DOI https://doi.org/10.32782/2220-8674-2025-15-2-5
УДК 664 (075.8)

В. В. Дідур[1], д-р техн. наук ORCID: 0000-0001-7584-5073
Д. П. Журавель[2], д-р техн. наук ORCID: 0000-0002-6100-895X
І. А. Колесніченко[3], аспірант ORCID: 0009-0007-9302-208X
Є. А. Петриченко[1], канд. техн. наук ORCID: 0000-0003-1037-077X
[1] Уманський національний університет
[2] Таврійський державний агротехнологічний університет імені Дмитра Моторного
[3] Полтавський державний аграрний університет
e-mail: didur.vv@gmail.com

МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОВОЇ ОБРОБКИ НАСІННЯ ОЛІЙНИХ КУЛЬТУР ВИСОКОТЕМПЕРАТУРНИМ ТЕПЛОНОСІЄМ

Анотація. Складність прямого вимірювання просторових полів температури та вологовмісту в капілярно-пористих матеріалах зумовлює потребу у фізично обґрунтованих моделях, здатних порівнювати альтернативні режими термообробки та вибирати енергоощадні варіанти з гарантованою якістю продукту. Запропоновано феноменологічну модель нестаціонарного тепломасоперенесення з урахуванням капілярних і поверхневих сил, інтенсивності міжфазного масообміну та термокапілярних течій; модель спирається на рівняння двофазної фільтрації, ізотерми сорбції та термодинамічні співвідношення Кельвіна і Клапейрона – Клаузіуса. Розроблено чисельну реалізацію на основі методу зважених нев'язок (Галеркіна) та показано узгодження з експериментом у межах довірчого інтервалу. Практична цінність – підвищення точності прогнозу волого- та теплообміну й оптимізація режимів сушіння агросировини.

Ключові слова: двохфазна фільтрація, термодинамічні співвідношення, ізотерми сорбції, теплота сорбції, метод Галеркіна, параметрична ідентифікація, верифікація моделі, прогноз якості, сушіння агросировини, енергоефективність.

Постановка проблеми. Нині відсутній єдиний феноменологічний підхід до сумісного тепло- і масоперенесення в пористих тілах: традиційні схеми, що походять від теорії Ликова, спираються на емпіричні коефіцієнти, чутливі до матеріалу та масштабу, і часто ігнорують поверхневі ефекти. Це ускладнює практичні розрахунки та перенесення моделей між об'єктами. Потрібні моделі, де параметри прямо виводяться з ізотерм сорбції та термодинаміки й узгоджуються з багатофазною фільтрацією.

Аналіз останніх досліджень. За останнє десятиліття зберігається тренд до фізично насичених моделей, які поєднують рівняння двофазної фільтрації з термодинамічними зв'язками (Кельвіна, Клапейрона – Клаузіуса) та даними ізотерм сорбції; числові методи ґрунтуються на варіаційних формулюваннях (метод зважених нев'язок / Галеркіна). Ключовим є врахування теплоти сорбції та термокапілярних течій, що суттєво впливають на енергетичний баланс і швидкості перенесення, а також верифікація моделей за польовими / лабораторними вимірюваннями.

Формулювання мети статті (постановка завдання). Розробити й верифікувати феноменологічну модель нестаціонарного тепломасоперенесення в капілярно-пористих середовищах з урахуванням капілярних і поверхневих сил, міжфазного масообміну та термокапілярних течій.

© В. В. Дідур, Д. П. Журавель, І. А. Колесніченко, Є. А. Петриченко, 2025

Завдання. Побудувати зв'язки «тиск рідини / пара – вміст вологи – температура» на основі ізотерм сорбції та рівнянь Кельвіна і Клапейрона – Клаузіуса. Вивести узагальнені рівняння для волого- і теплообміну з явним урахуванням теплоти фазових перетворень і теплоти сорбції. Реалізувати чисельну схему (метод зважених нев'язок / Галеркіна), придатну для інженерних розрахунків. Провести параметричну ідентифікацію та верифікацію моделі за експериментальними даними, оцінити точність прогнозу.

Основна частина. Останнім часом під час термічної обробки зернових культур пріоритет надають високотемпературним теплоносіям, зокрема перегрітому пару, що має низку суттєвих переваг. Це зумовлює потребу у створенні нових підходів до аналітичного розв'язання наявних моделей, щоб отримувати точніші результати для задач оптимального керування технологічними параметрами процесів сушіння й обсмажування насіння олійних культур. Інтенсивні температурні режими за використання високотемпературного теплоносія, з одного боку, мають залишатися в межах допустимих технологічних властивостей зерна, а з іншого – забезпечувати зменшення питомих теплоенергетичних витрат завдяки підвищенню продуктивності.

Через складність прямих вимірювань полів температури та вологовмісту в окремих насінинах принципово важливо розробити модель тепломасоперенесення, що дає змогу порівнювати широкий спектр апаратурно-технологічних схем термообробки та вибирати енергетично оптимальні варіанти з гарантованою якістю висушеного продукту [1–6]. Модель сформульовано на основі диференціальних рівнянь академіка А. В. Ликова, які описують узагальнений закон перенесення вологи у вологому зерні як у паровій, так і в рідкій фазі [7–9]. Для побудови розв'язку прийнято такі спрощення: теплопередачею за рахунок теплопровідності нехтують; усадку матеріалу та градієнт тиску не враховують; окреме зерно моделюють кулею; теплофізичні характеристики залежать від температури й вологості; початкові розподіли температури та вологи в частинці вважають однорідними [10–13]. З урахуванням цих припущень рівняння нестаціонарного тепломасоперенесення подано в безрозмірній формі у сферичній системі координат із відповідними початковими та граничними умовами [14–17].

$$c_m\rho_0\frac{\partial\theta}{\partial t}=\lambda\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{2}{x}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)+\varepsilon r_0\rho_0\frac{\partial u}{\partial t},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a_m\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{2}{x}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}\right)+a_m\delta\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{2}{x}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x}\right) \quad (1)$$

за постановки з граничними умовами третього роду, що описують конвекцію на поверхні тіла:

$$-\lambda\frac{\partial\theta}{\partial x}\Big|_{x=R}+a\left(\theta|_{x=R}-\theta_x\right)-\left(1-\varepsilon\right)r_0\rho_0\beta(u|_{x=R}-u_p)=0,$$

$$a_m\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=R}+a_m\delta\frac{\partial\theta}{\partial r}\Big|_{x=R}+\beta(u|_{x=R}-u_p)=0, \quad (2)$$

разом із формулюванням початкових умов:

$$\theta(x,0)=\theta_0,\ u(x,0)=u_0, \quad (3)$$

де θ_0 та θ – відповідно початкова й поточна температура насіння, K; θ_c – температура теплоносія, K;

u, u_p, u_0 – поточний, рівноважний і початковий вологовміст насіння, кг/кг;

ε – безрозмірний критерій фазового перетворення, що відображає частку вологи, яка переноситься в паровій фазі;

r_0 – питома теплота пароутворення, кДж/кг;

a_m – коефіцієнт дифузії вологи, м²/с;

 ISSN 2220-8674

δ – термоградієнтний коефіцієнт, 1/К;
α – коефіцієнт тепловіддачі, Вт/(м² · К);
β – коефіцієнт масовіддачі, м/с;
t – поточний час термічної обробки, с.

Після введення безрозмірних змінних: $r = \frac{x}{R}$ – безрозмірна просторова координата; $T = \frac{\theta - \theta_0}{\theta_c - \theta_0}$, $U = \frac{u}{u_0}$ – безрозмірні температура та вологовміст; $\tau = t/t_k$ – безрозмірний час, де: t_k – кінцевий час теплової обробки, отримано безрозмірне подання рівнянь 1–3:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = A_{11}\left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\cdot\frac{\partial T}{\partial r}\right) + A_{12}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\cdot\frac{\partial U}{\partial r}\right),$$
$$\frac{\partial U}{\partial r} = A_{21}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\cdot\frac{\partial T}{\partial r}\right) + A_{22}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\cdot\frac{\partial U}{\partial r}\right), \quad (4)$$
$$r \in [0, 1], \tau \in [0, 1]$$

разом із формулюванням граничних умов:

$$-\left.\frac{\partial T(r,\tau)}{\partial r}\right|_{r=1} + a_1\left[1 - (T(r,\tau)\big|_{r=1}) - a_2(U(r,\tau)\big|_{r=1}) - \frac{u_p}{u_0}\right] = 0,$$
$$\left.\frac{\partial U(r,\tau)}{\partial r}\right|_{r=1} + b_1\left[1 - (T(r,\tau)\big|_{r=1}) + b_2(U(r,\tau)\big|_{r=1}) - \frac{u_p}{u_0}\right] = 0, \quad (5)$$

разом із формулюванням початкових умов:

$$T(r, 0) = 0,\ U(r, 0) = 1, \quad (6)$$

разом з умовою, що розв'язок є обмеженим:

$$|T, U| < \infty, \quad (7)$$

у яких значення критеріальних безрозмірних груп визначаються рівняннями: $A_{11} = 1 + \varepsilon KoLuPn$, $A_{12} = \varepsilon KoLu$, $A_{21} = LuPn$, $A_{22} = Lu$, $a_1 = Bi_q$, $a_2 = (1 - \varepsilon)KoLuBi_m$, $b_1 = PnBi_q$, $b_2 = Bi_m(1 - (1 - \varepsilon)PnKoLu)$, а використані критеріальні групи мають такий вигляд:

$Ko = r_0 \cdot u_0/c_q(\theta_c - \theta_0)$ – критерій Косовича;

$Lu = \frac{a_m}{a}$ – критерій Ликова;

$Pn = \frac{\delta(\theta_c - \theta_0)}{u_0}$ – критерій Поснова;

$Fo = \frac{at}{R^2}$ – число Фур'є;

$Bi_q = \alpha R/\lambda$, $Bi_m = \beta R/a_m$ – критерії Біо для теплообміну та масообміну.

Після підстановки нових (безрозмірних) шуканих функцій:

$$T = \frac{Z(\tau,r)}{r}, \quad U = \frac{W(\tau,r)}{r}, \quad (Z,W) \in C(0 \le r \le 1) \quad (8)$$

за переходу до *Z* та *W* система (4) істотно спростилася:

$$\frac{\partial Z}{\partial \tau} = A_{11}\frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} + A_{12}\frac{\partial^2 W}{\partial r^2},$$

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = A_{21}\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + A_{22}\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} \tag{9}$$

разом із формулюванням граничних і початкових умов:

$$-\frac{\partial Z(r,\tau)}{\partial r}\bigg|_{r=1} + a_1\left[1 - Z(r,t)\right]\Big|_{r=1} - a_2\left[W(r,t)\Big|_{r=1} - \frac{u_p}{u_0}\right] = 0,$$

$$\frac{\partial W(r,\tau)}{\partial r}\bigg|_{r=1} + b_1\left[1 - Z(r,t)\right]\Big|_{r=1} + b_2\left[W(r,t)\Big|_{r=1} + \frac{u_p}{u_0}\right] = 0, \tag{10}$$

$$Z(0, r) = 0, \quad W(0, r) = r. \tag{11}$$

Беручи до уваги обмеженість Tта U поблизу $r = 0$, згідно з формулами 7 та 8 одержуємо:

$$Z(\tau,r)\Big|_{r=0} = W(\tau,r)\Big|_{r=0} = 0. \tag{12}$$

У такій постановці задача редукується до пошуку розв'язку системи 9, що задовольняє граничні умови формули (10, 12) та початкові умови (11). При цьому вважалося, що на сферичній межі зернини з $r = 1$ розв'язок задається функціями:

$$Z\big|_{r=1} = \varphi(\tau), \quad W\big|_{r=1} = \psi(\tau). \tag{13}$$

Для заміни складної форми граничних умов системи (10) на більш зручні у використанні умови рівнянь (13) запропоновано застосувати розклад невідомих функцій $\varphi(\tau)$, $\psi(\tau)$ у модифіковані ряди Фур'є. За такої постановки модельна задача зводиться до пошуку розв'язку системи (9) з початковою умовою системи (11) та граничними умовами системи (12), причому невідомі функції з системи (13) потрібно підібрати так, щоб були точно виконані граничні умови системи (10).

У запропонованій схемі розв'язок подається у вигляді модифікованих рядів Фур'є такого типу:

$$Z = M_Z + \sum_{m=1}^{\infty} Z_m(\tau)\sin(m\pi r), \quad W = M_W + \sum_{m=1}^{\infty} W_m(\tau)\sin(m\pi r) \tag{14}$$

відповідні вирази для M_Z і M_W набувають вигляду:

$$M_Z = \varphi(\tau)r + \varphi_0(\tau)\left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{6} - \frac{r}{3}\right) + \varphi_1(\tau)\left(\frac{r^3}{6} - \frac{r}{6}\right),$$

$$M_W = \psi(\tau)r + \psi_0(\tau)\left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{6} - \frac{r}{3}\right) + \psi_1(\tau)\left(\frac{r^3}{6} - \frac{r}{6}\right). \tag{15}$$

Функції M_Z та M_W забезпечують рівномірну збіжність розкладів системи 14 на всьому відрізку $r \in [0, 1]$ і на його межах, включно з другими частинними похідними за радіальною координатою r. Вирази для Z і W у системі (14) разом із відповідними другими похідними в системі (9) з $r = 0$ та $r = 1$ перетворюються на тотожності. Завдяки цій властивості розклади системи (14) можна було почленно двічі диференціювати та підставляти у диференціальні рівняння (10) граничні умови системи (10) і початкові умови системи (11). Збіжність модифікованих рядів Фур'є має порядок $\frac{5}{\pi m}$, де m – номер доданка в сумах системи (14). З огляду на високу швидкість збіжності для інженерної точності виявилося достатньо обмежитися двома першими членами ряду й отримати наближений розв'язок у вигляді таких залежностей:

$$T = \frac{1}{r}\left[M_Z + Z_1(\tau)\sin(m\pi r)\right],$$

$$U = \frac{1}{r}\left[M_W + W_1(\tau)\sin(m\pi r)\right]. \quad (17)$$

Обчислення виконували в середовищі Maple. Підсумки моделювання подано на рис. 1–3. Проведено ідентифікацію параметрів моделі за експериментальними даними процесу сушіння насіння ріпаку в барабанній сушарці. Числовий експеримент у дусі підходу з урахуванням

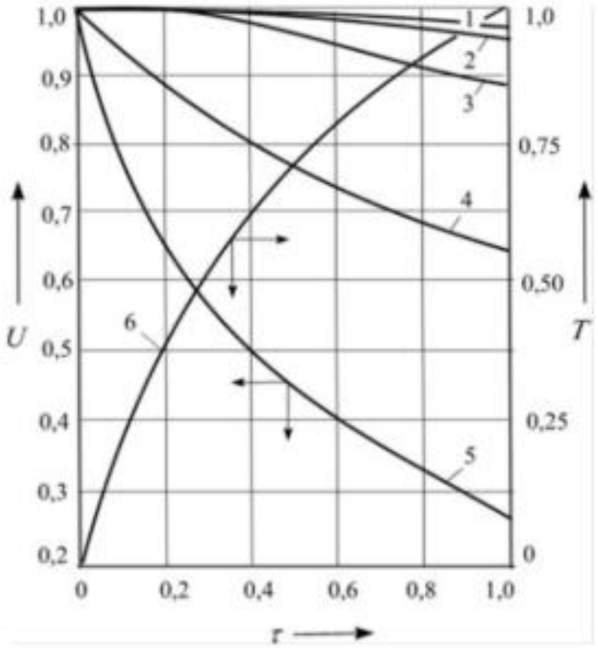

Рис. 1. Зміна вологовмісту криві 1–5 та температури крива 6 у часі в безрозмірних одиницях для різних радіальних позицій зернини *r*:
1 – *r* = 0; *2* – *r* = 0,25; *3* – *r* = 0,5; *4* – *r* = 0,75; *5* – *r* = 1,0; *6* — *сукупність профілів для r* = {0; 0,25; 0,5; 0,75; 1,0}

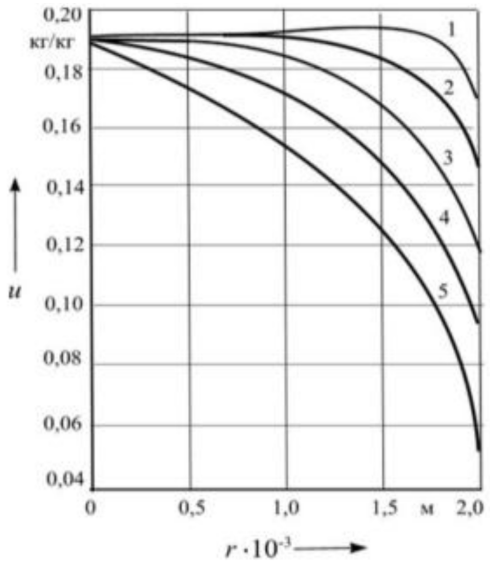

Рис. 2. Радіальні розподіли вологовмісту зернини для послідовних моментів часу *t*:
1 – 0,20; *2* – 0,40; *3* – 0,60; *4* – 0,80; *5* – 1,0

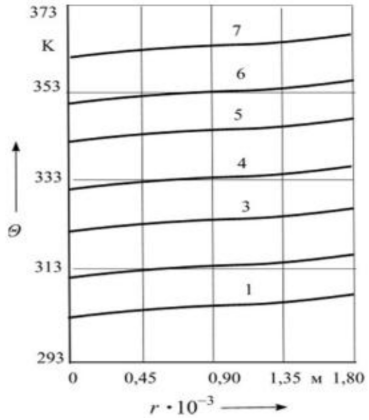

Рис. 3. Радіальні профілі температур у зернині в моменти часу *t*:
криві 1–7 відповідають значенням t = 0,14; 0,28; 0,42; 0,56; 0,70; 0,84; 0,98 *відповідно*

Таблиця 1

Тепломасообмінні характеристики насіння ріпаку

Позначення	Найменування	Чисельне значення
R	Еквівалентний радіус зернини ріпаку, м	0,0018
u_0	Початковий вологовміст насіння ріпаку, кг/кг	0,1749
u_p	Рівноважний вологовміст, кг/кг	0,096
θ_0	Температура зерна на вході, K	293
θ_c	Температура перегрітої пари, K	393
ε	Коефіцієнт (критерій) фазового перетворення, безрозмірний	1
δ	Термоградієнтний коефіцієнт, 1/K	0,00122
ρ_0	Густина абсолютно сухого зерна, кг/м³	620
c_q	Питома теплоємність зерна, кДж/(кг · K)	2,7
a	Коефіцієнт температуропровідності, м²/с	$1{,}1 \cdot 10^{-7}$
λ	Коефіцієнт теплопровідності продукту, Вт/(м · K)	0,2225
a_m	Коефіцієнт дифузії вологи в зерні, м²/с	$1{,}324 \cdot 10^{-10}$
α	Коефіцієнт тепловіддачі, Вт/(м² · K)	0,1064
β	Коефіцієнт масовіддачі, кг/[м² · с · (кг/м³)]	$3{,}775 \cdot 10^{-7}$
r_0	Питома теплота пароутворення, кДж/кг	2452,16

даних табл. 1 забезпечив найкраще узгодження розрахункових та експериментальних кривих (рис. 4), при цьому похибка моделювання становила 12,5 %.

Розраховані метрики якості показали, що середня похибка апроксимації і коефіцієнт детермінації для температури не перевищують 4 % та 0,957, а для вологовмісту – 2 % і 0,968 відповідно.

Висновки. Отже, з урахуванням прийнятих припущень модель тепломасообміну А. В. Ликова та її аналітичне розв'язання із застосуванням модифікованих рядів Фур'є для обчислення полів температури й вологості в окремому зерні коректно відтворюють реальний процес термічної обробки масляних культур сферичної форми та дають змогу отримувати наближені розв'язки із заданою точністю.

 ISSN 2220-8674

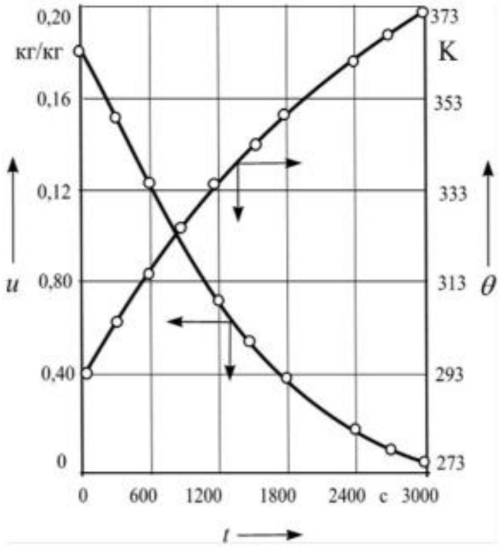

Рис. 4. Порівняння розрахункових кривих сушіння та нагрівання насіння ріпаку з експериментальними точками в барабанній сушарці

Список використаних джерел

1. Гінзбург А. С. Основи тепломасообміну в харчових технологіях. Київ : НУХТ, 2015. 428 с.

2. Rudobashta S. P., Zaichenko V. M. Heat and Mass Transfer in Capillary-Porous Bodies. *Springer*, 2016. 412 p.

3. Didur V. V. Modeling of heat treatment of oilcrop seeds with high-temperature heat carrier. *Bulletin of Uman National University of Horticulture*. 2024. No. 2. P. 45–53.

4. Podgornyi V. Simulation of thermal and moisture fields in grain drying processes. *Ukrainian Journal of Food Science*. 2014. Vol. 2 (1). P. 45–52.

5. Ginzburg A. S. Thermodynamics and Heat Transfer in Food Engineering. *CRC Press*, 1985. 550 p.

6. Остриков О. В. Теплофізичні процеси сушіння зерна та насіння олійних культур. Харків : ХНТУСГ, 2007. 322 с.

7. Didur V. V. Parametric identification of heat and mass transfer models for rapeseed drying. *Engineering and Technology Journal*. 2023. Vol. 11 (3). P. 78–86.

8. Posnov A. I. Criteria equations in the theory of heat and mass transfer. *Thermal Engineering*. 1974. Vol. 21 (4). P. 67–74.

9. Дідур В. В., Журавель Д. П., Шокарев О. М. та ін. Аналіз технологій отримання олії з олійних культур. *Науковий вісник Таврійського державного агротехнологічного університету*: електронне наукове фахове видання / ТДАТУ ; гол. ред. д-р техн. наук, проф. В. М. Кюрчев. Мелітополь : ТДАТУ, 2022. Вип. 12, том 3. 10 с. DOI: 10.31388/2220-8674-2022-3-18

10. Журавель Д. П., Дідур В. В. Механіко-технологічні основи глибокої переробки насіння рицини на енергетичну біосировину : монографія. Запоріжжя : ТДАТУ, 2025. 275 с., іл.

11. Zhao L., Kim S. Design and performance of conical centrifuges in food industry. *Separation Science and Technology*. 2023. Vol. 58 (7). P. 1153–1168.

12. Gupta R. Advances in filtration media for edible oil purification. *Journal of Food Process Engineering*. 2022. Vol. 45 (5), e13921.

13. Dmitry Milko, Kyrylo Samoichuk, Yulia Postol. Revealing new patterns in resourcesaving processing of chromium-containing ore raw materials by solidphase reduction. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2020. Vol. 1/12 (103). P. 24–29.

14. Dmytro Milko. Results of the nutritional preservation research of the alfalfa laying on storage with two-phase compaction. INMATEH — Agricultural Engineering. National Institute Of Research-Development For Machines And Installations Designed To Agriculture And Food Industry — INMA Bucharest, 2020. Vol. 60, no. 1. P. 269–274.

15. Struchaiev N. Ways to improve the efficiency of pipelines heat insulation. *Problems of the Regional Energetics*. 2020. Vol. 2 (46). P. 43–52.

16. Korobka S., Syrotyuk S. Solar dryer with integrated energy Unit. *Problems of the Regional Energetics*. 2021. Vol. 2 (50). P. 60–75.

17. Nadikto V., Verechaga O. Improving the efficiency of pressing the male of castor seeds in the screw press. *Norwegian Journal of development of the International Science*. 2021. Vol. 1 (59). P. 48–53.

Стаття надійшла до редакції 25.10.2025
Стаття прийнята 12.11.2025
Статтю опубліковано 22.12.2025

V. Didur[1], D. Zhuravel[2], I. Kolesnichenko[3], I. Petrychenko[1]
[1] Uman National University
[2] Dmytro Motornyi Tavria State Agrotechnological University
[3] Poltava State Agrarian University

MODELING OF HEAT TREATMENT OF OILCROP SEEDS WITH HIGH-TEMPERATURE HEAT TRANSFER

Summary

Recently, during the thermal treatment of grain crops, priority has been given to high-temperature heat carriers, in particular superheated steam, which has a number of significant advantages. This necessitates the creation of new approaches to the analytical solution of existing models in order to obtain more accurate results for the tasks of optimal control of technological parameters of the processes of drying and roasting oilseeds. Intensive temperature regimes when using a high-temperature heat carrier, on the one hand, must remain within the limits of permissible technological properties of the grain, and on the other hand, ensure a reduction in specific heat and energy costs due to increased productivity. Due to the complexity of direct measurements of temperature fields and moisture content in individual seeds, it is fundamentally important to develop a heat and mass transfer model that allows comparing a wide range of hardware and technological schemes of heat treatment and choosing energy-optimal options with guaranteed quality of the dried product. The complexity of direct measurement of spatial fields of temperature and moisture content in capillary-porous materials necessitates the need for physically based models capable of comparing alternative heat treatment modes and selecting energy-saving options with guaranteed product quality. A phenomenological model of unsteady heat and mass transfer is proposed, taking into account capillary and surface forces, interphase mass transfer intensity, and thermocapillary flows; the model is based on the two-phase filtration equation, sorption isotherms, and Kelvin and Clapeyron–Clausius thermodynamic relations. A numerical implementation based on the weighted residual (Galerkin) method is developed and agreement with the experiment within the confidence interval is shown. The practical value is to increase the accuracy of the prediction of moisture and heat transfer and optimize the drying modes of agricultural raw materials.

Keywords: two-phase filtration, thermodynamic relations, sorption isotherms, heat of sorption, Galerkin method, parametric identification, model verification, quality prediction, drying of agricultural raw materials, energy efficiency.