МАШИНОБУДУВАННЯ (ЗА СПЕЦІАЛІЗАЦІЯМИ)

DOI https://doi.org/10.32782/2078-0877-2026-26-2-8
УДК 633.853:62-1

Я. В. Білокінь[1], аспірант ORCID: 0009-0003-4510-2780
В. В. Дідур[2], д-р техн. наук, проф. ORCID: 0009-0002-4416-195X
[1]*Полтавський державний аграрний університет*
[2]*Уманський національний університет садівництва*
e-mail: didur.vv@gmail.com

ОБҐРУНТУВАННЯ ТА РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ВІДТИСКУ РІДКОЇ ФАЗИ З КАПІЛЯРНО-ПОРИСТОГО ТІЛА

Анотація. У статті розглянуто задачу математичного опису відтиску рідкої фази з деформівного капілярно-пористого тіла в умовах пресування. Показано, що складність процесу зумовлена одночасною зміною тиску в рідині та скелеті твердої фази, а також зміною проникності пористого середовища внаслідок його ущільнення. Для опису процесу запропоновано два підходи: розв'язання диференціального рівняння відтиску за сталого коефіцієнта напірної провідності та розв'язання нелінійної задачі зі змінним коефіцієнтом, який залежить від тиску. Для побудови розв'язку використано метод Бубнова-Гальоркіна, поліноми Лежандра, матричний апарат і чисельне інтегрування методом Ейлера. Встановлено, що модель зі сталим коефіцієнтом напірної провідності дозволяє описати загальні закономірності процесу, однак не забезпечує потрібної точності. Більш адекватним є підхід зі змінним коефіцієнтом напірної провідності, для якого застосовано підстановку Кірхгофа та отримано нелінійну систему звичайних диференціальних рівнянь. Результати можуть бути використані для аналізу процесів пресування олійних матеріалів і для інженерного обґрунтування параметрів шнекових пресів.

Ключові слова: капілярно-пористе тіло, відтиск рідкої фази, пористе середовище, пресування, напірна провідність, математична модель, шнековий прес.

Постановка проблеми. Олійний матеріал під час пресування є складною багатокомпонентною системою, у якій одночасно відбуваються ущільнення твердої фази, перерозподіл навантаження між рідиною і скелетом, фільтрація рідкої фази та зміна проникності капілярно-пористої структури [1, 3, 5, 6]. Саме ця деформаційна мінливість середовища ускладнює математичний опис процесу відтиску та не дозволяє обмежитися спрощеними моделями з постійними параметрами [1, 5, 6].

Для інженерного проєктування пресового обладнання, особливо шнекових пресів, необхідний адекватний математичний опис, який би враховував змінність властивостей матеріалу в процесі навантаження [2, 4, 7]. Без такого опису складно надійно прогнозувати розподіл тиску, інтенсивність виділення рідкої фази та час перебігу процесу [3, 5, 6]. Сучасні дослідження також підтверджують, що деформація пористого середовища істотно впливає на параметри фільтрації, а в шнекових пресах характер течії і відведення олії залежить не лише від геометрії робочого органа, а й від еволюції властивостей матеріалу під тиском [4–8].

Аналіз останніх досліджень. У сучасній науковій літературі задачі фільтрації та відтиску рідкої фази з пористих середовищ розглядаються переважно в межах моделей деформівного пористого тіла, де проникність і напружено-деформований стан взаємопов'язані [1, 5]. У роботі про багатофазну фільтрацію в деформівному пористому середовищі показано, що деформація матриці істотно змінює характеристики руху рідини і має бути безпосередньо включена в математичну модель [5].

Окремий напрям досліджень стосується саме шнекового відтиску олії. У сучасній праці з моделювання конфігурації шнекового преса для відтиску сафлорової олії відзначено, що задача відтиску рідкої фази з дисперсного матеріалу повинна описуватися як поєднання ущільнення, фільтрації та геометричного впливу пресувальної камери [2, 7]. Автори підкреслюють необхідність математичного обґрунтування конструктивних параметрів преса на основі моделей відтиску [2, 7].

Дослідження конструкції олієвідвідних каналів шнекових пресів також підтверджують, що ефективність виділення рідкої фази визначається не лише прикладеним тиском, а й умовами відведення фільтрату та зміною стану матеріалу в зеєрній зоні [4]. Це узгоджується з підходом, за яким тиск рідини і тиск у скелеті необхідно розглядати спільно [3, 4].

Крім того, реальні вимірювання тиску, моменту і потокових характеристик у шнековому пресі показують, що динаміка процесу є нестаціонарною, а спрощені лінійні моделі мають обмежену точність [8]. Це підтверджує доцільність переходу до нелінійних моделей зі змінними коефіцієнтами, які краще відтворюють реальний процес відтиску [5, 6, 8–10].

Отже, аналіз сучасних досліджень свідчить, що для опису відтиску рідкої фази з капілярно-пористого тіла найбільш обґрунтованими є моделі, які одночасно враховують деформацію середовища, нелінійну зміну фільтраційних характеристик і часову еволюцію тиску [1, 5–8].

Формулювання мети статті. Метою роботи є обґрунтування математичної постановки та розв’язання задачі відтиску рідкої фази з капілярно-пористого тіла з урахуванням деформації пористого середовища, а також порівняння підходів за сталого і змінного коефіцієнта напірної провідності.

Для досягнення поставленої мети необхідно:

– сформулювати початкову математичну модель процесу відтиску;

– розв’язати задачу одновимірного відтиску за сталого коефіцієнта напірної провідності;

– побудувати нелінійну модель для випадку, коли коефіцієнт напірної провідності залежить від тиску;

– застосувати метод Бубнова–Гальоркіна, поліноми Лежандра та метод Ейлера для отримання чисельного розв’язку;

– оцінити придатність обох підходів для опису реального процесу пресування.

Основна частина. Передумови математичного опису процесу. Головною особливістю відтиску рідкої фази пресуванням є те, що деформація матеріалу супроводжується зміною проникності каналів твердої фази. Це означає, що капілярно-пористе тіло не можна вважати середовищем зі сталими фільтраційними характеристиками. У зв’язку з цим процес описують через тиск у скелеті твердої фази P_c і тиск рідини $P_ж$, які разом утворюють зовнішній тиск.

Раніше для такого процесу було отримано рівняння розвитку тиску:

для каркаса твердої фази:

$$\frac{\partial P_c}{\partial \tau} = \frac{k}{-\frac{\partial P_{рж}}{\partial P_c}(1+\varepsilon)\rho_ж g} \cdot \frac{\partial^2 P_c}{\partial x^2} \tag{1}$$

для рідини, що віджимається:

$$\frac{\partial P_ж}{\partial \tau} = \frac{k}{-\frac{\partial \varepsilon}{\partial P_c}(1+\varepsilon)\rho_ж g} \cdot \frac{\partial^2 P_ж}{\partial x^2} \tag{2}$$

де ε – коефіцієнт пористості;

$\rho_ж$ – густина рідини;

g – прискорення вільного падіння;

k – коефіцієнт фільтрування;

x – координата;

τ – час.

Коефіцієнт:

$$K = \frac{k}{-\frac{\partial \varepsilon}{\partial P_c}(1+\varepsilon)\rho_ж g} \tag{3}$$

трактується як коефіцієнт напірної провідності, тобто параметр, що характеризує швидкість вирівнювання напорів у рідині або тисків у скелеті матеріалу.

Розв'язання задачі за сталого коефіцієнта напірної провідності. На першому етапі задачу одновимірного відтиску сформульовано у вигляді:

$$\frac{\partial P_ж}{\partial \tau} = K\frac{\partial^2 P_ж}{\partial x^2} \tag{4}$$

де K = const. Це можливо на підставі гіпотези, що зовнішній тиск під час пресування дорівнює сумі тиску в рідині та тиску в скелеті, а в початковий момент весь прикладений тиск сприймається рідиною.

Початкова умова:

$$P_ж(x,0)=1 \tag{5}$$

Гранична умова:

$$P_ж(0,\tau)=0 \tag{6}$$

Для розв'язання застосовано метод Бубнова–Гальоркіна, а як пробну функцію використано ряд за парними поліномами Лежандра:

$$P_ж(x,\tau) = \sum_{i=1}^{n} a_i(\tau)\left[P_0(1-x) - P_{2i}(1-x)\right] \tag{7}$$

Поліноми Лежандра обчислювали за формулою Родріга:

$$P_n(\lambda) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left(\lambda^2-1\right)^n \tag{8}$$

Для практичного розрахунку було прийнято чотиричленний розклад. Використано поліноми:

$$P_0(\lambda) = 1 \tag{9}$$

$$P_2(\lambda) = \frac{3\lambda^2-1}{2} \tag{10}$$

$$P_4(\lambda) = \frac{35\lambda^4-30\lambda^2+3}{8} \tag{11}$$

$$P_6(\lambda) = \frac{231\lambda^6-315\lambda^4-105\lambda^2-5}{16} \tag{12}$$

$$P_8(\lambda) = \frac{6435\lambda^8-1202\lambda^6+6930\lambda^4-1260\lambda^2+35}{128} \tag{13}$$

Початкові коефіцієнти часових проєкцій визначали через матричну систему, побудовану після почергового множення пробної функції на координатні складові та інтегрування на відрізку $x \in [0;1]$. Далі задача була зведена до системи звичайних диференціальних рівнянь, яку розв'язували методом Ейлера. Для забезпечення стійкого інтегрування було встановлено крок $h = 0{,}005$ за приведеною часовою координатою.

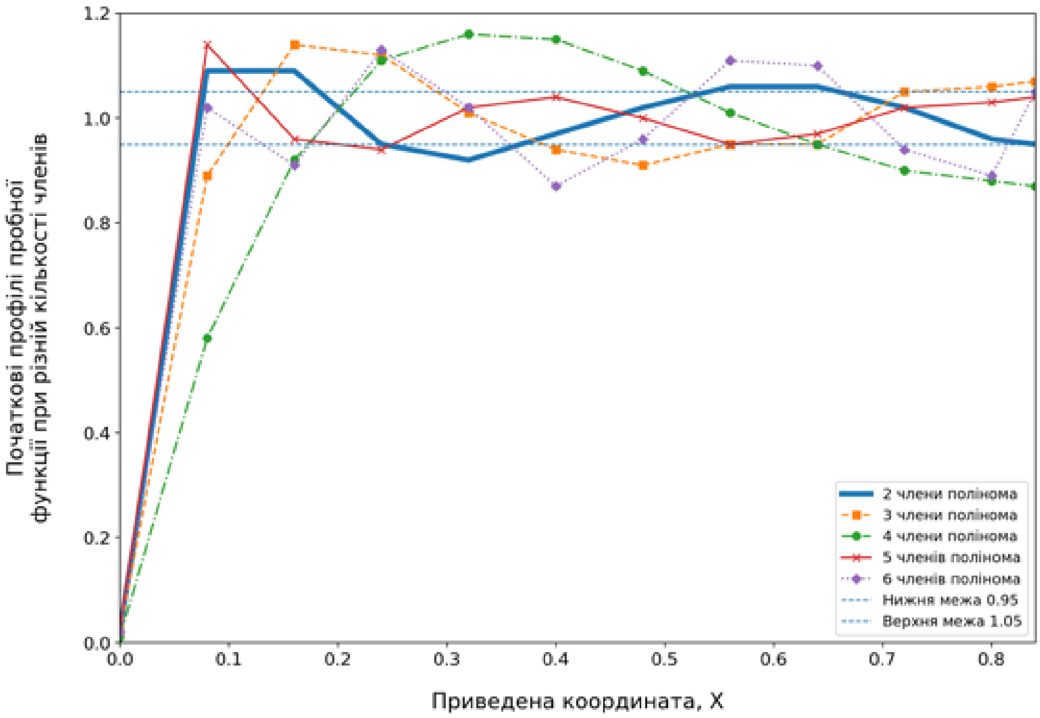

Рис. 1. Графіки початкових профілів пробної функції при різній кількості членів полінома

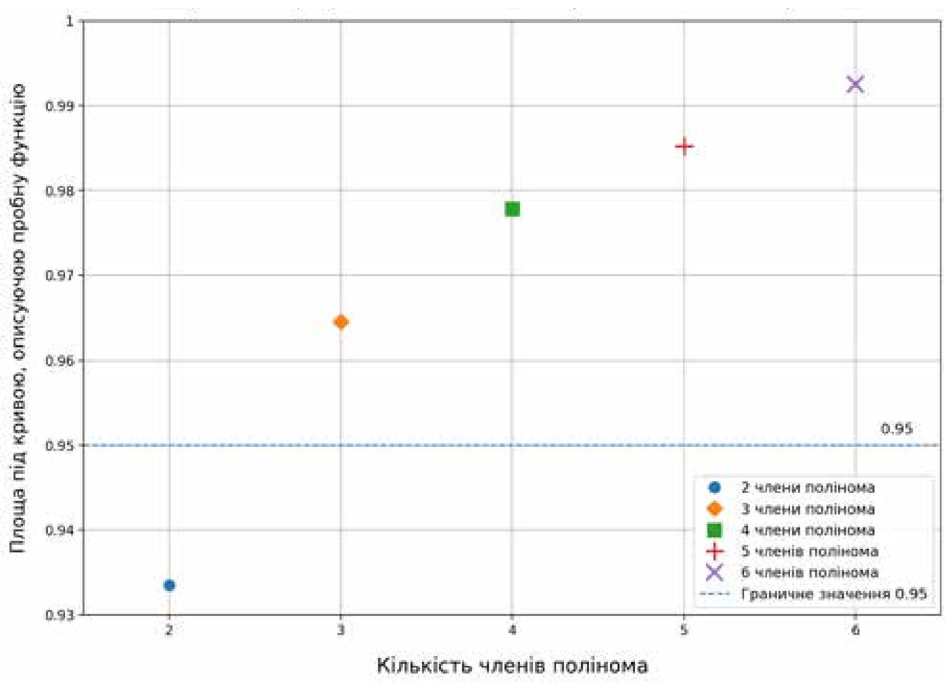

Рис. 2. Графік зміни площ під кривими часових проєкцій, що описують пробну функцію

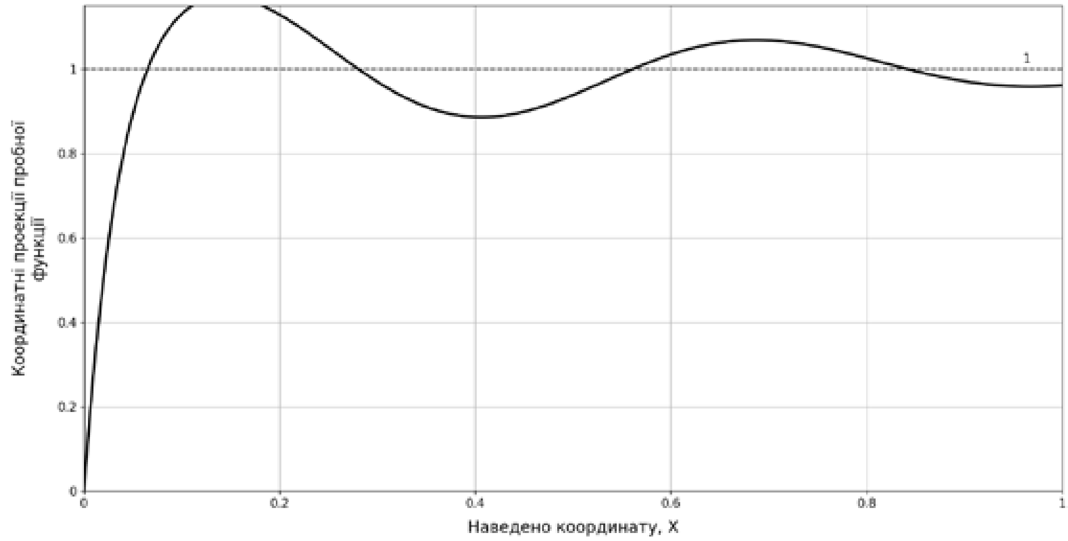

Рис. 3. Пробна функція в початковий момент часу залежно від приведеної координати

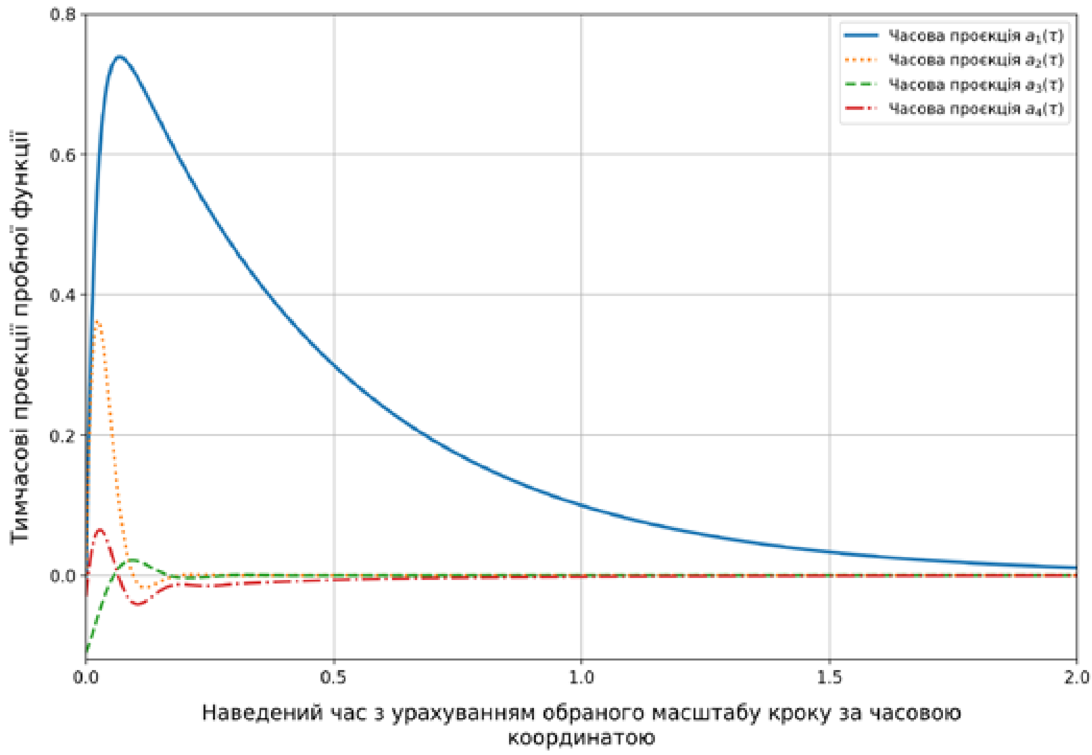

Рис. 4. Графіки часових рядів коефіцієнтів a_1 (τ), a_2 (τ), a_3 (τ), a_4 (τ) за сталого коефіцієнта напірної провідності

Тиск у скелеті пресованого матеріалу визначали з урахуванням сталості зовнішнього тиску:

$$P_с = 1 - P_ж \tag{14}$$

Отримані результати показали загальну правильність підходу, але аналіз експериментальних даних виявив недостатню точність моделі зі сталим коефіцієнтом напірної провідності.

Розв'язання задачі зі змінним коефіцієнтом напірної провідності. На другому етапі для опису процесу відтиску було прийнято нелінійне рівняння:

$$\frac{\partial P_{ж}}{\partial \tau} = K(P)\frac{\partial^2 P_{ж}}{\partial x^2} \quad (15)$$

де $K(P)$ – змінний коефіцієнт напірної провідності.

Для нього прийнято експоненційну залежність:

$$K(P) = K_y e^{\gamma P} \quad (16)$$

де K_y – коефіцієнт пропорційності;

γ – коефіцієнт нелінійності.

Оскільки це рівняння не можна безпосередньо розділити на часову та координатну складові, застосовано підстановку Кірхгофа:

$$\delta = \int K(P)dP \quad (17)$$

Після інтегрування отримують залежність допоміжної змінної δ\deltaδ від тиску рідини та зворотний зв'язок $P_ж(\delta)$. Це дало змогу перетворити вихідне нелінійне рівняння до форми, придатної для застосування методу Гальоркіна.

Пробну функцію для допоміжної змінної також шукали у вигляді розкладу за поліномами Лежандра:

$$\delta(x,\tau) = \sum_{i=1}^{4} a_i(\tau)\left[P_0(1-x) - P_{2i}(1-x)\right] \quad (18)$$

Після побудови матричної системи було отримано нелінійну систему звичайних диференціальних рівнянь, у якій права частина є білінійною формою від часових проєкцій. Для чисельного інтегрування знову використано метод Ейлера, але для стійкого розрахунку було прийнято крок $h = 0{,}05$, максимальне значення приведеної часової координати – 140, а кількість кроків – 500.

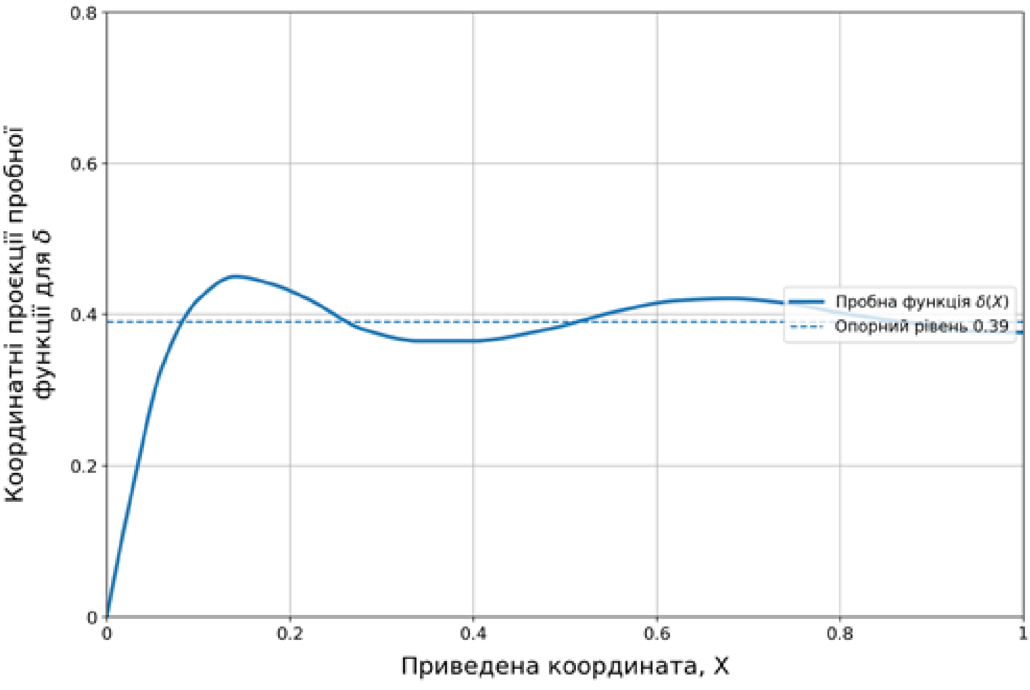

Рис. 5. Пробна функція в початковий момент часу для допоміжної змінної δ залежно від приведеної координати

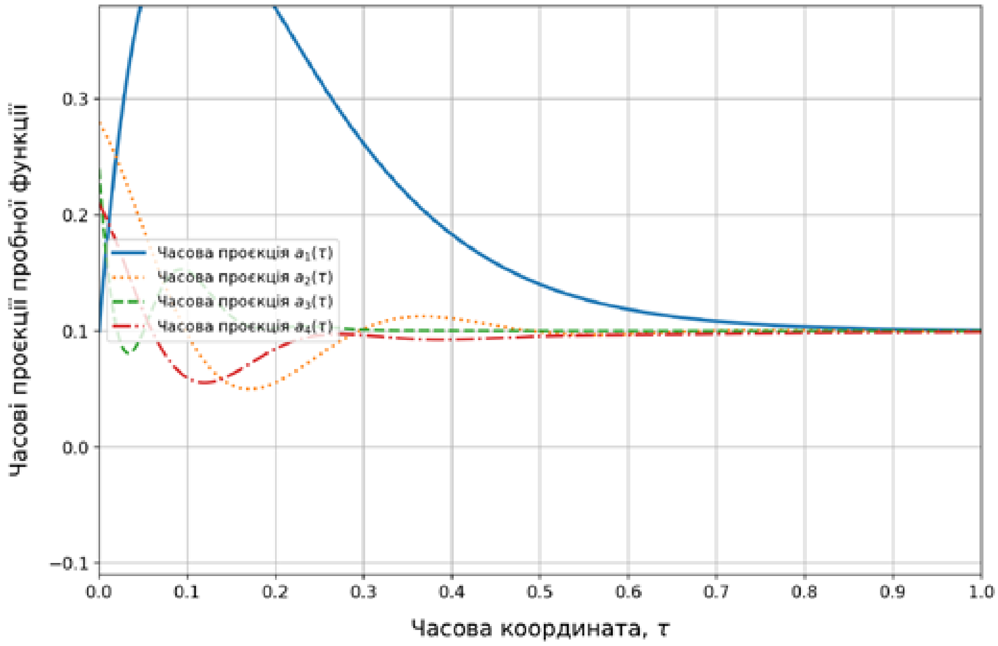

Рис. 6. Графік часових рядів коефіцієнтів a_1 (τ), a_2 (τ), a_3 (τ), a_4 (τ) при a_0 = 0,147 і γ = 2,2855

Саме ця модель забезпечила більш реалістичний опис процесу, оскільки врахувала зміну фільтраційних характеристик середовища внаслідок деформації. Такий висновок узгоджується із сучасними роботами, у яких нелінійні моделі для деформівних пористих середовищ демонструють кращу відповідність реальним процесам фільтрації та пресування.

Висновки. У роботі обґрунтовано математичну постановку задачі відтиску рідкої фази з капілярно-пористого тіла та показано, що ключовим у її розв'язанні є врахування деформації середовища і зміни фільтраційних характеристик у процесі пресування.

Розв'язання лінійної задачі за сталого коефіцієнта напірної провідності дозволило побудувати базовий опис процесу, одержати часові проєкції і визначити характер перерозподілу тиску між рідиною та скелетом твердої фази. Проте ця модель виявилася недостатньо точною для відтворення реального процесу відтиску.

Запровадження змінного коефіцієнта напірної провідності, що залежить від тиску, а також використання підстановки Кірхгофа, методу Бубнова–Гальоркіна і чисельного інтегрування методом Ейлера дали змогу отримати більш адекватний нелінійний розв'язок. Це підтверджує доцільність використання нелінійних моделей для опису відтиску рідкої фази з деформівних пористих середовищ.

Практичне значення одержаних результатів полягає у можливості застосування побудованої моделі для інженерного аналізу та вдосконалення пресового обладнання, насамперед шнекових пресів для відтиску олії.

Список використаних джерел

1. Bear J. *Dynamics of Fluids in Porous Media*. New York : American Elsevier Publishing Company, 1972.
2. Sorin-Stefan B. Calculus Elements for Mechanical Presses in Oil Industry. In: *Agricultural and Food Engineering Working Document*. London : IntechOpen, 2013. DOI: 10.5772/53159.
3. Owolarafe O. K., Faborode M. O. Mathematical modelling and simulation of the hydraulic expression of oil from oil palm fruit. *Biosystems Engineering*. 2008. Vol. 101, No. 3. P. 331–340.
4. Hudzenko M., Vasyliv V., Zheplinska M., Sarana V., Gorenkov D. Study of the effectiveness of the design of the oil removal channels of screw presses for squeezing out oil. *Animal Science and Food Technology*. 2023. Vol. 14, No. 4. P. 58–73. DOI: 10.31548/animal.4.2023.58.

5. Burnashev V. F., Datsko B. M., Datsko O. I. Mathematical Modeling of Multi-Phase Filtration in a Deformable Porous Medium. *Computation*. 2023. Vol. 11, No. 6. Art. 112. DOI: 10.3390/computation11060112.

6. Теплофізична модель процесу прес-екструзії олійних культур / В. В. Дідур, Я. В. Білокінь, О. В. В'юник, Г. І. Дашивець. *Науковий вісник Таврійського державного агротехнологічного університету. Технічні науки* : електронне наукове фахове видання. / ТДАТУ; гол. ред. д.т.н., проф. В. М. Кюрчев. Запоріжжя : Видавничий дім «Гельветика», 2025. Вип. 15, т. 2. С. 32–36. DOI: https://doi.org/10.32782/2220-8674-2025-15-2-4

7. Mursalykova M., Akhmetov R., Kassenova G., et al. Mathematical Modeling of Screw Press Configuration for Safflower Oil Extraction. *Applied Sciences*. 2023. Vol. 13, No. 5. Art. 3057. DOI: 10.3390/app13053057.

8. Carré P., et al. Investigating pressure, torque, cage strain and flows dynamic in screw press during oil extraction. *OCL*. 2025. Vol. 32. Art. 14.

9. Didur, V., Kyurchev, V., Chebanov, A., Aseev, A. (2019). Increasing the Efficiency of the Technological Process of Processing Castor-Oil Seeds into Castor Oil. In: Nadykto, V. (eds) Modern Development Paths of Agricultural Production. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-14918-5_3

10. Процеси і апарати. Механічні та гідромеханічні процеси: підручник / В. С. Бойко, К. О. Самойчук, В. Г. Тарасенко [та ін.]. Мелітополь, 2021. 445 с.

Дата першого надходження статті до видання: 24.03.2026
Дата прийняття статті до друку після рецензування: 17.04.2026
Дата публікації (оприлюднення) статті: 25.05.2026

Ya. Bilokin[1], V. Didur[2]
[1]*Poltava State Agrarian University*
[2]*Uman National University of Horticulture*

JUSTIFICATION AND SOLUTION OF THE PROBLEM OF LIQUID PHASE PRINTING FROM A CAPILLARY-POROUS BODY

Summary

Oily material during pressing is a complex multicomponent system in which compaction of the solid phase, redistribution of load between the liquid and the skeleton, filtration of the liquid phase and change in permeability of the capillary-porous structure occur simultaneously. It is this deformation variability of the medium that complicates the mathematical description of the impression process and does not allow us to limit ourselves to simplified models with constant parameters. The aim of the work is to substantiate the mathematical formulation and solution of the problem of liquid phase imprinting from a capillary-porous body taking into account the deformation of the porous medium, as well as to compare approaches for a constant and variable pressure conductivity coefficient. The article substantiates and solves the problem of liquid phase expression from a capillary-porous body under pressing conditions. It is shown that the main difficulty of the process lies in the coupled evolution of liquid pressure, solid skeleton pressure, and permeability of the deformable porous medium. Two approaches are considered: a linear model with a constant pressure-conductivity coefficient and a nonlinear model with a pressure-dependent coefficient. The Bubnov–Galerkin method, Legendre polynomials, matrix transformations, Kirchhoff substitution, and Euler numerical integration were applied to obtain the solution. It was found that the constant-coefficient model reproduces the general trend of pressure redistribution but does not provide sufficient accuracy for describing the real pressing process. The nonlinear formulation with a variable pressure-conductivity coefficient provides a more adequate description of liquid phase expression from the porous material. The obtained results can be used for the analysis and engineering design of screw presses and other equipment for oil-bearing material processing.

Keywords: capillary-porous body; liquid phase imprint; porous medium; pressing; pressure conductivity; mathematical model; screw press.