УДК 517.5

Валентин Кропива, здобувач першого (бакалаврського) рівня вищої освіти,
Костянтин Жигалло, кандидат фізико-математичних наук, доцент,
Волинський національний університет імені Лесі Українки, м. Луцьк, Україна

ПРО ВИКОРИСТАННЯ СИМВОЛІКИ ЛАНДАУ В ЗАДАЧАХ КОЛМОГОРОВА-НІКОЛЬСЬКОГО

Анотація. У роботі досліджено застосування символіки Ландау для опису асимптотичної поведінки похибок апроксимації у задачах Колмогорова-Нікольського для інтегралів Пуассона-Чебишова на класах функцій Гельдера. Отримано асимптотичні оцінки величини відхилення та встановлено характер збіжності наближувальних процесів.

Ключові слова: символіка Ландау, задача Колмогорова-Нікольського, інтеграли Пуассона-Чебишова, апроксимація функцій, класи Гельдера.

Abstract. The paper investigates the application of Landau symbols to describe the asymptotic behavior of approximation errors in Kolmogorov-Nikolskii problems for Poisson-Chebyshev integrals on Hölder function classes. Asymptotic estimates of the deviation value are obtained, and the convergence behavior of the approximation processes is established.

Keywords: Landau symbols, Kolmogorov-Nikolskii problem, Poisson-Chebyshev integrals, approximation of functions, Hölder classes.

У сучасній теорії наближення функцій важливе місце займають задачі дослідження асимптотичної поведінки похибок апроксимації. Одним із ефективних засобів аналізу швидкості збіжності наближувальних процесів є символіка Ландау, яка дозволяє формалізувати оцінки залишкових членів та встановлювати порядок малості похибок. Особливий інтерес становлять задачі Колмогорова-Нікольського для інтегралів Пуассона-Чебишова на класах функцій Гельдера, де досліджуються асимптотичні властивості величини відхилення між функцією та її наближенням. Використання символів O та o дає можливість отримувати точні асимптотичні співвідношення та характеризувати ефективність наближувальних методів.

Розглянемо клас Гельдера H^{α} [1] функцій ϕ, заданих на сегменті $[-1;1]$ і які задовольняють на цьому сегменті умову: $|\phi(t_1) - \phi(t_2)| \leq |t_1 - t_2|^{\alpha} \quad \forall t_1, t_2 \in [-1, 1], \quad 0 < \alpha \leq 1$.

Нехай

$$\hat{T}_0(x) = \sqrt{\frac{1}{\pi}}, \hat{T}_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos k \arccos x, k \in N,$$

ортонормована з вагою $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ на $[-1;1]$ система поліномів Чебишова першого роду. Для кожної неперервної функції ϕ позначимо

$$\nu_k = \nu_k(\phi) = \int_{1}^{-1} \frac{\phi(p)\hat{T}_k(p)}{\sqrt{1-p_2}} dt$$

послідовність коефіцієнтів Фур’є функції ϕ за системою $\hat{T}_k(t)$ [2].

Нескінченний ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \nu_k \hat{T}_k$ називають рядом Фур’є-Чебишова функції ϕ.

За допомогою множини $\Lambda = \lambda_r(k)$ функцій натурального аргумента, залежних від дійсного параметра $r, \ 0 \leq r < 1, \ \lambda_r(0) = 1,$ кожної неперервної на $[-1;1]$ функції ϕ поставимо у відповідність ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_r(k) \nu_k \hat{T}_k(2), 0 \leq r < 1. \tag{1}$$

Нехай ряд (2) при всіх $0 \leq r < 1$ буде рядом Фур’є-Чебишова деякої неперервної функції. Якщо $\lambda_r(k) = r^k, r = 0, 1, 2, \ldots,$ то цю функцію будемо позначати $P_r(\phi; t; T)$.

Розглянемо величину

$$\Delta(H^{\alpha}; P_r; t) = \sup_{\phi \in H^{\alpha}} |\phi(x) - P_r(\phi; t; T)| \tag{2}$$

в кожній точці $t \in [-1, 1]$ при $r \to 1-, \ 0 < \alpha \leq 1$.

Якщо у явному вигляді знайдена функція $f(r) = f(r; t)$ така, що при $r \to 1-$

$$\Delta(H^{\alpha}; P_r; t) = f(r; t) + o(f(r; t)), t \in [-1, 1],$$

то будемо казати, що розв’язана задача Колмогорова-Нікольського для інтегралів Пуассона-Чебишова P_r класу $H^{\alpha}, 0 < \alpha \leq 1$.

Наступне твердження встановлює асимтотичну поведінку величини (3), надаючи розв'язання задачі Колмогоровова-Нікольського для інтегралів Пуассона-Чебишова $P_r(\phi;t;T)$ у класі $H^\alpha, 0 < \alpha \leq 1$.

Для будь-якого $0 < \alpha < 1$ в кожній точці $t \in [-1,1]$ при $r \to 1-$ справедлива рівність

$$\Delta(H^\alpha;P_r;t)=\frac{(1-r)^\alpha}{\cos\alpha\pi 2}(1-t^2)^{\frac{\alpha}{2}}+O(\xi(r,\alpha))(1-t^2)^{\frac{\alpha}{2}}+O(\mu_(r,\alpha)(t)),$$

$$\xi(\rho,\alpha)=\begin{cases}(1-r)^{3\alpha}, & \alpha<\frac{1}{3},\\ (1-r)ln\frac{1}{1-r}, & \alpha=\frac{1}{3},\\ 1-r,\alpha>\frac{1}{3}\end{cases} \qquad \mu(r,\alpha)(x)=\begin{cases}(1-r)^{2\alpha}|t|^\alpha, & \alpha<\frac{1}{2},\\ (1-r)\sqrt{|t|}ln\frac{1}{1-r}, & \alpha=\frac{1}{2},\\ (1-r)|t|^\alpha,\alpha>\frac{1}{2}.\end{cases}$$

Список використаних джерел

1. Dzyadyk V. K., Shevchuk I.A. Theory of Approximation of Functions. Berlin; New York : De Gruyter, 2008. 403 p.
2. Paszkowski S. Zastosowania numeryczne wielomianów i szeregów Czebyszewa. Warszawa : Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1975. 480 s.