

---

## ЗАГАЛЬНІ ПИТАННЯ ПРОМИСЛОВОЇ ГІДРАВЛІКИ І ПНЕВМАТИКИ

---

DOI <https://doi.org/10.32782/1994-4691-2025-2-76-10>  
УДК 621.89

### МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ РОЗРАХУНКУ ТОВЩИНИ ГРАНИЧНОЇ МАСТИЛЬНОЇ ПЛІВКИ НА ПОВЕРХНЯХ ТЕРТЯ ГІДРАВЛІЧНИХ МАШИН

### MATHEMATICAL MODEL FOR CALCULATING THE THICKNESS OF THE BOUNDARY LUBRICANT FILM ON FRICTION SURFACES OF HYDRAULIC MACHINES

С. В. Воронін<sup>1\*</sup>, д.т.н., професор  
В. О. Стефанов<sup>1</sup>, к.т.н., доцент

ORCID: 0000-0001-8443-3222  
ORCID: 0000-0002-7947-2718

<sup>1</sup> *Український державний університет залізничного транспорту*

\*e-mail: [voronin.sergey@ukr.net](mailto:voronin.sergey@ukr.net)

**Анотація.** На основі законів електростатики та сучасних уявлень про електронну будову реальної металевої поверхні отримана математична модель для визначення максимальної відстані полярно-активної молекули від металевої поверхні, на якій виконується умова фізичної адсорбції цієї молекули. Модель враховує щільність та розподіл поверхневого заряду на субмікроскопічній сходинці «желе», величину дипольного моменту молекули та енергію її теплових коливань. Математична модель побудована з умови рівноваги процесів адсорбції та десорбції полярно-активних молекул. Виконання цієї умови встановлює максимальну відстань, яку можна інтерпретувати як максимальну товщину граничної мастильної плівки на поверхнях тертя гідравлічних машин. По розробленій моделі проведено розрахунки товщини мастильної плівки залежно від температури та виконано порівняння з експериментальними значеннями.

**Ключові слова:** гідравлічна машина, поверхня тертя, олива, поверхнево-активна молекула, модель «желе», мастильна плівка, товщина.

#### Постановка проблеми.

При роботі гідравлічних машин в нестационарних режимах (пуск, зупинка, пульсації тиску, перегрів, перехід плунжерної пари через «мертві» точки) домінуючим видом мащення деталей тертя є граничне мащення, яке згідно [1, стор. 6], має наступне визначення: «мащення, в умовах якого тертя та зношування поверхонь, що рухаються одна відносно одної, визначаються їх властивостями, а також тими властивостями мастильного матеріалу, які відрізняються від об'ємної вязкості». Згідно базових положень трибології, граничне мащення характеризується максимальними значеннями коефіцієнта тертя та зносу деталей, по відношенню до інших стандартизованих видів мащення, таких як гідродинамічне, еласто-гідродинамічне, гідростатичне та змішане [1].

Значне тертя та зношування деталей гідравлічних машин при граничному мащенні обумовлено суттєвим наближенням поверхонь в контакт, пружно-пластичними деформаціями, збідненим змащуванням. Захисну протизношувальну та антифрикційну дію при граничному мащенні виконує гранична мастильна плівка, яка утворюється на поверхні тертя з поверхнево-активних молекул. Ця плівка повинна мати достатню товщину та несучу здатність. Лише в такому випадку вона буде витримувати навантаження в контакт та надійно запобігати прямому металевому контакту деталей при терті.

Гранична мастильна плівка формується на поверхнях металу шляхом фізичної конкурентної адсорбції молекул, а її товщина визначає ступінь насичення поверхні тертя мастильним матеріалом – оливою. Тобто, при роботі гідравлічних машин у важких умовах слід забезпечити достатню кількість оливи в області тертя. Крім цього, олива повинна мати в своєму складі поверхнево-активні молекули, які швидко сформують плівку.

Для задовільнення вказаним умовам необхідно вирішувати наукову задачу щодо розрахункового прогнозування максимально можливої товщини граничної мастильної плівки, залежно від параметрів та властивостей поверхні тертя та параметрів поверхнево-активних молекул, оливи, які приймають участь в адсорбції на поверхні. Саме цьому питанню присвячена дана робота.

### Аналіз останніх досліджень.

Процесу адсорбції поверхнево-активних молекул технічних олив на поверхнях деталей тертя, механізму формування граничної мастильної плівки та її протизношувальної дії в трибологічному контакті присвячена велика кількість робіт [1–12]. Глибокий аналіз світових досліджень з цього питання наведений в статті [2], в якій зібрані результати досліджень різних вчених світу. Згідно результатів робіт, зведених в [2] головним принципом забезпечення високої мастильної здатності технічних олив при граничному мащенні є додавання в базову неполярну оливу присадок, які складаються з високо полярних молекул. Цей принцип також відображений в роботах [3, 4–5] та інших. Наприклад, в роботах [3, 5] розкривається загальна фізична та трибологічна дія присадок – як полярних молекул – на поверхні тертя. Типовими протизношувальними присадками є жирні кислоти, рідше – спирти [5], а також складні молекулярні сполуки на основі цинку [4]. Ефективність їх мастильної дії проявляється через інтенсивну адсорбцію на поверхні металу, вона обумовлена наявністю у молекул постійного електричного дипольного моменту [6], тобто молекули мають високу вільну енергію та поверхневу активність.

Мастильна дія присадок в оливах в першу чергу визначається товщиною граничної мастильної плівки на поверхні. Відомо, що чим більша товщина, тим меншими будуть втрати на тертя та зношування в гідравлічних агрегатах. Це висловлення підтверджується узагальненням, наведеним в роботі [5], яке для пружно-пластичного контакту деталей гідромашини при граничному мащенні представлено залежністю для інтенсивності зношування

$$I = \frac{A \cdot v^{-0,4} \cdot \mu^{-\frac{1}{6}} \cdot P}{l_T \cdot h^2}, \quad (1)$$

де  $A$  – функція матеріалу контрольного тіла тертя, складу поверхнево-активних компонентів оливи та шорсткості поверхні;  $v$  – швидкість ковзання поверхонь тертя, м/с;  $\mu$  – динамічна в'язкість оливи, Па·с;  $P$  – тиск в контакті, Па;  $l_T$  – енергетична щільність тертя, встановлена на основі аналізу енергетичного балансу тертя, Дж/м<sup>3</sup>;  $h$  – товщина граничної мастильної плівки, м.

Легко побачити, що інтенсивність зношування зворотно пропорційна квадрату товщини плівки, тобто цей параметр є найбільш впливовим. З метою мінімізації зносу гідравлічних машин слід забезпечувати максимальну товщину вказаної плівки. Саме тому, при прогнозуванні надійності гідромашин актуальним питанням є визначення товщини граничної мастильної плівки при нестационарних умовах роботи. Внаслідок дуже малих значень товщини, до 1 мкм, а також шорсткості поверхні, така задача є складною, коли мова йде про експериментальні методи. Тобто, з точки зору витрат, доцільним є застосування розрахункових методів.

З іншого боку, внаслідок високого дипольного моменту, молекули присадок схильні до утворення в об'ємі оливи стійких надмолекулярних агрегатів (міцел) [7]. Встановлено, що такі міцели перешкоджають адсорбції молекул на поверхні, тобто умови формування граничної плівки погіршуються, а її товщина не може досягнути максимального рівня. Для вирішення такої проблеми останнім часом почали застосовувати рідкокристалічні присадки для гідравлічних олив, які взаємодіють з поверхнею полярними агрегатами, а не поодинокими молекулами [8]. Все це призводить до ускладнення розрахункових методів визначення товщини, та повертає дослідників до необхідності застосування експериментальних методів. Найбільш розповсюдженими експериментальними методами визначення товщини граничної плівки є ультразвуковий метод [9], інфрачервоної [10] та рентгенівської спектроскопії [11]. Вказані методи є досить точними, однак потребують коштовного обладнання, дотримання трудомістких методик та значних витрат матеріалів.

Перелічені складові стану питання говорять про необхідність розробки розрахункових методів. Вони існують, але засновані на формалізованих підходах, є наближеними, та не враховують головних фізичних характеристик як поверхні металу, так і молекули, що адсорбується на ній [12]. В даній роботі розкривається спроба створити таку математичну модель розрахунку товщини граничної мастильної плівки, яка б враховувала електронну будову реальної поверхні металу [13], а також величину дипольного моменту конкретної молекули [6].

### **Методологія дослідження.**

Метою дослідження є розробка математичної моделі розрахунку товщини граничної мастильної плівки з урахуванням електронної будови поверхні металу та дипольного моменту молекули присадки, а також розрахункова верифікація цієї моделі.

Для оцінки енергії взаємодії електричного диполя з поверхнею застосовані класичні закони електростатики [14], однак поверхня металу розглядається не як ідеально пласка, а як така, що має мікроскопічну шорсткість, яка в свою чергу складається з субмікроскопічних сходинок. Оцінка електронної будови поверхні виконується з використанням моделі «желе», яка була запропонована в роботі [13] для визначення розподілу поверхневого електронного газу на сходинці атомарних розмірів.

При виконанні розрахункової верифікації моделі застосовували параметри мікрошорсткості реальної поверхні гідравлічної машини після припрацювання. В якості модельної молекули присадки обирали полярну молекулу жирної кислоти з головним параметром – дипольним моментом.

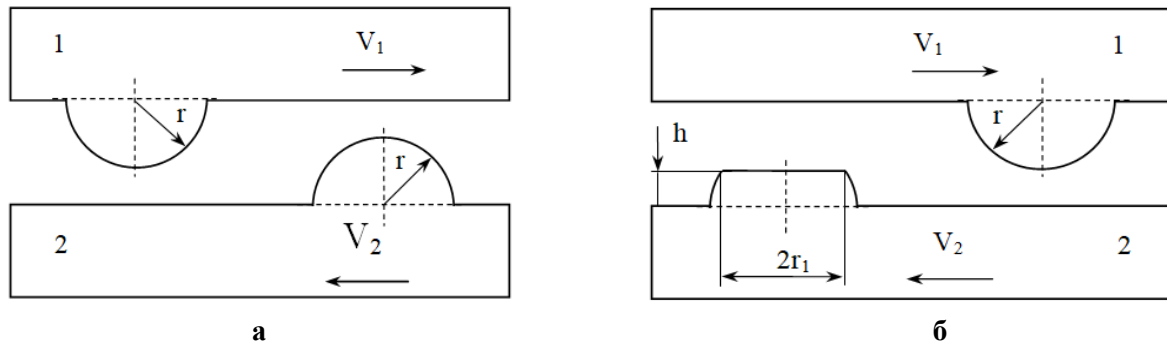
### **Результати дослідження.**

Розглянемо дві поверхні тертя, що мають мікронерівності у вигляді рівних напівсфер радіусом  $r$  (рис. 1, а). При відносному переміщенні поверхонь може статися контакт, при якому відбудеться зріз однієї з нерівностей. У місці зрізу відбудеться розрив атомарних зв'язків із вивільненням вільної енергії. У цей момент часу ділянка поверхні діаметром  $2r_1$  (рис. 1, б) матиме максимально можливе силове поле, величина якого залежатиме тільки від стану кристалічної решітки матеріалу поверхні.

Під дією цього поля адсорбційні процеси протікатимуть найбільш інтенсивно, що призведе до утворення на ділянці  $2r_1$  граничної плівки максимальної товщини. Таким чином, визначення величини поля «чистої» поверхні металу є ключовою ланкою при описі механізму формування граничної плівки.

Розглянемо механізм утворення силового поля поверхні металу з урахуванням її геометрії та електронної будови. Руйнування кристалічної структури металу при утворенні поверхні призводить до розриву атомарних зв'язків. При цьому утворюються вільні або незаміщені зв'язки, майже перпендикулярні до поверхні, які є по суті обірваними орбіталями. Після цього атоми поверхні зміщуються у більш вигідне з

енергетичного погляду становище, тобто відбувається релаксація поверхні, а величина та напрямок зміщення поверхневих іонів визначаються типом кристалічної решітки та симетрією поверхневих граней кристала. На поверхні металу вивільняється вільна енергія, яка тим більша, чим сильніше пов'язані з поверхнею атоми, тобто чим більша енергія зв'язку даного атома з його сусідами.

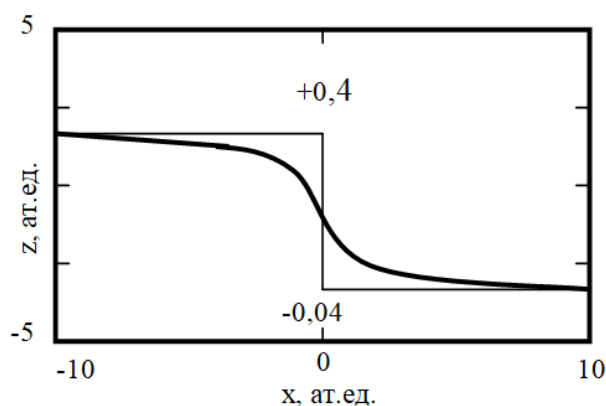


**Рис. 1. Схема утворення ділянки зносу на мікронерівності:**  
а – до контакту; б – після контакту

Розрив атомарних зв'язків призводить до виходу назовні позитивних дискретних іонних кістяків, які утворюють поверхню, а їх сумарне електричне поле утворює силове поле поверхні металу. Значний внесок у величину цього поля також вносить поверхневий електронний газ, який екранує поле іонних кістяків, і тим самим знижує радіус його дії. Для опису силового поля поверхні металу з урахуванням розподілу електронної щільності звернемося до розгляду моделі однорідного фону металу – моделі «желе» [13].

У цій моделі дискретні іонні кістяки замінюються рівномірним позитивно зарядженим фоном, що характеризується щільністю заряду, який дорівнює усередненому по простору розподілу іонного заряду. Застосування такої моделі дозволяє досить точно визначити розподіл електронного газу поверхні та оцінити поверхневу енергію металу.

Використовуємо модифіковану модель «желе» стосовно випадку, коли позитивний фоновий заряд має одну субмікроскопічну сходинку. Тоді електронна щільність поблизу цієї сходинки розподілиться так, як показано на рис. 2.



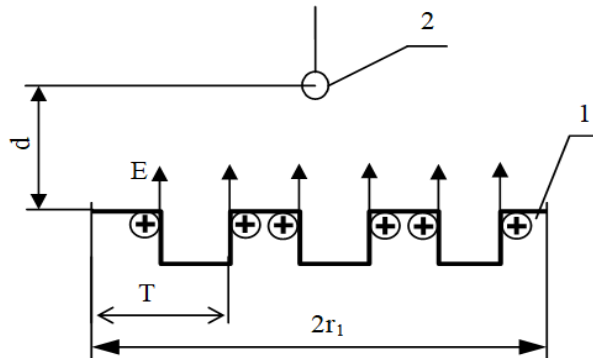
**Рис. 2. Електростатичний потенціал поблизу сходинки в моделі «желе». Згладжена електронна «поверхня» зображена жирною суцільною кривою**

Як видно із рис. 2, поверхневий електронний газ концентрується в області фокусування поля позитивного металу фону. Таким чином, екранується лише частина іонного кістяка, що призводить до утворення позитивно заряджених центрів, сумарне

поле яких визначає величину поля поверхні. Таке поле має електричну природу, а його величина впливає на інтенсивність адсорбційних процесів.

Застосувавши модель «желе», в подальшому визначимо енергію взаємодії молекули присадки – диполя із поверхнею металу. Для цього представимо ділянку поверхні діаметром  $2r_1$  (рис. 1) як набір мікроскопічних сходинок з періодом  $T$  (рис. 3). Утворення таких сходинок на поверхнях тертя може бути викликане як механічним руйнуванням, так і виходом на поверхню великої кількості дислокацій.

Оскільки значення негативного заряду в місці концентрації електронного газу (рис. 2) на порядок менше заряду позитивних центрів сходинки, тоді будемо розглядати взаємодію полярно-активної частини молекули, яка являє собою електричний диполь розмірами  $3...5 \text{ \AA}$  тільки із зарядами цих центрів (рис 3).



**Рис. 3. Диполь біля ступінчастої поверхні металу:**  
 1 – ділянка поверхні діаметром  $2r_1$ ; 2 – молекула (диполь)

Якщо відомі параметри шорсткості поверхонь тертя, визначимо значення радіуса ділянки зношування  $r_1$  залежно від висоти зрізаної нерівності  $h$  (рис. 1):

$$r_1 = \sqrt{r^2 - h^2}. \quad (2)$$

Обґрунтуємо також відстань  $d$  від молекули до поверхні. Мінімальні величини зазорів у з'єднаннях гідравлічних машин приймаємо рівним 5 мкм. Таким чином, максимальне віддалення молекули від обох поверхонь дорівнюватиме  $\Delta/2$  або 2,5 мкм. З іншого боку, мінімальний період субмікроскопічних сходинок  $T$  (рис. 3) для металу може дорівнювати подвійному періоду його кристалічної решітки  $a_0$ . Наприклад, для заліза  $a_0 = 2,4...3 \text{ \AA}$  [14], що на чотири порядки менше максимальної відстані між ділянкою поверхні радіусом  $r_1$  і молекулою. Виходячи з цього, можна вважати, що для поодинокі молекули сумарний заряд іонних кістяків рівномірно розподілений по ділянці поверхні радіусом  $r_1$ .

Визначимо щільність заряду, рівномірно розподіленого по ділянці поверхні

$$\sigma = \frac{q_i}{a_0^2}, \quad (3)$$

де  $q_i$  – заряд одного іонного кістяка, Кл.

Для визначення енергії взаємодії диполя з поверхнею вирішуємо задачу про визначення напруженості електростатичного поля рівномірно розподіленого заряду ділянки поверхні радіусом  $r_1$  в точці, розташованій на осі перпендикулярної до поверхні (рис. 4).

Загалом потенціал поля поверхневого заряду дорівнює [14]

$$\varphi = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0} \cdot \int_S \frac{\sigma dS}{r}, \quad (4)$$

де  $r$  – відстань між елементом площі  $dS$  та точкою, в якій обчислюється потенціал;  $\varepsilon_0$  –

електрична стала;  $\varepsilon$  – відносна діелектрична проникність гідравлічної оливи.

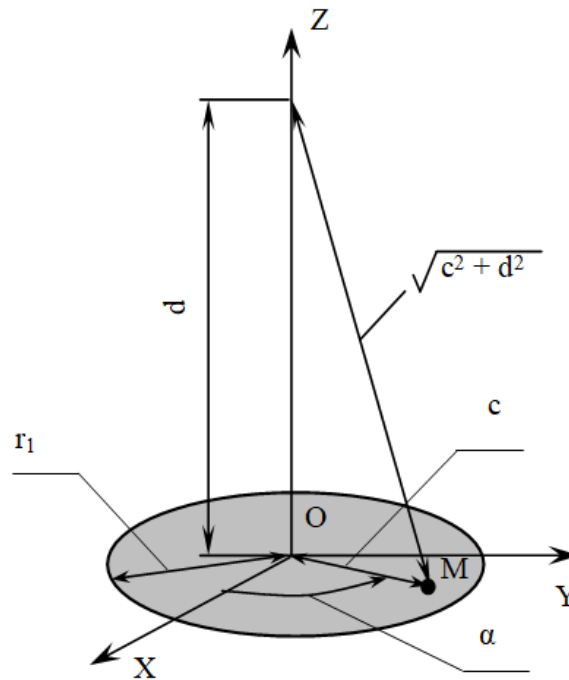


Рис. 4. Схема для визначення напруженості поля ділянки поверхні

Відповідно до рис. 4 вираз (4) запишеться у вигляді:

$$\varphi(d) = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0} \cdot \int_S \frac{\sigma dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2 + d^2}}, \quad (5)$$

де  $x, y$  – координати довільної точки поверхні  $M$ .

Для розрахунку інтеграла перейдемо до полярних координат в площині окружності (рис. 4). При цьому  $x^2 + y^2 = c^2$ ,  $dx \cdot dy = c \cdot dc \cdot d\alpha$ , тоді

$$\varphi(d) = \frac{\sigma}{4\pi \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0} \cdot \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{r_1} \frac{cdc}{\sqrt{c^2 + d^2}} = \frac{\sigma}{2\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \left( \sqrt{r_1^2 + d^2} - d \right). \quad (6)$$

Звідки напруженість електричного поля ділянки поверхні визначатиметься виразом

$$E_d = -\frac{\partial \varphi}{\partial d} = \frac{\sigma}{2 \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0} \cdot \left( 1 - \frac{d}{\sqrt{r_1^2 + d^2}} \right). \quad (7)$$

Для відомої напруженості поля визначимо енергію взаємодії диполя з поверхнею  $W_{ПДВ}$ , що лежить на вісі  $OZ$  (рис. 4). При цьому вважаємо, що вісь диполя розташована нормально до поверхні:

$$W_{ПДВ} = -p \cdot E_d = -\frac{p \cdot \sigma}{2 \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0} \cdot \left( 1 - \frac{d}{\sqrt{r_1^2 + d^2}} \right). \quad (8)$$

де  $p$  – дипольний момент молекули – диполя.

Одночасно з процесом адсорбції полярних молекул на поверхні може протікати процес їх десорбції, котрий спричинений тепловим рухом молекул. Це пов'язано з тем, що всі молекули мають кінетичну енергію, величина якої залежить від температури оливи поблизу поверхні. Перевищення цієї енергії над енергією взаємодії молекули з поверхнею призведе до її десорбції. В зв'язку з цим умова забезпечення адсорбції буде мати вигляд

$$W_{IIAB} \geq W_T. \quad (9)$$

де  $W_T$  – кінетична енергія молекули, яка визначається виразом

$$W_T = K \cdot T. \quad (10)$$

де  $K$  – стала Больцмана;  $T$  – температура оливи, К.

Якщо підставити до умови (9) вирази (8) та (10) та прирівняти їх, отримаємо вираз для рівноваги процесів адсорбції та десорбції молекул:

$$K \cdot T = -\frac{p \cdot \sigma}{2 \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0} \cdot \left( \frac{d}{\sqrt{r_1^2 + d^2}} - 1 \right). \quad (11)$$

З виразу (11) визначимо максимальну відстань, на якій є можливим утримання молекули в електричному полі поверхні. Для спрощення запису виконаємо заміну:  $k = (2 \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0) / (p \cdot \sigma)$  та запишемо для відстані  $d_{\max}$ :

$$d_{\max} = r_1 \cdot \sqrt{\frac{(W_T \cdot k + 1)_2}{2W_T \cdot k - W_T^2 \cdot k^2}}. \quad (12)$$

Визначимо максимальну відстань, на якій можливе утримання молекули полем поверхні, використовуючи такі вихідні дані:

- відстань між позитивно зарядженими центрами,  $a_0 = 5 \text{ \AA}$ ;
- заряд одного центру,  $q_i = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ ;
- радіус мікронерівності,  $r = 0,3 \text{ мкм}$ ;
- дипольний момент молекули,  $p = 10^{-29} \text{ Кл}\cdot\text{м}$ ;
- діелектрична проникність оливи –  $\varepsilon = 2,4$ ;
- температура оливи в області контакту поверхонь –  $T = 300 \dots 1000 \text{ К}$ .

Результати розрахунків наведено на рис. 5. Отримані результати показали, що величина максимальної відстані, на якій можливе утримання молекул ПАР поверхнею, нелінійно залежить від температури. Розрахункові значення лежать в діапазоні  $6500 \dots 12500 \text{ \AA}$  ( $0,65 \dots 1,25 \text{ мкм}$ ), рис. 5. Порівняємо отримані дані з експериментальними. При температурі  $300 \text{ }^\circ\text{К}$  товщина граничної мастильної плівки на металевих кульках, отримана в роботі [5] дорівнює приблизно  $0,1 \dots 0,5 \text{ мкм}$ , що суттєво менше значень, отриманих по залежності (12).

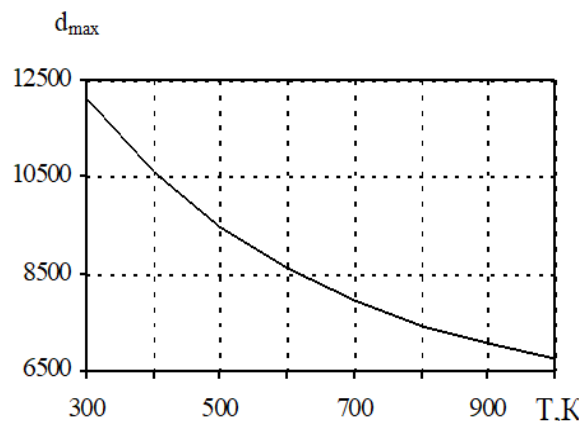


Рис. 5. Зміна максимальної відстані в залежності від температури

Різниця між значеннями розрахункових та експериментальних даних пояснюється тим, що залежність (12) не враховує релаксаційних явищ, що відбуваються у місцях руйнування кристалічної структури металу. Крім того, методика та установка експериментального визначення товщини мастильної плівки в роботі [5] зумовлює наявність тиску в контактні кульок, на яких утворена плівка, що призводить до

зменшення вимірюваної товщини. Таким чином, розрахункові дані, отримані по математичній моделі (12) є завищеними, з іншого боку, порівняльні експериментальні дані є заниженими. Для підвищення адекватності розробленої математичної моделі слід врахувати додаткові фактори, що впливають на величину силового поля поверхні, а також виконувати порівняння розрахункових даних з усіма можливими експериментальними методами.

## Висновки.

Розроблена математична модель для розрахунку максимальної можливої товщини граничної мастильної плівки, яка враховує шорсткість та електронну будову реальної металевої поверхні, електричний дипольний момент молекули присадки та температуру в області формування плівки. Встановлено, що найбільший вплив на процес формування плівки, при рівних інших умовах, чинить температура.

Розрахункова верифікація розробленої математичної моделі показала завищення отриманих даних, порівняно з експериментальними. Для підвищення адекватності розробленої математичної моделі слід врахувати додаткові фактори, що впливають на величину силового поля поверхні та енергію взаємодії молекул з поверхнею, а саме: фактичне зменшення заряду іонних кістяків поверхні, конкретизація величини дипольного моменту для кожного окремого типу присадки.

## Список використаних джерел.

1. Зносостійкість виробів. Тертя, зношування та мащення. Терміни та визначення: ДСТУ 2823-94; Нац. стандарт України. Київ : Державне підприємство «УкрНДНЦ», 1994. 18 с.
2. Yonggang M., Jun X., Liran M., Zhongmin J., Braham Pr., Tianbao M., Wenzhong W. A review of advances in tribology in 2020–2021. *Friction*, 2022. 10 (10). 1443–1595. <https://doi.org/10.1007/s40544-022-0685-7>
3. Pabsetti P., Murty R. S. V. N., Bhoj1 J., Mathew S. et al. Performance of hydraulic oils and its additives in fluid power system: A review. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, 2023. 1161. 012009. <https://doi.org/10.1088/1755-1315/1161/1/012009>
4. Zhang J., Ueda M., Campen S., Spikes H. Boundary friction of ZDDP tribofilms. *Tribology Letters*, 2021. 69(1). 8. <https://doi.org/10.1007/s11249-020-01389-4>
5. Александров Є. Є., Кравець І. А., Лисіков Є. М. Підвищення ресурсу технічних систем шляхом використання електричних та магнітних полів: монографія. Харків: НТУ «ХП», 2006. 544 с.
6. Minkin V. I., Osipov O. A., Zhdanov Y. A. Dipole Moments in Organic Chemistry. *Physical Methods in Organic Chemistry*, 1970. 288 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4684-1770-8>
7. Gu H., Hirayama T. Effect of surfactant self-assembly on lubrication performance in oil-based systems: the role of reverse micelles and vesicles. *Frontiers in Mechanical Engineering*, 2025. 11:1608716. <https://doi.org/10.3389/fmech.2025.1608716>
8. Воронін С. В., Сафонюк І. Ю., Аношкіна Н. М., Харківський О. С. Дослідження впливу концентрації рідкокристалічної присадки та електричного поля на фізико-хімічні властивості індустриальної оливи. *Вісник Національного Авіаційного Університету*, 2020. Т. 83. № 2. С. 70–76.
9. Pan D., Yaping J., Peng Z., Tonghai W., Min Y. et al. Review of ultrasonic-based technology for oil film thickness measurement in lubrication. *Tribology International*, 2022. 165. 107290. <https://doi.org/10.1016/j.triboint.2021.107290>
10. Gu Y., Wang Z., Peng S., Ma T., Luo J. Quantitative measurement of transfer film thickness of PTFE based composites by infrared spectroscopy. *Tribology International*, 2021. 153/ 106593. <https://doi.org/10.1016/j.triboint.2020.106593>
11. Erck R A, Song M, Li D, Cosimbescu L. Investigations of polymethacrylate tribochemical films using X-Ray spectroscopy and optical profilometry. *Tribology International*, 2021. 69 (1). 26. <https://doi.org/10.1007/s11249-020-01388-5>
12. Taylor R.I., Sherrington I. A simplified approach to the prediction of mixed and boundary friction. *Tribology International*, 2022. 153. 107836. <https://doi.org/10.1016/j.triboint.2022.107836>

13. Zangwill A. Physics at Surfaces: monograph. New York: Cambridge University Press, 1988. 454 p.
14. Purcell E.M., Morin D. J. Electricity and magnetism. Third edition: textbook. New York: Cambridge University Press, 2013. 839 p.

*Стаття надійшла до редакції 20.11.2025*

*Стаття прийнята 27.11.2025*

*Статтю опубліковано 15.12.2025*



## MATHEMATICAL MODEL FOR CALCULATING THE THICKNESS OF THE BOUNDARY LUBRICANT FILM ON FRICTION SURFACES OF HYDRAULIC MACHINES

**S. Voronin<sup>1</sup>, V. Stefanov<sup>1</sup>**

<sup>1</sup> *Ukrainian State University of Railway Transport*

### *Summary*

The article presents the results of solving the problem of creating computational methods for predicting the thickness of the boundary lubricating film, which is formed on the friction surfaces of precision parts of hydraulic machines, and performs protective anti-wear and anti-friction functions in non-stationary operating modes. Based on the laws of electrostatics and modern ideas about the electronic structure of a real metal surface, a mathematical model was obtained to determine the maximum distance of a polar-active molecule from the metal surface, on which the condition of physical adsorption of this molecule is fulfilled. From the point of view of the electronic structure of the surface, the mathematical model takes into account the density and distribution of the surface charge at the submicroscopic level. For this purpose, the model of a homogeneous metal background or the “jelly” model was used, according to which, due to the uneven distribution of the surface electron gas, the metal surface has an uncompensated positive charge. This charge determines the maximum magnitude of the force electric field of the metal surface. From the point of view of the adsorbed substance, the developed mathematical model takes into account the magnitude of the electric dipole moment of a polar molecule and the energy of its thermal vibrations. The mathematical model is built on the basis of the equilibrium condition of the adsorption and desorption processes of polar-active molecules, when the energy of interaction of a molecule with a friction surface is equal to the energy of thermal vibrations of this molecule. When this condition is met, the maximum distance is established, which can be interpreted as the maximum thickness of the boundary lubricating film formed without any mechanical effects on it. A computational verification of the developed model was carried out. The calculations performed showed 2...5 times overestimated values of the lubricating film thickness, compared with the experimental method of the column of balls, which requires further refinement of the developed model and selection of other experimental methods for comparison.

**Keywords:** hydraulic machine, friction surface, oil, surface-active molecule, jelly model, lubricating film, thickness.