

УДК 517.5

Віктор Сорич, кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри математики,
Ніна Сорич, кандидат фізико-математичних наук, доцент,
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка,
м. Кам'янець-Подільський, Україна

ПРО НАЙКРАЩЕ НАБЛИЖЕННЯ НА КЛАСАХ ЗГОРТОК, ПОРОДЖЕНИХ СКЛАДЕНИМИ ЯДРАМИ

Анотація. Запропоновано до розгляду нові достатні умови для лінійних комбінацій парних (непарних) ядер, виконання яких дозволить обчислити точні значення величин найкращих наближень функцій із класів згорток, породжених цими комбінаціями парних або непарних функцій.

Ключові слова: найкраще наближення лінійної комбінації ядер, класи Степанця, умова Надя N_n^* ($N_{n,p}^*$).

Abstract. New sufficient conditions for linear combinations of even (odd) kernels are proposed for consideration, the fulfillment of which allow calculating the exact values of the best approximations of functions from the classes of convolutions generated by these combinations of even or odd functions.

Keywords: best approximation of linear combination of kernels, Stepanets classes, Nagy's condition N_n^* ($N_{n,p}^*$).

Вступ. Результати повідомлення стосуються запроваджених О.І. Степанцем (див., напр. [3]) класів $L_{\beta}^{\psi} \mathfrak{R} (C_{\beta}^{\psi} \mathfrak{R})$ та їх лінійних комбінацій. Зазначимо, усі відомі до цього часу значення величин найкращих наближень на класах $L_{\beta}^{\psi} \mathfrak{R} (C_{\beta}^{\psi} \mathfrak{R})$, де $\mathfrak{R} \equiv U_1^0 = \{\varphi \in L: \|\varphi\|_1 \leq 1, \varphi \perp 1\}$, ($\mathfrak{R} \equiv U_{\infty}^0 = \{\varphi \in L: \|\varphi\|_{\infty} \leq 1, \varphi \perp 1\}$), були знайдені для множин функцій що записуються у вигляді згорток, які задовольняють умову Нікольського A_n^* , або ж більш жорстку, умову Надя N_n^* . Умови A_n^* , та N_n^* (див., напр. [2]) можна означити так:

Означення 1. Говорять, що сумовна 2π – періодична функція $K(t)$, яка тотожно не дорівнює нулю, задовольняє умову A_n^* , $n \in \mathbb{N}$, ($K \in A_n^*$), якщо існують

тригонометричний поліном $T_{n-1}^*(\cdot)$ степеня $n-1$ і довільне число $\lambda \leq \frac{\pi}{n}$ таке, що для функції $\varphi_*(t) = \text{sign}(K(t) - T_{n-1}^*(t))$ майже при всіх t виконується рівність $\varphi_*(t + \lambda) = -\varphi_*(t)$.

Означення 2. Говорять, що сумовна 2π – періодична функція $K(t)$, яка тотожно не дорівнює нулю, задовольняє умову N_n^* , $n \in \mathbb{N}$ ($K \in N_n^*$), якщо існують тригонометричний поліном $T_{n-1}^*(\cdot)$ степеня $n-1$ і точка $\xi = \xi_n \in \left[0, \frac{\pi}{n}\right]$ такі, що вираз $K(t) - T_{n-1}^*(t)$ змінює знак на проміжку $[0; 2\pi[$ в точках $t_k = \xi + \frac{k\pi}{n}$, $k = 0, 1, \dots, 2n-1$, і тільки в них.

Завдяки функції Крейна в багатьох випадках нескладно побудувати тригонометричний многочлен, який співпадає з ядром $K(t)$ в $2n$ рівномірно розташованих на періоді точках. Складнішим питанням є доведення того факту, що більше точок співпадання полінома $T_{n-1}^*(t)$ та ядра $K(t)$ на періоді не існує. Власне, всі роботи в даному напрямі присвячені розв'язанню цього питання. Разом зі сказаним існують такі ядра, для яких многочлен $T_{n-1}^*(t)$ та ядро $K(t)$ рівні між собою більше аніж в $2n$ точках на періоді. Тому в роботі пропонується до розгляду така властивість ядер $K(t)$.

Означення 3. Сумовна 2π – періодична функція $K(t)$, яка тотожно не дорівнює нулю, задовольняє умову $N_{n,p}^*$, $n \in \mathbb{N}$, $p = 0, 1, \dots$, ($K \in N_{n,p}^*$), якщо існують тригонометричний поліном $T_{n-1}^*(t)$ степеня $n-1$ і точка $\xi = \xi_n \in \left[0, \frac{\pi}{n+p}\right]$ такі, що різниця $K(t) - T_{n-1}^*(t)$ змінює знак на $[0, 2\pi[$ у точках $t_k = \xi + \frac{k\pi}{n+p}$, $k = 0, 1, \dots, 2n+2p-1$, і лише в них.

Зрозуміло, що ядро, яке задовольняє умову $N_{n,p}^*$, буде задовольняти умову N_{n+p}^* при наближенні тригонометричним поліномом $T_{n-1}^*(t)$ степеня $n-1$.

2. Постановка задачі. Нехай $K(t)$ – сумовна 2π – періодична функція, $\mathfrak{M}_c(\mathfrak{M}_L)$ – клас згорток елементів φ одиничної кулі $U_\infty^0(U_1^0)$ з ядром $K(t)$.

Відомо, що у випадку виконання умови A_n^* для ядра згортки $K(t)$ мають місце рівності (див., напр. [2, §6])

$$\begin{aligned} E_n(\mathfrak{M}_C)_C &= \sup_{f \in \mathfrak{M}_C} \inf_{T_{n-1}} \|f(\cdot) - T_{n-1}(\cdot)\|_C = \sup_{\varphi \in U_\infty^0} \inf_{T_{n-1}} \|\varphi * K(\cdot) - T_{n-1}(\cdot)\|_C = \\ &= E_n(\mathfrak{M}_L)_1 = \sup_{f \in \mathfrak{M}_L} \inf_{T_{n-1}} \|f(\cdot) - T_{n-1}(\cdot)\|_L = \sup_{\varphi \in U_1^0} \inf_{T_{n-1}} \|\varphi * K(\cdot) - T_{n-1}(\cdot)\|_L = \\ &= \frac{1}{\pi} E_n(K)_1. \end{aligned} \quad (1)$$

Б. Надем в [1] знайдені достатні умови N_n^* того, що многочлен $T_{n-1}^*(t)$ забезпечує найкраще наближення ядра $K(t)$, яке є парною або непарною функцією, в метриці L . Із роботи [3] випливає, що сума ядер з цими умовами також буде ядром, що задовольняє умову N_n^* . Цікавою є задача відшукування величини найкращого наближення в метриці L лінійної комбінації непарних (парних) ядер, або ж принаймні різниці двох таких ядер.

3. Основні результати. Нехай $\psi_i(k)$, $i = \overline{1, m}$, - деякі послідовності дійсних чисел і $\Psi_i^c(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_i(k) \cos kt$, $\Psi_i^s(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_i(k) \sin kt$, $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$. Розглянемо ядра вигляду $K_C(t, \bar{\alpha}) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \Psi_i^c(t)$, $K_S(t, \bar{\alpha}) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \Psi_i^s(t)$.

Справедливі твердження

Теорема 1. Нехай сумовні функції $\Psi_i^c(t)$ ($i = \overline{1, m}$) неперервні на проміжку $(0; 2\pi)$, ядро $K_C(t, \bar{\alpha})$ інтерполюється тригонометричним многочленом порядку не вище $n - 1$ на періоді не більше як в $2n + 2$ точках, многочлен $T_{n-1}^*(t)$ - інтерполює функцію $K_C(t, \bar{\alpha})$ в нулях $\cos nt$, $\Delta_n^*(t, \bar{\alpha}) = K_C(t, \bar{\alpha}) - T_{n-1}^*(t)$. Якщо $\text{sign } \Delta_n^*(0 + 0, \bar{\alpha}) \cdot \text{sign } \Delta_n^*(\pi, \bar{\alpha}) = (-1)^n$, то ядро $K_C(t, \bar{\alpha})$ задовольняє умову Надя N_n^* .

Теорема 2. Нехай сумовні функції $\Psi_i^s(t)$ неперервні на проміжку $(0; 2\pi)$, ядро $K_S(t, \bar{\alpha})$ інтерполюється тригонометричним многочленом порядку не вище $n - 1$ на періоді не більше як в $2n + 1$ точці, многочлен $T_{n-1}^*(t)$ - інтерполює функцію $K_S(t, \bar{\alpha})$ в нулях $\sin nt$, $\Delta_n^*(t, \bar{\alpha}) = K_S(t, \bar{\alpha}) - T_{n-1}^*(t)$. Якщо $\text{sign } \Delta_n^*(0 + 0, \bar{\alpha}) \cdot \text{sign } \Delta_n^*(\pi - 0, \bar{\alpha}) = (-1)^{n-1}$, то ядро $K_S(t, \bar{\alpha})$ задовольняє умову Надя N_n^* .

Отже, до ядер із T_1 та T_2 можемо застосовувати рівності (1).

Наслідок 1. Якщо ядро $K_C(t, \bar{\alpha})$ задовольняє умови теореми 1, то

$$E_n(\mathfrak{M}_C)_C = \sup_{f \in \mathfrak{M}_C} \inf_{T_{n-1}} \|f(\cdot) - T_{n-1}(\cdot)\|_C = E_n(\mathfrak{M}_L)_1 = \sup_{f \in \mathfrak{M}_L} \inf_{T_{n-1}} \|f(\cdot) -$$

$$T_{n-1}(\cdot)\|_1 = \frac{1}{\pi} E_n(K_C(t, \bar{\alpha}))_1 = \frac{4}{\pi} \left| \sum_{i=1}^m \alpha_i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \psi_i[(2k+1)n]}{2k+1} \right|.$$

Якщо ж ядро $K_S(t, \bar{\alpha})$ задовольняє умови теореми 2, то

$$E_n(\mathfrak{M}_C)_C = E_n(\mathfrak{M}_L)_1 = \frac{1}{\pi} E_n(K_S(t, \bar{\alpha}))_1 = \frac{4}{\pi} \left| \sum_{i=1}^m \alpha_i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_i[(2k+1)n]}{2k+1} \right|.$$

Цікавими є випадки лінійних комбінацій $K(t, \bar{\alpha})$, при яких різниця $\Delta_n^*(t, \bar{\alpha})$ перетворюється в нуль у $2n + 2$ точках на періоді при $K_C(t, \bar{\alpha})$ парній функції, та у $2n + 1$ точці на проміжку $(0; 2\pi)$, якщо $K_S(t, \bar{\alpha})$ – непарна функція і при цьому інтерполюючий многочлен має порядок не вище за $n-1$. Виявляється, що у випадку виконання протилежної умови до твердження T_1 , а саме, $\text{sign} \Delta_n^*(0 + 0, \bar{\alpha}) \cdot \text{sign} \Delta_n^*(\pi, \bar{\alpha}) = (-1)^{n+1}$, відповідно до твердження T_2 – $\text{sign} \Delta_n^*(0 + 0, \bar{\alpha}) \cdot \text{sign} \Delta_n^*(\pi - 0, \bar{\alpha}) = (-1)^n$, умова Надя N_n^* для ядра $K(t, \bar{\alpha})$ виконуватися не буде, проте матиме місце умова $N_{n,1}^*$. Справедлива

Теорема 3. Нехай сумовні функції $\Psi_i^c(t)$ неперервні на проміжку $(0; 2\pi)$. Якщо ядро $K_C(t, \bar{\alpha})$ інтерполюється тригонометричним многочленом $T_{n-1}(t)$ на періоді не більше як в $(2n + 2)$ –х точках, то при кожному $n \in \mathbb{N}$ існують числа $\alpha_i^* = \alpha_i^*(n)$, $i = \overline{1, m}$, та тригонометричний многочлен $T_{n-1}^*(t)$ такі, що $\text{sign} \Delta_n^*(0 + 0, \bar{\alpha}^*) \cdot \text{sign} \Delta_n^*(\pi, \bar{\alpha}^*) = (-1)^{n+1}$, а ядро $K_C(t, \bar{\alpha})$ задовольняє умову $N_{n,1}^*$.

Аналогічно, можемо переконатися в справедливості наступного твердження.

Теорема 4. Нехай сумовні функції $\Psi_i^s(t)$ неперервні на проміжку $(0; 2\pi)$. Якщо ядро $K_S(t, \bar{\alpha})$ інтерполюється тригонометричним многочленом $T_{n-1}(t)$ на проміжку $(0; 2\pi)$ не більше як в $2n + 1$ точці, то при кожному $n \in \mathbb{N}$ існують числа $\alpha_i^* = \alpha_i^*(n)$, $i = \overline{1, m}$, та тригонометричний многочлен $T_{n-1}^*(t)$ такі, що $\text{sign} \Delta_n^*(0 + 0, \bar{\alpha}^*) \cdot \text{sign} \Delta_n^*(\pi - 0, \bar{\alpha}^*) = (-1)^n$ і при цьому ядро $K_S(t, \bar{\alpha}^*)$ задовольняє умову $N_{n,1}^*$.

Наслідок 2. Якщо ядро $K_S(t, \bar{\alpha})$ із теореми 3 задовольняє умову $N_{n,1}^*$, то при кожному $n \in \mathbb{N}$ для класу $\mathfrak{M}_c(\mathfrak{M}_L)$ – згортка із цим ядром справедлива рівність

$$E_n(\mathfrak{M}_c)_C = E_n(\mathfrak{M}_L)_1 = \frac{4}{\pi} \left| \sum_{i=1}^m \alpha_i^* \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_i[(2k+1)(n+1)]}{2k+1} \right|.$$

Якщо ядро $K_S(t, \bar{\alpha}^*)$ із теореми 4 задовольняє умову $N_{n,1}^*$, то при кожному $n \in \mathbb{N}$

$$E_n(\mathfrak{M}_c)_C = E_n(\mathfrak{M}_L)_1 = \frac{4}{\pi} \left| \sum_{i=1}^m \alpha_i^* \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \psi_i[(2k+1)(n+1)]}{2k+1} \right|.$$

Якщо лінійна комбінація $K_C(t, \bar{\alpha})$ ($K_S(t, \bar{\alpha})$) містить два доданки, а коефіцієнти вектора $\bar{\alpha}$ вибрати у вигляді $\bar{\alpha} = (1, \alpha)$, то значення α^* , при якому ядро задовольняє умову $N_{n,1}^*$, єдине. Якщо число доданків m більше двох, вказана властивість може місця не мати.

4. Висновки. Одержано достатні умови для лінійних комбінацій парних, а також непарних ядер, для яких виконується “узагальнена” умова Нада $N_{n,1}^*$. При виконанні цих умов обчислено точне значення найкращих наближень класів періодичних функцій, що задаються за допомогою згортки з такими твірними ядрами, в метриках просторів неперервних та інтегровних функцій.

Список використаних джерел

1. Nagy B., Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen I. Periodischer Fall, Berichte der math.- phys. Kl. Akad. der Wiss. zu Leipzig, 90, 103 -134 (1938).
2. Сердюк А., Сорич В., Сорич Н. Найкраще наближення тригонометричними поліномами класів згортки, породжених деякими лінійними комбінаціями періодичних ядер. *Укр. мат. журн.* 2025. Т. 77, № 5. С. 249 – 363.
3. Stepanets A.I. Methods of Approximation Theory. Kiev: Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, 2002. Part I. 427 p.