УДК 517.9

Вікторія Цань, доктор філософії
за спеціальністю 111 Математика, асистент,
Київський національний університет
імені Тараса Шевченка, м. Київ, Україна

КОЛИВНІСТЬ СЛАБКО НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ТА ВІДПОВІДНИХ РІВНЯНЬ НА ЧАСОВИХ ШКАЛАХ

Анотація. У дослідженні розглянуто задачу збереження коливності розв'язків при переході від лінійних рівнянь другого порядку до слабко нелінійних рівнянь та відповідних їм рівнянь на часових шкалах. Основну увагу приділено ролі малого параметра, початкових даних з компакту та достатньої кількості нулів відповідного лінійного рівняння. Підхід ґрунтується на порівнянні розв'язків диференціальних і динамічних рівнянь на скінченному проміжку часу. Отримані умови дозволяють описати випадки, коли коливна поведінка не руйнується під дією слабкої нелінійності.

Ключові слова: коливність, слабко нелінійне рівняння, динамічне рівняння, часова шкала, узагальнений нуль, малий параметр.

Abstract. The research considers the problem of preserving the oscillation of solutions when passing from linear second-order equations to weakly nonlinear equations and their corresponding equations on time scales. The main attention is paid to the role of a small parameter, initial data from a compact set and a sufficient number of zeros of the corresponding linear equation. The approach is based on the comparison of solutions of differential and dynamic equations on a finite time interval. The obtained conditions make it possible to describe the cases in which oscillatory behavior is preserved under weak nonlinearity.

Keywords: oscillation, weakly nonlinear equation, dynamic equation, time scale, generalized zero, small parameter.

Питання коливності розв'язків рівнянь другого порядку є одним із класичних напрямів якісної теорії диференціальних та різницевих рівнянь. У теорії динамічних рівнянь на часових шкалах ця проблематика набуває додаткового змісту, оскільки поняття нуля розв'язку має враховувати структуру часової шкали, яка може бути як неперервною, так і дискретною, або мати комбінований характер [1; 2]. Для розв'язків динамічних рівнянь на часових шкалах використовується поняття узагальненого нуля: розв'язок має узагальнений нуль у точці t, якщо він дорівнює нулю в цій точці або змінює знак на проміжку між t та $\sigma(t)$.

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння другого порядку

$$\ddot{x} + p(t)x = 0, \quad t \in [0, a],$$

де функція $p(t)$ невід'ємна та задовольняє умову Ліпшиця на відрізку $[0, a]$. Відповідне слабко нелінійне рівняння має вигляд

$$\ddot{x} + p(t)x + \varepsilon f(t, x, \dot{x}) = 0, \quad \varepsilon > 0.$$

Тут ε є малим параметром, а функція $f(t, x, y)$ неперервна за сукупністю змінних і має лінійний ріст за змінними x та y, тобто існує стала $N > 0$, для якої виконується нерівність $|f(t, x, y)| \le N(1 + |x| + |y|)$.

Рівняння розглядається за початкових умов $x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = y_0$, де $(x_0, y_0) \in K, \quad (0,0) \notin K$, а K є компактом у фазовому просторі.

З рівнянням

$$\ddot{x} + p(t)x = 0$$

розглядається відповідне динамічне рівняння на часовій шкалі $\mathbb{T}_\lambda$:

$$x_\lambda^{\Delta\Delta} + p(t)x_\lambda = 0, \quad t \in \mathbb{T}_\lambda.$$

Тут $x_\lambda^{\Delta}(t)$ позначає дельта-похідну, а $\mathbb{T}_\lambda$ є часовою шкалою з функцією зернистості $\mu_\lambda(t)$. Якщо $\mu_\lambda = \sup_{t \in \mathbb{T}_\lambda} \mu_\lambda(t) \to 0, \quad \lambda \to 0$, то розв'язки динамічного рівняння на часовій шкалі наближаються до розв'язків з тими ж початковими даними відповідного диференціального рівняння.

Для слабко нелінійного випадку важливим є те, що мале нелінійне збурення не змінює коливної поведінки розв'язку, якщо параметр ε достатньо малий. Іншими словами, якщо розв'язок лінійного рівняння має на відрізку $[0, a]$ достатню кількість нулів, то за відповідних умов розв'язок слабко нелінійного рівняння з тими самими початковими даними має коливний характер. Для рівнянь на часових шкалах аналогічне твердження формулюється через наявність достатньої кількості узагальнених нулів відповідного розв'язку [3].

Таким чином, у задачах про коливність слабко нелінійних рівнянь другого порядку одночасно істотними є два параметри: малий параметр ε, який характеризує відхилення від лінійного рівняння, та функція зернистості μ_λ, яка характеризує часову шкалу. За достатньої малості цих параметрів коливність відповідних розв'язків зберігається при переході між диференціальними рівняннями та динамічними рівняннями на часових шкалах.

Отже, дослідження слабко нелінійних рівнянь другого порядку на часових шкалах дозволяє уточнити, за яких умов коливна поведінка розв'язків є стійкою щодо малих нелінійних збурень та зміни часової структури. Такий підхід є природним продовженням результатів про зв'язок між коливністю розв'язків диференціальних рівнянь і відповідних динамічних рівнянь на часових шкалах.

Список використаних джерел

1. Hilger S. Analysis on Measure Chains — A Unified Approach to Continuous and Discrete Calculus. *Results in Mathematics*. 1990. Vol. 18. P. 18–56.
2. Bohner M., Peterson A. Dynamic Equations on Time Scales: An Introduction with Applications. Boston : Birkhäuser, 2001. 358 p.
3. Stanzhytskyi O., Uteshova R., Tsan V., Khaletska Z. On the Relation Between Oscillation of Solutions of Differential Equations and Corresponding Equations on Time Scales. *Turkish Journal of Mathematics*. 2023. Vol. 47, No. 2. P. 476–501. https://doi.org/10.55730/1300-0098.3373