які пов'язують напруги і струми кола в перехідному процесі. В результаті інтегрування з'являються постійні, які знаходяться з початкових умов.

Незалежні початкові умови виходять із законів комутації, залежні – з незалежних початкових умов і значень ЕРС за допомогою першого і другого законів Кірхгофа.

16.4. Підключення котушки до джерела постійної ЕРС

Дослідимо перехідний процес підключення котушки до джерела постійної ЕРС, розрахункова схема якого показана на рисунку 4.

У післякомутаційний період у відповідності з другим законом Кірхгофа можемо записати

$$L \frac{di}{dt} + ri = E, \quad (14)$$

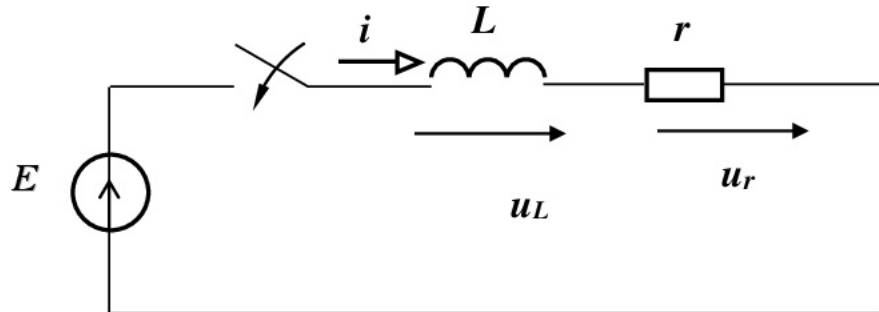


Рисунок 4 – Розрахункова схема перехідного процесу підключення котушки до джерела постійної ЕРС

або

$$\tau \frac{di}{dt} + i = \frac{E}{r}, \quad (15)$$

де

$$\tau = \frac{L}{r}. \quad (16)$$

Рівняння (15) являє собою звичайне лінійне неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку з постійними коефіцієнтами.

Складаємо характеристичне рівняння

$$\tau \cdot p + 1 = 0, \quad (17)$$

звідки знаходимо корінь

$$p = -\frac{1}{\tau}. \quad (18)$$

Перехідний струм дорівнює сумі примусового і вільного струмів

$$i = i_{np} + i_e. \quad (19)$$

Оскільки характеристичне рівняння має один корінь, то вільний струм можна виразити так

$$i_{ce} = Ae^{pt} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (20)$$

де A – постійна інтегрування струму, A .

Примусовий струм після комутації

$$i_{np} = \frac{E}{r}, \quad (21)$$

тому рівняння перехідного струму в колі у загальному вигляді

$$i = \frac{E}{r} + Ae^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (22)$$

Для розрахунку постійної інтегрування A знайдемо початкові умови: відповідно до першого закону комутації на ділянці кола з індуктивністю струм не може змінюватися стрибком, тому в момент комутації при $t = 0$, $i(0) = 0$ рівняння (22) запишеться так

$$0 = \frac{E}{r} + A, \quad (23)$$

звідки постійна інтегрування струму

$$A = -\frac{E}{r}, \quad (24)$$

тобто вільна складова струму

$$i_e = -\frac{E}{r} e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (25)$$

Підставляємо значення постійної інтегрування в рівняння (22) одержуємо рівняння перехідного струму, будуємо графіки примусової, вільної складових і перехідного струму в часі (рисунок 5)

$$i = i_{np} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right). \quad (26)$$

У рівнянні перехідного процесу величина τ називається **постійною часу** кола. Вона характеризує швидкість перехідного процесу в електричному колі

$$[\tau] = \frac{\Gamma H}{\text{Ом}} = \frac{\text{Ом} \cdot c}{\text{Ом}} = c.$$

Після визначення струму легко знайти напруги на активному опорі та індуктивності

$$u_r = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right); \quad (27)$$

$$u_L = E e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (28)$$

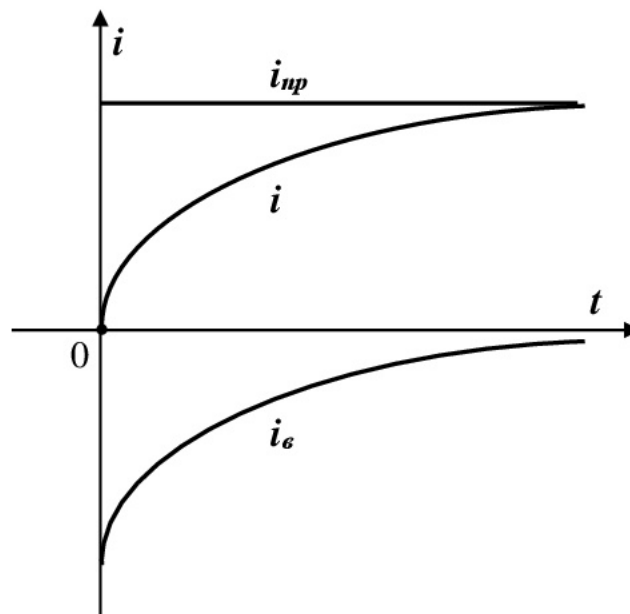


Рисунок 5 – Графіки примусової, вільної складових і перехідного струму в часі

З рівняння (28) видно, що напруга на індуктивності змінюється стрибком від нуля до значення ЕРС джерела. ЕРС самоіндукції протидіє зростанню струму.

З рівняння (27) видно, що напруга на активному опорі зростає плавно від нуля до значення ЕРС джерела в примусовому режимі.

Енергія, яку одержує коло, частково йде на створення енергії магнітного поля, а частково перетворюється в теплоту на активному опорі.

За час перехідного періоду в магнітному полі котушки накопичиться енергія

$$W_L = \frac{Li_{np}^2}{2}. \quad (29)$$

16.5. Коротке замикання котушки

Нехай у колі, розрахункова схема якого приведена на рисунку 6, ключ був у положенні 1 і джерело було підключено досить довго, тобто наступив усталений режим. Якщо в деякий момент часу ($t = 0$) ключ миттєво (без розриву кола котушки) переключити в положення 2, то буде мати місце **коротке замикання котушки**.

Знайдемо закон зміни струму в колі. Для післякомутаційної схеми за другим законом Кірхгофа можемо записати

$$L \frac{di}{dt} + ri = 0, \quad (30)$$

або

$$\tau \frac{di}{dt} + i = 0. \quad (31)$$

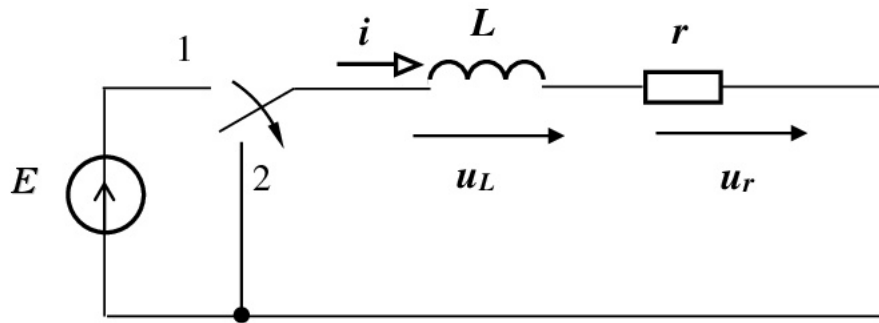


Рисунок 4 – Розрахункова схема перехідного процесу короткого замикання котушки

Рівняння (31) являє собою однорідне диференціальне рівняння, рішення якого дає вільний струм. Таким чином, у даному випадку перехідний струм не буде містити примусової складової, тобто $i = i_v$, оскільки $i_{np} = 0$.

Після рішення рівняння одержимо характеристичне рівняння, корінь характеристичного рівняння та рівняння струму у загальному вигляді

$$p + 1 = 0; \quad p = -\frac{1}{\tau}; \quad i = A e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (32)$$

Знайдемо постійну інтегрування з початкових умов: відповідно до першого закону комутації на ділянці кола з індуктивністю струм не може змінюватися стрибком, тому в момент комутації при $t = 0$

$i(0) = \frac{E}{r}$ і рівнянь (32) запишеться так

$$\frac{E}{r} = A. \quad (33)$$

Остаточно одержимо рівняння перехідного струму при короткому замиканні котушки

$$i = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (34)$$

де постійна інтегрування струму

$$I_0 = \frac{E}{r}. \quad (35)$$

Покажемо перехідний струм на графіку (рисунок 7).

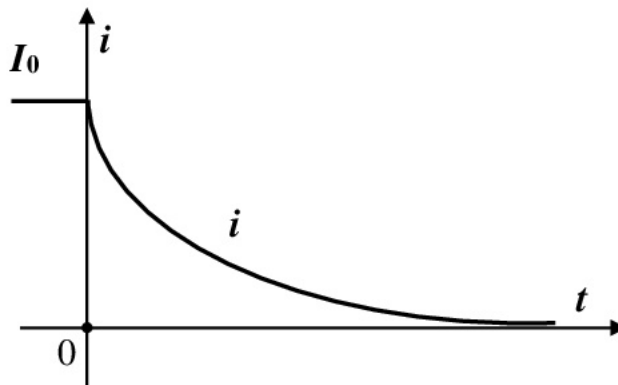


Рисунок 7 – Графік перехідного струму при короткому замиканні котушки

Після визначення рівняння перехідного струму легко знайти рівняння перехідної напругу на активному опорі та індуктивності котушки

$$u_r = Ee^{-\frac{t}{\tau}}; \quad (36)$$

$$u_L = -Ee^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (37)$$

З рівняння (37) видно, що напруга на індуктивності та ЕРС самоіндукції в момент комутації змінюються стрибком. ЕРС самоіндукції підтримує протікання струму у колі в попередньому напрямку.

Початковий запас енергії магнітного поля котушки дорівнює

$$W_L = \frac{LI_0^2}{2} = \frac{LE^2}{2r^2}. \quad (38)$$

Енергія, що виділяється в активному опорі за час перехідного процесу дорівнює

$$W_r = \int_0^{\infty} ri^2 dt = \frac{E^2}{r} \int_0^{\infty} e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = -\frac{E^2 \tau}{2r} \Big|_0^{\infty} = \frac{LE^2}{2r^2}. \quad (39)$$

Таким чином, енергія, що виділяється в активному опорі котушки W_r при перехідному процесі і енергія магнітного поля котушки W_L рівня, тобто при перехідному процесі в колі вся енергія магнітного поля виділяється в активному опорі r у вигляді теплоти.

ЛЕКЦІЯ 10

16.6. Зарядження конденсатора через резистор

Розглянемо розрахункову схему послідовного з'єднання активного опору і ємності ідеального конденсатора в колі з постійною ЕРС (рисунок 1).

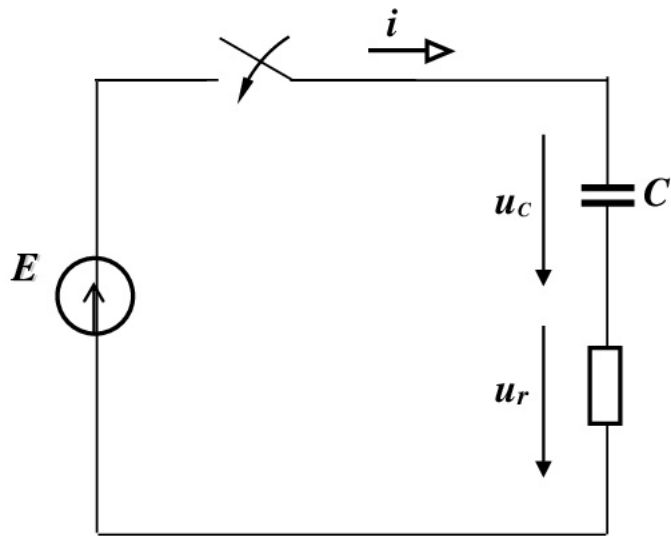


Рисунок 1 – Розрахункова схема перехідного процесу у при зарядженні конденсатора через резистор в колі з постійною ЕРС

Знайдемо закон зміни напруги на ємності. Запишемо для кола після комутації рівняння за другим законом Кірхгофа

$$u_r + u_C = E. \quad (1)$$

Враховуючи, що напруга на активному опорі дорівнює

$$u_r = ri = rC \frac{du_C}{dt} = \tau \frac{du_C}{dt}, \quad (2)$$

де $\tau = r \cdot C$ – постійна часу кола, с;

одержимо диференціальне рівняння напруги для кола після комутації

$$\tau \frac{du_C}{dt} + u_C = E. \quad (3)$$

Перехідна напруга на конденсаторі

$$u_C = u_{Cnp} + u_{Cв}. \quad (4)$$

Примусова складова напруги на ємності

$$u_{Cnp} = E. \quad (5)$$

Характеристичне рівняння і корінь рівняння

$$\tau \cdot p + 1 = 0; \quad p = -\frac{1}{\tau}; \quad (6)$$

Знаходимо вільну напругу на ємності

$$u_{Cв} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (7)$$

Таким чином, загальне рішення рівняння перехідної напруги на ємності

$$u_C = E + Ae^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (8)$$

Знаходимо постійну інтегрування перехідної напруги на ємності з початкових умов: у момент комутації відповідно до другого закону комутації, напруга на ємності конденсатора дорівнює нулю, тобто при $t = 0$ $u_C(0) = 0$, таким чином, рівняння (8) для цього моменту часу

$$0 = E + A, \quad (9)$$

З (9) постійна інтегрування напруги на ємності конденсатора

$$A = -E; \quad (10)$$

Закон зміни перехідної напруги на ємності після комутації

$$u_C = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right). \quad (11)$$

Покажемо перехідну напругу на ємності на графіку (рисунок 2).

Отримаємо рівняння перехідного струму при зарядженні конденсатора через резистор в колі з постійною ЕРС

$$i = C \frac{du_C}{dt} = C \frac{d}{dt} \left[E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \right] = \frac{CE}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{E}{r} e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (12)$$

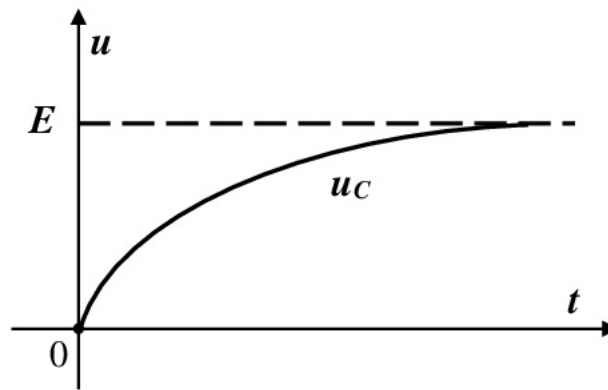


Рисунок 2 – Графік перехідної напруги на ємності при зарядженні конденсатора через резистор в колі з постійною ЕРС

З рівняння (12) видно, що в момент комутації струм в колі змінюється стрибком від нуля до значення $\frac{E}{r}$ і потім поступово зменшується.

Рівняння перехідної напруги на активному опорі згідно (12)

$$u_r = ri = Ee^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (13)$$

Так само як і струм, напруга на активному опорі теж змінюється стрибком від нуля до значення E , а потім поступово зменшується.

Розглянемо енергетичний бік процесу заряду конденсатора. Енергія, що надходить від джерела, накопичується на конденсаторі і витрачається на нагрів резистора

$$\int_0^{\infty} E i dt = \int_0^{\infty} (u_r i + u_C i) dt = \int_0^{\infty} r i^2 dt + \int_0^{\infty} C u_C du_C \quad (14)$$

або

$$E \int_0^{\infty} C du_C = CE^2 = \int_0^{\infty} ri^2 dt + \frac{CE^2}{2}, \quad (15)$$

тобто з (15)

$$\int_0^{\infty} ri^2 dt = \frac{CE^2}{2}. \quad (16)$$

Таким чином, при будь-яких значеннях r і C половина енергії, отриманої від джерела за час перехідного періоду, перейде в теплоту на активному опорі, а друга половина накопичиться в електричному полі конденсатора.

16.7. Розрядження конденсатора через резистор

Нехай тепер конденсатор, заряджений до напруги E , у момент комутації замикається на активний опір (рисунок 3).

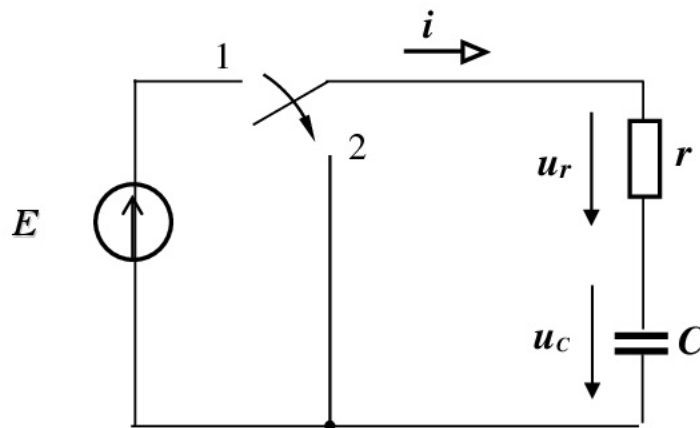


Рисунок 3 – Розрахункова схема перехідного процесу при розрядженні конденсатора через резистор

Знайдемо закон зміни напруги на ємності конденсаторі в післякомутаційний період.

Для післякомутаційного кола справедливі рівняння згідно з другим законом Кірхгофа

$$u_r + u_c = ri + u_c = rC \frac{du_c}{dt} + u_c = \tau \frac{du_c}{dt} + u_c = 0; \quad (17)$$

У даному випадку перехідна напруга на ємності конденсатора не має примусової складової, тобто $u_{cnp} = 0$.

Одержимо характеристичне рівняння і корінь характеристичного рівняння для кола після комутації

$$\tau \cdot p + 1 = 0; \quad p = -\frac{1}{\tau}; \quad (18)$$

Рівняння вільної складової напруги на ємності аналогічно (7).

Знайдемо постійну інтегрування напруги на ємності з початкових умов: у момент комутації за другим законом комутації напруга на ємності дорівнює E , тобто при $t = 0$ $u(0) = E$ і тоді

$$E = A, \quad (19)$$

Рівняння перехідної напруги на ємності при розрядженні конденсатора через резистор

$$u_c = Ee^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (20)$$

Графік перехідної напруги на ємності при розрядженні конденсатора через резистор буде наступним (рисунок 4)

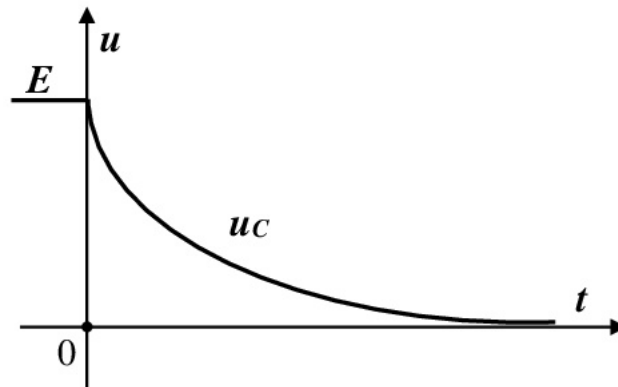


Рисунок 4 – Графік напруги на ємності $u_C=f(t)$

Знайдемо рівняння перехідного струму у колі при розрядженні конденсатора через резистор

$$i = C \frac{du_C}{dt} = C \frac{d}{dt} E e^{-\frac{t}{\tau}} = -\frac{CE}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = -\frac{E}{r} e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (21)$$

Рівняння напруги на активному опорі

$$u_r = -E e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (22)$$

З енергетичної точки зору

$$\int_0^{\infty} r i^2 dt = \frac{E^2}{r} \int_0^{\infty} e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = -\frac{E^2 \tau}{2r} e^{-\frac{2t}{\tau}} \Big|_0^{\infty} = \frac{CE^2}{2}. \quad (23)$$

ЛЕКЦІЯ 11

16.8. Перехідний процес у колі з послідовно з'єднаними котушкою і конденсатором

Розглянемо випадок включення послідовно з'єднаних котушки і конденсатора при постійній напрузі джерела живлення (рисунок 1).

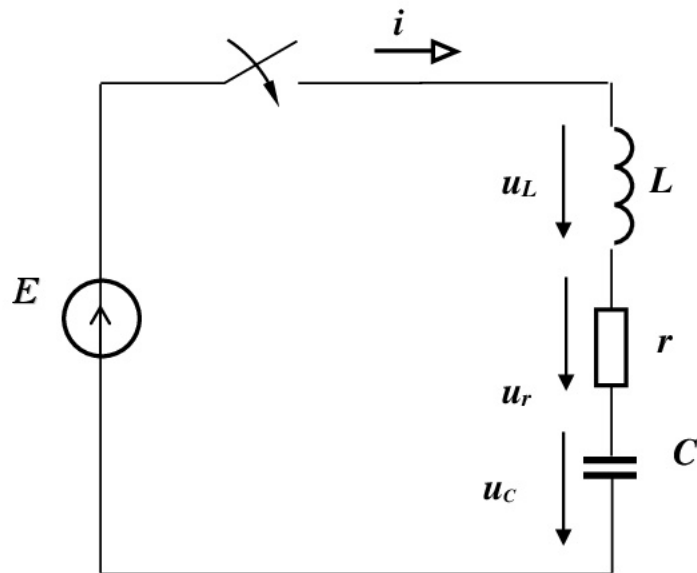


Рисунок 1 – Розрахункова схема включення послідовно з'єднаних котушки і конденсатора на постійну напругу джерела живлення

Для післякомутаційної схеми справедливе рівняння

$$u_L + u_r + u_c = L \frac{di}{dt} + ri + \frac{1}{C} \int idt = E . \quad (1)$$

Якщо продиференціювати обидві частини рівняння (1), то одержимо диференціальне рівняння другого порядку

$$\frac{d^2i}{dt} + 2\alpha \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0 \quad (2)$$

де прийняті наступні позначення

$$2\alpha = \frac{r}{L}; \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}. \quad (3)$$

Рівняння (3) однорідне, а це значить, що струм у даному колі має тільки вільну складову.

Прийmemo, що $\frac{di}{dt} = P$, з (2) отримаємо характеристичне рівняння:

$$p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2 = 0, \quad (4)$$

Оскільки характеристичне рівняння другого порядку, тоді вільний струм має дві постійні інтегрування A_1 і A_2 , два корені характеристичного рівняння p_1 і p_2

$$p_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}. \quad (5)$$

Рівняння вільного струму у загальному вигляді

$$i_{\epsilon} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}. \quad (6)$$

де A_1 і A_2 – постійні інтегрування струму, А;

p_1 і p_2 – корені характеристичного рівняння, 1/с.

Таким чином, характер вільного процесу залежить від параметрів котушки і конденсатора (L, r, C), тобто від коренів характеристичного рівняння і знака дискримінанту, який визначає, будуть корені дійсними ($D > 0$) або комплексними ($D < 0$). Можливі три випадки розвитку перехідного процесу.

Перший випадок. Якщо $\alpha > \omega_0$, $D > 0$, тоді співвідношення параметрів кола

$$\frac{r}{2L} > \frac{1}{\sqrt{LC}} \rightarrow r > 2\sqrt{\frac{L}{C}}, \quad (7)$$

тоді корені p_1 і p_2 дійсні, негативні та різні. При цьому загальне рішення рівняння перехідного струму (8) запишеться

$$, i = i_{np} + i_{cv} = i_{np} + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} \quad (8)$$

Примусовий струм $i_{np} = 0$, оскільки в колі постійного струму у примусовому режимі $x_C^{(0)} = 0$.

Постійні інтегрування знаходяться з початкових умов Незалежні початкові умови, згідно законів комутації, у момент комутації $t = 0$ $i(0) = 0$ і $u_C(0) = 0$. Залежні початкові умови знайдемо з рівняння для кола згідно другого закону Кірхгофа при $t = 0$

$$E = r \cdot i(0) + u_L(0) + u_C(0) \Rightarrow u_L(0) = E \quad (9)$$

Для знаходження постійних інтегрування струму A_1 і A_2 складемо систему рівнянь: перехідного струму i та першої похідної струму i'

$$\begin{cases} i = 0 + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}; \\ i' = p_1 \cdot A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t}. \end{cases} \quad (10)$$

Перша похідна з урахуванням початкових умов, оскільки

$$u_L = L \cdot \frac{di}{dt} = L \cdot i' \Rightarrow i'(0) = \frac{u_L(0)}{L} = \frac{E}{L}. \quad (11)$$

Система рівнянь (10) з урахуванням початкових умов і першої похідної струму при $t = 0$ має вигляд

$$\begin{cases} 0 = A_1 + A_2 \Rightarrow -A_1 = A_2 \\ \frac{E}{L} = p_1 \cdot A_1 + p_2 A_2 \Rightarrow \frac{E}{L} = p_1 \cdot A_1 - p_2 A_1 = A_1(p_1 - p_2). \end{cases} \quad (12)$$

З (12) маємо

$$A_1 = -A_2 = \frac{E}{L(p_1 - p_2)}. \quad (13)$$

Рівняння перехідного струму

$$i = \frac{E}{L(p_1 - p_2)} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}). \quad (14)$$

Побудуємо графік перехідного струму (рисунок 2).

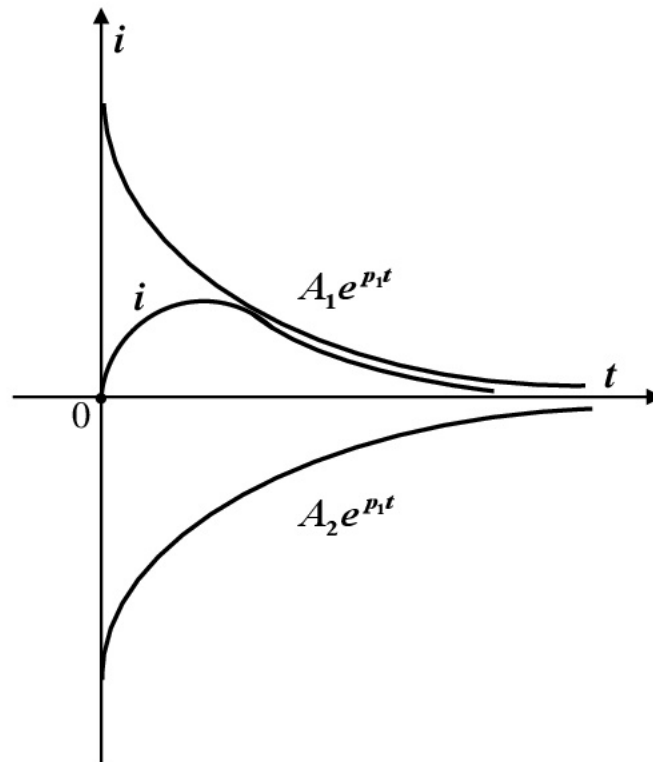


Рисунок 2 – Графік перехідного струму при заряді конденсатора, якщо $D > 0$

З графіку слідує, що перехідний струм в колі не змінює напрям і у колі йде накопичення зарядів на конденсаторі - це **апериодичний процес**.

Другий випадок. Якщо $\alpha < \omega_0$, $r = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, то $D = 0$, корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені

$$p_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm j\omega, \quad (15)$$

де ω – частота вільних затухаючих коливань, рад/с. Визначається як

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}. \quad (16)$$

Загальний вигляд рівняння перехідного струму аналогічний (8).

Постійні інтегрування A_1 і A_2

$$A_1 = -A_2 = \frac{E}{\omega L}, \quad (17)$$

Підставляючи значення коренів, постійних інтегрування у (8), знаходимо рівняння перехідного струму

$$i = \frac{E}{\omega L} e^{(-\alpha+j\omega)t} - \frac{E}{\omega L} e^{(-\alpha-j\omega)t} = \frac{E}{\omega L} e^{-\alpha t} \cdot (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}). \quad (18)$$

або

$$i = \frac{E}{\omega L} e^{-\alpha t} \cdot \sin \omega t. \quad (19)$$

На рисунку 3 показаний графік перехідного струму в цьому випадку.

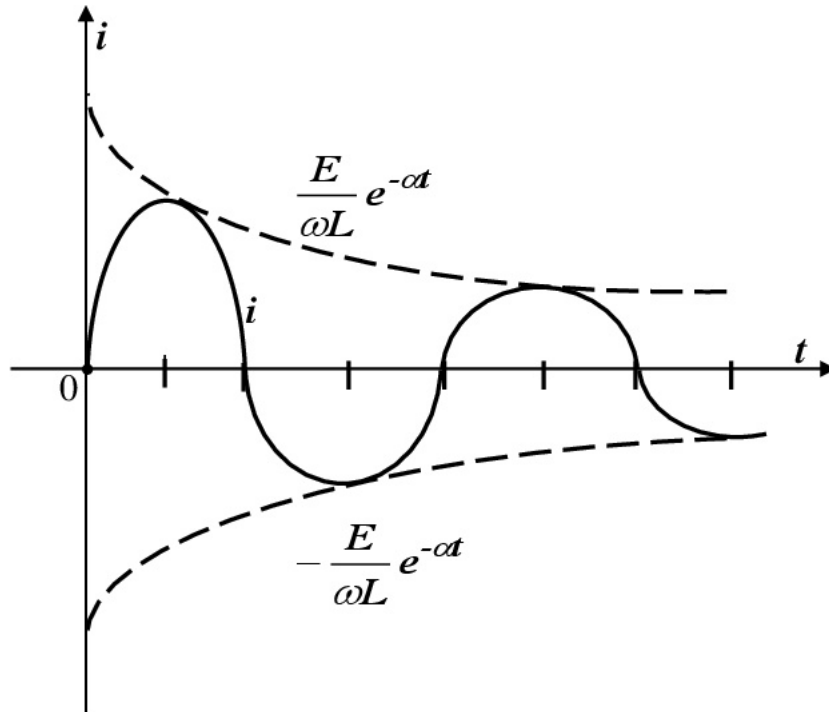


Рисунок 3 – Графік перехідного струму при заряді конденсатора, якщо $D < 0$

З графіку слідує, що перехідний струм в колі змінює напрям впродовж накопичення зарядів на конденсаторі - це **періодичний процес**.

Третій випадок. Якщо $\alpha = \omega_0$, $r = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, то $D = 0$, корені $p_{1,2} = -\alpha$, однакові, дійсні, негативні, заряд **гранично аперіодичний**.

Загальне рішення рівняння (19) у цьому випадку має дріб

$$\frac{\sin \omega t}{\omega} \rightarrow \frac{0}{0}. \quad (20)$$

Виникає математична невизначеність, для розкриття якої по правилу Лопіталя продиференціюємо чисельник і знаменник за ω .

$$\left(\frac{\sin \omega t}{\omega} \right)' \Big|_{\omega \rightarrow 0} = \frac{t \cdot \cos \omega t}{1} = 0. \quad (21)$$

Рівняння перехідного струму у цьому випадку наступне

$$i = (A_1 + A_2 t) e^{-\alpha t}. \quad (22)$$

Форма кривої струму така ж, як і в першому випадку.

В усіх трьох розглянутих випадках під дією джерела постійної ЕРС відбувається заряджання конденсатора. У першому і третьому випадках зарядний струм не змінює свого напрямку, що характеризує аперіодичний процес. В другому випадку струм являє собою затухаючу синусоїду, що характеризує коливальний процес. Коливання в контурі виникають внаслідок періодичного взаємного перетворення енергії електричного поля, яка накопичується в конденсаторі, та магнітного поля котушки.

Наявність активного опору в колі приводить до затухання коливань внаслідок розсіювання енергії в активному опорі. Характер процесу залежить від коренів характеристи-

чного рівняння, які, у свою чергу, визначаються співвідношенням параметрів елементів кола.

16.9. Розрядка конденсатора на котушку

Нехай тепер заряджений до значення E конденсатор у момент часу $t = 0$ підключається до затисків котушки (рисунок 4).

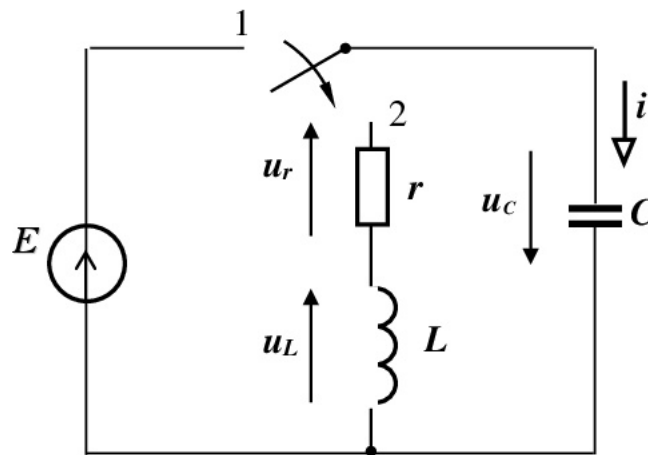


Рисунок 4 – Розрахункова схема послідовно з'єднаних котушки і конденсатора при розряді конденсатора на котушку

Для післякомутаційної схеми справедливе рівняння

$$u_L + u_r + u_c = L \frac{di}{dt} + ri + \frac{1}{C} \int idt = 0. \quad (23)$$

Характеристичне рівняння (4). В залежності від коренів характеристичного рівняння можливий аперіодичний і періодичний розряд конденсатора на котушку.

Перший випадок. Якщо $\alpha > \omega_0$, $D > 0$, тоді $r > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ тоді корені p_1 і p_2 дійсні, негативні та різні.

Знайдемо рівняння перехідної напруги на ємності u_C і перехідного струму i . Примусовий струм $i_{np} = 0$. Примусова напруга на ємності $u_{Cnp} = 0$.

Загальне рішення рівняння перехідного струму (8). У загальному вигляді рівняння перехідної напруги на ємності u_C

$$u_C = 0 + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}. \quad (24)$$

Постійні інтегрування знаходяться з початкових умов Незалежні початкові умови, згідно законів комутації, у момент комутації при $t = 0$ $i(0) = 0$, оскільки $x_C^{(0)} = 0$, а $u_C(0) = E$.

Для знаходження постійних інтегрування струму A_1 і A_2 складемо систему рівнянь: перехідної напруги u_C та першої похідної u_C'

$$\begin{cases} u_C = 0 + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}; \\ u_C' = p_1 \cdot A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t}. \end{cases} \quad (25)$$

Перша похідна з урахуванням початкових умов, оскільки

$$i = C \cdot \frac{du_C}{dt} = C \cdot u_C' \Rightarrow u_C'(0) = \frac{i(0)}{C} = 0. \quad (26)$$

Визначимо постійні інтегрування напруги на ємності A_1 і A_2

$$A_1 = \frac{Ep_2}{p_2 - p_1}, \quad A_2 = \frac{-Ep_1}{p_2 - p_1}. \quad (27)$$

Рівняння перехідної напруги на ємності

$$u_C = \frac{E}{p_2 - p_1} (p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}). \quad (28)$$

Побудуємо графік перехідної напруги на ємності (рисунок 5).

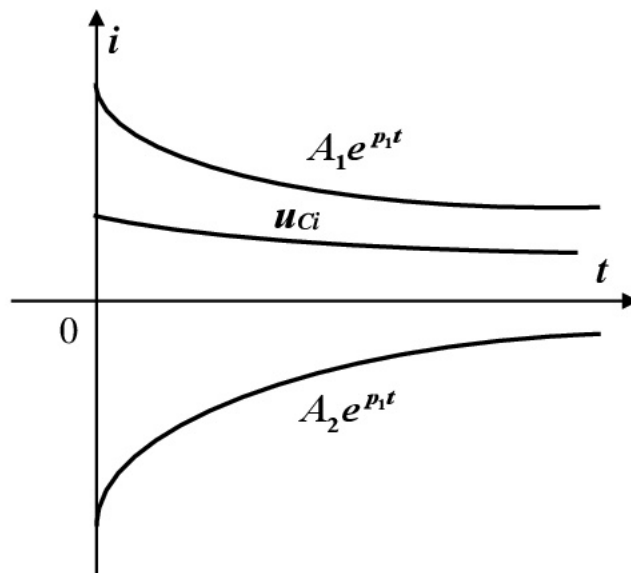


Рисунок 5 – Графік перехідної напруги на ємності при розряді конденсатора, якщо $D > 0$

Рівняння перехідного струму в колі

$$i = \frac{C \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot E}{p_2 - p_1} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}). \quad (29)$$

З графіку слідує, що перехідна напруга на ємності при розряді не перетинає вісь часу - це **апериодичний процес**.

Другий випадок. Якщо $\alpha < \omega_0$, $r = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, то $D = 0$, корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені (15).

$$A_1 = -A_2 = \frac{E}{\omega \cdot \sqrt{L \cdot C}}. \quad (30)$$

Рівняння перехідної напруги на ємності

$$u_C = \frac{E\omega_0}{\omega} \cdot e^{-\alpha t} \cdot \cos \omega t. \quad (31)$$

На рисунку 6 показаний графік перехідного процесу в цьому випадку. З графіку слідує, що конденсатор при розрядці обмінюється

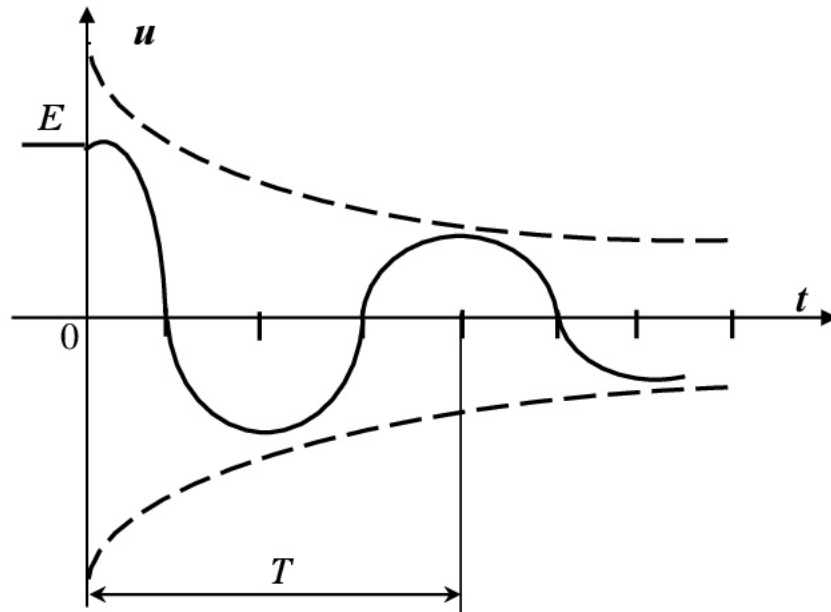


Рисунок 6 – Графік перехідної напруги на ємності при розряді конденсатора, якщо $D < 0$

енергією з котушкою - це **періодичний процес**.

Коливальний процес при розрядці конденсатора на котушку характеризується періодом власних коливань

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}}. \quad (32)$$

Якщо втрати енергії в контурі відсутні ($r = 0$, $\alpha = 0$), то

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (33)$$

Таким чином, *LC-контур*, у якому будь-яким способом компенсуються втрати енергії, може служити генератором незатухаючих гармонічних коливань.

Третій випадок. Якщо $\alpha = \omega_0$, $r = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, то $D = 0$, корені $p_{1,2} = -\alpha$, однакові, дійсні, негативні.

Рівняння перехідної напруги на ємності

$$u_C = E(1 - pt) \cdot e^{-\alpha t} = E(1 + \alpha t) \cdot e^{-\alpha t}. \quad (34)$$

Розряд конденсатора на котушку **гранично аперіодичний**.

ЛЕКЦІЯ 12

16.10. Включення котушки при синусоїдній напрузі

Нехай котушка індуктивності підключається до джерела гармонійної ЕРС з рівнянням (рисунок 1).

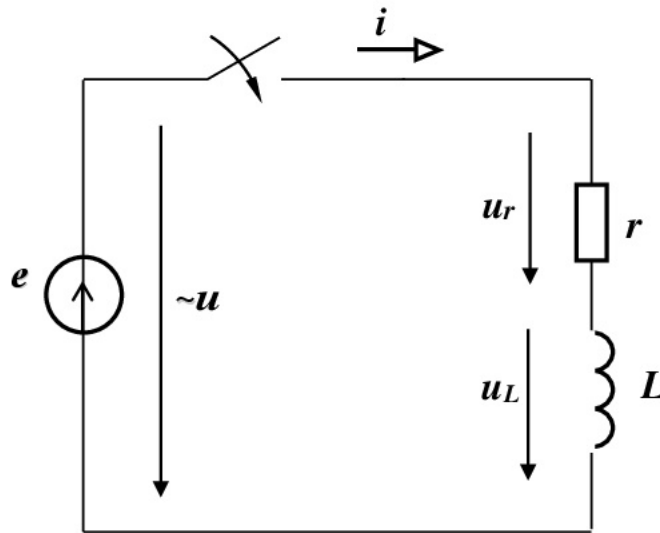


Рисунок 1 – Розрахункова схема підключення котушки до джерела синусоїдної напруги

$$e = E_m \sin(\omega t + \psi_e). \quad (1)$$

Для цього кола в післякомутаційний період справедливі рівняння

$$L \frac{di}{dt} + ri = e \quad (2)$$

або

$$\tau \frac{di}{dt} + i = \frac{E_m}{r} \sin(\omega t + \psi_i), \quad (3)$$

де τ – постійна часу перехідного процесу

$$\tau = \frac{L}{r}. \quad (4)$$

В загальному вигляді рівняння перехідного струму можна записати у вигляді суми вільної і примусової складових

$$i = i_{np} + i_{cs}. \quad (5)$$

Примусовий (сталий) струм у колі

$$i_{np} = I_m \sin(\omega t + \psi_e - \varphi), \quad (6)$$

де I_m – максимальний струм, А. Визначимо як

$$I_m = \frac{E_m}{z}. \quad (7)$$

Повний опір електричного кола в перехідному режимі

$$z = \sqrt{r^2 + (\omega L)^2}. \quad (8)$$

Кут зсуву фаз між напругою і струмом кола в перехідному режимі

$$\varphi = \left| \operatorname{arctg} \frac{\omega L}{r} \right|. \quad (9)$$

Вільна складова струму змінюється за експонентою $i_e = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$.

Рівняння перехідного струму у загальному вигляді з урахуванням примусової складової струму

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_e - \varphi) + Ae^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (10)$$

Знаходимо постійну інтегрування перехідного струму з початкових умов: $t = 0$ $i(0) = 0$, тому

$$A = -I_m \sin(\psi_e - \varphi). \quad (11)$$

Остаточно одержимо рівняння перехідного струму у колі

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_e - \varphi) - I_m \sin(\psi_e - \varphi)e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (12)$$

Максимально можливого значення струм досягає, якщо в момент включення котушки примусовий струм буде мати амплітудне значення при початковій фазі $\psi_i = \left(\psi_e - \varphi = \frac{\pi}{2} \right)$, а постійна часу кола буде дуже великою ($r \approx 0$, $\tau \rightarrow \infty$ і $\varphi = \frac{\pi}{2}$), тобто вільний струм буде затухати дуже повільно (рисунок 2).

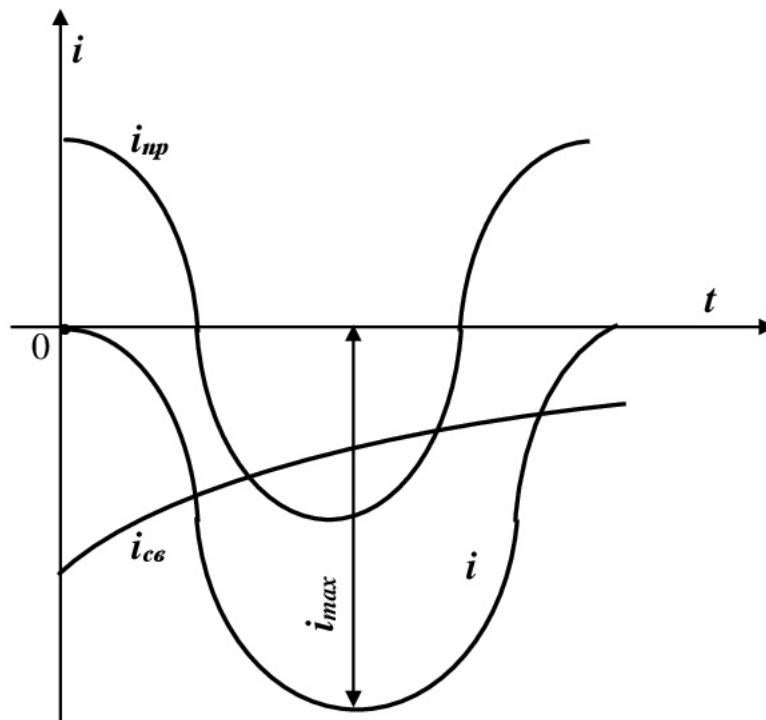


Рисунок 2 – Графіки примусової, вільної і перехідного струму при його початковій фазі $\psi_i = \left(\psi_e - \varphi = \frac{\pi}{2} \right)$

За цих умов $\psi = \varphi$ і прикладена напруга буде проходити через нуль. У цьому випадку амплітуда перехідного струму може досягти подвоєного значення амплітуди примусового (усталеного) струму.

16.11. Включення послідовно з'єднаних резистора і конденсатора при синусоїдній напрузі

Нехай послідовно з'єднані резистор і конденсатор підключаються до джерела синусоїдної ЕРС (рисунок 3), що має миттєве рівняння

$$e = E_m \sin(\omega t + \psi_e). \quad (13)$$

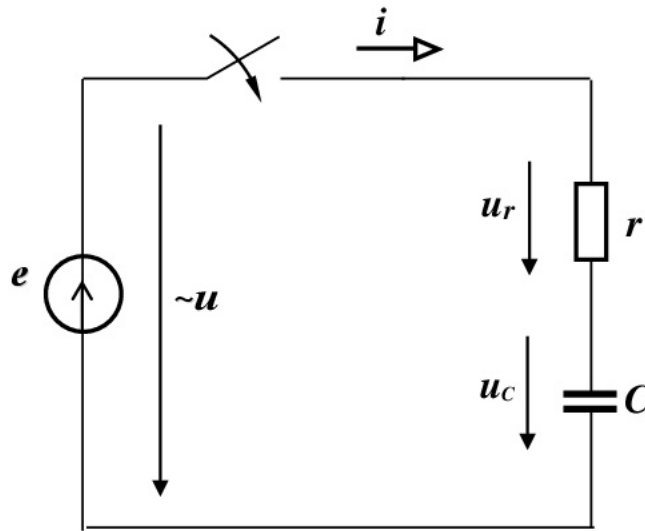


Рисунок 3 – Розрахункова схема послідовно з'єднаних резистора і конденсатор при підключенні до джерела синусоїдної ЕРС

Для цього кола справедливе рівняння за другим законом Кірхгофа

$$ri + \frac{1}{C} \int idt = e. \quad (14)$$

Струм у колі

$$i = C \frac{du_C}{dt}, \quad (15)$$

тоді

$$rC \frac{du_C}{dt} + u_C = e \quad (16)$$

або

$$\tau \frac{du_C}{dt} + u_C = e, \quad (17)$$

де $\tau = r \cdot C$ – постійна часу кола, s .

Перехідна напруга на ємності

$$u_C = u_{Cnp} + u_{C\text{ос}} \quad (18)$$

Примусова (усталена) напруга на ємності

$$u_{C\text{ос}} = U_{Cm} \sin(\omega t + \psi_e + \varphi - 90^\circ), \quad (19)$$

оскільки рівняння примусового струму

$$i_{np} = I_m \sin(\omega t + \psi + \varphi), \quad (20)$$

де амплітудний струм в колі

$$I_m = \frac{E_m}{Z}. \quad (21)$$

Повний опір кола

$$\underline{z} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}. \quad (22)$$

Рівняння вільної складової напруги на ємності

$$u_{C\text{в}} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (23)$$

Для напруги на ємності рівняння у загальному вигляді

$$u_{C\text{н}} = U_{Cm} \sin(\omega t + \psi_e + \varphi - 90^\circ) + Ae^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (24)$$

Знаходимо постійну інтегрування напруги на ємності з початкових умов: $t = 0$ $u_C(0) = 0$

$$A = -U_{Cm} \sin(\psi + \varphi - 90^\circ). \quad (25)$$

Остаточно одержимо рівняння перехідної напруги на ємності

$$u = U_{Cm} \sin(\omega t + \psi + \varphi - 90^\circ) - U_{Cm} \sin(\psi + \varphi - 90^\circ). \quad (26)$$

Максимально можливого значення напруга на ємності досягає, якщо в момент включення кола примусова складова напруги буде мати амплітудне значення. Це буде мати місце за умови, якщо початкова фаза напруги на ємності $\psi_{uc} = \psi_e + \varphi = \pi$. Крім того, будемо вважати, що постійна часу кола має дуже мале значення, оскільки активний опір конденсатора $r \rightarrow 0$ (рисунок 4).

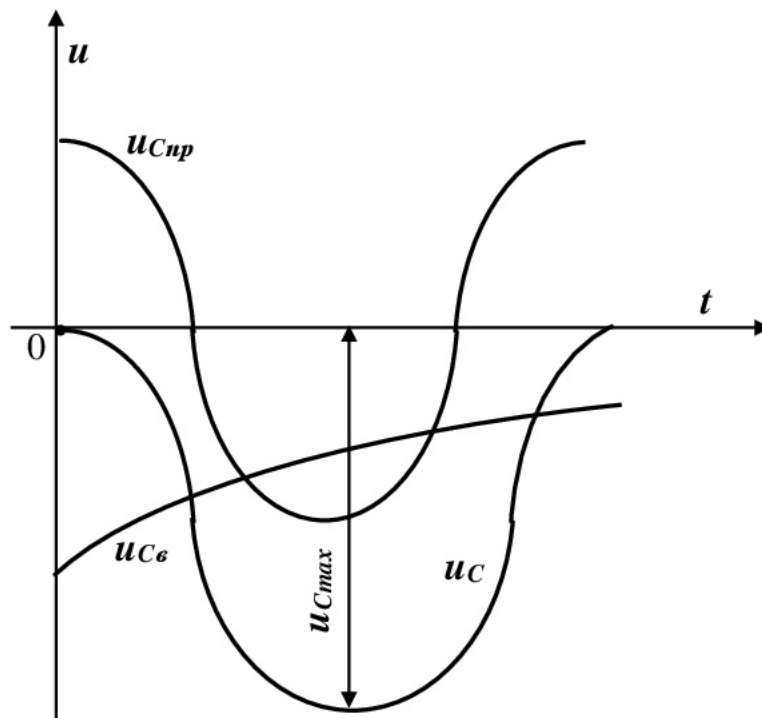


Рисунок 4 – Графік примусової, вільної і перехідної напруги на ємності, якщо початкова фаза напруги на ємності

$$\psi_{uc} = \psi_e + \varphi = \pi$$

У цьому випадку максимальне значення перехідної напруги на ємності може досягати майже подвоєного значення амплітуди примусової складової перехідної напруги на ємності.

ЛЕКЦІЯ 13

16.12. Розрахунок перехідного процесу в розгалуженому колі

Нехай задана розрахункова схема (рисунок 1) та відомі всі параметри і ЕРС. Необхідно знайти струми в розгалуженнях і напруги на всіх елементах під час перехідного процесу.

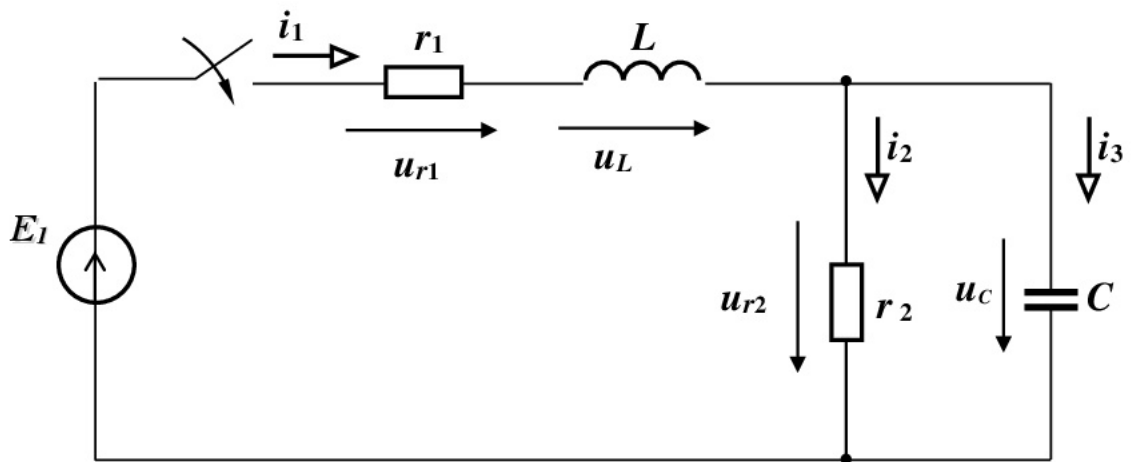


Рисунок 1 Розрахункова схема розгалуженого кола

Кожна електрична величина в перехідному процесі буде мати примушену і вільну складову, через що розрахунок перехідного процесу в розгалуженому колі зводиться до визначення примушених і вільних складових струмів і напруг, а також постійних інтегрування:

а) визначення вільних складових струмів і напруг.

післякомутаційної схеми складаємо рівняння за законами Кірхгофа

$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_3 = 0 \\ L \frac{di_1}{dt} + r_1 i_1 + r_2 i_2 = E_1 \\ r_2 i_2 - \frac{1}{C} \int i_3 dt = 0. \end{cases} \quad (1)$$

У цих рівняннях i_1 , i_2 і i_3 – повні струми.

Перепишемо систему рівнянь для вільних складових струмів

$$\begin{cases} i_{1e} - i_{2e} - i_{3e} = 0 \\ L \frac{di_{1e}}{dt} + r_1 i_{1e} + r_2 i_{2e} = 0 \\ r_2 i_{2e} - \frac{1}{C} \int i_{3e} dt = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Вільний струм можна визначити шляхом рішення однорідного диференціального рівняння, яке записується у вигляді показової функції Ae^{pt} . Таким чином, кожний вільний струм може бути представлений у вигляді

$$i_e = Ae^{pt}. \quad (3)$$

Постійна інтегрування A для кожного вільного струму різна, а показники затухання p однакові для всіх вільних струмів, тому що все коло охоплене єдиним перехідним процесом.

Візьмемо похідну від вільного струму

$$\frac{di_{\varepsilon}}{dt} = \frac{d}{dt}(Ae^{pt}) = pAe^{pt} = pi_{\varepsilon}. \quad (4)$$

Знайдемо інтеграл від вільного струму

$$\int i_{\varepsilon} dt = \int Ae^{pt} = \frac{Ae^{pt}}{p} = \frac{i_{\varepsilon}}{p}. \quad (5)$$

Перепишемо систему рівнянь (2) з урахуванням (5) і (4)

$$\begin{cases} i_{1\varepsilon} - i_{2\varepsilon} - i_{3\varepsilon} = 0 \\ (pL + r_1)i_{1\varepsilon} + r_2i_{2\varepsilon} = 0 \\ r_2i_{2\varepsilon} - \frac{i_{3\varepsilon}}{pC} = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Отримана система рівнянь являє собою систему алгебраїчних рівнянь відносно $i_{1\varepsilon}$, $i_{2\varepsilon}$, $i_{3\varepsilon}$ та не містить похідних і інтегралів.

Вирішимо систему рівнянь (6) методом визначників

$$i_{1\varepsilon} = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad i_{2\varepsilon} = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad i_{3\varepsilon} = \frac{\Delta_3}{\Delta}; \quad (7)$$

Знаходимо визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ (pL + r_1) & r_2 & 0 \\ 0 & r_2 & -\frac{1}{pC} \end{vmatrix}. \quad (8)$$

Знаходимо доповнення визначника

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & r_2 & -\frac{1}{pC} \end{vmatrix}; \quad (9)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ (pL + r_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{pC} \end{vmatrix}; \quad (10)$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ (pL + r_1) & r_2 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \end{vmatrix}. \quad (11)$$

Таким чином, $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$, $\Delta_3 = 0$, тому що

$$i_{1e} = \frac{0}{\Delta}; \quad i_{2e} = \frac{0}{\Delta}; \quad i_{3e} = \frac{0}{\Delta}. \quad (12)$$

Кожний з вільних струмів не може дорівнювати нулю, оскільки в цьому випадку не будуть виконуватися закони комутації. А це може бути тільки тоді, коли визначник системи Δ дорівнює нулю, тобто $\Delta = 0$.

Рівняння $\Delta = 0$ називають характеристичним. Єдиним невідомим у ньому є корінь p . У даному прикладі одержимо

$$\frac{r_2}{pC} + r_2(pL + r_1) + \frac{pL + r_1}{pC} = 0 \quad (13)$$

або

$$r_2LCp^2 + (r_1r_2C + L)p + (r_1 + r_2) = 0. \quad (14)$$

Корені квадратного рівняння

$$p_{1,2} = \frac{-(r_1r_2C + L) \pm \sqrt{(r_1r_2C + L)^2 - 4r_2LC(r_1 + r_2)}}{2r_2LC}. \quad (15)$$

Знайшовши корені характеристичного рівняння системи, можна записати загальні вирази для кожного з вільних струмів. Можливі декілька випадків:

1) рівняння має один корінь, тоді

$$i_e = Ae^{pt}; \quad (16)$$

2) рівняння має два дійсних нерівних корені, тоді

$$i_e = A_1e^{p_1t} + A_2e^{p_2t}; \quad (17)$$

3) рівняння має два дійсних рівних корені, тоді

$$i_e = (A_1 + A_2t)e^{pt}; \quad (18)$$

4) рівняння має два комплексно-спряжених корені, тоді

$$i_e = (A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t)e^{pt}. \quad (19)$$

б) знаходження примушених складових струмів і напруг виконується відомими методами;

в) знаходження загального рішення для струмів і напруг як суми примушених і вільних складових;

г) знаходження постійних інтегрування виконується з урахуванням початкових умов, які поділяються на незалежні і залежні початкові умови.

16.13. Перетворення Лапласа

Лінійні диференціальні рівняння з постійними коефіцієнтами можуть бути розв'язані за допомогою інтегральних перетворень Лапласа. Різним функціям дійсних змінних (часу t) ці перетворення відповідають функції комплексної змінної $p = \alpha + j\omega$ і навпаки. Комплексну змінну слід відрізнати від змінної $p = \frac{d}{dt}$, яка позначає оператор диференціювання. Пряме перетворення Лапласа функції часу $f(t)$ визначається співвідношенням

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt. \quad (20)$$

Функцію $f(t)$ називають оригіналом, а $F(p)$ – зображенням функції $f(t)$ за Лапласом. Таким чином, можна записати

$$f(t) \doteq F(p), \quad (21)$$

тобто оригінал відповідає зображенню.

Запишемо деякі зображення, що доводяться в курсі вищої математики:

зображення постійної величини

$$A \doteq \frac{A}{p}, \quad (22)$$

зображення похідної функції $f(t)$

$$f'(t) \doteq pF(p) - f(0) \quad (23)$$

зображення інтеграла функції $f(t)$

$$\varphi(t) = \int f(t) dt \doteq \frac{F(p)}{p} + \frac{\varphi(0)}{p} . \quad (24)$$

16.14. Закони Ома і Кірхгофа в операторній формі

Нехай коло (рисунок 2) підключається до джерела напруги при ненульових початкових умовах, тобто до комутації в колі проходив деякий струм.

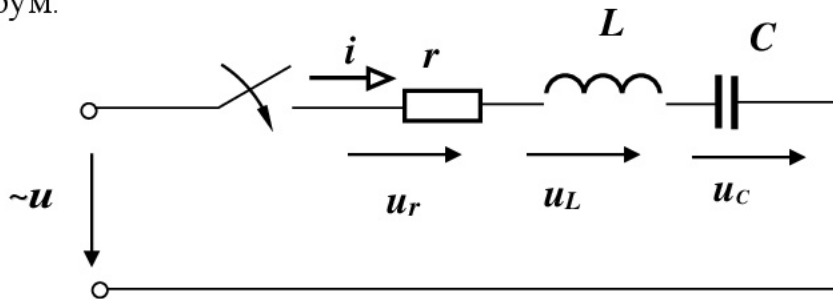


Рисунок 2 Розрахункова схема кола для миттєвих значень

Тоді можемо записати $i(0) \neq 0$, $u_c \neq 0$. Складемо диференціальне рівняння перехідного процесу

$$ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = u(t), \quad (25)$$

Замінімо оригінали функцій їх зображеннями за Лапласом (рисунок 3)

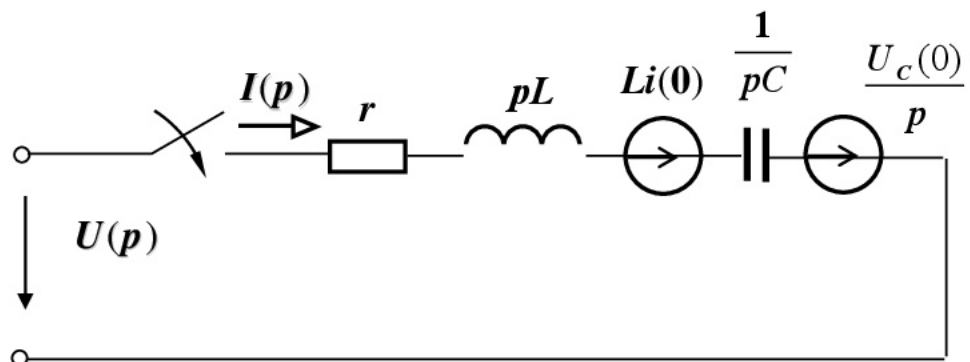


Рисунок 3 – Розрахункова схема в операторній формі

$$\begin{aligned}
 i(t) \doteq I(p); \quad u(t) \doteq U(p); \quad \frac{di}{dt} \doteq pI(p) - i(0); \\
 \frac{1}{C} \int idt = u_C(t) \doteq \frac{1}{C} \frac{I(p)}{p} + \frac{u_C(0)}{p}.
 \end{aligned}
 \tag{26}$$

Тоді одержимо

$$rI(p) + pLI(p) - Li(0) + \frac{I(p)}{pC} + \frac{u_C(0)}{p} = U(p).
 \tag{27}$$

Звідки

$$I(p) = \frac{U(p) + Li(0) - \frac{u_C(0)}{p}}{r + pL + \frac{1}{pC}}.
 \tag{28}$$

Отримане рівняння подібне закону Ома в операторній формі для перехідного процесу при ненульових початкових умовах. У знаменнику знаходиться операторний опір

$$Z(p) = r + pL + \frac{1}{pC}.
 \tag{29}$$

Він може бути визначений з комплексу повного опору синусоїдного струму

$$Z = r + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \quad (30)$$

шляхом заміни $j\omega$ на p .

При нульових початкових умовах, тобто при $i(0) = 0$ і $u(0) = 0$, одержимо

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)}. \quad (31)$$

Аналогічно можна записати закони Кірхгофа в операторній формі

$$\sum_{k=1}^n I_k(p) = 0; \quad (32)$$

$$\sum_{k=1}^n U_k(p) = \sum_i^n E_k(p). \quad (33)$$

ЛЕКЦІЯ 14

ТЕМА 17 КОЛА З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

17.1 Струми і напруги в довгих лініях. Загальні відомості про колах з розподіленими параметрами

У попередніх розділах розглядалися лінії і електричні кола з зосередженими параметрами, тобто передбачалося, що електричне коло представляє собою сукупність деяких самостійно існуючих елементів r , L і C , зосереджених в різних його точках. Напруга і струми цих елементів зв'язуються співвідношенням:

$$u_r = r \cdot i; \quad u_L = L \frac{di}{dt}; \quad i = C \frac{du_C}{dt}; \quad u_C = \frac{1}{C} \int idt$$

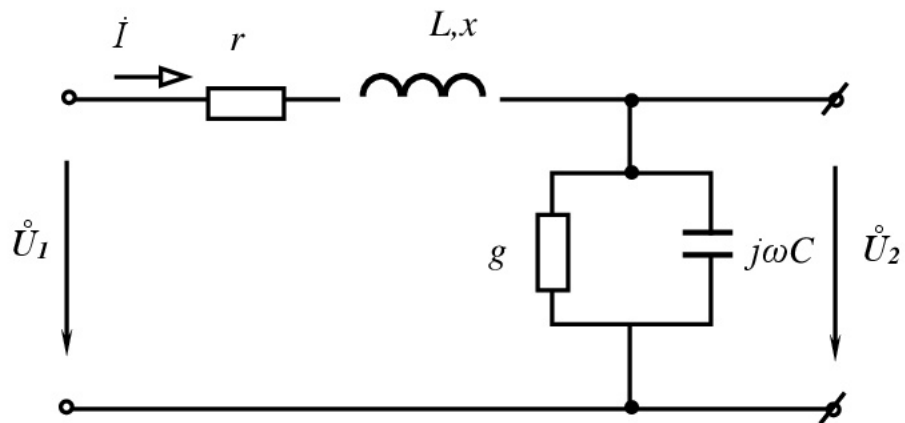


Рисунок. 1 Схема заміщення ЛЕП з зосередженими параметрами

В лінії невеликої довжини, при частоті 50 Гц і напругах до 35 кВ можна знехтувати струмами, зумовленими ємністю між проводами (струмами зміщення) і провідністю ізоляції (струмами витoku через гірлянди ізоляторів і струмами, зумовленими коронним електричним

зарядом поблизу поверхні проводів). Вони застосовуються лише до ділянок нескінченно малої довжини.

Наведені вище рівняння засновані на припущенні, що струм, що входить в кожен з цих елементів, дорівнює струму, який виходить з нього. Вирішення цих рівнянь дає закон зміни досліджуваної електричної величини, в залежності від часу, але не від координати довжини, яка в ці рівняння не входить. При великих напругах, що зустрічаються в електроенергетиці, і при великих частотах з якими має справу електрозв'язок, а також при значній довжині ліній нехтувати струмами зміщення і струмами витоку неприпустимо. Отже, струм в проводах не однаковий у різних точках лінії. Струм в проводах лінії викликає падіння напруга в активному опорі проводів і створює змінне магнітне поле, яке в свою чергу наводить уздовж всієї лінії ЕРС самоіндукції. Тому напруга між проводами також не залишається постійним уздовж лінії.

Щоб врахувати зміну струму і напруги вздовж лінії, потрібно вважати, що кожен як завгодно малий елемент лінії володіє опором і індуктивністю, а між провідниками - провідністю та ємністю, тобто розглядати лінію як коло з розподіленими параметрами. Таку лінію називають довгою. Довгу лінію вважають **однорідною**, якщо активний опір, індуктивність, провідність і ємність рівномірно розподілені вздовж лінії.

17.2 Диференціальні рівняння однорідних ліній

Довгу лінію можна представити у вигляді безлічі сполучених в коло нескінченно малих елементів довжиною dx , кожен з яких має активний опір - $r_0 dx$, індуктивність - $L_0 dx$, провідність - $g_0 dx$ і ємність -

$C_o dx$. Приймаються опір $r_o dx$ і індуктивність $L_o dx$ включеними в один провід. Складемо диференціальні рівняння, яким задовольняють струми і напруги в будь-якому перетині двопровідної лінії.

Нехай відомі **первинні параметри** однорідної лінії, віднесення до одиниці довжини: r_o – активний опір прямого і зворотного проводів, Ом / км; L_o – індуктивність кола, що утворена прямим і зворотним проводами, Гн / км; g_o – активна провідність між проводами, См / км; C_o – ємність між проводами, Ф / км;

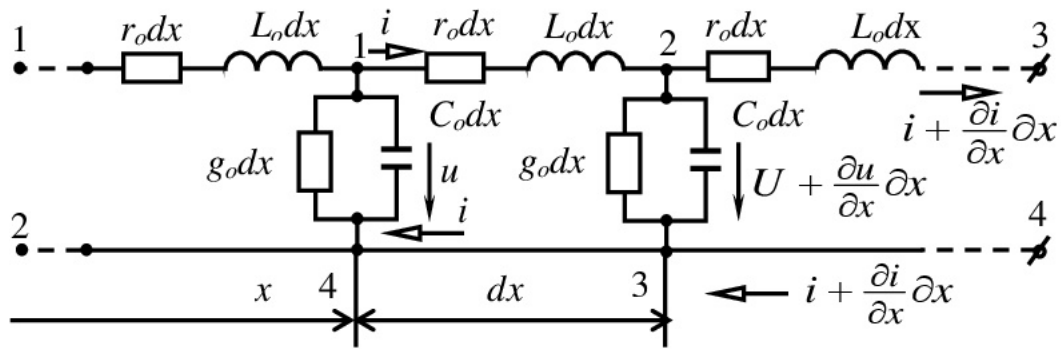


Рисунок 2 - Схема заміщення ЛЕП з розподіленими параметрами

Позначимо через x відстань від початку лінії до поточного елемента її довжини. Напруга і струм лінії є функціями двох незалежних змінних: просторової координати x , що визначає місце спостереження, і часу t , що визначає момент спостереження. Передбачається, що напрямок координатної осі x збігається з напрямком осі лінії.

Зважаючи на наявність двох незалежних змінних (x і t) рівняння записуються в приватних похідних. Миттєві значення напруги і струму на початку вибраного елемента лінії dx позначимо через i і u , на

початку наступного - через $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$ і $i + \frac{\partial i}{\partial x} dx$. На підставі законів

Кірхгофа для елемента лінії довжиною dx можна записати наступні рівняння

$$\left. \begin{aligned} u - \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) &= r_o \cdot dx \cdot i + L_o dx \frac{\partial i}{\partial t}, & (1) \\ i - \left(i + \frac{\partial i}{\partial x} dx \right) &= \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) g_o dx + C_o dx \frac{\partial}{\partial t} \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) & (2) \end{aligned} \right\}$$

Наводячи подібні члени і скорочуючи на dx , легко отримати наступні диференціальні рівняння - **рівняння довгої лінії**

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} &= r_o i + L_o \frac{\partial i}{\partial t}, & (3) \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= g_o u + C_o \frac{\partial u}{\partial t} & (4) \end{aligned} \right\}$$

Початковими умовами будуть значення напруги і струму на початку або кінці лінії в момент часу, прийнятий за нуль.

Граничні умови визначаються зв'язками між напругою і струмом на початку або в кінці лінії, залежними від заданого режиму роботи лінії.

17.3 Сталий режим однорідної лінії

Розглянемо сталий режим у довгій лінії при синусоїдній напрузі джерела живлення.

Перепишемо рівняння (3) і (4) для сталого режиму, вводячи комплексні напруги, струми, опори і провідності:

$$-\frac{d\dot{U}}{dx} = (r_0 + j\omega L_0) \dot{I} = Z_0 \dot{I}, \quad (5)$$

$$-\frac{d\dot{I}}{dx} = (g_0 + j\omega C_0) \dot{U} = Y_0 \dot{U}. \quad (6)$$

де $Z_0 = r_0 + j\omega L_0$ – поздовжній комплексний опір, Ом;
 $Y_0 = g_0 + j\omega C_0$ – поперечна комплексна провідність одиниці лінії, См, $Y_0 \neq \frac{1}{Z_0}$.

Продиференціюємо рівняння (5) и (6) і замінимо $\frac{d\dot{I}}{dx}$ і $\frac{d\dot{U}}{dx}$ їх значеннями, згідно (5) і (6). Отримаємо

$$\frac{d_2 \dot{U}}{dx^2} = Z_0 Y_0 \dot{U}, \quad (7)$$

$$\frac{d_2 \dot{I}}{d^2 x} = Z_0 Y_0 \dot{I} \quad (8)$$

Диференціальні рівняння (7) і (8), визначаючи зміни комплексних напруги і струму вздовж лінії, однакові. Тому достатньо знайти закон зміни напруги \dot{U} , а струм можна отримати з рівняння (5). Рі-

шення лінійного диференціального рівняння другого порядку (7) з постійними коефіцієнтами має вигляд:

$$\dot{U} = \dot{A}_1 e^{-\gamma x} + \dot{A}_2 e^{\gamma x}, \quad (9)$$

де γ – корінь характеристичного рівняння або постійна поширення,

\dot{A}_1 и \dot{A}_2 - постійні інтегрування (комплексні числа)

\dot{U} - комплексна напруга в лінії на відстані x від її початку.

Вираз для комплексного струму \dot{I} визначаємо з рівняння (5)

$$\dot{I} = -\frac{1}{Z_0} \frac{d\dot{U}}{dx} = \frac{\gamma}{Z_0} (\dot{A}_1 e^{-\gamma x} - \dot{A}_2 e^{\gamma x}) = \frac{\dot{A}_1 e^{-\gamma x} - \dot{A}_2 e^{\gamma x}}{\sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}}}. \quad (10)$$

Знаменник рівняння (11) називають хвильовим опором лінії

$$Z_C = z_C e^{j\Theta} = r_C + jx_C = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}} = \sqrt{\frac{r_0 + j\omega L_0}{g_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{Z_0}{y_0}} e^{j\theta}, \quad (11)$$

$$\text{де } \Theta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\omega(g_0 L_0 - r_0 C_0)}{r_0 g_0 + \omega^2 L_0 C_0}$$

Хвильовий опір лінії постійному струму

$$Z = \sqrt{\frac{r}{g}} = \sqrt{r^2} = r. \quad (12)$$

Підставляючи Z_c (12) в формулу (11), отримаємо

$$\dot{I} = \frac{\dot{A}_1}{Z_c} e^{-\gamma x} - \frac{\dot{A}_2}{Z_c} e^{\gamma x}. \quad (13)$$

Таким чином, отримаємо:

$$\dot{U} = \dot{A}e^{-\gamma x} + \dot{A}e^{-x}, \quad \left. \vphantom{\dot{U}} \right\} \quad (14)$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{A}_1}{Z_c} e^{-\gamma x} - \frac{\dot{A}_2}{Z_c} e^{\gamma x}. \quad \left. \vphantom{\dot{I}} \right\} \quad (15)$$

Величини γ , α , β и Z_c називаються **вторинними** або **хвильовими параметрами** лінії.

Для визначення постійних інтегрування \dot{A}_1 и \dot{A}_2 підставимо в (14) и (15) граничні значення \dot{U}_1 и \dot{I}_1 на початку лінії. Вирішуючи спільно ці рівняння, знайдемо постійні інтегрування

$$\dot{A}_1 = \frac{1}{2}(\dot{U}_1 + Z_c \dot{I}_1), \quad \left. \vphantom{\dot{A}_1} \right\} \quad (16)$$

$$\dot{A}_2 = \frac{1}{2}(\dot{U}_1 - Z_c \dot{I}_1). \quad \left. \vphantom{\dot{A}_2} \right\} \quad (17)$$

Підставимо значення постійних інтегрування (16), (17) у (14), (15) і після перетворення рівнянь отримаємо:

Після перетворення рівнянь маємо:

$$\dot{U} = \dot{U}_1 ch \gamma x - Z_c \dot{I}_1 sh \gamma x, \quad \left. \vphantom{\dot{U}} \right\} \quad (18)$$

$$\dot{I} = \dot{I}_1 ch \gamma x - \frac{\dot{U}_1}{Z_c} sh \gamma x. \quad \left. \vphantom{\dot{I}} \right\} \quad (19)$$

де \dot{U} і \dot{I} – комплексні діючі значення напруги і струму на відстані x від кінця лінії;

ch, sh – гіперболічний косинус і синус відповідно.

Z_c – хвильовий або характеристичний опір лінії

γ – коефіцієнт розповсюдження

$$\gamma = \alpha + j\beta, \quad (20)$$

де α – коефіцієнт загасання, Нп (Непер). В лінії без втрат $\alpha = 0$;

β – коефіцієнт фази, рад.

Користуючись цими рівняннями, можна отримати напруга і струм в будь-якій точці лінії по заданих параметрах лінії і відомим значенням \dot{U}_1 і \dot{I}_1 на початку лінії.

17.4 Хвилі в лінії при сталому режимі.

Для отримання рівнянь, що визначають миттєві значення напруги та струму в будь-якій точці лінії, всі комплексні величини, що входять в рівняння (9) і (10) необхідно надати у показовій формі. Комплекси \dot{A}_1 і \dot{A}_2 , що мають розмірність напруги, можна записати у вигляді $\dot{A}_1 = A_1 \cdot e^{j\psi_1}$ і $\dot{A}_2 = A_2 \cdot e^{j\psi_2}$. Характеристичний опір Z_C представити у показовій формі (11).

Тоді вирази миттєвих значень напруги та струму

$$u = \sqrt{2} A_1 e^{-\alpha l} \sin(\omega t + \psi_1 - \beta x) + \sqrt{2} A_2 e^{\alpha l} \sin(\omega t + \psi_2 + \beta x), \quad (20)$$

$$i = \frac{\sqrt{2}}{Z_C} A_1 e^{-\alpha l} \sin(\omega t + \psi_1 - \beta x - \vartheta) - \frac{\sqrt{2}}{Z_C} A_2 e^{\alpha l} \sin(\omega t + \psi_2 + \beta x + \vartheta). \quad (21)$$

Перші доданки в правій частині отриманих виразів характеризують **біжучі хвилі** напруги і струму, що рухаються в напрямку зростання координати x і затухають у напрямку руху (рисунок 3).

Величина α , характеризує зміна амплітуди хвилі на одиницю довжини лінії і називається **коефіцієнтом загасання**. Величина β рівна зміні фази на одиницю довжини лінії, називається **коефіцієнтом фази**.

Другий доданок - – відбита хвиля.

Якщо опір навантаження в кінці лінії дорівнює хвильовому ($Z_n = Z_C$) відбита хвиля відсутня, і в лінії встановлюється режим біжучої

хвилі, яка подає енергію від джерела до навантаження. При цьому в лінії без втрат потужність джерела буде тільки активною і рівною потужності приймача. Такий режим роботи довгої лінії називають режимом узгодженого навантаження.

Якщо опір навантаження рівний 0 ; ∞ або носить тільки реактивний характер, в лінії виникає режим **стоячої хвилі**. Передачі енергії від джерела до навантаження не відбувається.

Змішаний режим – коли в лінії є хвилі, що біжать, і стоячі хвилі. Цей режим виникає, коли навантаження носить комплексний характер. У змішаному режимі передається у навантаження мала частка енергії джерела живлення.

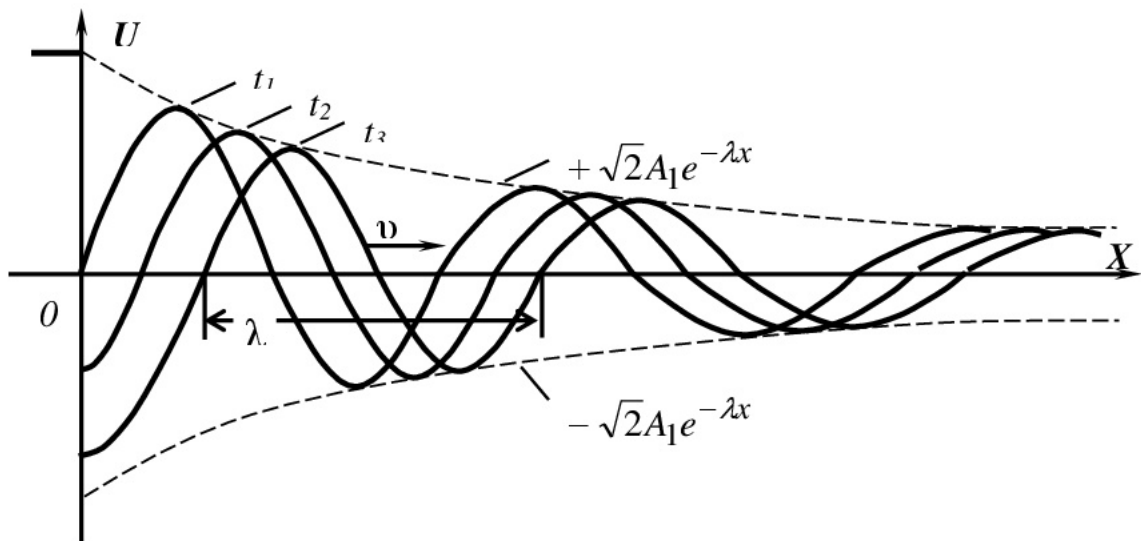


Рис. 3 Графіки біжучих загасаючих хвиль напруги і струму

Хвилі, що поширюються вздовж лінії від джерела до приймача в напрямку збільшення координати x , називають **прямими (падаючими)**, а хвилі, що поширюються в зворотному напрямку, - **зворотними (відбитими)**.

Характерною величиною біжучої хвилі є її довжина λ , яка визначається відстанню між найближчими двома точками, взятими в напрямку поширення хвилі, з фазами коливання, що відрізняються на 2π . Лінії, фізична довжина яких порівнянна з довжиною хвилі, вважаються **довгими лініями**.

Довжина хвилі в лінії

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad (22)$$

Фазова швидкість повітряної лінії близька до швидкості світла (близько $3 \cdot 10^8$ м/с).

Кола з розподіленими параметрами мають явну залежність їх параметрів від частоти струму. Наприклад, звичайна котушка індуктивності на високій частоті (одиниці МГц) вже може розглядатися як лінія з розподіленими параметрами.

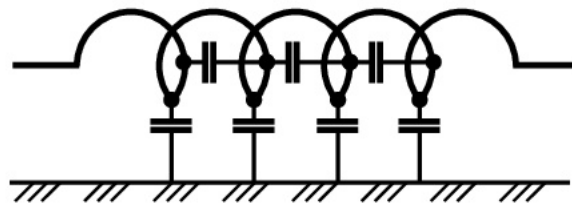


Рисунок 4 – Схема заміщення котушки струмам високої частоти

При частоті струму рівній десяткам ГГц в цілому котушка буде оказувати проходженню струму ємнісний, а не індуктивний опір.

Розглянемо схему заміщення котушки, приведену на рисунку 4. З рисунку 4 видно, що окрім індуктивностей, в колі є між виткові єм-

ності і ємності між витками і землею (загальним проводом). Якщо по котушці проходить змінний струм, то при зростанні частоти буде рости і індуктивний опір кожного повздовжньої ділянки dx (рис.2) кола, в той час, як ємнісний опір поперечної ділянки буде зменшуватися. Таким чином, з збільшенням частоти змінного струму в повздовжньому напрямі розповсюдження хвилі буде зменшуватися, а у поперечному (ємнісному), навпаки – збільшуватися.

17.5 Лінія без спотворень

Передача сигналів без спотворень по лініях зв'язку має виключне значення.

Неспотвореної передачею сигналу називається така передача, при якій форма сигналу на початку і кінці лінії однакова, тобто всі ординати кривої напруги або струму в кінці лінії прямо пропорційні відповідним ординатам кривої на початку лінії.

Таке явище має місце в тому випадку, коли коефіцієнт загасання лінії β , а також фазова швидкість ν на всіх частотах однакові.

Неоднакове загасання на різних частотах створює **амплітудні спотворення**, а неоднакова швидкість хвиль на різних частотах - **фазові спотворення**. Таким чином, для неспотвореної передачі потрібно, щоб коефіцієнт загасання β не залежав від частоти, коефіцієнт фази α був прямо пропорційний частоті. В цьому випадку фазова

швидкість $\nu = \frac{\omega}{\beta}$ виходить незалежною від частоти. Це дотримується при умові

$$\frac{L_0}{r_0} = \frac{C_0}{g_0}, \quad (23)$$

В цьому випадку коефіцієнт поширення дорівнює:

$$\gamma = \sqrt{r_0 g_0} + j\omega \sqrt{L_0 C_0}, \quad (24)$$

Таким чином, лінія, параметри якої задовольняють умові (23) називається **лінією без спотворень**.

Хвильовий опір ліній без спотворень - дійсне число, що дорівнює активного опору, не залежного від частоти

$$Z_C = \sqrt{\frac{r_0}{g_0}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}. \quad (25)$$

Фазова швидкість в лінії без спотворень постійна

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}. \quad (26)$$

Для усунення спотворень, що викликаються неузгодженістю опорів навантаження (приймача) з опором лінії, опір навантаження повинен бути рівним хвильовому опору. Коефіцієнт корисної дії у цьому випадку має максимальне значення $\eta_l = e^{-2\alpha x}$.

ЛЕКЦІЯ 15

Тема 18 ЕЛЕКТРОМАГНІТНЕ ПОЛЕ ТА МЕТОДИ ЙОГО АНАЛІЗУ

18.1 Опис основних параметрів електростатичного поля

Електростатичне поле – це частковий вид електромагнітного поля. Воно створюється сукупністю електричних зарядів, нерухомих в просторі по відношенню до наглядача і незмінних в часі.

З курсу фізики відомо, що люба речовина складається з елементарних заряджених часток, оточених електромагнітним полем.

Елементарні заряди (заряди електрона і протона) характеризуються зв'язком з власним і взаємодією з зовнішнім електричним полями. Електростатичне поле має лише електричну складову електромагнітного поля.

Під **зарядом** (зарядом тіла) розуміють скалярну величину, яка дорівнює алгебраїчній сумі елементарних електричних зарядів в цьому тілі. У основу визначення електричного поля покладено механічний його прояв. Воно описується законом Кулона.

Закон Кулона формулюється таким чином: **два точкових заряди q_1 і q_2 у вакуумі взаємодіють між собою з силою \vec{F} , прямо пропорційною добутку зарядів q_1 і q_2 і зворотно пропорційно квадрату відстані R між ними.** Ця сила направлена по лінії, яка з'єднує точкові заряди (рисунок 1).

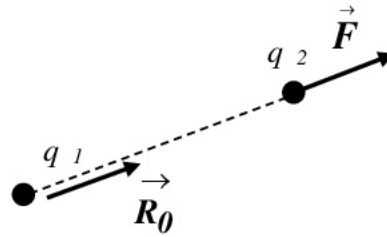


Рисунок 1 – Ілюстрація до закону Кулона

Математичний запис закону Кулона

$$\vec{F} = \frac{q_1 \cdot q_2}{4 \cdot \pi \epsilon \epsilon_0 R^2} \vec{R}_0, \quad (1)$$

де \vec{F} – сила взаємодії між точковими зарядами, H ;

q_1, q_2 – точкові заряди, $Кл$;

r – відстань між точковими зарядами, $м$;

ϵ_0 – електрична постійна, $Ф/м$;

ϵ – відносна діелектрична проникність середовища, у якому знаходяться заряди;

\vec{R}_0 – одиничний вектор, направлений по лінії, яка з'єднує заряди.

Електричне поле зарядженого тіла діє на електричний заряд, поміщений в будь-яку його точку, з визначеною силою.

Для силової характеристики електричного поля введено поняття **напруженості** електричного поля в даній точці, під якою розуміється фізична величина, чисельно рівна відношенню сили, з якою поле діє на одиничний заряд, поміщений у дану точку поля, до значення цього заряду, тобто

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}, \quad (2)$$

де $\vec{E} = E$ – напруженість електричного поля, V/m ;

$\vec{F} = F$ – сила, H ;

q – заряд, $Kл.$

Напруженість електричного поля – величина векторна, яка визначається в кожній точці величиною і напрямом.

Сила, діюча на заряд може бути визначена за рівнянням

$$\vec{F} = \vec{E} \cdot q. \quad (3)$$

Якщо поле утворюється декількома зарядами $q_1, q_2, q_3 \dots$, то його напруженість дорівнює геометричній сумі напруженостей від кожного заряду поодиноці

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + \dots. \quad (4)$$

Поле є носієм енергії, тобто може виконувати роботу за допомогою сил поля по переміщенню заряду.

Потенціал точки поля може бути визначеним як відношення роботи, яка виконується силами поля по переносу одиничного позити-

вного заряду з даної точки поля в точку поля, до величини цього заряду. Потенціал якої дорівнює нулю (у нескінченність).

$$\varphi = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{l}}{q_0}, \quad (5)$$

Робота, яка пов'язана з переміщенням заряду по будь-якому замкнутому шляху, дорівнює нулю: після повернення заряду в початкову точку отримуємо попереднє розподілення зарядів і попередній запас енергії:

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{l} = \oint \vec{E} \cdot q \cdot d\vec{l} = 0 \quad (6)$$

Геометричне місце точок електричного поля, де потенціал має однакові значення $\varphi = \text{const}$ називають **еквіпотенціальними поверхнями**.

Напруга U_{12} – це різниця потенціалів між точками 1 і 2, яка залежить тільки від положення цих точок і не залежить від шляху, по якому проходило переміщення.

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}. \quad (7)$$

Якщо пройти по **замкнутому** шляху, то початкова точка 1 і кінцева 2 співпадуть, тоді різниця потенціалів цих точок буде дорівнювати нулю.

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \int E \cdot dl = 0. \quad (8)$$

В електростатичному полі силові лінії не можуть бути замкнутими, оскільки це протиріч рівнянню 9.

Якщо різницю потенціалів між двома точками розділити на найкоротший шлях, то отримана величина буде швидкістю зміни потенціалу в напрямку найкоротшого шляху між точками. Ця швидкість буде залежати від напрямку, вздовж якого взяті точки. У курсі математики є **поняття градієнта** скалярної функції, під якою розуміють швидкість зміни скалярної функції, взятую в напрямку її найбільшого збільшення.

Приймемо що $\varphi_1 > \varphi_2$, напруженість електричного поля направлена від більш високого потенціалу φ_1 до більш низького потенціалу φ_2 . Тоді маємо

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E \cdot dl = -d\varphi, \quad (9)$$

де $d\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ – прирощення потенціалу при переході з точки 1 до точки 2.

Градiєнт потенціалу – це швидкість зміни потенціалу, яка визначається за формулою

$$\text{grad } \varphi = d\varphi/dl \quad (10)$$

де dl – прирощення відстані, м.

Рівнянню (10) рівноцінний математичний запис

$$\vec{E} = - \operatorname{grad} \varphi = -d\varphi/dl \quad (11)$$

Знак «мінус у формулі 18.11 вказує, що вектор напруженості направлений в сторону зменшення потенціалів, а радіан потенціалу приймається в сторону збільшення.

Для скорочення запису різних операцій над скалярними і векторними величинами використовують диференціальний **оператор Гамільтона (оператор набла ∇)**. Під диференціальним оператором Гамільтона (оператором набла) розуміють суму часткових похідних по трьох координатних осях, помножених на відповідні одиничні вектори (орти). В декартовій системі координат його записують так

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (12)$$

Застосуємо оператор ∇ до потенціалу φ .

$$\nabla \varphi = \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \varphi = \left(\vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \quad (13)$$

Виходячи з визначення градієнту потенціалу слід зауважити, що $\nabla \varphi$ еквівалентна запису $\operatorname{grad} \varphi$. Оператор ∇ означає взяття градієнту від цієї скалярної функції.

$$\nabla \varphi = \operatorname{grad} \varphi \quad (14)$$

Якщо взяти поверхневий інтеграл напруженості електричного поля по деякій поверхні S , то отримаємо ще одну скалярну характеристику електричного поля – **потік вектора його напруженості**:

$$N_E = \int_S \vec{E} \cdot \vec{dS} \quad (15)$$

Потік вектору через елемент поверхні може бути позитивним, або негативним. Позитивне значення потоку $\vec{E} \cdot \vec{dS}$ означає, що він направлений в сторону \vec{dS} , негативне його значення, що він направлений зворотно. Значок s під знаком інтегралу означає, підсумовування проводиться по елементам поверхні.

Якщо потік вектора напруженості проходить через замкнену поверхню, яка охоплює заряд q , то на знаку інтегралу ставлять кружок

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{dS} .$$

В електротехнічних розрахунках окрім вектору \vec{E} використовують вектор електричної індукції або **вектор електричного зміщення** \vec{D} .

$$\vec{D} = \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot \vec{E} = \varepsilon_a \cdot \vec{E} \quad (16)$$

В системі «СІ» $[\vec{D}] = \text{Кл/м}^2$.

Теорема Гауса є однією з важливіших теорем електростатики. Вона відповідає закону Кулона і принципу накладання. **Теорему Гауса формулюється** таким чином: потік вектора електричного зміщення через будь-яку замкнуту поверхню, яка оточує деякий об'єм, дорівнює алгебраїчній сумі вільних зарядів, які знаходяться усередині цієї поверхні.

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum q_k . \quad (17)$$

З (17) слідує, що вектор \vec{D} є такою характеристикою поля, яка не залежить від діелектричних властивостей середовища ϵ_a . Оскільки виконується рівняння (116) тоді теорему Гауса для однорідного і ізотропного середовища можна записати і в такій формі

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum q_k}{\epsilon \cdot \epsilon_0} . \quad (18)$$

Формули (17) і (18) це математичний запис теореми Гауса в інтегральній формі.

Теорема Гауса в інтегральній формі виражає зв'язок між потоком вектора зміщення \vec{D} через поверхню S , яка обмежує деякий об'єм. За допомогою теореми Гауса в інтегральній формі неможливо

визначити, як пов'язаний \vec{D} у даній точці поля з щільністю зарядів в даній точці поля. Відповідь на це запитання дає диференціальна форма теореми Гауса. Розділимо обидві частини рівняння (17) на одну й ту ж скалярну величину – об'єм V , який знаходиться в середині замкнутої поверхні S

Вираз (19) незмінний для об'єму будь-якої величини. Спрямуємо об'єм до нуля:

$$\lim \frac{\oint \vec{D} \cdot \vec{dS}}{V} = \lim \frac{\sum q}{V} \quad (20)$$

При спрямуванні об'єму до нуля $\oint_S \vec{D} \cdot \vec{dS}$ теж прямує до ну-

ля. Межа відносини потоку $\lim \frac{\oint \vec{D} \cdot \vec{dS}}{V}$ векторної величини крізь замкнуту поверхню, яка обмежує деякий об'єм до об'єму V називають

дивергенцією вектора \vec{D} ($\text{div } \vec{D}$). Часто замість терміну «дивергенція» вживають термін «розходження» або «виток» вектору \vec{D} . У правій частині рівняння (20) знаходиться об'ємна щільність зарядів ρ .

Таким чином теорему Гауса в диференціальній формі записують наступним чином (*перша форма запису*):

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho. \quad (21)$$

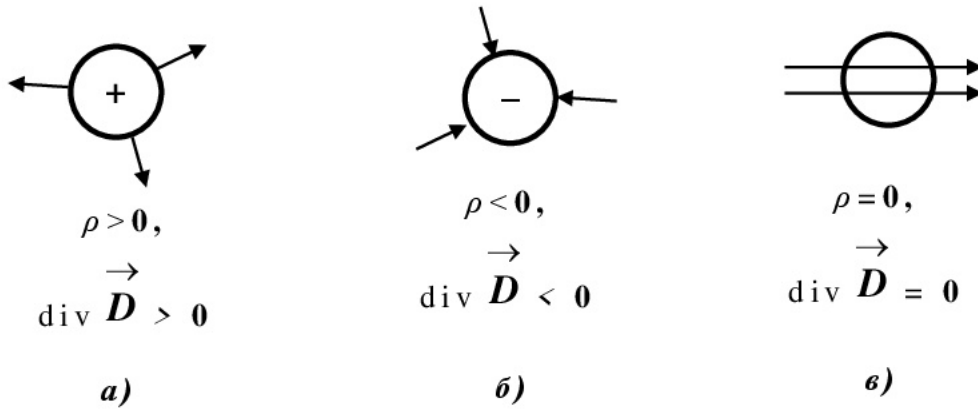


Рисунок 2 – Залежність вектор електричного зміщення від щільності зарядів

Таким чином розходження ліній вектору \vec{D} в даній точці поля визначається величиною щільності зарядів в даній точці. Якщо об'ємна щільність зарядів в точці позитивна ($\rho > 0$) (рисунок 2 а), тоді лінії вектору \vec{D} виходять, виток позитивний. Якщо об'ємна щільність зарядів в точці негативна ($\rho < 0$) (рисунок 2 б), тоді маємо стік ліній вектору \vec{D} , тобто вони входять, виток негативний. І якщо $\rho = 0$, то в даній точці поля нема ні витоку ні стоку ліній вектору \vec{D} , тобто в даній точці вони не починаються і не закінчуються.

Якщо середовище однорідне і ізотропне, тоді його $\epsilon_a = const$, замість (21) запишемо $\operatorname{div} \epsilon_a \cdot \vec{E} = \rho$, тоді вірна наступна друга форма запису

$$\mathbf{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_a} . \quad (22)$$

Рівняння Пуассона і Лапласа є основними диференціальними рівняннями електростатичного поля. Вони витікають з теореми Гауса в

диференціальній формі. Оскільки $\vec{E} = -\mathbf{grad} \varphi$, в той же час згідно

теоремі Гауса $\mathbf{div} \vec{E} = \rho / \varepsilon_a$, отримаємо

$$\mathbf{div} \vec{E} = \mathbf{div}(-\mathbf{grad} \varphi) = \frac{\rho}{\varepsilon_a} . \quad (23)$$

Винесемо мінус за знак дивергенції

$$\mathbf{div}(\mathbf{grad} \varphi) = -\frac{\rho}{\varepsilon_a} . \quad (24)$$

Замість $\mathbf{grad} \varphi$ запишемо його еквівалент оператор потенціалу $\nabla \varphi$, замість \mathbf{div} напишемо ∇ , тоді отримаємо рівняння:

$$\nabla (\nabla \varphi) = -\frac{\rho}{\varepsilon_a} . \quad (25)$$

або

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_a} . \quad (26)$$

Рівняння (25) називають рівнянням Пуассона.

Окремий випадок рівняння Пуассона, коли $\rho = 0$, називають **рівнянням Лапласа**. Рівняння Лапласа записується так

$$\nabla^2 \varphi = 0 . \quad (27)$$

Оператор $\nabla^2 = \mathbf{div}(\mathbf{grad} \varphi)$ називають **оператором Лапласа** або **лапласіаном** і іноді позначають його символом Δ . Тому можна зустріти і таку форму запису рівняння Пуассона

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_a} . \quad (28)$$

Енергія поля, утвореного системою n заряджених тіл, які мають потенціали $\varphi_1 \dots \varphi_n$ і заряди $q_1 \dots q_n$:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n q_k \cdot \varphi_k . \quad (29)$$

При інтегруванні рівняння Лапласа (або Пуассона) в рішення входять постійні інтегрування. Їх визначають, виходячи з граничних умов.

Під граничними умовами розуміють умови, яким підкорюється поле на границях розділу середовищ з різними електричними властивостями.

Поле в середині провідного тіла в умовах електростатики

В провідному тілі, яке знаходиться в електростатичному полі, внаслідок явища електростатичної індукції відбувається розділ зарядів. Негативні заряди зміщуються на поверхню тіла, яка повернута в сторону з більш високим потенціалом, позитивні – в протилежну сторону. Всі точки тіла будуть мати однаковий потенціал. Якщо між будь-якими точками виникла б різниця потенціалів, то під її дією з'явився би упорядкований рух зарядів, що протирічить поняттю електростатичного поля.

Поверхня тіла еквіпотенціальна. Вектор напруженості зовнішнього поля влюбій точці поверхні підходить до неї під прямим кутом. **В середині провідного тіла напруженість поля дорівнює нулю**, так як зовнішнє поле компенсується полем зарядів, розташованих на поверхні тіла.

Умови на границі розділу провідного тіла і діелектрика

На границі провідне тіло-діелектрик при відсутності струму по провідному тілу виконуються дві умови:

1) відсутня тангенціальна (дотична к поверхні) складова напруженості поля:

$$E_t = 0; \quad (30)$$

2) вектор електричного зміщення \vec{D} влюбій точці діелектрика, що безпосередньо примикає до поверхні провідного тіла, чисельно рівний щільності заряду σ на поверхні провідного тіла в цій точці

$$\mathbf{D} = \sigma . \quad (31)$$

Що до першої умови, то всі точки провідного тіла мають однаковий потенціал. Як слід, між двома любими надто близько розташованими одна до одної точками поверхні прирощення потенціалу $d\varphi = 0$, але $d\varphi = E_t \cdot dl$, як слідство $E_t \cdot dl = 0$. Оскільки елемент шляху dl не рівний нулю, тоді рівний нулю E_t .

Для доказу другої умови виділимо нескінченно малий паралелепіпед (рисунок 3).

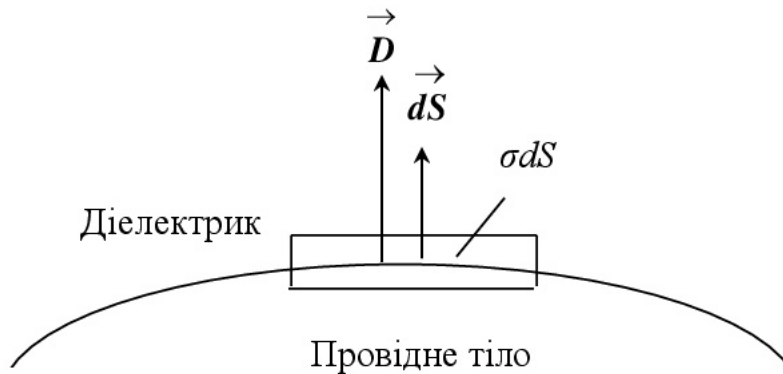


Рисунок 3 – Розташування вектору електричного зміщення на границі розділу провідного тіла і діелектрика

Верхня грань його паралельна поверхні провідного тіла і розташована у діелектрику. Висоту паралелепіпеду візьмемо дуже малою. Застосуємо теорему Гауса. В силу малих лінійних розмірів можна прийняти, що щільність заряду σ у всіх точках на поверхні dS провідного тіла, потрапив в середину паралелепіпеду, одна й та ж. Повний заряд в середині розглянутого об'єму рівний σdS .

Потік вектору \vec{D} через верхню грань об'єму $\vec{D} \cdot \vec{dS} = D \cdot dS$. Потік вектору \vec{D} через бокову грань (оскільки вона дуже мала) немає, він дотикається їй. Через нижню граню об'єму потік теж відсутній, оскільки всередині провідного тіла $E = 0$ і $D = 0$ (а провідного поля ϵ величина кінцева). Таким чином, потік вектору \vec{D} із об'єму рівний $D \cdot dS = \sigma dS$ або $D = \sigma$.

Умови на границі розділу двох діелектриків

На границі розділу двох діелектриків з різними діелектричними проникністями виконуються дві наступні умови:

- 1) рівні тангенціальні складові напруженості поля (рисунок 4)

$$E_{t1} = E_{t2}; \quad (32)$$

Індекс 1 відноситься до першого діелектрика, 2 – до другого.

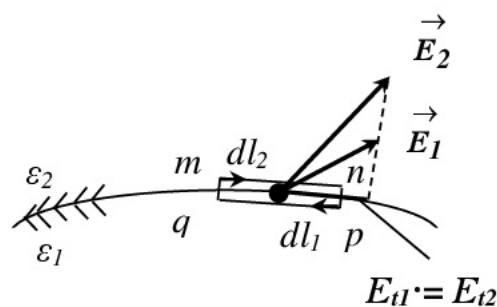


Рисунок 4 – Вектори напруженості на границі розділу двох діелектриків

2) рівні нормальні складові електричної індукції (рисунок5)

$$D_{1n} = D_{2n}. \quad (33)$$

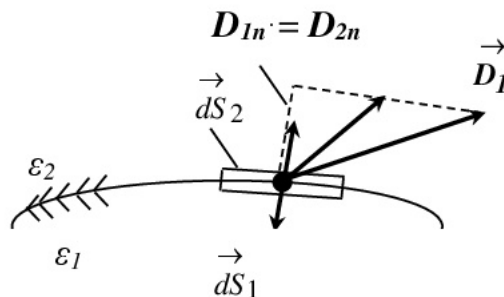


Рисунок 5 – Електричні індукції на границі розділу двох діелектриків

18.2 Електричне поле постійного струму в електропровідному середовищі та його основні параметри

Якщо під впливом зовнішніх джерел у провідному середовищі (металевих проводах, землі, рідині) створено електричне поле, то в ньому буде протікати електричний струм.

Упорядкований рух вільних електронів у металі і іонів у рідині під впливом електричного поля прийнято називати **струмом провідності**.

При своєму упорядкованому русі носії зарядів випробовують численні зіткнення з іншими частками речовини, які знаходяться в тепловому русі. Властивість середовища, що характеризує його здібність проводити струм, називають **питомою провідністю** γ , має розмірність $\text{Om}^{-1} \cdot \text{m}^{-1} = \text{Cm/m}$.

Основною величиною в електричному полі провідного середовища є **щільність струму** \vec{j} . Це векторна величина, яка направлена по напрямку електричного поля. Вона чисельно дорівнює відношенню $\Delta \vec{i}$, що проходить через елемент поверхні (перпендикулярний до напрямку електричного поля в даній точці) до величини ΔS цієї поверхні, має розмірність А/м².

Якщо поверхня має кінцеві розміри, то напрям вектора щільності струму у всіх елементах, на які може бути розбита ця поверхня, і напрям елементів поверхні можуть бути різними, і струм визначить таким чином

$$I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} . \quad (34)$$

Таким чином, **струм є потік вектора щільності струму**.

При протіканні постійних струмів як всередині провідних тіл, так і зовні їх існують постійні (незмінні в часі) магнітні поля. Оскільки такі поля незмінні в часі, то не виникає явища електромагнітної індукції, тобто магнітне поле, створене постійним струмом, не впливає на електричне поле постійного струму. Тому електричні і магнітні поля постійного струму можна розглядати окремо.

Закон Ома встановлює зв'язок між струмом, що тече в провіднику і напругою на його кінцях.

$$U = R \cdot I \quad (35)$$

Коефіцієнт пропорційності називається опором провідника, який визначається за рівнянням:

$$R = \frac{l}{\gamma \cdot S}. \quad (36)$$

Для елемента провідника довжиною dl , опір має величину $\frac{dl}{\gamma \cdot dS}$, а струм через переріз dS цього елемента дорівнює $\delta \cdot dS$, і в силу закону Ома напруга між двома торцевими поверхнями цього елемента, тобто на довжині dl , повинна рівнятися $dU = \frac{\delta \cdot dl}{\gamma}$. З іншого боку, напругу між двома точками провідника можна визначити як лінійний інтеграл вектора напруженості електричного поля

$$U = \int_1^2 E \cdot dl. \quad (37)$$

Для напруги на довжині dl величину напруги $dU = E \cdot dl$ і як слідує

$$\vec{\delta} = \gamma \cdot E. \quad (38)$$

Рівняння (38) називають **диференціальною формою закону Ома**.

Рівняння (38) справедливе для областей поза джерел ЕРС. В областях, які зайняті джерелами ЕРС, окрім кулонова (електростатично-

го) поля існує ще так зване стороннє поле, яке забезпечує безперервний рух зарядів у електричному колі.

Під стороннім полем розуміють електричне поле, обумовлене хімічними, електрохімічними, тепловими, термоелектричними проце-

сами. Напруженість сторонніх сил позначається $\vec{E}_{\text{стор}}$. У областях, зайнятих джерелами ЕРС, повне значення напруженості поля дорівнює геометричній сумі напруженості кулонова і стороннього полів

$\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}$. Рівняння **узагальненого закону Ома і диференціальної форми другого закону Кірхгофа** має вигляд:

$$\vec{\delta} = \gamma (\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}). \quad (39)$$

Потужність, що обумовлена виділенням тепла у провіднику при протіканні по ньому електричного струму, визначається законом Джоуля-Ленца:

$$P = R \cdot I^2. \quad (40)$$

В тому об'ємі ділянки проводу довжиною dl розвивається поту-

жність, яка дорівнює $\delta \cdot dS \cdot \frac{dl}{\gamma}$. Якщо віднести її на одиницю об'єму і прийнявши до уваги співвідношення (40), получимо для питомої потужності вираз

$$p = \frac{\delta^2}{\gamma} = \gamma E^2. \quad (41)$$

Рівняння (37) є **диференціальною формою закону Джоуля-Ленца.**

Якщо у об'ємі елементу провідника протікає постійний струм, незмінний в часі, то можна сказати, що сума струмів, що входить до об'єму елементу проводу дорівнює сумі струмів, що виходять із об'єму, тобто

$$\oint_S \vec{\delta} \cdot d\vec{S} = 0. \quad (42)$$

Тоді рівняння (42) є **диференціальною формою першого закону Кірхгофа.**

Енергія, що виділяється в одиниці об'єму провідника в одиницю часу (у секунду) дорівнює:

$$\frac{I^2 \cdot R}{V} = \frac{\delta^2}{\gamma} = \gamma E^2. \quad (43)$$

Перехід струму від середовища з провідністю γ_1 до середовища з провідністю γ_2 . Граничні умови

На границі переходу струму з середовища з одною провідністю в середовище з іншою провідністю виконуються дві наступні умови:

1) рівні тангенціальні складові напруженості поля

$$E_{1t} = E_{2t}; \quad (44)$$

2) рівні щільності струму:

$$\delta_{1t} = \delta_{2t}. \quad (45)$$

Індекс 1 відноситься до першого середовища, 2 – до другого.

Проведемо аналогію між полем у провідному середовищі і електростатичним полем. По своїй природі поле електростатичне і поле постійного струму у провідному середовищі різні. Електростатичне поле утворюється електричними зарядами, незмінними в часі і нерухомими у просторі, тоді, як електричне поле у провідному середовищі – це поле, у якому заряди мають упорядкований рух під дією зовнішнього джерела. Але між двома полями може бути проведена формальна аналогія.

	Електростатичне поле	Електричне поле у провідному середовищі
1	У областях електростатичного поля, не зайнятих зарядами виконується рівняння Лапласа $\nabla^2 \varphi = \text{div}(\text{grad } \varphi) = 0$	Електричне поле постійного струму в провідному середовищі теж йому задовольняє.

	Розходження швидкості зміни потенціалів при відсутності зарядів дорівнює нулю.	
2	Силова характеристика вектор напруженості \vec{E} .	Силова характеристика вектор напруженості \vec{E} .
3	Вектор електричного зміщення $\vec{D} = \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot \vec{E} = \varepsilon_a \cdot \vec{E}$. $[\vec{D}] = \text{Кл/м}^2$.	Вектор щільності струму $\vec{\delta} = \gamma \cdot \vec{E}$, $[\vec{\delta}] = \text{А/м}^2$.
4	Потік вектора зміщення, позначимо його Ψ . $\Psi = \int \vec{D} \cdot d\vec{S}$	Вектор щільності струму $I = \int \vec{\delta} \cdot d\vec{S}$
5	Граничні умови на поверхні розділу двох середовищ: $E_{1t} = E_{2t}, D_{1t} = D_{2t}$. Сукупність силових і еквіпотенціальних ліній полів буде однаковою.	Граничні умови на поверхні розділу двох середовищ з різними провідностями: $E_{1t} = E_{2t}, \delta_{1t} = \delta_{2t}$. Сукупність силових і еквіпотенціальних ліній полів буде однаковою.

18.3 Магнітне поле постійного струму. Зв'язок основних величин, що характеризують магнітне поле

Магнітне поле постійного струму є одним із компонентів електромагнітного поля. Воно утворюється незмінними в часі струмами, що протікають по провідних тілах, нерухомих в просторі по відношенню до наглядача. Оскільки струм незмінний у часі, то магнітне поле не залежить від електричного поля.

Магнітне поле характеризується індукцією \vec{B} , намагніченістю \vec{J} і напруженістю магнітного поля \vec{H} . Ці три величини зв'язані співвідношенням

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot (\vec{H} + \vec{J}) = \mu_0 \cdot \mu \cdot \vec{H} = \mu_a \cdot \vec{H}, \quad (46)$$

де \vec{B} - вектор магнітної індукції, Тл;

\vec{H} - вектор напруженості, А/м;

\vec{J} - вектор намагніченості, А/м;

μ_0 - магнітна стала, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м,

μ - відносна магнітна проникність;

μ_a - абсолютна магнітна проникність.

Одним з основних проявів магнітного поля є вплив його на провід з током, який поміщений в це поле. Сила \vec{F} , з якою магнітне поле діє на елемент провідника довжиною $d\vec{l}$ визначається співвідношен-

ням (47), якщо сила направлена перпендикулярно індукції в даній точці поля і перпендикулярна елементу струму $I \cdot d\vec{l}$

$$\vec{F} = I (d\vec{l} \times \vec{B}) \quad (47)$$

Магнітна індукція є силовою характеристикою магнітного поля, що слідує з (47).

Кількісний зв'язок між циркуляцією вектора \vec{H} по замкнутому контуру і струмом всередині контуру визначає **закон повного струму в інтегральній формі: лінійний інтеграл від напруженості магнітного поля вздовж любого замкнутого контуру рівний повному току, який пронизує замкнутий контур:**

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \quad (48)$$

Під повним струмом розуміють весь струм (струм провідності і струм зміщення).

Інтегральна форма використовується коли є симетрія в магнітному полі, наприклад напруженість поля в деякій точці A у полі відокремленого прямого проводу з током I , можна розрахувати за формулою:

$$H = \frac{I}{2\pi R}, \quad (49)$$

де R - радіус (відстань) в площині, перпендикулярній осі проводу від точки A до проводу.

Співвідношення (48) придатне для контурів любых розмірів, в тому числі і для дуже малих. Якщо площа мала, то можна прийняти, що щільність струму $\vec{\delta}$ в межах цієї площі однакова і тоді струм, що пронизує площу, рівний

$$\Delta i = \vec{\delta} \cdot \vec{\Delta S} = \delta_n \cdot \Delta S \quad (50)$$

де δ_n - проекція вектора щільності струму $\vec{\delta}$ на нормаль до площини, тобто на напрям $\vec{\Delta S}$.

Оскільки

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \delta_n \cdot \Delta S, \quad (51)$$

тоді розділимо праву і ліву частини (18.51) на ΔS , при чому $\Delta S \rightarrow 0$. Межа отриманого відношення має вигляд:

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{H} \cdot d\vec{l}}{\Delta S} = \delta_n. \quad (52)$$

У лівій частині рівняння (52) знаходиться величина, яка є проекцією ротора \vec{H} на напрям нормалі до площини ΔS . Як слідст-

во $\text{rot}_n \vec{H} = \delta_n$. Тоді замість рівності проєкцій двох векторів $\text{rot}_n \vec{H}$ і

δ_n можна записати рівність самих векторів

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{\delta} , \quad (53)$$

Формула (53) представляє собою **закон повного струму у диференціальній формі**.

Для сукупності точок, де $\delta = \mathbf{0}$, $\text{rot } \vec{H} = \mathbf{0}$ (область, не зайнята струмом), магнітне поле може розглядатися як потенціальне, тобто як поле, кожна точка якого має скалярний магнітний потенціал φ_m , $[\varphi_m] = A/m$.

Різниця скалярних магнітних потенціалів між точками 1 і 2 називають спадом магнітної напруги U_{m12} , $[U_{m12}] = A$

$$U_{m12} = \varphi_{m1} - \varphi_{m2} = \int_1^2 \vec{H} \cdot \vec{dl} \quad (54)$$

Для розрахунку магнітних полів широко використовують векторний потенціал, або вектор-потенціал магнітного поля. Його позначають \vec{A} . Це векторна величина, яка плавно змінюється від точки до точки поля, ротор якої рівний магнітній індукції

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} , \quad (55)$$

На відміну від скалярного магнітного потенціалу ϕ_m , використувати який можна для областей, не зайнятих струмом, векторним потенціалом можна користуватися як для областей, не зайнятих струмом, так і для областей, зайнятих струмом.

Магнітний потік, що пронизує будь-яку поверхню S дорівнює

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{S}, \quad (56)$$

Згідно теореми Стокса $\int_S \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oint \vec{A} \cdot d\vec{l}$, тоді:

$$\Phi = \oint \vec{A} \cdot d\vec{l}, \quad (57)$$

Таким чином, **магнітний потік через поверхню S дорівнює лінійному інтегралу векторного потенціалу по замкнутому контуру, що обмежує цю поверхню.**

Магнітний опір середовища магнітному потоку визначається за формулою:

$$R_m = \frac{U_m}{\phi}, \quad (58)$$

де R_m – магнітний опір, 1/Гн.

Магнітна провідність – величина, зворотна R_m , одиниця виміру Гн.

У магнітному полі, як в електростатичному і полі провідного середовища, виконуються визначені граничні умови.

На границі розділу двох однорідних і ізотропних середовищ, які мають різні магнітні проникності виконуються дві наступні умови:

1) рівні тангенціальні складові векторів напруженості магнітного поля

$$H_{1\tau} = H_{2\tau}; \quad (59)$$

2) рівні нормальні складові векторів магнітної індукції

$$B_{1n} = B_{2n}. \quad (60)$$

18.4 Основні рівняння змінного електромагнітного поля

Під змінним електромагнітним полем розуміють **сукупність змінних в часі і взаємно зв'язаних і обумовлюючих один одне електричного і магнітного полів.**

Воно визначається двома векторними величинами – напруженістю електричного поля \vec{E} і напруженістю магнітного поля \vec{H} .

Змінне електромагнітне поле є одним з видів матерії. Воно володіє енергією, масою, кількістю руху, може перетворюватися в інші види матерії і самостійно існувати у вигляді електромагнітних хвиль. Швидкість розповсюдження електромагнітних хвиль у вакуумі - $3 \cdot 10^8$ м/с.

При дослідженні процесів в змінному електромагнітному полі користуються рівняннями Максвелла. Систему рівнянь Максвелла створюють чотири рівняння.

Перше рівняння Максвелла виражає зв'язок між ротором напруженості електричного поля і щільністю струму в тій же точці поля, записується перше рівняння Максвелла наступним чином:

$$\mathit{rot} \vec{H} = \vec{\delta} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} ; \quad (61)$$

Де $\vec{\delta}$ - щільність струму провідності, А/м²;

$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ - щільність струму електричного зміщення А/м².

Струм електричного зміщення виникає в будь-якому діелектрику, в тому числі і в вакуумі. Хоча природа струму провідності і струму зміщення неоднакова, але кожен з них має властивість викликати магнітне поле.

Друге рівняння Максвелла визначає зв'язок між ротором напруженості електричного струму і швидкості зміни магнітного поля в тій же точці. Друге рівняння Максвелла записується наступним чином:

$$\mathit{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} ; \quad (62)$$

Фізичний зміст складається в тому, що люба зміна магнітного поля в часі $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ в будь-якій точці поля збуджує вихор або ротор елект-

ричного поля в тій же точці, тобто викликає вихрове електричне поле. Друге рівняння Максвелла називають диференціальною формою закону електромагнітної індукції.

Окрім рівнянь Максвелла, велике значення в теорії електромагнітного поля має **теорема Умова-Пойнтінга**, яка описує енергетичні співвідношення у електромагнітному полі.

Теорему Умова-Пойнтінга для *миттєвих значень* записують наступним чином:

$$-\oint_S \vec{E} \cdot \vec{H} \cdot d\vec{S} = -\oint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} = \int_V \gamma \cdot E^2 dV + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) dV ; \quad (63)$$

де $\vec{\Pi} = \vec{E} \cdot \vec{H}$ - вектор Пойнтінга, ВА/м²;

$\int_V \gamma \cdot E^2 dV$ - енергія, що виділяється у вигляді теплоти у одиницю

об'єму;

$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) dV$ - швидкість зміни електромагнітної енергії

в одиниці об'єму. Теорему Пойнтінга слід трактувати як рівняння енергетичного балансу: ліва частина (63) є потужність або енергія в одиницю часу, яка доставляється у вигляді потоку вектора Пойнтінга в середину деякого об'єму; права частина є енергія, що витрачається одиницю часу в середині об'єму.

Якщо поле не змінюється в часі, тоді:

$$-\oint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} = \int_V \gamma \cdot E^2 dV ; \quad (64)$$

оскільки в незмінному полі

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{\varepsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) dV = 0. \quad (65)$$

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

- 1 Овчаров В.В. Теоретичні основи електротехніки. /В.В. Овчаров. - К.: Урожай, 1993. - 224 с.
- 2 Зевеке Г.В. Основы теории цепей./Г.В. Зевеке, П.А. Ионкин, А.В. Нетушил, С.В. Страхов: учебник, 5 изд. - М.; Атомэнергоиздат, 1989. – 657 с.
3. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле. Ч.2. /Л.А. Бессонов. – М.: Высш. Шк., 1978. – 263 с.
4. Нейман Л. Р. Теоретические основы электротехники. Т.2. / Л. Р. Нейман, К. С. Демирчан. – Л. : Энергоиздат, 1981. – 416 с.
- 5 Атабеков Г. И Теоретические основы электротехники. Нелинейные электрические цепи. Электромагнитное поле. Ч. 2, 3. / Г. И. Атабеков. – М. : Энергия, 1979. – 432 с.

Навчальне видання

Попова Ірина Олексіївна

**Теоретичні основи електротехніки,
частина 3**

Курс лекцій

Формат 60x84
Папір офсет. Друк офсет.
Ум. друк. арк.. 11,19
Наклад прим.

Видавництво та друк: видавничо-поліграфічний центр «Люкс