

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Таврійський державний агротехнологічний університет
імені Дмитра Моторного

ДЯДЕНЧУК А. Ф.

ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Конспект лекцій

Запоріжжя
2025

**Міністерство освіти і науки України
Таврійський державний агротехнологічний університет
імені Дмитра Моторного**

ДЯДЕНЧУК А. Ф.

ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Конспект лекцій

**Запоріжжя
2025**

*Рекомендовано вченою радою факультету агротехнологій та екології
Таврійського державного агротехнологічного університету
імені Дмитра Моторного
(протокол № 6 від «10» лютого 2026 р.)*

Рецензенти:

Сімченко С. В., кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики, математичного моделювання та фізики, Державний університет інформаційно-комунікаційних технологій;

Кюрчева Л.М., кандидат сільськогосподарських наук, доцент, доцент кафедри харчових технологій та готельно-ресторанної справи, Таврійський державний агротехнологічний університет імені Дмитра Моторного;

Кравець В. І., кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики і фізики, Таврійський державний агротехнологічний університет імені Дмитра Моторного;

Дяденчук А. Ф.

Д 99 Вища та прикладна математика : конспект лекцій (для здобувачів ступеня вищої освіти «Бакалавр» зі спеціальності J2 Готельно-ресторанна справа та кейтеринг). Запоріжжя : ТДАТУ, 2025. 90 с.

У конспекті лекцій з дисципліни «Вища та прикладна математика» зібрано, систематизовано та наочно викладено теоретичний матеріал з курсу вищої математики, висвітлено основні положення і теорії курсу. Видання охоплює ключові теми курсу: елементи лінійної алгебри, диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної, методи оптимізації, основи теорії ймовірностей і математичної статистики, а також кореляційно-регресійний та дисперсійний аналізи. Матеріал викладено відповідно до вимог кредитно-модульної системи організації навчального процесу. Конспект орієнтований на прикладні аспекти математичних методів, зокрема їх застосування у плануванні, прогнозуванні, оптимізації витрат, управлінні запасами та аналізі статистичних даних у готельно-ресторанному бізнесі. Кожна тема містить визначення основних понять, теоретичні положення, приклади розв'язання задач та запитання для самоконтролю.

Конспект лекцій призначено для здобувачів ступеня вищої освіти «Бакалавр» зі спеціальності J2 Готельно-ресторанна справа та кейтеринг.

УДК 531/534; 536

© Дяденчук А. Ф.

© Таврійський державний
агротехнологічний університет імені
Дмитра Моторного, 2025

ЗМІСТ

ВСТУП	4
ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ	5
1.1. Матриці. Види матриць. Дії з матрицями та їх елементарні перетворення.....	5
1.2. Визначники другого і третього порядків, властивості та методи їх обчислення	10
1.3. Системи n лінійних рівнянь з n невідомими. Формули Крамера, методи розв'язання систем лінійних рівнянь	12
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ТА ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ	18
2.1. Функція, способи задання, класифікація	18
2.2. Границя змінної величини.....	20
2.3. Правила і формули диференціювання. Похідні алгебраїчних функцій	22
2.4. Поняття первісної, невизначеного та визначеного інтегралів	25
МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ	32
3.1. Загальна постановка задач оптимізації. Класифікація методів математичного програмування	32
3.2. Задачі лінійного програмування.....	36
3.3. Задачі нелінійного програмування	46
ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА ОСНОВИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ	55
4.1. Випадкові величини, їх закони розподілу та числові характеристики.....	55
4.2. Основні поняття математичної статистики: вибіркові спостереження та вибіркові оцінки	61
4.3. Вибірковий метод у вивченні соціально-економічних явищ і процесів	68
КОРЕЛЯЦІЙНО-РЕГРЕСІЙНИЙ ТА ДИСПЕРСІЙНИЙ АНАЛІЗИ	75
5.1. Задачі та основні поняття кореляційного та регресійного аналізу	75
5.2. Коефіцієнт кореляції, визначення та властивості. Рівняння лінійної регресії ..	77
5.3. Загальнотеоретичні основи дисперсійного аналізу. Алгоритм однофакторного дисперсійного аналізу	82
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	90

ВСТУП

Математика є фундаментальною основою багатьох галузей знань і наукових досліджень. Вона відіграє ключову роль у формуванні аналітичного мислення, у вмінні раціонально підходити до розв'язання практичних завдань та прийняття оптимальних рішень у професійній діяльності. Для здобувачів вищої освіти спеціальності J2 Готельно-ресторанна справа та кейтеринг оволодіння математичними знаннями та методами аналізу є важливим етапом підготовки, адже сучасний готельно-ресторанний бізнес ґрунтується на точних розрахунках, прогнозуванні, оптимізації процесів та ефективному управлінні ресурсами.

Конспект лекцій із дисципліни «Вища та прикладна математика» має на меті сформувати у студентів необхідну базу знань, умінь і навичок для подальшого використання у професійній діяльності. Навчальний матеріал охоплює основні розділи курсу: елементи лінійної алгебри, диференціальне та інтегральне числення, методи оптимізації, теорію ймовірностей, основи математичної статистики, а також кореляційно-регресійний та дисперсійний аналізи.

Особливість конспекту полягає в орієнтації на прикладні завдання, пов'язані з майбутньою професійною діяльністю фахівців готельно-ресторанної справи. Так, методи лінійної алгебри дозволяють вирішувати задачі планування та балансування ресурсів; диференціальне та інтегральне числення – досліджувати закономірності зміни показників діяльності підприємства у часі; методи оптимізації – знаходити найкращі управлінські рішення щодо розподілу витрат чи планування асортименту; теорія ймовірностей та математична статистика – аналізувати невизначені ситуації, будувати прогнози та оцінювати ризики; кореляційно-регресійний і дисперсійний аналізи – досліджувати залежності між факторами, виявляти тенденції та обґрунтовувати стратегічні рішення.

Для кращого засвоєння матеріалу у конспекті подаються визначення основних понять, приклади розв'язання типових задач та питання для самоконтролю. Для більш детального вивчення окремих питань використовується рекомендована література.

ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

- 1.1. Матриці. Види матриць. Дії з матрицями та їх елементарні перетворення.
- 1.2. Визначники другого і третього порядків, властивості та методи їх обчислення.
- 1.3. Системи n лінійних рівнянь з n невідомими. Формули Крамера, методи розв'язання систем лінійних рівнянь.

1.1. Матриці. Види матриць. Дії з матрицями та їх елементарні перетворення

Означення. Матрицею розміру (або розмірності) $m \times n$ (читається: „ем на ен”) називається таблиця упорядкованих чисел (або будь-яких інших об'єктів), розташованих у m рядках та в n стовпцях.

Матриці, як правило, позначають великими латинськими літерами $A, B, C, \dots$ та круглими (або квадратними) дужками.

Наприклад, числова матриця розміру $m \times n$ має вигляд:

$$A = A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \{a_{ij}\}_{m \times n},$$

де $i = \overline{1, m}$ – номер рядка, а $j = \overline{1, n}$ – номер стовпця, на перетині яких знаходиться число a_{ij} – елемент матриці.

Матриця, всі елементи якої дорівнюють нулю, називається **нуль-матрицею** і позначається $\bar{0}$.

$$\bar{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрицю $A_{m \times n}$, у якої $m = n$ (тобто, кількість рядків співпадає із кількістю стовпців) називають **квадратною матрицею порядку n** :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Множина елементів $\{a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}\}$ квадратної матриці A порядку n називається **головною діагоналлю**, а множину елементів $\{a_{1n}, a_{2, n-1}, a_{3, n-2}, \dots, a_{n1}\}$ називають **побічною діагоналлю** (або неголовною, допоміжною).

Квадратна матриця, у якій всі позадіагональні елементи дорівнюють нулю, називається **діагональною** і часто позначається

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ \text{diag}\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\}.$$

Діагональна матриця, у якій всі діагональні елементи дорівнюють одиниці, називається **одиничною** і позначається E .

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Квадратна матриця, у якій всі елементи, що розташовані під головною діагоналлю (над головною діагоналлю), дорівнюють нулю, називається **верхньою (нижньою) трикутною**.

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \text{верхня трикутна}; \\ C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \text{нижня трикутна};$$

Симетрична матриця – елементи такої матриці симетричні відносно головної діагоналі $A = (a_{ij}) = (a_{ji})$.

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Перерахуємо основні операції над матрицями: додавання (віднімання), множення на число, множення («ділення») матриць, транспонування.

Сумою (різницею) двох матриць однакових розмірів буде матриця, елементи якої знаходяться додаванням (відніманням) відповідних елементів матриць-доданків.

Наприклад, два підприємства випускають три види продукції, причому, на початок та на кінець року випуски задаються відповідно матрицями

$$A = \begin{pmatrix} 30 & 40 & 100 \\ 40 & 90 & 70 \end{pmatrix} \quad \text{та} \quad B = \begin{pmatrix} 50 & 60 & 110 \\ 40 & 100 & 60 \end{pmatrix},$$

де a_{ij} та b_{ij} – випуски на початок та на кінець року i -им підприємством j -го виду продукції. Знайти для кожного підприємства і кожного виду продукції:

а) середньорічний випуск; б) приріст продукції за рік.

Розв'язування. а) середньорічний випуск дорівнює:

$$\frac{1}{2}(A + B) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 30 + 50 & 40 + 60 & 100 + 110 \\ 40 + 40 & 90 + 100 & 70 + 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & 50 & 105 \\ 40 & 90 & 65 \end{pmatrix}$$

б) приріст продукції за рік дорівнює:

$$B - A = \begin{pmatrix} 50 - 30 & 60 - 40 & 110 - 100 \\ 40 - 40 & 100 - 90 & 60 - 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 20 & 10 \\ 0 & 10 & -10 \end{pmatrix}.$$

Основні властивості операцій додавання матриць:

1. $A+B=B+A$ (комутативність).
2. $A+(B+C)=(A+B)+C$ (асоціативність).
3. $A+0=A$, при будь-якій матриці A .
4. Для будь-якої матриці A існує протилежна матриця $(-A)$, така, що $A+(-A)=0$.

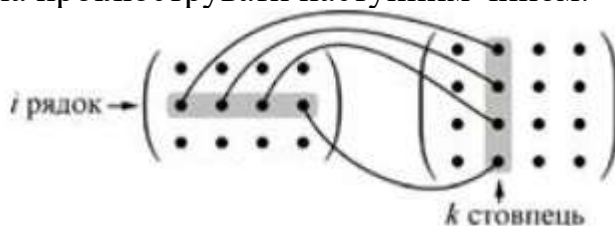
Для того, щоб **помножити матрицю на число** (або число на матрицю), потрібно кожен елемент матриці помножити на це число.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & -2/3 & 1/3 \\ -1 & 4/3 & 0 \end{pmatrix}$$

Добутком двох матриць $A_{m \times p} \cdot B_{p \times n} = C_{m \times n}$ називається матриця $C_{m \times n}$, кожний елемент якої c_{ij} дорівнює сумі добутків елементів i -го рядка матриці A на відповідні елементи j -го стовпця матриці B („рядки 1-ої множаться на стовпчики 2-ої“):

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} \cdot b_{kj}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Схематично це можна проілюструвати наступним чином:



Добуток $A \cdot B$ існує, якщо матриці „узгоджені”, тобто число стовпців матриці A співпадає з числом рядків матриці B .

На практиці, для знаходження i -го рядка добутку двох матриць потрібно i -ий рядок першої матриці послідовно, „накладанням” помножити на всі стовпці другої матриці.

Наприклад, знайти добуток матриць

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв’язування. Виконуємо обчислення елементів добутку матриць

$$C_{11} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 3 + 2 + 6 = 11;$$

$$C_{12} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 2 + 6 + 12 = 18;$$

$$C_{13} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 2 = 1 - 4 + 6 = 3;$$

$$C_{21} = 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 6 - 1 + 4 = 9;$$

$$C_{22} = 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 4 - 3 + 8 = 9;$$

$$C_{23} = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) + 2 \cdot 2 = 2 + 2 + 4 = 8.$$

Записуючи матрицю в табличному вигляді:

$$A_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 11 & 18 & 3 \\ 9 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

Основні властивості множення матриць:

1. $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha AB$, де α - число.
2. $(A_1 + A_2)B = A_1B + A_2B$ $A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2$
3. $A(BC) = (AB)C$ (асоціативність).

Множення матриць є некомутативною операцією.

«Ділення» матриць. Для матриць «ділення» A/B визначають як добуток $A \cdot B^{-1}$, де B^{-1} – матриця, обернена до матриці B , визначення і знаходження якої розглянемо далі.

Транспонованою до матриці A називають матрицю A^T (або A'), рядки якої дорівнюють відповідним стовпцям матриці A .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Властивості операцій транспонування матриць запишемо в матричному вигляді

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$
3. $(AB)^T = B^T A^T$

До **елементарних перетворень матриць** належать такі операції:

- 1) змінювання місцями будь-яких двох рядків або стовпців;
- 2) множення рядка або стовпця на довільне число, відмінне від нуля;
- 3) додавання до будь-якого рядка або стовпця лінійної комбінації інших рядків або стовпців;
- 4) дописування або викреслювання рядка (чи стовпця), що повністю складається з нулів.

Дві матриці називають **еквівалентними**, якщо від однієї з них можна перейти до другої за допомогою скінченного числа елементарних перетворень.

Приклад 1.1. Аналіз витрат на продукти в трьох ресторанах

Три ресторани щотижня витрачають кошти на м'ясо, овочі, фрукти. Нехай матриця A показує витрати (в грн):

$$A = \begin{bmatrix} 1500 & 700 & 300 \\ 1800 & 900 & 500 \\ 1600 & 800 & 400 \end{bmatrix},$$

де рядки – ресторани, стовпці – категорії продуктів.

Знайдіть:

- а) загальні витрати кожного ресторану;
- б) суму витрат на кожен вид продуктів (усіма ресторанами);
- в) транспоновану матрицю A^T .

Розв'язання. Загальні витрати кожного ресторану знайдемо, знайшовши суми по рядках:

$$\text{Ресторан 1: } 1500+700+300=2500$$

$$\text{Ресторан 2: } 1800+900+500=3200$$

$$\text{Ресторан 3: } 1600+800+400=2800$$

Суму витрат на кожен вид продуктів (усіма ресторанами) знайдемо як суму по стовпцях:

$$\text{М'ясо: } 1500+1800+1600=4900$$

$$\text{Овочі: } 700+900+800=2400$$

$$\text{Фрукти: } 300+500+400=1200$$

Знайдемо транспоновану матрицю:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1500 & 1800 & 1600 \\ 700 & 900 & 800 \\ 300 & 500 & 400 \end{bmatrix}.$$

Приклад 1.2. Побудова рейтингу страв на основі оцінок відвідувачів

У ресторані три категорії клієнтів (постійні, туристи, випадкові відвідувачі) оцінюють 4 страви за 3 критеріями: смак (S), ціна (P), презентація (D). Оцінки за 10-бальною шкалою:

Матриця оцінок:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 9 \\ 7 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 7 \\ 9 & 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ (рядки – страви, стовпці – S, P, D)}$$

Матриця ваг важливості критеріїв (у кожного типу відвідувачів):

$$W = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0.6 & 0.2 & 0.2 \end{bmatrix} \text{ (рядки – типи клієнтів, стовпці – S, P, D)}$$

Знайти загальний рейтинг кожної страви для кожної категорії клієнтів.

Розв'язання. Знайдемо зважену оцінку як добуток матриці A і транспонованої W^T :

$$R = A \cdot W^T$$

Тобто:

$$W^T = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.6 \\ 0.3 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}.$$

Добуток:

$$R_{4 \times 3} = A_{4 \times 3} \cdot W_{3 \times 3}^T.$$

Для прикладу, перший рядок:

$$\begin{aligned} R_1 &= [8 \quad 6 \quad 9] \cdot \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.6 \\ 0.3 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 \end{bmatrix} = \\ &= [8 \cdot 0.5 + 6 \cdot 0.3 + 9 \cdot 0.2, 8 \cdot 0.4 + 6 \cdot 0.4 + 9 \cdot 0.2, 8 \cdot 0.6 + 6 \cdot 0.2 + 9 \cdot 0.2] = \\ &= [4 + 1.8 + 1.8, 3.2 + 2.4 + 1.8, 4.8 + 1.2 + 1.8] = [7.6, 7.4, 7.8] \end{aligned}$$

Аналогічно – інші рядки. Це дозволяє оцінити **рейтинг страв з урахуванням пріоритетів кожної категорії клієнтів**.

1.2. Визначники другого і третього порядків, властивості та методи їх обчислення

Визначником квадратної матриці n -го порядку (або просто **визначником n -го порядку**) називається число, яке обчислюється за певним правилом, і позначається:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta(A) = \det(A) = \Delta.$$

Так, наприклад, визначник 1-го порядку: $\Delta = |a_{11}| = a_{11}$,

Тобто, **визначник квадратної матриці 1-го порядку** дорівнює елементу матриці (визначника).

Нехай $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ – визначник 2-го порядку.

На практиці **визначник 2-го порядку** зручніше обчислювати за таким правилом: **визначник дорівнює добутку елементів головної діагоналі мінус добуток елементів побічної діагоналі**.

Наприклад:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - (-3) \cdot 4 = 22.$$

Способи обчислення визначників третього (3-го) порядку.

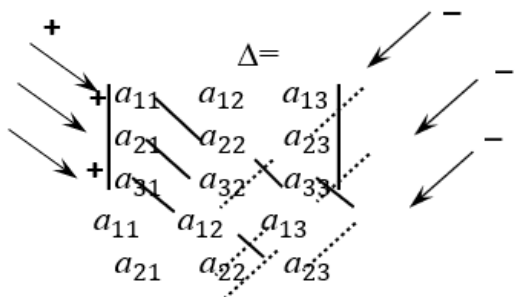
1. Правило трикутника

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 \cdot c_3 + a_2 \cdot b_3 \cdot c_1 + b_1 \cdot c_2 \cdot a_3 - c_1 \cdot b_2 \cdot a_3 - \\ - b_1 \cdot a_2 \cdot c_3 - c_2 \cdot b_3 \cdot a_1$$

2. Правило Саріуса

На практиці визначник 3-го порядку зручніше знаходити за так званим „правилом Саріуса”:

1) припишемо під визначником 1-ий та 2-ий рядки:



$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21}$$

2) зі знаком „+” беремо добутки елементів головної діагоналі та трійок елементів, паралельних цій діагоналі; зі знаком „-” беремо добутки елементів побічної діагоналі та трійок елементів, паралельних цій діагоналі.

3. За допомогою мінорів

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника Δ називається визначник, який отримується із Δ викреслюванням (вилученням) i -го рядка та j -го стовпця.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 \cdot c_3 + a_2 \cdot b_3 \cdot c_1 + b_1 \cdot c_2 \cdot a_3 - c_1 \cdot b_2 \cdot a_3 - c_2 \cdot b_3 \cdot a_1 - b_1 \cdot a_2 \cdot c_3 = a_1(b_2c_3 - c_2b_3) - b_1(c_2a_3 - c_3a_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2) = a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

Зауваження. Для визначників 4-го та більш високих порядків немає зручних правил для їх обчислення, тому доводиться користуватись теоремою Лапласа. При цьому, очевидно, для скорочення обчислень краще розкласти визначник за рядком або стовпцем, у яких є нульові елементи.

Теорема Лапласа (про розклад визначника). Визначник дорівнює сумі добутків елементів деякого одного рядка (або деякого одного стовпця) визначника на відповідні їм алгебраїчні доповнення.

Властивості визначників:

1. При транспонуванні визначник не змінюється.
2. Якщо у визначнику поміняти місцями будь-які два паралельних ряди, то визначник змінить знак на протилежний.
3. Якщо визначник має два однакових паралельних ряди, то він дорівнює нулю.
4. Для того щоб помножити визначник на число, потрібно помножити на це число деякий один його ряд.

Розв'язком СЛАР (1.1) називається упорядкована множина n дійсних чисел $(x_1^0; x_2^0; \dots; x_n^0)$, яка при підстановці у систему замість невідомих перетворює її в систему тотожностей (систему правильних числових рівностей).

Матричний метод. Позначимо:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Тут: $A_{n \times n}$ – матриця коефіцієнтів при невідомих (основна матриця системи);

$X_{n \times 1}$ – матриця-стовпець невідомих;

$B_{n \times 1}$ – матриця-стовпець вільних членів (правих частин).

Тоді СЛАР (*) можна записати у вигляді матричного рівняння:

$$A \cdot X = B.$$

Якщо $\Delta(A) \neq 0$, то існує A^{-1} . Домножимо обидві частини матричного рівняння зліва на A^{-1} . Одержимо:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B,$$

$$E \cdot X = A^{-1} \cdot B,$$

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Отже, справедлива наступна **Теорема**. Якщо визначник основної матриці A СЛАР (1.1) відмінний від нуля ($\Delta(A) = |A| \neq 0$), то система має єдиний розв'язок, який знаходиться як добуток оберненої до A матриці A^{-1} на матрицю-стовпець вільних членів B .

Приклад 1.4. Розв'язати за допомогою оберненої матриці СЛАР:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases}$$

Розв'язання. 1. Позначимо:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ – матриця коефіцієнтів при невідомих;

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ – матриця-стовпець невідомих;

$B = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ – матриця-стовпець вільних членів.

2. Запишемо систему у вигляді матричного рівняння $A \cdot X = B$.

3. Обчислимо $|A|$: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -7 \neq 0 \Rightarrow$ система має єдиний розв'язок.

Оскільки $|A| \neq 0$, то існує обернена матриця $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$.

Знайдемо її:

$$A_{11} = -3A_{21} = -2$$

$$A_{12} = -2A_{22} = 1 \quad \text{Отже, } A^{-1} = -\frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином,

$$X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $x = 1, y = 2$.

Метод Крамера. Основним визначником СЛАР (1.1) називається визначник $\Delta = \Delta(A) = |A| \neq 0$ матриці коефіцієнтів при невідомих A .

Справедлива наступна **Теорема (правило Крамера)**. Якщо основний визначник СЛАР (1.1) $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок, який знаходиться за формулами:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta},$$

де Δ – головний визначник системи (2), $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ – допоміжні визначники.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

Якщо $\Delta \neq 0$, то система має єдине рішення.

Якщо $\Delta = 0$, а хоча б один з визначників $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ відмінний від нуля, то система не має розв'язків.

Якщо $\Delta = 0$ і $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$, то система має безліч рішень.

Приклад 1.5. Розв'язати систему рівнянь за правилом Крамера.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 5x + 4y = 14 \end{cases}.$$

Розв'язання.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 15 = -7, \quad \Delta \neq 0.$$

Оскільки $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок, що знаходиться за правилом Крамера:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 14 & 4 \end{vmatrix} = 28 - 42 = -14, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 14 \end{vmatrix} = 28 - 35 = -7.$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-14}{-7} = 2; \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-7}{-7} = 1.$$

Перевірка: $\begin{cases} 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 7 \\ 5 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 14 \end{cases}$

Відповідь: $(2; 1)$.

Приклад 1.6. Змішування 3-х інгредієнтів у різних пропорціях

У ресторані змішують три інгредієнти (наприклад: сир, соус, спеції) для створення трьох нових соусів, причому система має вигляд:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 5 \\ -x + 3y + 2z = 10 \\ 3x - 2y + 4z = 1 \end{cases}$$

Перевірити, чи система має єдиний розв'язок. Якщо так – знайти його за формулами Крамера.

Розв'язання. Матриця коефіцієнтів:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Обчислюємо визначник:

$$\begin{aligned} \det(A) &= 2(3 \cdot 4 - 2 \cdot (-2)) - 1(-1 \cdot 4 - 2 \cdot 3) + (-1)(-1 \cdot (-2) - 3 \cdot 3) \\ &= 2(12 + 4) - (-4 - 6) - (2 - 9) = 2 \cdot 16 + 10 + 7 = 32 + 10 + 7 = 49 \end{aligned}$$

Визначник не нульовий, отже розв'язок існує й єдиний.

Далі застосовуємо **формули Крамера**. Обчислюємо $\det(A_x)$, $\det(A_y)$, $\det(A_z)$.

Підставляємо вектор $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix}$ замість першого стовпця:

$$A_x = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 10 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A_x) &= 5(3 \cdot 4 - 2 \cdot (-2)) - 1(10 \cdot 4 - 2 \cdot 1) + (-1)(10 \cdot (-2) - 3 \cdot 1) \\ &= 5(12 + 4) - (40 - 2) - (-20 - 3) = 5 \cdot 16 - 38 + 23 = 80 - 38 + 23 \\ &= 65 \end{aligned}$$

Підставляємо вектор B замість другого стовпця:

$$A_y = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -1 & 10 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A_y) &= 2(10 \cdot 4 - 2 \cdot 1) - 5(-1 \cdot 4 - 2 \cdot 3) + (-1)(-1 \cdot 1 - 10 \cdot 3) \\ &= 2(40 - 2) - 5(-4 - 6) - (-1 - 30) = 2 \cdot 38 + 50 + 31 \\ &= 76 + 50 + 31 = 157 \end{aligned}$$

Підставляємо B замість третього стовпця:

$$A_z = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 10 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A_z) &= 2(3 \cdot 1 - 10 \cdot (-2)) - 1(-1 \cdot 1 - 10 \cdot 3) + 5(-1 \cdot (-2) - 3 \cdot 3) \\ &= 2(3 + 20) - (-1 - 30) + 5(2 - 9) = 2 \cdot 23 + 31 - 35 = 46 + 31 - 35 \\ &= 42 \end{aligned}$$

Знаходимо розв'язок:

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = \frac{65}{49} \approx 1.33$$

$$y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)} = \frac{157}{49} \approx 3.20$$

$$z = \frac{\det(A_z)}{\det(A)} = \frac{42}{49} \approx 0.86$$

Приклад 1.7. Планування закупівель у меню

У готелі формують меню з трьох страв. Відомо, що:

- страва 1 вимагає 2 кг овочів, 1 кг м'яса, 1 л молока;
- страва 2 – 3 кг овочів, 2 кг м'яса, 2 л молока;
- страва 3 – 1 кг овочів, 2 кг м'яса, 3 л молока.

Загальний ліміт на закупівлі: 30 кг овочів, 25 кг м'яса, 35 л молока.

Скільки кожної страви можна приготувати?

Розв'язання. Математична модель:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 1z = 30 \\ 1x + 2y + 2z = 25 \\ 1x + 2y + 3z = 35 \end{cases}$$

Застосуємо **метод Крамера**. Крок 1: Матриця коефіцієнтів і вектор вільних членів:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 30 \\ 25 \\ 35 \end{bmatrix}$$

Знайдемо визначник:

$$\begin{aligned} \det(A) &= 2(2 \cdot 3 - 2 \cdot 2) - 3(1 \cdot 3 - 2 \cdot 1) + 1(1 \cdot 2 - 2 \cdot 1) \\ &= 2(6 - 4) - 3(3 - 2) + (2 - 2) = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 + 0 = 4 - 3 = 1 \end{aligned}$$

Знайдемо $\det(A_x)$, замінивши перший стовпець:

$$\begin{aligned} A_x &= \begin{bmatrix} 30 & 3 & 1 \\ 25 & 2 & 2 \\ 35 & 2 & 3 \end{bmatrix} = 30(2 \cdot 3 - 2 \cdot 2) - 3(25 \cdot 3 - 2 \cdot 35) + 1(25 \cdot 2 - 2 \cdot 35) \\ &= 30(6 - 4) - 3(75 - 70) + (50 - 70) = 30 \cdot 2 - 15 - 20 \\ &= 60 - 15 - 20 = 25 \end{aligned}$$

$\det(A_y)$, замінивши другий стовпець:

$$\begin{aligned} A_y &= \begin{bmatrix} 2 & 30 & 1 \\ 1 & 25 & 2 \\ 1 & 35 & 3 \end{bmatrix} = 2(25 \cdot 3 - 2 \cdot 35) - 30(1 \cdot 3 - 2 \cdot 1) + 1(1 \cdot 35 - 25 \cdot 1) \\ &= 2(75 - 70) - 30(3 - 2) + (35 - 25) = 2 \cdot 5 - 30 + 10 = 10 - 30 + 10 \\ &= -10 \end{aligned}$$

$\det(A_z)$, замінивши третій стовпець:

$$\begin{aligned} A_z &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 30 \\ 1 & 2 & 25 \\ 1 & 2 & 35 \end{bmatrix} = 2(2 \cdot 35 - 25 \cdot 2) - 3(1 \cdot 35 - 25 \cdot 1) + 30(1 \cdot 2 - 2 \cdot 1) \\ &= 2(70 - 50) - 3(35 - 25) + 30(2 - 2) = 2 \cdot 20 - 3 \cdot 10 + 0 = 40 - 30 \\ &= 10 \end{aligned}$$

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = \frac{25}{1} = 25$$

$$y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)} = -\frac{10}{1} = -10$$

$$z = \frac{\det(A_z)}{\det(A)} = \frac{10}{1} = 10$$

Зверніть увагу! Отримали від’ємне значення для $y = -10$, що не має фізичного сенсу у задачі про кількість страв. Це означає, що система суперечлива або модель некоректна з практичної точки зору (наприклад, занадто малий ліміт на ресурси або завищені потреби інгредієнтів).

Контрольні запитання при вивченні теми

1. Які існують види матриць?
2. Які дії виконують над матрицями?
3. Назвіть елементарні перетворення матриць.
4. Що називається матрицею? Визначником?
5. Як визначається розмірність матриці (визначника)?
6. Сформулюйте правило обчислення визначників 2-го порядку
7. Які існують способи обчислення визначників 3-го порядку.
8. Що називається мінором довільного елемента? Алгебраїчним доповненням?
9. Сформулюйте теорему Крамера для системи n -лінійних рівнянь.
10. Запишіть формули Крамера для систем 2-х і 3-х лінійних рівнянь.
11. Як досліджувати систему лінійних рівнянь за допомогою визначників?
12. Сформулюйте властивості визначників.
13. У якому випадку систему лінійних рівнянь можна розв’язувати методом Крамера?
14. Сформулюйте алгоритм метода Крамера.
15. Сформулюйте алгоритм метода оберненої матриці.

Список літератури

1. Дубовик В. П. Вища математика : навч. посібник / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. К. : А.С.К., 2006. 648 с.
2. Мацкул В. М. Вища математика для економістів : підручник. Одеса: ОНЕУ, 2018. 472 с.
3. Петрук В. А. Вища математика з прикладними задачами. Частина 1 / В. А. Петрук, О. П. Прозор. Вінниця : ВНТУ, 2018. 171 с.
4. Левчук О. В. Вища та прикладна математика. Частина І: Навчальний посібник / О. В. Левчук, В. Г. Дзісь, О. М. Дячинська. Вінниця: ВНАУ, 2021. 439 с.
5. Абрамчук І. В. Методи розв’язування типових задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії : електронний навчальний посібник комбінованого (локального та мережного) використання [Електронний ресурс] / І. В. Абрамчук, А. А. Барковська, В. Д. Дереч. Вінниця : ВНТУ, 2023. 103 с.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ТА ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

- 2.1. Функція, способи задання, класифікація.
- 2.2. Границя змінної величини.
- 2.3. Правила і формули диференціювання. Похідні алгебраїчних функцій.
- 2.4. Поняття первісної, невизначеного та визначеного інтегралів.

2.1. Функція, способи задання, класифікація

В повсякденному житті ми зустрічаємося з різними змінними величинами. Найбільше нас цікавить як зв'язані ці величини між собою. Якщо зі зміною однієї змінної величини змінюється друга величина, то кажуть, що між ними існує функціональна залежність.

Нехай в області дійсних чисел задано дві множини X і Y .

Означення. Якщо кожному елементу $x \in X$ за деяким правилом або законом ставиться у відповідність єдиний елемент $y \in Y$, то говорять, що y є **функцією** від x і записують:

$$y = f(x),$$

де x – незалежна змінна (аргумент); y – залежна змінна (функція)/

Знак f вказує на закон відповідності, тобто вказує які дії потрібно проводити над аргументом.

Означення. Множину X всіх значень аргументу називають **областю визначення функції**, або **областю допустимих значень**.

Означення. Множину Y всіх значень функції називають **областю значень функції**.

Способи задання функцій

1. Аналітичний спосіб: функція задається однією або декількома формулами, які виражають залежність між x і y .

$$y = 2x + 1, x^2 + y^2 = 1, \begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases}$$

Якщо залежність між x і y задається формулою, розв'язаною відносно y , то таку функцію називають **явною**: $y = f(x)$.

Якщо залежність між x і y задається за допомогою формули не розв'язаною відносно y , то функцію називають **неявною**: $f(x, y) = 0, x^2 + y^2 = 1$.

Якщо залежність між x і y задається двома рівняннями $x = \varphi(t), y = \psi(t)$, де t – параметр, то функція задана параметрично.

Приклад: $\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases}$ – рівняння кола $x^2 + y^2 = 4$ у параметричному вигляді.

Аналітичний спосіб дуже зручний, оскільки формула описує функцію повністю. Взагалі апарат математичного аналізу пристосований до вивчення аналітично заданих функцій.

2. **Табличний спосіб** – спосіб завдання функції за допомогою таблиці:

x	x_1	x_2	...	x_n
y	y_1	y_2	...	y_n

Недолік цього способу полягає в тому, що значення y знаходяться тільки для обмеженого числа значень x .

3. **Графічний спосіб** – залежність між x і y задається за допомогою графіка.

Перевага цього способу – наочність. Цей спосіб широко використовують в техніці.

4. **За допомогою функціональної шкали** (логарифмічна лінійка, мікрометр та інше).

5. **Словесний спосіб** – функція задається словесним описом.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } f(x) \text{ – раціональне,} \\ 0, & \text{якщо } f(x) \text{ – ірраціональне.} \end{cases}$$

Класифікації функцій

За виглядом функції поділяють на **елементарні** і **неелементарні**.

Основні елементарні функції.

1. Степенева функція: $y = x^n$, $n \in \mathbb{R}$;
2. Показникова функція: $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$.
3. Логарифмічна функція: $y = \log_a x$, $x > 0$, $a \neq 1$, $a > 0$.
4. Тригонометричні функції: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$.
5. Обернені тригонометричні функції: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

Означення. Елементарними функціями називають функції, які отримують з основних елементарних функцій шляхом скінченного числа операцій додавання, віднімання, множення, ділення, підняття до степеня, взяття функції від функції.

Приклад. $y = \log_2(x^2 + 1) + \sqrt{\sin x} + e^x$.

Функції, які не відносяться до елементарних, називаються **неелементарними**.

Приклад: $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } f(x) \text{ – раціональне,} \\ 0, & \text{якщо } f(x) \text{ – ірраціональне.} \end{cases}$

Усі елементарні функції діляться на два великі класи функцій: алгебраїчні і трансцендентні.

Алгебраїчні функції

1. Ціла раціональна функція або многочлен: $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$.
2. Дробова раціональна функція

$$y = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m}.$$

3. Ірраціональні функції

Якщо в формулі $y = f(x)$ в правій частині проводяться операції додавання, віднімання, множення, ділення, піднесення до степеня з раціональними нецілими показниками, то функцію $f(x)$ називають **ірраціональною**.

Приклади: $y = \frac{2x^2 + \sqrt{x}}{\sqrt{1+5x^2}}$; $y = \sqrt{x}$.

4. Функції, які не є алгебраїчними, називаються **трансцендентними**.

$y = \sin x, y = 2^x, y = \arccos x, y = x^{\sqrt{2}}$ – трансцендентні.

2.2. Границя змінної величини

Поняття **границі змінної величини** відіграє фундаментальну роль в курсі математичного аналізу, так як з ним безпосередньо зв'язані основні поняття математичного аналізу – похідна, інтеграл та інші.

Означення. Число a називається **границею послідовності** x_n , якщо для будь-якого як завгодно малого додатного числа ε існує такий номер N , що всі значення x_n у яких номер $n > N$, задовольняють нерівності:

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

Пишуть: $x_n \rightarrow a$ або $\lim x_n = a$.

Для змінної величини x це означення має вигляд.

Число a називається **границею змінної величини** x , якщо для будь-якого як завгодно малого додатного числа ε існує таке значення змінної x , що всі наступні значення змінної будуть задовольняти нерівності: $|x_n - a| < \varepsilon$.

Пишуть $x \rightarrow a$, або $\lim x = a$.

Нескінченно малі величини та їх властивості

Означення Змінну величину x називають **нескінченно малою (н. м. в.)**, якщо її границя дорівнює 0, тобто

$$\lim x = 0.$$

Якщо x – нескінченно мала величина, то її границя дорівнює 0 ($\lim x = 0$). За означенням границі це означає, що $|x - 0| < \varepsilon$, або $|x| < \varepsilon$.

Звідси можна дати ще одне означення нескінченно малої величини

Означення. Змінну величину x називають **нескінченно малою**, якщо вона починаючи з деякого значення стає і залишається по абсолютній величині меншою від як завгодно малого додатного числа ε ($|x| < \varepsilon$).

Властивості нескінченно малих величин

1. Сума скінченного числа нескінченно малих величин є нескінченно мала.

2. Добуток нескінченно малої величини на обмежену величину є нескінченно мала величина.

Наслідки

1. Добуток нескінченно малої величини на сталу величину є величина нескінченно мала.

2. Добуток двох нескінченно малих величин є величина нескінченно мала.

3. Добуток скінченного числа нескінченно малих величин є величина нескінченно мала.

Нескінченно великі величини та їх зв'язок з нескінченно малими величинами

Нескінченно малим величинам, в деякому розумінні, протиставлені нескінченно великі величини.

Означення. Змінну величину x називають **нескінченно великою**, якщо вона починаючи з деякого значення стає і залишається за абсолютною величиною **більшою** від як завгодно великого наперед заданого числа $E > 0$: тобто $|x| > E$.

Символічно пишуть $x \rightarrow \infty$ або $\lim x = \infty$, якщо $x > 0$, $x \rightarrow +\infty$, якщо $x < 0$, $x \rightarrow -\infty$.

Зв'язок між нескінченно малими і нескінченно великими величинами

Теорема. Якщо нескінченно мала величина a не приймає нульових значень, то оберена до неї величина є нескінченно великою.

Теорема. Величина обернена до нескінченно великої є величина нескінченно мала.

Зв'язок змінної величини з її границею і нескінченно малою величиною

Теорема. Якщо змінна величина x має границю число a , то її можна записати у вигляді суми цієї границі і н.м.в.

Тобто, якщо $\lim x = a$, то $x = a + b$, де b – нескінченно мала величина.

Теорема. Якщо змінна величина дорівнює сумі деякого числа a і нескінченно малої величини, то її границею буде це число. Тобто якщо $x = a + b$, то $\lim x = a$.

Основні теореми про границю

Теорема 1. Якщо змінна величина має границю, то вона єдина.

Теорема 2. Якщо змінна величина x має границю, то вона обмежена величина.

Теорема 3. Границя суми скінченного числа змінних величин, кожна із яких має границю, дорівнює сумі границь цих величин:

$$\lim(x + y) = \lim x + \lim y$$

Теорема 4. Границя добутку скінченного числа змінних величин, кожна із яких має границю, дорівнює добутку границь цих величин:

$$\lim(x \cdot y) = \lim x \cdot \lim y$$

Теорема 5. Границя частки двох змінних величин, кожна із яких має границю, дорівнює частці границь цих величин, якщо границя величини, що знаходиться в знаменнику відмінна від нуля

$$\lim \frac{x}{y} = \frac{\lim x}{\lim y}, \quad \lim y \neq 0$$

Наслідки.

1. Сталій множник можна виносити за знак границі

$$\lim c \cdot x = c \cdot \lim x$$

2. Якщо n – ціле додатне число, то

$$\lim x^n = (\lim x)^n$$

Ознаки існування границі

В багатьох питаннях математичного аналізу необхідно тільки вказати, чи має чи не має змінна величина границю. Числове значення цієї границі досить часто має другорядне значення.

Розглянемо дві ознаки існування границі змінної величини.

Ознака 1. Будь-яка монотонно зростаюча або спадаюча і обмежена в напрямку своєї зміни змінна величина має границю.

Ознака 2. Якщо числові значення змінної величини z постійно містяться між відповідними значеннями змінних x і y , як прямують до однієї і тої ж границі a , то змінна z прямує до цієї ж границі. Тобто, якщо

$$x \leq z \leq y \text{ і } \lim x = a, \lim y = a, \text{ то } \lim z = a.$$

2.3. Правила і формули диференціювання. Похідні алгебраїчних функцій

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0 .

Означення 1. Похідною функції $y = f(x)$ в точці x_0 називають границю відношення приросту функції Δy до приросту аргументу Δx , коли Δx довільним чином прямує до нуля. Якщо існує границя відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, то її позначають через: $f'(x_0)$, $y'(x_0)$, $\frac{df(x_0)}{dx}$ або $\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=x_0}$. Таким чином математично похідна в точці x_0 визначається за формулою:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Означення 2. Операцію знаходження похідної функції $y = f(x)$ називають диференціюванням цієї функції. Функцію $y = f(x)$, яка має похідну в точці x , називають диференційованою в точці x . Якщо функція має похідну в кожній точці деякого проміжку, то вона називається диференційованою на цьому проміжку.

Деякі задачі, що приводять до поняття похідної. Задача про продуктивність праці. Економічний зміст похідної

Приклад 2.1. Нехай функція $u = u(t)$ виражає кількість виробленої продукції u за час t . Необхідно знайти продуктивність праці в момент часу t_0 .

Очевидно за період часу від t_0 до $t_0 + \Delta t$ кількість виробленої продукції зміниться від значення $u_0 = u(t_0)$ до $u_0 + \Delta u = u(t_0 + \Delta t)$. Тоді середня продуктивність праці за цей відрізок часу $z_{сер} = \frac{\Delta u}{\Delta t}$. Продуктивність праці в момент часу t_0 можна визначити як граничне значення середньої продуктивності за період часу від t_0 до $t_0 + \Delta t$ при $\Delta t \rightarrow 0$, тобто

$$z = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} z_{сер} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = u'(t_0).$$

Отже похідна обсягу виробленої продукції за часом $u'(t)$ є продуктивність праці в момент часу t . У цьому полягає економічний зміст похідної.

Приклад 2.2. Розглянемо виробничу функцію, яка зв'язує кількість виробленої продукції Q і кількість затраченої праці L (для фірми це може бути чисельність персоналу) вигляду $Q = 300\sqrt{L} - 4L$.

Граничну продуктивність праці будемо шукати користуючись означенням похідної:

$$\begin{aligned} Q'(L) &= \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta L} = \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \frac{Q(L + \Delta L) - Q(L)}{\Delta L} = \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \frac{300\sqrt{L + \Delta L} - 4(L + \Delta L) - (300\sqrt{L} - 4L)}{\Delta L} = \\ &= \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \frac{300(\sqrt{L + \Delta L} - \sqrt{L}) - 4(L + \Delta L - L)}{\Delta L} = \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \frac{300(\sqrt{L + \Delta L} - \sqrt{L})}{\Delta L} - \\ &- \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \frac{4(L + \Delta L - L)}{\Delta L} = \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \frac{300(\sqrt{L + \Delta L} - \sqrt{L}) \cdot (\sqrt{L + \Delta L} + \sqrt{L})}{\Delta L(\sqrt{L + \Delta L} + \sqrt{L})} - 4 \\ &= \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \frac{300(L + \Delta L - L)}{\Delta L(\sqrt{L + \Delta L} + \sqrt{L})} - 4 = \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \frac{300}{(\sqrt{L + \Delta L} + \sqrt{L})} - 4 = \frac{150}{\sqrt{L}} - 4. \end{aligned}$$

Підставляючи в одержану формулу значення L , легко знайти відповідні величини граничної продуктивності праці. Для прикладу візьмемо:

$$L = 1, L = 9, L = 100, L = 2500, L = 22500.$$

Результати обчислень наведено в таблиці

L	1	9	100	2500	22500
Q'_L	146	46	11	-1	-3

Із наведеної таблиці видно, що гранична продуктивність праці зменшується з ростом чисельності персоналу і, починаючи з деякої кількості стає від'ємною. Це означає, що при подальшому збільшенні персоналу продуктивність праці буде падати. На практиці таке часто спостерігається. Якщо для виконання певної роботи залучається багато виконавців, вони починають заважати один одному.

Основні правила диференціювання

I. Якщо $f(x) = C = const$, то $C' = 0$ (похідна постійної функції дорівнює 0).

II. Якщо $C = \text{const}$, а $u = u(x)$ – диференційована в точці x , то $(Cu)' = C \cdot u'$ (постійний множник можна винести за знак похідної).

III–V. Якщо функції $u = u(x)$ й $v = v(x)$ диференційовані в точці x , то їхня сума, різниця, добуток і частка (якщо $v(x) \neq 0$) також диференційовані в цій точці, причому мають місце формули:

$$\text{III. } (u \pm v)' = u' \pm v';$$

$$\text{IV. } (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v';$$

$$\text{V. } \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}.$$

Доведемо, наприклад, формулу диференціювання частки. Нехай $y = \frac{u}{v}$. Тоді:

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = \frac{u(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x + \Delta x)}{v(x) \cdot v(x + \Delta x)}.$$

Додамо й віднімемо в чисельнику член $u(x) \cdot v(x)$, згрупуємо й винесемо за дужки загальні множники. Будемо мати:

$$\Delta y = \frac{v(x)(u(x + \Delta x) - u(x)) - u(x)(v(x + \Delta x) - v(x))}{v(x) \cdot v(x + \Delta x)} = \frac{v \cdot \Delta u - u \cdot \Delta v}{v(x) \cdot v(x + \Delta x)}.$$

Складемо різницеве відношення, тобто відношення приросту функції до приросту аргументу:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x) \cdot v(x + \Delta x)}.$$

Тепер перейдемо до границі при $\Delta x \rightarrow 0$. Через те, що $u(x)$ й $v(x)$ – диференційовані (а, отже, неперервні), то існують границі

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u', \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v', \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(x + \Delta x) = v,$$

а $u = u(x)$ й $v = v(x)$ від Δx не залежать і виносяться за знаки границь. Виходить, існує границі різничевого відношення, тобто

$$y' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

VI. Нехай функція $y = F(u)$ диференційована в точці u_0 , а функція $u = \phi(x)$ диференційована в точці x_0 , причому $u_0 = \phi(x_0)$. Тоді й складна функція $y = F(\phi(x))$ диференційована в точці x_0 й має місце формула

$$(F(\phi(x)))'|_{x=x_0} = F'(\phi(x_0)) \cdot \phi'(x_0).$$

Інші форми запису цієї формули:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}, \quad y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Для доведення надаємо аргументу x функції $u = \phi(x)$ приріст Δx . Він викличе приріст Δu цієї функції, що у свою чергу викличе приріст Δy функції $y = F(u)$. Внаслідок теореми 1 §4 з диференційованості функцій $\phi(x)$ і $F(u)$ маємо:

$$\Delta u = \phi(x_0 + \Delta x) - \phi(x_0) = \phi'(x_0)\Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \rightarrow 0;$$

$$\Delta y = F(u_0 + \Delta u) - F(u_0) = F'(u_0)\Delta u + o(\Delta u), \quad \Delta u \rightarrow 0.$$

Підставляючи першу формулу в другу, одержимо для приросту складної функції:

$$\Delta y = F'(u_0) \cdot \phi'(x_0) \Delta x + F'(u_0) \cdot o(\Delta x) + o(\Delta u), \quad \Delta x \rightarrow 0.$$

Відразу відзначимо, що внаслідок неперервності функції $u = \phi(x)$ (впливає з її диференційованості) її приріст Δu прагне до нуля при $\Delta x \rightarrow 0$. Складаємо різницеве відношення й переходимо до границі

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(F'(u_0) \phi'(x_0) + F'(u_0) \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} + \frac{o(\Delta u)}{\Delta x} \right).$$

Перший доданок під знаком границі в правій частині – це постійна. Другий – добуток постійної на нескінченно малу, тому що $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = 0$ за означенням символу $o(\cdot)$. Третій доданок запишемо у вигляді

$$\frac{o(\Delta u)}{\Delta x} = \frac{o(\Delta u)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Тут перший множник є нескінченно мала при $\Delta x \rightarrow 0$, а другий має скінчену границю $u'(x_0)$. Отже, другий і третій доданок – це нескінченно малі при $\Delta x \rightarrow 0$. Звідси й одержуємо формулу диференціювання складної функції.

Зауваження 1. Інші правила диференціювання приведемо пізніше.

VII Зведення формул для похідних

- | | | | |
|---|------------|---|--|
| 1. $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1},$ | $(x)' = 1$ | $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ |
| 2. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a,$ | | $(e^x)' = e^x$ | |
| 3. $(\ln x)' = \frac{1}{x},$ | | $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ | |
| 4. $(\sin x)' = \cos x.$ | | 5. $(\cos x)' = -\sin x.$ | |
| 6. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$ | | 7. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$ | |
| 8. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$ | | 9. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$ | |
| 10. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$ | | 11. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$ | |
| 12. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x.$ | | 13. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x.$ | |
| 14. $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$ | | 15. $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$ | |

2.4. Поняття первісної, невизначеного та визначеного інтегралів

В багатьох практичних задачах необхідно по заданій похідній відновити первісну функцію.

Означення. Функція $F(x)$ називається первісною для функції $f(x)$ на проміжку $(a; b)$, якщо на цьому проміжку $F'(x) = f(x)$.

Операція знаходження первісних для функції $f(x)$ називається *інтегруванням* $f(x)$.

Означення. Невизначеним інтегралом для неперервної функції $f(x)$ називають множину всіх первісних функцій $F(x)$ і позначають

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

де $\int$ — знак невизначеного інтеграла; $f(x)$ — підінтегральна функція; $f(x) dx$ — підінтегральний вираз; dx — диференціал змінної інтегрування.

Основні властивості невизначеного інтеграла:

- 1) $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$;
- 2) $\int (f(x) \pm \phi(x))dx = \int f(x)dx \pm \int \phi(x)dx$;
- 3) $\int dF(x) = F(x) + C$.

Таблиця невизначених інтегралів

- | | |
|---|--|
| 1. $\int dx = x + C$ | 2. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C$ |
| 3. $\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, (\alpha \neq -1)$ | 4. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right + C$ |
| 5. $\int \frac{du}{u} = \ln u + C$ | 6. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C$ |
| 7. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$ | 8. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{u-a}{u+a} \right + C$ |
| 9. $\int e^u du = e^u + C$ | 10. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln \left \operatorname{tg} \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right + C$ |
| 11. $\int \sin u du = -\cos u + C$ | 12. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln \left \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right + C$ |
| 13. $\int \cos u du = \sin u + C$ | 14. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$ |
| 15. $\int \operatorname{tg} u du = -\ln \cos u + C$ | 16. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$ |
| 17. $\int \operatorname{ctg} u du = \ln \sin u + C$ | |

Методи знаходження невизначених інтегралів

Під час знаходження невизначених інтегралів застосовують такі способи: безпосереднє інтегрування, метод підстановки, інтегрування частинами, інші.

Інтегрування розкладанням: мета методу — розкласти підінтегральну функцію на такі доданки, інтеграли від яких відомі або їх простіше інтегрувати, ніж початкову підінтегральну функцію.

Приклад 2.3. Знайти інтеграл $\int \frac{x^2+12}{x^2-3} dx$.

Виділимо цілу частину підінтегральної функції. Для цього поділимо чисельник на знаменник способом ділення многочлена на многочлен, або припишемо в чисельнику -3 та $+3$ і розглянемо суму дробів. Одержимо

$$\frac{x^2 - 3 + 3 + 12}{x^2 - 3} = \frac{x^2 - 3}{x^2 - 3} + \frac{15}{x^2 - 3} = 1 + \frac{15}{x^2 - 3}.$$

$$\int \frac{x^2 + 12}{x^2 - 3} dx = \int \left(1 + \frac{15}{x^2 - 3}\right) dx = \int dx + 15 \int \frac{dx}{x^2 - 3} = x + \frac{15}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{x - \sqrt{3}}{x + \sqrt{3}} \right| + C.$$

Метод підстановки: мета методу підстановки — перетворити даний інтеграл до такого вигляду, який простіше інтегрувати.

$$\int f(x) dx = \left| \begin{array}{l} x = \phi(t) \\ dx = \phi'(t) dt; \\ t = \phi^{-1}(x) \end{array} \right| = \int f(\phi(t)) \phi'(t) dt.$$

Інтегрування частинами: мета методу — застосувати один чи декілька разів формулу для знаходження інтегралу:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Приклад 2.4. Знайти інтеграл $\int x^2 \cos 2x dx$.

$$\int x^2 \cos 2x dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2, du = 2x dx \\ dv = \cos 2x dx, v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{array} \right| = \frac{1}{2} x^2 \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x \cdot 2x dx =$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \sin 2x - \int x \sin 2x dx = \left| \begin{array}{l} u = x, du = dx \\ dv = \sin 2x dx, v = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{array} \right| =$$

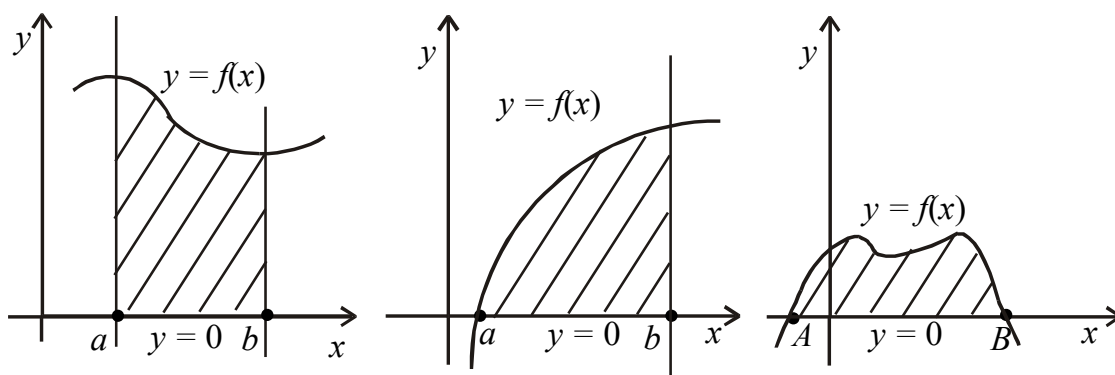
$$= \frac{1}{2} x^2 \sin 2x - \left(-\frac{1}{2} x \cos 2x - \int \left(-\frac{1}{2} \cos 2x \right) dx \right) = \frac{x^2}{2} \sin 2x +$$

$$+ \frac{x}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \frac{x^2}{2} \sin 2x + \frac{x}{2} \cos 2x - \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

Визначений інтеграл

Означення. Криволінійною трапецією називається плоска фігура, що обмежена лініями: $y = f(x) \geq 0, y = 0, x = a, x = b$.

На малюнку зображені: класична криволінійна трапеція та її окремі випадки.



Обчислення площі криволінійної трапеції приводить до розгляду нового математичного поняття – визначеного інтегралу, який позначається:

$$\int_a^b f(x)dx$$

де $\int_a^b$ — знак визначеного інтеграла; a, b — нижня та верхня межі інтегрування.

Якщо $f(x) \geq 0, x \in [a; b]$, то $\int_a^b f(x)dx$ дорівнює площі відповідної криволінійної трапеції.

Властивості визначеного інтеграла

1) Якщо $f(x) = c = \text{const}$, то $\int_a^b c dx = c \cdot (b - a)$.

2) Сталій множник можна виносити з-під знака визначеного інтеграла, тобто

$$\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx.$$

3) Якщо $f_1(x)$ та $f_2(x)$ інтегровні на $[a; b]$, то

$$\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx.$$

4) Якщо у визначеному інтегралі поміняти місцями межі інтегрування, то інтеграл змінить лише свій знак на протилежний, тобто

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx.$$

5) Визначений інтеграл з однаковими межами інтегрування дорівнює нулю

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Для обчислення визначеного інтеграла застосовують формулу, яка зв'язує визначений інтеграл та первісну функцію. Ця формула має вигляд

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

де $F(x)$ – первісна функція, а a та b – межі (границі) інтегрування і її називають формулою Ньютона-Лейбніца.

Застосування інтегралів

Визначений інтеграл має багато інших геометричних, фізичних, механічних застосувань тощо. Зупинимось на деяких його економічних застосуваннях, що пов'язані з сумарними ефектами.

Приклад 2.5. За допомогою визначеного інтегралу можна визначати загальний дохід, якщо відомий граничний прибуток. Нехай, наприклад, функція граничного доходу задається формулою

$$MR = -0.04x + 12,$$

де x – кількість поданих одиниць товару. Визначимо дохід від продажу 100 одиниць товару.

Розв'язання.

$$M = \int_0^{100} (-0.04x + 12)dx = \left(-0.04 \frac{x^2}{2} + 12x\right) \Big|_0^{100} = (-0.02x^2 + 12x) \Big|_0^{100} = 1000 \text{ (грн.)}$$

Визначений інтеграл дозволяє розв'язувати задачу визначення додаткової вартості.

Нехай задано функції пропозиції $S = 15p$ та попиту $q = p^2 - 80p + 1500$. (рис. 2.1).

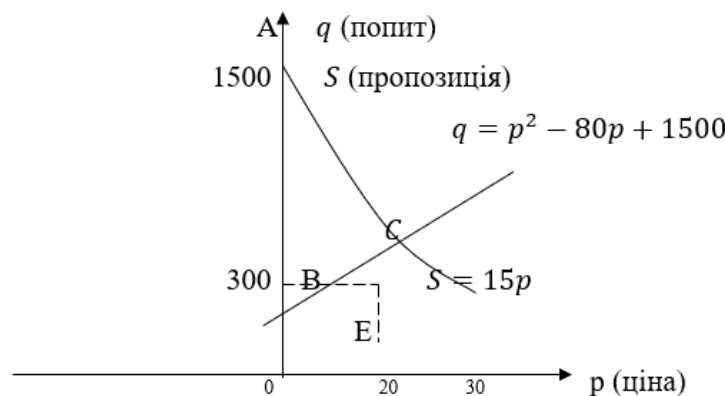


Рис. 2.1. Задача про додаткову вартість

Визначаємо, що $q = S$ при $p = 20$. При цьому попит дорівнює 300 одиниць. Дохід за продану продукцію становить для виробника $20 \cdot 300 = 6000$ грн та зображається площею прямокутника $OBCE$. Економічний зміст має ціна за одиницю товару, більша за 20 грн. (якщо попит перевищує пропозицію, то, звичайно, знайдуться покупці, які куплять товар дорожче, ніж за 20 грн). мірою справжньої корисності товару, вважають економісти, є площа фігури $OBCE$. Площа заштрихованої фігури (криволінійного трикутника CDE) називається додатковою вартістю. Визначимо цю площу за допомогою інтегралу

$$\int_{20}^{30} (p^2 - 80p + 1500)dp = \left(\frac{p^3}{3} - 80\frac{p^2}{2} + 1500p\right) \Big|_{20}^{30} = 1333.33 \text{ грн.}$$

Отже, додаткова вартість дорівнює 1333,33 грн.

Приклад 2.6. Для подолання наслідків стихійного лиха в деяку місцевість надходять благодійні внески, розмір яких наближено описується функцією $a(t) = 30e^t$ ($t \in [0; 3]$), причому t вимірюється в днях від моменту стихійного лиха, а $a(t)$ – в тисячах гривень. Визначити:

скільки внесків надійде на другий день ($t = 2$)?

яка сума внесків очікується за три дні з моменту початку стихійного лиха?

Розв'язання. а) Визначимо $a(2)$:

$$a(2) = 30e^2 \approx 221.6 \text{ тис. грн.}$$

б) Сумарні внески за три дні визначимо за допомогою визначеного інтеграла:

$$\int_0^3 30e^t dt = 30e^t \Big|_0^3 = 30(e^3 - 1) \approx 572.4 \text{ тис. грн.}$$

Аналогічно розв'язуються задачі про епідеміологічний контроль, про потребу підприємства в матеріалах, про рівень затрат на ремонт приладів, про чисельність населення та ін.

Контрольні запитання при вивченні теми

1. Що називається границею функції?
2. Сформулюйте властивості границь.
3. Сформулюйте та покажіть на прикладах правила обчислення границь.
4. Яка функція називається нескінченно малою, нескінченно великою?
5. Сформулюйте властивості нескінченно малих величин.
6. Сформулюйте правила порівняння нескінченно малих величин.
7. Що називається похідною?
8. Сформулюйте основні правила диференціювання функцій.
9. Запишіть таблицю похідних елементарних функцій.
10. Що таке диференціал функції? Для чого він застосовується?
11. Що називається первісною та невизначеним інтегралом?
12. Які властивості невизначеного інтегралу відомі?
13. Які методи знаходження невизначених інтегралів існують?
14. Які властивості визначеного інтегралу відомі?
15. Запишіть формулу Ньютона-Лейбніця, поясніть її складові.
16. Для чого застосовується інтеграли? Наведіть приклади.

Список літератури

1. Дубовик В. П. Вища математика : навч. посібник / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. К. : А.С.К., 2006. 648 с.
2. Мацкул В. М. Вища математика для економістів : підручник. Одеса: ОНЕУ, 2018. 472 с.
3. Петрук В. А. Вища математика з прикладними задачами. Частина 1 / В. А. Петрук, О. П. Прозор. Вінниця : ВНТУ, 2018. 171 с.

4. Журавська Г. В. Теорія границь. Диференціальне числення функції однієї змінної. Невизначений інтеграл. Збірник задач / укладачі Журавська Г. В., Карпалюк Т. О., Копась І. М., Кулик Г. М., Рева Н. В., Степаненко Н. В. Київ, «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», 2023. 97 с.
5. Левчук О. В. Вища та прикладна математика. Частина І: Навчальний посібник / О. В. Левчук, В. Г. Дзісь, О. М. Дячинська. Вінниця: ВНАУ, 2021. 439 с.

МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ

- 3.1. Загальна постановка задач оптимізації. Класифікація методів математичного програмування.
- 3.2. Задачі лінійного програмування.
- 3.3. Задачі нелінійного програмування.

3.1. Загальна постановка задач оптимізації. Класифікація методів математичного програмування

Оптимізація — в математиці, інформатиці та дослідженні операцій задача знаходження екстремуму (мінімуму чи максимуму) цільової функції в деякій області скінченного векторного простору, обмеженому набором лінійних та/або нелінійних рівнянь та/або нерівностей.

Теорію та методи розв'язування задачі оптимізації вивчає математичне програмування.

Математичне програмування – це область математики, що розробляє теорію, чисельні методи розв'язку багатомірних задач з обмеженнями. На відміну від класичної математики, математичне програмування займається математичними методами розв'язування задач знаходження найкращих варіантів з усіх можливих.

Під *оптимізацією* розуміють процес вибору найкращого варіанту з усіх можливих. З точки зору інженерних розрахунків методи оптимізації дозволяють обрати найкращий варіант конструкції, найкращий розподіл ресурсів тощо.

У процесі розв'язування задачі оптимізації зазвичай необхідно знайти оптимальні значення деяких параметрів, що визначають дану задачу. При розв'язуванні інженерних задач їх прийнято називати *проектними параметрами*, а в економічних задачах їх називають *параметрами плану*. Як проектні параметри можуть бути задані значення лінійних розмірів об'єкта, маси, температури, тощо. Число n проектних параметрів $x_1, x_2, \dots, x_n$ характеризує розмірність (і ступінь складності) задачі оптимізації.

Вибір оптимального розв'язку чи порівняння двох альтернативних розв'язків проводиться за допомогою деякої залежної величини (функції), що визначається проектними параметрами. Ця величина називається *цільовою функцією* (або *критерієм якості*). Цільова функція може бути виразом прибутку, об'єму випуску продукції, затрат виробництва, величини відходів виробництва тощо. За значенням цільової функції з множини можливих варіантів обирається найкращий варіант, який надає цільовій функції екстремальне значення (мінімум або максимум). Таким чином,

цільова функція – це глобальний критерій оптимальності в математичних моделях, з допомогою яких описують інженерні або економічні задачі.

При проектуванні будь-яких технічних об'єктів, технологічних процесів та систем завжди розв'язують задачі вибору і прийняття рішень.

Задачею прийняття рішення називають сукупність:

$$\Omega = \langle X, O, \rangle,$$

де X – множина варіантів розв'язку задачі; O – принцип оптимальності, що дає уявлення про якість варіантів, в найпростішому випадку – це правило їх переваги один над одним.

Розв'язком задачі прийняття рішень називається множина $X_{\text{опт}}$, яка є підмножиною множини X ($X_{\text{опт}} \subset X$), отримане на основі принципу оптимальності.

Задачі прийняття рішень класифікуються за наявністю інформації про X і O і бувають трьох видів:

1. X і O – невідомі. Це загальна задача прийняття рішень. Дані для отримання $X_{\text{опт}}$ визначають у даній задачі в процесі її розв'язання.
2. X – невідомо, O – відомо (це задача пошуку варіантів).
3. X і O – відомі (це задача оптимізації).

Модель задачі математичного програмування включає:

1) сукупність невідомих величин $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, що впливають на досягнення сформованої мети. Їх називають планом задачі (вектором управління, розв'язком, управлінням, стратегією, поведінкою тощо);

2) *цільову функцію* $F(x)$ (функцію мети, показник ефективності, критерій оптимальності, функціонал задачі тощо) – функцію в математичній формі, що виражає поставлену мету з точки зору обраного критерію оптимальності;

3) *умову (або систему обмежень)* що накладається на невідомі величини. Ці умови впливають з обмеженості ресурсів, які має підприємство в будь-який момент часу, з необхідності задоволення наявних потреб, з умов виробничих і технологічних процесів. Обмеженими можуть бути можливості технічного, технологічного, наукового потенціалу.

У загальному випадку задача прийняття рішення розв'язується у два етапи:

1 етап: задача формалізується, тобто формується її математична модель, в якій конкретні фізичні, технічні, технологічні, економічні умови і вимоги до об'єкту втілюються у вигляді задачі оптимізації з певною цільовою функцією і допустимою множиною варіантів.

2 етап: розв'язання задачі оптимізації з використанням відомих методів.

«Теорія оптимізації», з одного боку, є самостійною наукою, а з іншого – складовою частиною науки під назвою «дослідження операцій». Тут під «операцією» розуміють сукупність взаємоузгоджених дій, спрямованих на досягнення цілком певної мети.

Обов'язково має бути сформульована мета та знайдено її найкращий шлях досягнення. Не можна ототожнювати критерій (критерії) оптимальності та цільову функцію.

Вибір критеріїв – складне завдання, оскільки цілі при проектуванні будь-якого об'єкта, як правило, суперечливі (забезпечення мінімальної вартості та максимальної надійності, максимальної продуктивності та мінімальної енергоємності тощо).

Розрізняють два види задач оптимізації:

1. Задачу мінімізації.
2. Задачу максимізації.

Щоб розв'язати задачу мінімізації функції f на множині X , необхідно знайти такий вектор $x_0 \in X$ (а також відповідні значення цільової функції $f(x_0)$), щоб нерівність: $f(x_0) \leq f(x)$ виконувалась для всіх $x \in X$. При цьому x_0 називають оптимальним розв'язком (вірніше тут – мінімальним розв'язком), а $f(x_0)$ – оптимумом (мінімумом).

Щоб розв'язати задачу максимізації функції f на множині X , необхідно знайти такий вектор $x_0 \in X$ (а також відповідні значення цільової функції $f(x_0)$), щоб нерівність $f(x_0) \geq f(x)$ виконувалась для всіх $x \in X$. При цьому x_0 називають оптимальним (максимальним) розв'язком, а $f(x_0)$ – оптимумом (максимумом).

Коротка класифікація методів математичного програмування.

1. За характером взаємозв'язку між змінними

а) **лінійні**, якщо всі функціональні зв'язки в системі обмежень і функція мети – лінійні функції;

б) **нелінійні** при наявності нелінійності хоча б в одному зі згаданих елементів;

2. за характером змін змінних

а) **неперервні**, якщо значення кожної з керуючих змінних можуть заповнювати суцільно деяку область дійсних чисел;

б) **дискретні**, якщо всі або хоча б одна змінна могла приймати ізольовані числові значення з деякої множини;

3. за врахуванням фактору часу

а) **статичні**, якщо моделювання і прийняття рішень здійснюються в допущенні про незалежність від часу елементів моделі впродовж періоду часу, на який приймається планово-керуючий розв'язок;

б) **динамічні**, якщо необхідно врахувати фактор часу;

4. за наявністю інформації про змінні

а) **задачі в умовах повної визначеності (детермінованості);**

б) **задачі в умовах неповної інформації**, коли окремі елементи є ймовірними величинами, однак відомими або додатковими статистичними дослідженнями можуть бути установлені їх закони розподілу.

в) **задачі в умовах невизначеності**, коли можна зробити допущення про можливі результати випадкових елементів, але немає можливості зробити висновок про ймовірності результатів.

5. за числом критеріїв оцінки альтернатив

а) *прості, однокритеріальні;*

б) *складні, багатокритеріальні.*

Економічно допустимо використання одного критерію оптимальності або за допомогою спеціальних процедур (наприклад, «зважуванням пріоритетів») звести багатокритеріальний пошук до однокритеріального.

У залежності від виду цільової функції і функцій, що задають обмеження, в математичному програмуванні прийнято виділяти перелік розділів ([рис. 3.1](#))

Математичне програмування	лінійне програмування
	параметричне програмування
	нелінійне програмування
	стохастичне програмування
	динамічне програмування
	геометричне програмування
	дискретне програмування

Рис. 3.1. Класифікація методів математичного програмування

Задачі математичного програмування, в яких цільова функція і функції, що визначають систему обмежень, *лінійні* відносно невідомих, що входять в задачу, розглядаються в розділі, що називається *лінійним програмуванням* (ЛП). Методи і моделі лінійного програмування широко застосовуються при розробці виробничих програм виробництв, розподілі їх за виконавцями, при розміщенні замовлень між виконавцями, при визначенні найкращого асортименту продукції, що випускається, при плануванні грузопотоків, визначенні плану товарообігу і його розподілі; в задачах розвитку і розміщення виробничих сил, баз і складів систем обігу матеріальних ресурсів і т. д. Особливо широке застосування методів і моделей лінійного програмування отримали при розв'язуванні задач економії ресурсів, виробничо-транспортних і інших задач.

Лінійне програмування характеризує лінійні взаємозв'язки елементів системи, що розглядається. Однак при глибшому дослідженні в переліку задач з'являються і зв'язки нелінійного характеру, коли зі зміною одного елементу інші змінюються непропорційно першому. Тому за розробкою моделей лінійного програмування почалися інтенсивні дослідження нелінійних моделей.

Задачі математичного програмування, в яких цільова функція і (або) хоча б одна з функцій системи обмежень нелінійна, є предметом вивчення розділу математичного програмування з назвою **нелінійного програмування** (НЛП). Якщо вказані функції володіють властивостями опуклості, то отримана задача є задачею випуклого програмування. Методи і моделі нелінійного програмування можуть застосовуватись при розв'язуванні перерахованих вище задач, коли хоча б одна з функцій $Z(X)$, $\phi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ нелінійна. Крім того, методи НЛП отримали широке застосування при розрахунках економічно вигідних партій запуску деталей у виробництво, при визначенні економічно вигідної партії поставки, розмірів запасів, розподілу обмежених ресурсів, розміщенні виробничих сил, при розв'язанні багатьох виробничо-економічних задач.

З перерахованих методів математичного програмування найбільш поширеними та розробленими є лінійне та динамічне програмування. У ці методи вкладається широке коло завдань математичного програмування.

3.2. Задачі лінійного програмування

Цілий ряд задач із різних галузей практики може бути сформульований як задача лінійного програмування. Усі вони характеризуються деякими загальними характеристиками. У кожному їх елементі рішення є ряд невід'ємних змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$. Потрібно так вибрати значення цих змінних, щоб:

1) виконувались деякі обмеження, що мають вигляд лінійних нерівностей або нерівностей щодо змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$;

2) деяка лінійна функція F тих самих змінних зверталася максимум (мінімум).

Загальною задачею лінійного програмування називають задачу, в якій функція мети, яку треба оптимізувати, є лінійною комбінацією відомих коефіцієнтів c_i ($i = 1, n$) і невідомих змінних x_j ($j = 1, n$) виду:

$$F = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

Функцію F називають також цільовою функцією чи критерієм ефективності задачі. Невідомі невід'ємні змінні x_j називаються *керуючими змінними*.

Обмеження, що накладаються на область можливих розв'язків, мають вигляд

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, i = \overline{1, m_1} \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i, i = \overline{m_1 + 1, m_2} \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, i = \overline{m_2 + 1, m} \end{cases}$$

де a_{ij}, b_i – невідомі величини, причому величини a_{ij}, x_j, b_i ($j = 1, n, i = 1, m$) додатні.

Розв’язати задачу лінійного програмування – означає знайти значення керуючих змінних x_j , які відповідають обмеженням, у яких цільова функція приймає мінімальне чи максимальне значення.

Допустимим розв’язком задачі лінійного програмування називатимемо будь-яку сукупність невід’ємних змінних, що задовольняють умову $x_j \geq 0, (j = 1, n)$, яку прийнято називати *умовою невід’ємності*.

Оптимальним розв’язком $X_{\text{опт}} = x_1, x_2, \dots, x_n$ називатимемо те з допустимих розв’язків, для якого лінійна функція F звертається в максимум (мінімум).

У класичній постановці математична модель завдання ЛП є групою співвідношень: цільову функцію, яку треба або максимізувати, або мінімізувати, всі обмеження, задані нерівностями зі знаком $\leq$, за заданих умов усіх невід’ємних змінних:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, i = \overline{1, m}.$$

Існують *симетричні форми* запису ЗЛП:

$$\begin{aligned} F &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min(\max), \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j &\leq b_i, i = \overline{1, m}, \\ x_j &\geq 0, (j = \overline{1, n}) \end{aligned}$$

При *канонічній формі* цільова функція прямує до максимуму, обмеження представлені рівнянням і задані умови невід’ємності змінних.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, i = \overline{1, m}.$$

Форма запису ЗЛП може *бути матричною*:

$$F = CX \rightarrow \min(\max), AX = A_0, X \geq 0,$$

де A – матриця коефіцієнтів системи рівнянь або матриця умов; X – матриця-стовпчик змінних задачі; A_0 – матриця-стовпчик правих частин системи обмежень.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} - \text{називається матрицею умов, технологічною}$$

матрицею або матрицею норм витрати в залежності від того, який сенс вкладено в сукупність її елементів.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} - \text{вектор змінних,}$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} - \text{вектор обмежень,}$$

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix} - \text{вектор вагових коефіцієнтів.}$$

CX – скалярний добуток векторів C і X .

Методи розв'язування задач лінійного програмування

Методи розв'язування ЗЛП – це алгоритми, які дозволяють умові знаходження оптимального розв'язку для задачі, де функція мети та обмеження є лінійними. Методи розв'язування ЗЛП належать до обчислювальної математики.

Графічний метод. У лінійному програмуванні для визначення опуклих множин використовується графічний метод (багатогранник розв'язку). Якщо основна задача лінійного програмування має оптимальний план, то цільова функція приймає значення в одній з вершин багатогранника розв'язку ([рис. 3.2](#)).

Графічний метод в основному використовується для розв'язання задач з невеликою кількістю змінних. Вона включає в себе наступні етапи:

1. Побудова багатогранника розв'язків.

Геометричний зміст системи обмежень полягає в наступному: рівняння $a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b$ є гіперплощиною в n -вимірному просторі, а нерівність – це точки підпростору, що лежать з одного боку гіперплощини й утворюють опуклу множину. Отже, система обмежень ЗЛП є множиною точок у n -вимірному просторі; при цьому ця множина опукла і кожна точка є розв'язком системи нерівностей.

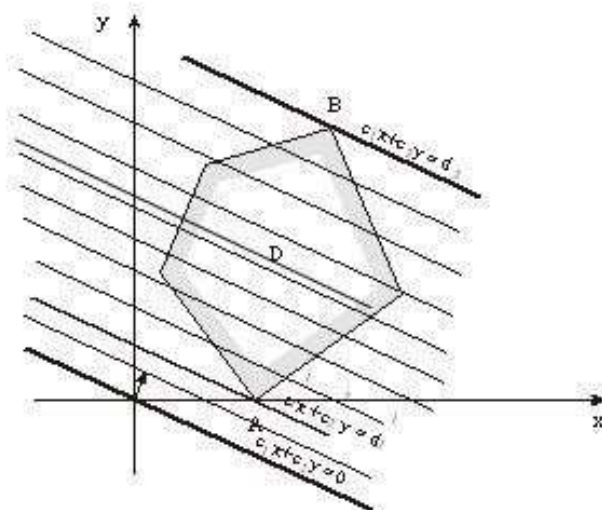


Рис. 3.2. Ілюстрація до графічного методу

2. Знаходження вектору $\bar{c} = \text{grad } z = (c_1, \dots, c_n)$ і вершини многокутника розв'язку, при якому досягається $\max z$.

Відомо, що градієнтний вектор функції z показує напрямок найбільшого зростання функції. Через початок координат проводять лінію рівня $c_1x_1 + \dots + c_nx_n = h$. Лінія рівня має чудову властивість: після підстановки координат будь-якої її точки в вираз цільової функції z остання набуває постійне значення. Далі переміщуємо лінію рівня в напрямку вектора $\bar{c}$ доти, поки не буде досягнута кутова вершина багатокутника розв'язку або функція не буде встановлена як необмежена на множині розв'язків.

3. Визначення координати кутової вершини, які є оптимальним планом, і значення цільової функції в цій точці.

Слід зазначити, що знаходження мінімального значення цільової функції відрізняється від знаходження її максимального значення тільки тим, що лінія рівня $c_1x_1 + \dots + c_nx_n = b$ рухається не в напрямку вектора $\bar{c}$, а в протилежному напрямку.

Простий перебір. Візьмемо багатовимірний паралелепіпед, в якому лежить багатогранник, що визначається обмеженнями. Як його побудувати? Наприклад, якщо існує обмеження типу $2x_1 + 5x_2 \leq 10$, то очевидно $0 \leq x_1 \leq 10/2 = 5$ і $0 \leq x_2 \leq 10/2 = 5$. Аналогічно, можемо перейти від загальних лінійних обмежень до обмежень на окремі змінні. Залишилося взяти максимальні межі для кожної змінної. Якщо многогранник, визначений обмеженнями, є необмеженим, то можна аналогічним, але дещо складнішим чином виділити частину, яка «звернена» до початку координат, що містить розв'язок, і укласти її в багатовимірний паралелепіпед.

Проведемо перебір точок паралелепіпеда з кроком $1/10n$ послідовно за $n = 2, 3, \dots$, обчислюючи значення цільової функції і перевіряючи наявність обмежень. З усіх точок, які відповідають обмеженням, візьмемо ту, у якій цільова функція максимальна. Розв'язок знайдено з точністю до $1/10n$.

Спрямований перебір. Почнемо з точки, що задовольняє обмеженням (її можна знайти простим перебором). Будемо послідовно (або випадково – так званий метод випадкового пошуку) змінювати її координати на певну величину Δ , щоразу в точку з вищим значенням цільової функції. Якщо вийдемо на площину обмеження, будемо рухатися нею (знаходячи одну з координат рівняння обмеження). Потім рух по ребру (коли два обмеження-нерівності переходять у рівності)... Зупинка – у вершині лінійного багатогранника. Розв’язок знайдено з точністю до Δ ; якщо необхідно, в околі знайденого розв’язку проводимо спрямований перебір з кроком $\Delta/2, \Delta/4$ і т.д.)

Симплекс-метод – один з перших спеціалізованих методів оптимізації, спрямованих на розв’язання задач лінійного програмування, в той час як простий і спрямований методи перебору можуть бути застосовані для розв’язання практично будь-якої задачі оптимізації. Даний метод був запропонований американцем Г. Данцигом в 1951 р.

Симплексний метод полягає в переміщенні обмежень по опуклому многограннику від вершини до вершини, при якому значення цільової функції поліпшується на кожному кроці до досягнення оптимуму.

Суть симплексного методу полягає в послідовному пошуку розв’язків, тобто послідовному переході від однієї вершини до іншої. Однак це перерахування не хаотичне, а таке, що на кожному кроці розв’язок вдосконалюється.

Симплексний метод складається з двох обчислювальних процедур:

- симплексний метод з натуральною основою;
- симплексний метод зі штучною основою.

Вибір конкретної обчислювальної процедури здійснюється після приведення початкової ЗЛП до її канонічного вигляду.

Для застосування симплексного методу з природним базисом ЗЛП у своїй канонічній формі повинна містити єдину підматрицю порядку m , і в цьому випадку початковий еталонний план (невід’ємний базисний розв’язок системи обмежень) є очевидним.

Симплексний метод зі штучною основою використовується при відсутності початкового еталонного плану початкового ЗЛП в канонічному вигляді. Така ситуація виникає, коли початкове обмеження містить знаки «дорівнює» або «більше або дорівнює».

У загальному випадку симплекс-метод складається з двох етапів:

- 1. на першому етапі шукають прийнятний розв’язок;**
- 2. на другому етапі цей допустимий розв’язок удосконалюється до оптимального.**

Симплексний алгоритм застосовний для оптимізації лінійної цільової функції багатьох змінних, пов’язаних лінійними рівняннями обмежень, за умови, що рівняння обмежень і рівняння цільової функції є канонічними.

Система називається *канонічною системою*, якщо в кожному рівнянні є базисна змінна.

Базисні змінні – це невідомі змінні, які мають коефіцієнт, що дорівнює одиниці в одному з рівнянь системи (3.1) і не зустрічаються в інших рівняннях системи і в рівнянні цільової функції (3.2).

Небазисними змінними називаються все інші змінні.

Нехай цільова мінімізована функція знаходиться в лінійній залежності від n невідомих $x_1, x_2, \dots, x_n$: при $x_i \geq 0$, де $i = 1, 2, \dots, n$.

Рівняння обмежень мають наступний канонічний вигляд:

$$\begin{cases} x_1 + a_{1,m+1}x_{m+1} + a_{1,m+2}x_{m+2} + \dots + a_{1,s}x_s + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ x_2 + a_{2,m+1}x_{m+1} + a_{2,m+2}x_{m+2} + \dots + a_{2,s}x_s + \dots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \dots \\ x_r + a_{r,m+1}x_{m+1} + a_{r,m+2}x_{m+2} + \dots + a_{r,s}x_s + \dots + a_{r,n}x_n = b_r \\ \dots \\ x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + a_{m,m+2}x_{m+2} + \dots + a_{m,s}x_s + \dots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases} \quad (3.1)$$

$$C_{m+1}x_{m+1} + C_{m+2}x_{m+2} + \dots + C_sx_s + \dots + C_nx_n = Z - Z_0 \quad (3.2)$$

де $x_1, x_2, \dots, x_m$ – базисні змінні, число базових змінних дорівнює m , число невідомих – n , причому $a_n > m$, а $x_i \geq 0$.

Якщо система (3.1) канонічного виду, в кожному рівнянні обмежень є базисна змінна – можна записати перший допустимий розв'язок: все небазисні змінні ($x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$) дорівнюють нулю, все базисні змінні ($x_1, x_2, \dots, x_m$) дорівнюють вільним членам $b_1, b_2, \dots, b_m$ і мінімізуюча функція Z дорівнює Z_0 .

Подальший обчислювальний процес більш зручний, якщо умови задачі записати в наступну симплексну таблицю:

Базис	с ^б	c_1	c_2	...	c_{n+1}	...	c_{n+k}	b_i	
		x_1	x_2	...	x_{n+1}	...	x_{n+k}		

Критерій оптимальності цільової функції Z полягає в невід'ємному всіх коефіцієнтів C_j в системі (3.2) при пошуку мінімального значення Z ($C_j \geq 0$) і в недодатному всіх коефіцієнтів C_j в системі (3.2) при знаходженні максимального значення Z ($C_j \leq 0$).

Якщо всі $C_j \geq 0$, то будь-яка зміна небазисних змінних через їх ненегативність може або збільшувати значення Z , або зберігати його, що доводить оптимальність цього розв'язку.

Якщо хоча б один з коефіцієнтів в системі (3.2) $C_j < 0$, то зменшити Z можна за рахунок збільшення x_j . При цьому невідоме x_j виводиться з числа неосновних (про нього говорять, що він входить в базис).

Якщо кілька коефіцієнтів C_j в рівнянні цільової функції (3.2) негативні, то для прискорення процесу оптимізації доцільно вибирати коефіцієнт з найменшим значенням, тобто з найбільшим абсолютним значенням.

Позначимо такий найменший коефіцієнт через $C_s = \min(C_j)$, причому $C_s < 0$.

У базис буде введено невідому x_s . При введенні x_s в базис значення Z буде зменшуватися, оскільки добуток на $C_s \cdot x_s < 0$.

Якщо деякі $a_{i,s} > 0$, то є обмеження на збільшення величини x_s . У цьому випадку відповідні базисні змінні x_i будуть знижуватись і, як тільки хоч один з них досягне нульового значення, подальші збільшення x_s будуть неприпустимі.

Раніше всіх досягне нульового значення та базисна змінна x_i , для якої відношення $b_i/a_{i,s}$ буде мінімальним. Граничне значення x_s визначається з умови: $x_s = \min(b_i/a_{i,s})$, де $a_{i,s} > 0$.

При такому значенні x_s одна з базисних змінних x_i приймають нульове значення, тобто базисна величина x_i виводиться з базису в число небазисних змінних. Вибір індексу r визначається умовою $b_r/a_{r,s} = \min(b_i/a_{i,s})$, де $a_{i,s} > 0$.

Перш ніж приступити до подальшої оптимізації, необхідно привести систему граничних рівнянь і цільову функцію до її канонічного вигляду.

Для цього нову базову змінну x_s слід виключити з усіх рівнянь (3.1), крім рівняння прямої r , де коефіцієнт при x_s повинен дорівнювати одиниці.

З прямої r знайдіть змінну x_s і підставляємо значення x_s в усі інші рівняння.

Перший крок оптимізації завершено. Новий етап оптимізації проводиться шляхом повторних обчислень за вищезазначеним алгоритмом.

Зауваження. При виконанні обчислень кроку 2 може статися так, що мінімальне співвідношення однакове для декількох чисел і потрібно розв'язувати відразу кілька рядків таблиці. Якщо вибрати провідний ряд довільно, то це може привести до циклу алгоритму симплексного методу (вироджений відмінок). Щоб цього уникнути, *рекомендується робити цей вибір за наступним правилом: для даних рядків таблиці обчислюються такі відношення: a_{i1}/a_{ia} і знаходиться рядок, для якого це відношення є мінімальним.* Якщо такий рядок один, то він вважається провідним. В іншому випадку обчислюються наступні відношення: a_{i2}/a_{ia} і т.д. В результаті ми отримуємо єдиний провідний рядок.

Незважаючи на те, що симплексний метод є досить ефективним алгоритмом, який показав хороші результати при розв'язання прикладних задач ЛП, він являє собою алгоритм з експоненціальною складністю. Причиною цього є комбінаторний характер симплексного методу, який послідовно перебирає вершини многогранника допустимих рішень у пошуках оптимального розв'язку.

Приклад 3.1. Менеджер готелю планує оптимізувати приготування двох видів сніданків: континентальний (А) та англійський (В). Для приготування цих сніданків використовуються обмежені ресурси: яйця, хліб, та бекон. Ресурси на день: яйця – 30 штук, хліб – 40 шматків, бекон – 20 порцій. Потреби на 1 сніданок наведено в таблиці. Прибуток з одного сніданку А становить 5 грн, В – 8 грн.

Ресурс	Сніданок А (континентальний)	Сніданок В (англійський)
Яйця	1	2
Хліб	2	1
Бекон	1	2

Розв’язання. Складемо математичну модель, позначивши: x_1 – кількість сніданків А, x_2 – кількість сніданків В.

Цільова функція (максимізація прибутку):

$$\text{Maximize } Z = 5x_1 + 8x_2$$

Обмеження:

$$\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 \leq 30(\text{яйця}) \\ 2x_1 + 1x_2 \leq 40(\text{хліб}) \\ 1x_1 + 2x_2 \leq 20(\text{бекон}) \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Крок 1. Введення додаткових змінних

$$x_1 + 2x_2 + s_1 = 30$$

$$2x_1 + x_2 + s_2 = 40$$

$$x_1 + 2x_2 + s_3 = 20$$

Цільова функція в канонічному вигляді:

$$Z = 5x_1 + 8x_2 \Rightarrow -5x_1 - 8x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + Z = 0$$

Початкова симплекс-таблиця матиме вигляд:

Базис	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Вільний член
s_1	1	2	1	0	0	30
s_2	2	1	0	1	0	40
s_3	1	2	0	0	1	20
Z	-5	-8	0	0	0	0

Ітерація 1

Вибір ведучого стовпця:

$$\min(Z) = -8 \Rightarrow x_2$$

Для цього знайдемо частки:

$$30/2=15$$

$$40/1=40$$

$$20/2=10 - \text{мінімум}$$

Отже, ведучим елементом є x_2 рядка 3.

Далі приведемо ведучий елемент (2) до 1, поділивши рядок 3 на 2:

$$[0.5, 1, 0, 0, 0.5 \mid 10]$$

Заміна інших рядків:

$$R1 := R1 - 2 \cdot R3$$

$$R2 := R2 - 1 \cdot R3$$

$$Z := Z + 8 \cdot R3$$

Нова таблиця:

Базис	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Вільний член
s_1	0	0	1	0	-1	10
s_2	1.5	0	0	1	-0.5	30
x_2	0.5	1	0	0	0.5	10
Z	-1	0	0	0	4	80

Ітерація 2

Вибір ведучого стовпця:

$$\min(Z) = -1 \Rightarrow x_1$$

Знайдемо частки:

$$10/0 = \infty \text{ — не розглядається}$$

$$30/1.5 = 20$$

$$10/0.5 = 20$$

Мінімум: рядок 2 (s_2).

Приведемо 1.5 до 1, для чого рядок 2 поділимо 1.5:

$$[1, 0, 0, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \mid 20]$$

Заміна інших рядків:

$$R1 := R1 - 0 \cdot R2 \text{ (без змін)}$$

$$R3 := R3 - 0.5 \cdot R2$$

$$Z := Z + 1 \cdot R2$$

Отримаємо фінальну таблицю:

Базис	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Вільний член
s_1	0	0	1	0	-1	10
x_1	1	0	0	$2/3$	$-1/3$	20
x_2	0	1	0	$-1/3$	$2/3$	0
Z	0	0	0	$2/3$	3.67	100

Матимемо остаточний результат: $x_1 = 20$, $x_2 = 0$. Максимальний прибуток: $Z = 5 \cdot 20 + 8 \cdot 0 = 100$.

Висновок: для максимального прибутку готель повинен приготувати 20 континентальних сніданків (x_1), 0 англійських сніданків (x_2). Прибуток становитиме 100 грн.

Приклад 3.2. Нехай підприємство виготовляє x_1 одиниць продукції П1 і x_2 одиниць продукції П2. Оскільки виробництво продукції П1 і П2 обмежено сировиною, що є в наявності на підприємстві, і попитом на дану продукцію, а також враховуючи невід’ємність виготовлених виробів, мають виконуватись наступні нерівності:

$$3x_1 + 4x_2 \leq 16; \text{ (обмеження запасу сировини А)}$$

$$3x_1 + 3x_2 \leq 12; \text{ (обмеження запасу сировини В)}$$

$$x_1 - x_2 \leq 2; \text{ (обмеження співвідношення попиту на П1 і П2)}$$

$$x_2 \leq 2; \text{ (обмеження попиту на продукцію П2)}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \text{ (умов невід’ємності об’ємів виробництва П1 і П2)}$$

Прибуток від реалізації x_1 одиниць продукції П1 і x_2 одиниць продукції П2 складе $F = 4x_1 + 6x_2$ (цільова функція задачі). Таким чином, приходимо до наступної математичної задачі: серед всіх невід’ємних розв’язків даної системи лінійних нерівностей потрібно знайти таке, при якому функція F набуде максимального значення.

Математична постановка має наступний вигляд:

цільова функція $f(X) = 4x_1 + 6x_2 \rightarrow \max;$

обмеження:

$$3x_1 + 4x_2 \leq 16;$$

$$3x_1 + 3x_2 \leq 12;$$

$$x_1 - x_2 \leq 2;$$

$$x_2 \leq 2;$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Побудуємо багатокутник розв’язків (**рис. 3.3**). Для цього в системі координат на площині зобразимо граничні прямі:

$$3x_1 + 4x_2 = 16 - (L1);$$

$$3x_1 + 3x_2 = 12 - (L2);$$

$$x_1 - x_2 = 2 - (L3);$$

$$x_2 = 2 - (L4).$$

Взявши будь-яку точку, наприклад, початок координат, встановимо, яку напівплощину визначає відповідна нерівність. Напівплощини, що визначаються нерівностями, на **рис. 3.3** показані стрілками. Областю розв’язків є багатокутник $OABCD$.

Для побудови прямої $f(X) = 4x_1 + 6x_2 = 0$ будуємо вектор-градієнт $\bar{C} = (4; 6)$ і через точку $O=(0;0)$ проводимо пряму, перпендикулярну йому. Побудовану пряму $f(X) = 0$ переміщуємо паралельно самій собі в напрямі вектору $\bar{C}$. З **рис. 3.3** видно, що в точці В функція набуває максимального значення.

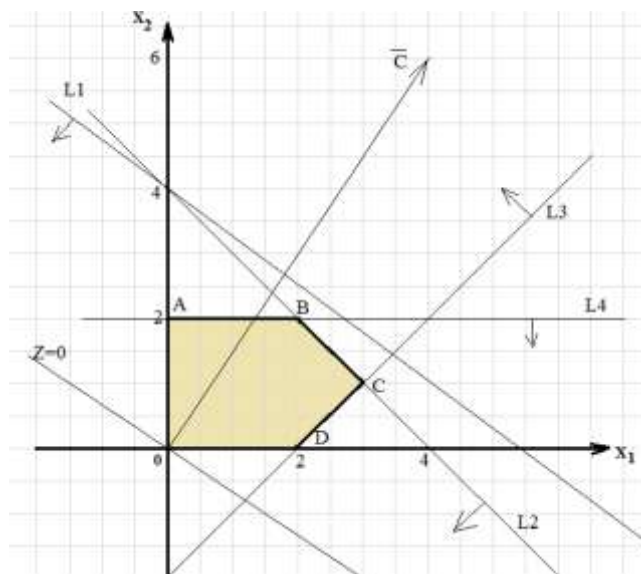


Рис. 3.3. Розв'язання ЗЛП графічним методом

Точка В лежить на перетині прямих L_4 і L_2 . Для визначення її координат розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 = 12; \\ x_2 = 2. \end{cases}$$

Оптимальний розв'язок задачі $x_1 = 2$, $x_2 = 2$. Підставляючи значення x_1 і x_2 в цільову функцію, отримаємо: $f(X) = 4 \cdot 2 + 6 \cdot 2 = 20$. Отриманий розв'язок означає, що об'єм виробництва продукції П1 має бути 2 од., продукції П2 – 2 од. Прибуток, отриманий у даному випадку, складає: $f(X) = 20$ д. о.

3.3. Задачі нелінійного програмування

У загальному випадку задача нелінійного програмування (ЗНП) сформулюється наступним чином:

$$\begin{cases} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max(\min). \\ g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_i, i = \overline{1, m} \\ \dots \\ g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq b_i, i = \overline{m_1 + 1, m_2} \\ g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_i, i = \overline{m_2 + 1, m} \end{cases}$$

де x_j – керуючі змінні або розв'язки ЗНП, $j = \overline{1, n}$; b_i – фіксовані параметри, $i = \overline{1, m}$; $f, g_i, i = \overline{1, n}$ – задані функції от n перемених.

Якщо f і g_i лінійні, то вищевикладені рівняння переходять в задачу лінійного програмування.

Розв'язати задачу нелінійного програмування означає знайти такі значення керуючих змінних x_j , $j = \overline{1, n}$, які задовольняють системі обмежень і надають максимум або мінімум функції f .

Для задачі нелінійного програмування, на відміну від лінійних задач, немає єдиного методу розв'язування. В залежності від виду цільової функції і обмежень розроблено декілька спеціальних методів розв'язання.

Розглянемо **класифікацію чисельних методів** розв'язання задач нелінійного програмування:

1. Чисельні методи пошуку екстремуму функції однієї змінної (класичний метод, метод рівномірного перебору, метод золотого перерізу, метод Фібоначчі, тощо).

2. Чисельні методи пошуку екстремуму функції n – змінних: чисельні методи в задачах без обмежень (метод покоординатного спуску, метод Хука – Дживса, градієнтний метод, метод Ньютона, метод спряжених напрямків тощо), чисельні методи в задачах із обмеженнями (метод покоординатного спуску, метод умовного градієнта, метод бар'єрних функцій, метод штрафних функцій, метод лінеаризації, тощо).

Зазначимо, що нелінійне моделювання технічних і економічних задач часто буває штучним.

Значна кількість методів нелінійного програмування відповідно до способу визначення кроку $\Delta x(k)$ може бути віднесена до одного з трьох основних класів:

- 1) градієнтні методи;
- 2) безградієнтні методи детермінованого пошуку;
- 3) методи випадкового пошуку.

Градiєнтні методи пошуку оптимуму цільової функції базуються на використанні двох основних властивостей градієнта функції.

1. Градієнт функції $\nabla R(x)$ – це вектор, який в кожній точці області визначення функції $R(x)$ спрямований по нормалі до поверхні рівня, проведеної через цю точку. Проекції градієнта $\nabla R(x)$ на осі координат дорівнюють частковим похідним функції $R(x)$ по відповідним змінним:

$$\nabla R(x) = \left(\frac{\partial R}{\partial x_1}, \frac{\partial R}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial R}{\partial x_n} \right).$$

2. Напрямок градієнта характеризує напрямок найбільшого зростання функції.
До градієнтних методів відносяться: метод релаксації, градієнта, найшвидшого спуску та ряд інших.

Безградієнтні методи використовують у процесі пошуку інформації, одержувану не під час аналізу похідних, як від порівняльної оцінки критерію оптимальності результаті виконання чергового кроку. Деякі з цих методів доцільно застосовувати разом із градієнтними методами, що дозволяє іноді побудувати досить ефективні алгоритми на вирішення завдань нелінійного програмування.

Крім того, безградієнтні методи найбільш придатні для оптимізації діючих промислових та лабораторних установок в умовах відсутності математичного опису об'єкта оптимізації.

До безградієнтних методів детермінованого пошуку належать: метод локалізації екстремуму функції, метод «золотого перерізу», метод пошуку з використанням чисел Фібоначчі, метод Гаусса-Зейделя, метод сканування.

Основна ідея **методів випадкового пошуку** полягає в тому, щоб перебором випадкових сукупностей значень незалежних змінних знайти оптимум цільової функції або напрямок руху до нього. Загальним для всіх методів випадкового пошуку є застосування випадкових чисел в процесі пошуку.

Геометрична інтерпретація ЗНП. Графічний метод розв'язання

Розглянемо ЗНП, що містить дві змінні.

$$\begin{cases} f(x_1, x_2) \rightarrow \max(\min). \\ g_i(x_1, x_2) \leq b_i, i = \overline{1, m_1} \\ (x_1, x_2) \geq b_i, i = \overline{m_1 + 1, m_2} \\ g_i(x_1, x_2) = b_i, i = \overline{m_2 + 1, m} \end{cases}$$

Система обмежень визначає в n -мірному просторі деяку область, яка є областю допустимих розв'язків задачі.

Розв'язати ЗНП графічно – це означає знайти точку в області допустимих розв'язків, через яку проходить лінія $f(x_1, x_2) = C$ найвищого (найнижчого) рівня.

Указана точка може знаходитися як на границі, так і всередині області допустимих розв'язків, на відміну від задач лінійного програмування.

Так само, як і для лінійних задач, ЗНП зручно розв'язувати графічно, коли функція і обмеження містять дві змінні.

Алгоритм розв'язування ЗНП графічним методом

1. На площині $x_1 O x_2$ будуємо область допустимих розв'язків, що визначається заданими обмеженнями. Якщо вона порожня, тобто обмеження несумісні, то задача не має розв'язку. В протилежному випадку переходимо до наступного кроку.

2. Будуємо лінію рівня функції $f(x_1, x_2) = C$, де C – деяка константа. Перехід до кроку 3.

3. Визначаємо напрям зростання (при максимізації), спадання (при мінімізації) функції f .

4. Знаходимо точку області допустимих розв'язків, через яку проходить лінія рівня $f(x_1, x_2) = C$ із найбільшим (при максимізації), найменшим (при мінімізації) значенням C або встановлюємо необмеженність функції на області допустимих розв'язків.

5. Визначаємо значення x_1, x_2 для точки, знайденої на кроці 4, і величину функції f в цій точці.

Метод множників Лагранжа

Якщо обмеження ЗНП є рівняннями, то для її розв'язання можна використовувати метод множників Лагранжа. Основою методу є введення у розв'язок допоміжної функції Лагранжа. Функція Лагранжа утворена двома доданками. Перший доданок – сама цільова функція, другий доданок – сума добутків особливих змінних u_i (множників Лагранжа) на різниці $b_i - g_i(x_1; x_2; \dots; x_n)$.

$$L(x_1; x_2; \dots; x_n; y_1; y_2; \dots; y_m) = Z(x_1; x_2; \dots; x_n) + \sum_{i=1}^m y_i(b_i - g_i(x_1; \dots; x_n)).$$

Розв'язання задачі ґрунтується на наступних діях:

- визначення частинних похідних функції Лагранжа за змінними x_j і y_i ;
- визначення координат стаціонарних точок функції Лагранжа;
- аналіз функції Лагранжа на випуклість-ввігнутість за змінними x_j ;
- отримання висновків: увігнутість функції Лагранжа за змінними x_j означає, що

в даній точці функція Z досягає максимуму на області допустимих розв'язків задачі; випуклість L означає, що в цій точці Z досягає мінімуму на області допустимих розв'язків задачі.

Для визначення координат стаціонарних точок функції Лагранжа слід прирівняти частинні похідні функції першого порядку до нуля і сформулювати з даних рівнянь систему. Розв'язок цієї системи є стаціонарні точки функції Лагранжа.

Метод, заснований на використанні множників Лагранжа, достатньо розподілений при розв'язуванні задач нелінійного програмування.

Гرادієнтний метод

Найбільшою універсальністю при розв'язуванні задач нелінійного програмування характеризується градієнтний метод. Градієнтний метод засновано на використанні градієнта цільової функції і має різні модифікації.

Розглянемо основні кроки процедури градієнтного методу.

1. Обираємо в ОДР початкову точку X_0 .
2. Записуємо загальний вираз градієнта (або антиградієнта) цільової функції $\nabla Z = (Z_{x_1}', Z_{x_2}', \dots; Z_{x_n}')$ або $-\nabla Z = (-Z_{x_1}', -Z_{x_2}', \dots; -Z_{x_n}')$.

3. Визначаємо значення компонент градієнту або антиградієнта в точці X_0 .

4. Записуємо вираз для переходу в точку X_1

$$X_1 = X_0 + \lambda \nabla Z(X_0)$$

5. Для обчислення довжини кроку λ записуємо вираз $\nabla Z(X_1) = \nabla Z(X_0 + \lambda \nabla Z(X_0))$

Обчислюємо довжину кроку за рівнянням $\nabla Z(X_0) \cdot \nabla Z(X_1) = 0$

6. Знаходимо координати X_1 .

7. Знаходимо $\nabla Z(X_1)$ або кратний йому вектор l .

8. Відтворюємо дії до тих пір, поки в черговій точці X_k градієнт (або антиградієнт) функції не перетворюється на нуль $\nabla Z(X_k) = 0$.

Зауваження. Необхідно перевірити дану точку на приналежність ОДР.

Наступні кроки характеризують розв'язання для випадків, коли оптимум не всередині ОДР, але на її межі.

9. Повертаємось на межу ОДР. З цією метою з'ясуємо, якому обмеженню не задовольняє чергова точка X_{k+1} . З точки X_k ми попали в неї за допомогою виразу $X_{k+1} = X_k + \lambda l$. Для кожної окремої координати цей вираз записуємо у вигляді $x_j^{(k+1)} = x_j^{(k)} + \lambda l_j (j = \overline{1, n})$. Вочевидь, для повернення на межу ОДР нам необхідно змінити довжину кроку λ . Запишемо i -е обмеження, якому не задовольняє точка X_{k+1}

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i.$$

Щоб вийти на необхідну довжину кроку λ^0 перепишемо вираз

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \left(x_j^{(k)} + \lambda^0 l_j \right) = b_i.$$

$$\text{Звідки отримаємо } \lambda^0 = \frac{b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j^{(k)}}{\sum_{j=1}^n a_{ij}l_j}.$$

Якщо таких обмежень декілька, то серед декількох λ^0 обираємо найменше.

10. Визначаємо $X_{k+1}^0 = X_k + \lambda^0 l$. Дана точка належить межі ОДР.

11. На межі ОДР визначаємо напрям бажаної зміни цільової функції. З цією метою візьмемо в знайденій точці X_{k+1}^0 похідну за напрямком l^* .

12. Записуємо вираз для точки оптимуму $X_{opt} = X_{k+1}^0 + \lambda^* l^*$, крім того, скористаємось додатковим записом $\nabla Z(X_{opt}) = \nabla Z(X_{k+1}^0 + \lambda^* l^*)$. Для отримання довжини кроку λ^* використовуємо рівняння $\nabla Z(X_{opt}) \cdot l^* = 0$.

13. Розраховуємо координати точки оптимуму і екстремальне значення цільової функції.

Приклад 3.3. Розв'яжіть ЗНП графічним методом:

$$f = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max(\min).$$

$$\begin{cases} x_1 x_2 \geq 3; \\ x_1^2 + x_2^2 \leq 16; \\ x_1 \geq 0; \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

У відповідності з алгоритмом побудуємо на площині $x_1 O x_2$ область допустимих розв'язків (**рис. 3.4**).

Обмеження $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ виділяють на площині $x_1 O x_2$ першу чверть. Межа напівплощини, відповідної першому обмеженню, є гіпербола:

$$x_2 = \frac{3}{x_1}.$$

Нерівність виконується для точок, що лежать вище за гіперболу. Межею напівплощини, що визначається другим обмеженням, є коло з центром у точці $(0,0)$ і радіусом, рівним 4. Шукана напівплощина заштрихована вертикальним штрихуванням. Область допустимих розв'язків виділена горизонтальним штрихуванням.

Функція зростає в напрямку вектору-нормалі $\bar{n}$ с координатами $(2,3)$, і її лінії рівня розміщені перпендикулярно вектору-нормалі $\bar{n}$. Таким чином, максимум досягається в точці **A**, а мінімум – в точці **B**.

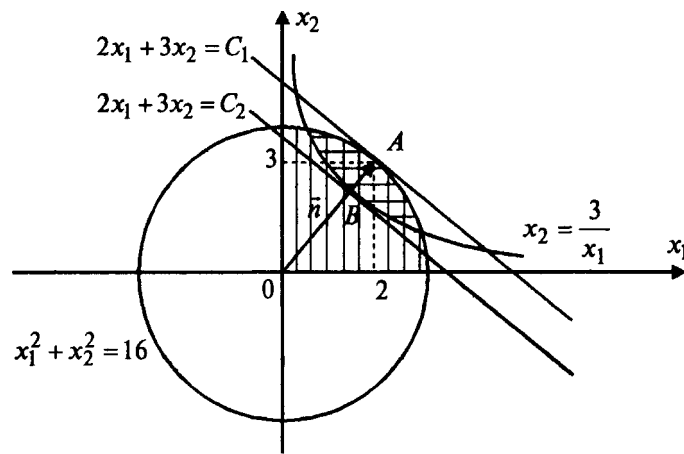


Рис. 3.4. Область допустимих розв'язків

Відмітимо, що в точці **A** співпадають тангенси кутів нахилу дотичної до кола $x_1^2 + x_2^2 = 16$ і прямої $2x_1 + 3x_2 = C_1$ до осі $0x_1$. Тангенси кутів нахилу дотичної і прямої до осі $0x_1$ визначають значеннями похідних по x_1 відповідних функцій. Для прямої $x_2 = -\frac{2}{3}x_1 + \frac{C_1}{3}$ тангенс дорівнює $-2/3$.

Продиференціюємо вираз $x_1^2 + x_2^2 = 16$ як неявну функцію від x_1 . Отримаємо:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2x_2' &= 0, \\ x_2' &= -\frac{x_1}{x_2}. \end{aligned}$$

Прирівняємо значення тангенсів, отримаємо:

$$\begin{aligned} -\frac{x_1}{x_2} &= -\frac{2}{3}; \\ 3x_1 - 2x_2 &= 0. \end{aligned}$$

До цього рівняння додаємо рівняння кола, якому належить точка **A**. Отримаємо систему:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 = 16. \end{cases}$$

Розв'язавши її, знайдемо оптимальний розв'язок

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{12}{\sqrt{13}}; \\ x_2 &= \frac{12}{\sqrt{13}}; \\ f_{max} &= \frac{52}{\sqrt{13}}. \end{aligned}$$

Аналогічно визначимо координату точки **B**, в якій тангенс кута нахилу до осі $0x_1$ прямої $2x_1 + 3x_2 = C_2$ співпадає з тангенсом кута нахилу дотичної до функції $x_1x_2 = 3$.

$$x_2 = \frac{3}{x_1},$$

$$x_2' = -\frac{3}{x_1^2}.$$

Отримаємо рівняння

$$-\frac{3}{x_1^2} = -\frac{2}{3}.$$

Другим для знаходження координат точки є рівняння гіперболи, якій належить точка **B**:

$$\begin{cases} -\frac{3}{x_1^2} = -\frac{2}{3}; \\ x_1 x_2 = 3. \end{cases}$$

З останньої системи знайдемо оптимальний розв'язок, відповідне мінімальному значенню f :

$$x_1 = \frac{3}{\sqrt{2}};$$

$$x_2 = \sqrt{2};$$

$$f_{min} = \frac{12}{\sqrt{2}}.$$

Приклад 3.4. За допомогою методу множників Лагранжа розв'язати знайти $\max(\min) Z = 6 - 4x_1 - 3x_2$ при обмеженнях $x_1^2 + x_2^2 = 1$ без вимоги невід'ємності змінних.

Складемо функцію Лагранжа:

$$L(x_1; x_2; y) = (6 - 4x_1 - 3x_2) + y(1 - x_1^2 - x_2^2).$$

Визначимо її частинні похідні:

$$L'_{x_1} = -4 - 2x_1 y;$$

$$L'_{x_2} = -3 - 2x_2 y;$$

$$L_{y'} = 1 - x_1^2 - x_2^2.$$

Знайдемо координати стаціонарних точок функції L шляхом розв'язання наступної системи рівнянь:

$$\begin{cases} -4 - 2x_1 y = 0; \\ -3 - 2x_2 y = 0; \\ 1 - x_1^2 - x_2^2 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання даної системи:

$$x_1^{(1)} = \frac{4}{5}; x_2^{(1)} = \frac{3}{5}; y^{(1)} = -\frac{5}{2} \quad \text{і} \quad x_1^{(2)} = -\frac{4}{5}; x_2^{(2)} = -\frac{3}{5}; y^{(2)} = \frac{5}{2}.$$

Вони являють собою координати двох стаціонарних точок функції Лагранжа. Проведемо аналіз функції Лагранжа на випуклість-увігнутість за змінними x_j за допомогою других частинних похідних. Другі частинні похідні по x_j :

$$\begin{aligned} L''_{x_1 x_1} &= -2y; \quad L''_{x_1 x_2} = 0; \\ L''_{x_2 x_1} &= 0; \quad L''_{x_2 x_2} = -2y. \end{aligned}$$

Складемо з них матрицю $\begin{pmatrix} -2y & 0 \\ 0 & -2y \end{pmatrix}$. Визначаємо значення компонент матриці в першій стаціонарній точці $\begin{pmatrix} 50 \\ 05 \end{pmatrix}$. Випуклість функції очевидна, оскільки $|5| = 5 > 0$; $\begin{vmatrix} 50 \\ 05 \end{vmatrix} = 25 > 0$. Таким чином, в першій стаціонарній точці цільова функція Z досягає найменшого значення на ОДР задачі. Визначаємо значення компонент матриці в другій стаціонарній точці $\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$. Очевидна увігнутість функції, оскільки $-|5| = -5 < 0$; $\begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = 25 > 0$. Таким чином, Z в другій стаціонарній точці досягає максимального значення. Мінімальне і максимальне значення цільової функції визначається шляхом підстановки в її формулу значень x_j у даних стаціонарних точках.

Приклад 3.5. Обробка статистичних даних показала, що виробнича функція, що пов'язує випуск готової продукції підприємства з чисельністю робочих x_1 і виробничих фондами x_2 , має вигляд $Z = 3x_1 \cdot x_2$. Загальні затрати підприємства на заробітну плату і обладнання визначаються співвідношеннями $2x_1 + x_2 = 60$.

Потрібно визначити затрати підприємства на закупівлю обладнання і витрати на заробітну плату, при яких випуск продукції буде максимальним.

Для розв'язування складаємо функцію Лагранжа:

$$F(x_1, x_2, \lambda) = 3x_1 x_2 + \lambda(2x_1 + x_2 - 60).$$

Знаходимо частинні похідні цієї функції по x_1, x_2, λ і, виходячи з необхідності умови екстремуму функції Лагранжа, прирівнюємо їх до нуля.

Отримаємо систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_1} = 3x_2 + 2\lambda = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} = 3x_1 + \lambda = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 2x_1 + x_2 - 60 = 0. \end{cases}$$

Звідси $x_1 = -\frac{\lambda}{3}, x_2 = -\frac{2\lambda}{3}$ і тоді $-\frac{2\lambda}{3} - \frac{2\lambda}{3} - 60 = 0$. Знаходимо, що $\lambda = -45$.

Отримаємо $x_1 = 15, x_2 = 30$.

Тепер необхідно впевнитись, що в точці $(15;30)$ функція F досягає max. Для цього розглянемо окіл точки $(15;30)$ і складемо приріст функції

$$\Delta F = F(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \lambda + \Delta \lambda) - F(x_1, x_2, \lambda) = (3(15 + \Delta x_1)(30 + \Delta x_2) + (-45 + \Delta \lambda)(2(15 + \Delta x_1) + (30 + \Delta x_2) - 60)) - (3 \cdot 15 \cdot 45 + (-45)(2 \cdot 15 + 30 - 60)) = 3 \cdot \Delta x_1 \cdot \Delta x_2 + \Delta \lambda(2 \cdot \Delta x_1 + \Delta x_2).$$

Оскільки за умовою $2(x_1 + \Delta x_1) + (x_2 + \Delta x_2) = 60$, или $2(15 + \Delta x_1) + (30 + \Delta x_2) = 60$, то $2 \cdot \Delta x_1 + \Delta x_2 = 0$, або $\Delta x_2 = -2 \cdot \Delta x_1$.

Підставимо це співвідношення в ΔF :

$$\Delta F = 3 \cdot \Delta x_1 \cdot (-2 \cdot \Delta x_1) + \Delta \lambda(2 \cdot \Delta x_1 - 2 \cdot \Delta x_1) = -6(\Delta x_1)^2 < 0$$

при будь-яких x_2 .

Це показує, що в точці $x_1 = 15; x_2 = 30$ функція Лагранжа досягає max, рівного F_{max} .

Контрольні запитання при вивченні теми

1. Що таке задача оптимізації? У чому полягає її загальна постановка?
2. Які бувають види цільових функцій? Наведіть приклади.
3. Які типи обмежень можуть зустрічатися в оптимізаційних задачах?
4. Які основні етапи розв'язання задач оптимізації?
5. Як класифікують методи математичного програмування?
6. У чому полягає відмінність між лінійним, нелінійним, цілочисельним і динамічним програмуванням?
7. Де застосовуються методи оптимізації у практичній діяльності (економіка, логістика, ресторанна справа тощо)?
8. Які методи розв'язання задачі лінійного програмування ви знаєте (графічний, симплекс-метод)?
9. У чому полягає суть графічного методу? Для яких задач його можна застосувати?
10. Чим відрізняється задача нелінійного програмування (НЛП) від лінійної?

Список літератури

1. Павленко П. М., Філоненко С. Ф., Чередніков О. М., Трейтяк В. В. Математичне моделювання систем і процесів: навч. посіб. К. : НАУ, 2017. 392 с.
2. Дослідження операцій та методи оптимізації [Електронний ресурс] : методичні рекомендації до практичних завдань для студентів усіх спеціальностей першого (бакалаврського) рівня / уклад. С. В. Прокопович, О. В. Панасенко, Л. О. Чаговець. Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2019. 64 с.
3. Левчук О. В. Вища та прикладна математика. Частина І: Навчальний посібник / О. В. Левчук, В. Г. Дзісь, О. М. Дячинська. Вінниця: ВНАУ, 2021. 439 с.
4. Шелудько Г. А., Науменко В. В., Стрельнікова О. О. Методи розв'язання задач оптимізації : конспект лекцій. Харків: УкрДАЗТ, 2014. 50 с.
5. Яковлева А. П. Методи оптимізації та дослідження операцій. Конспект лекцій [Електронний ресурс] : навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою «Системний аналіз» спеціальності 124 Системний аналіз / А. П. Яковлева. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 71 с.

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА ОСНОВИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

- 4.1. Випадкові величини, їх закони розподілу та числові характеристики.
- 4.2. Основні поняття математичної статистики: вибіркові спостереження та вибіркові оцінки.
- 4.3. Вибірковий метод у вивченні соціально-економічних явищ і процесів.

4.1. Випадкові величини, їх закони розподілу та числові характеристики

Теорія ймовірностей вивчає математичні моделі масових однорідних випадкових явищ (експериментів), які мають властивість стійкості частот. Експеримент визначається певною сукупністю умов і його можливими результатами. Наслідки експерименту (або випробування) називаються випадковими подіями, тобто **випадкова подія** - це подія, яка може відбутись або ні, внаслідок проведення деякого експерименту, результат якого наперед точно передбачити не можна. Подія називається **елементарною**, якщо її не можна розкласти на більш прості події. В протилежному випадку подія називається **складеною**. Наприклад, якщо експеримент - підкидання грального кубика, то події ω_i - "випало i очок" ($i = \overline{1,6}$) є елементарними. Вони вичерпують всі можливі результати цього експерименту. Очевидно, що подія A - «випало парне число очок» є складеною, вона відбувається, коли відбувається одна з елементарних подій $\omega_2, \omega_4, \omega_6$.

Означення 1. Простором елементарних подій, який описує дане випробування, називають довільну множину, між елементами якої і всіма можливими результатами цього випробування можна встановити взаємно однозначну відповідність.

Простір елементарних подій будемо позначати буквою Ω , елементарні події малими буквами ω (можливо з індексами) і називати точками простору. Ми будемо розглядати тільки скінченні простори: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$, $N(\Omega) = n$.

Означення 2. Випадковими подіями називатимемо будь-які підмножини простору елементарних подій і позначатимемо їх буквами A, B, C ...

При цьому простір Ω називають достовірною або вірогідною подією, а порожню множину - неможливою подією.

Між випадковими подіями встановлюються певні відношення.

Означення 3. Кажуть, що подія A викликає подію B , або A є окремим випадком B , або B є наслідком A , якщо з відбуванням події A обов'язково відбувається подія B .

Позначають це відношення символом " $\subseteq$ " (включення) і пишуть $A \subseteq B$. Дане відношення має очевидні властивості:

- а) $A \subseteq A$ (рефлексивність),
- б) $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \rightarrow A \subseteq C$ (транзитивність).

Означення 4. Події A і B називаються рівними, якщо A викликає B і B викликає A .

Позначають відношення рівності символом " $=$ " і пишуть $A = B$. Відповідно до означення

$$A = B \leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

Відношення рівності є відношенням еквівалентності, тобто має властивості:

- а) $A = A$ (рефлексивність),
- б) $A = B \rightarrow B = A$ (симетричність),
- в) $A = B \wedge B = C \rightarrow A = C$ (транзитивність).

Операції над подіями та їх властивості (алгебра випадкових подій)

Над випадковими подіями (як над множинами) можна виконувати певні операції.

Означення 5. Сумою (або об'єднанням) двох подій A і B називається подія C , яка відбувається, коли відбувається принаймні одна з цих подій.

Позначають: $C = A + B = A \cup B$.

Означення 6. Добутком (або перерізом) двох подій A і B називають подію D яка відбувається, коли одночасно відбуваються обидві події.

Позначають: $D = AB = A \cap B$.

Події A і B називаються *несумісними*, якщо їх добуток - неможлива подія, тобто $AB = \emptyset$.

Означення 7. Різницею двох подій A і B називають подію E , яка відбувається, коли відбувається A і не відбувається B .

Позначають: $E = A - B = A \setminus B$.

Означення 8. Протилежною до події A називають подію $\bar{A} = \Omega - A$.

Означення 9. Симетричною різницею двох подій A і B називають подію F , яка відбувається, коли відбувається A і не відбувається B або відбувається B і не відбувається A .

Позначають симетричну різницю символом Δ . Відповідно до означення :

$$A \Delta B = (A - B) + (B - A).$$

Множина випадкових подій відносно означених операцій утворює булеву алгебру, тобто виконуються такі рівності:

- 1) $A + B = B + A, AB = BA$ (комутативність)
- 2) $A + (B + C) = (A + B) + C, A(BC) = (AB)C$ (асоціативність)
- 3) $(A + B)C = AC + BC, AB + C = (A + C)(B + C)$ (дистрибутивність)
- 4) $\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}, \overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$ (закони де Моргана)
- 5) $A + A = A, AA = A$ (закони ідемпотентності)
- 6) $A + \emptyset = A, A + \Omega = \Omega, A\emptyset = \emptyset, A\Omega = A$ (закони нуля і одиниці)
- 7) $A + \bar{A} = \Omega, A\bar{A} = \emptyset, \bar{\bar{A}} = A$.

Класичне означення ймовірності. Нехай простір елементарних подій $\Omega = \{\omega_i\}$ скінченна множина ($N(\Omega) = n$) і всі елементарні події ω_i рівноможливі.

Рівноможливість означає, що ні одна з них не має переваг перед іншою, тобто всі мають однакові шанси на реалізацію при даному експерименті. Нехай $A = \{\omega_{ik}\}$ - деяка випадкова подія і $N(A) = m$. Число n називають числом всіх можливих наслідків випробування, а число m - числом наслідків випробування, які сприяють події A . Можливість появи події A при заданому випробуванні може бути охарактеризована за допомогою числа, що називається ймовірністю події.

Означення 10. Ймовірністю події A називають відношення числа наслідків випробування, що сприяють появі події A , до числа всіх можливих наслідків цього ж випробування.

Позначають ймовірність події A символом $P(A)$. Відповідно до означення

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} \equiv \frac{m}{n}$$

Властивості ймовірності:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$;
 2. $P(A) = 0 \leftrightarrow A = \emptyset$;
 3. $P(A) = 1 \leftrightarrow A = \Omega$;
 4. $AB = \emptyset \rightarrow P(A + B) = P(A) + P(B)$ (теорема додавання для несумісних подій);
 5. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$;
 6. $A_i A_j = \emptyset (i \neq j) \rightarrow P(\sum_{k=1}^n A_k) = \sum_{k=1}^n P(A_k)$ (теорема додавання для попарно несумісних подій);
 7. $A \subseteq B \rightarrow P(A) \leq P(B)$ (монотонність ймовірності);
 8. $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ (теорема додавання для довільних подій);
 9. $P(\sum_{k=1}^n A_k) = \sum_{k=1}^n P(A_k) - \sum_{i < j} P(A_i A_j) + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots A_n)$.
- Для знаходження ймовірності події можна запропонувати такий алгоритм:
- I. Будуємо простір елементарних подій Ω та обчислюємо $N(\Omega)$.
 - II. Описуємо подію A і обчислюємо $N(A)$.
 - III. Знаходимо шукану ймовірність за формулою $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} \equiv \frac{m}{n}$.

Зауваження. Класичним означенням ймовірності можна користуватись, якщо множина можливих наслідків стохастичного експерименту скінченна і ці наслідки рівноможливі. У випадку порушення хоч однієї з цих вимог, означення незастосовне. В зв'язку з цим, поряд з класичним використовується **статистичне (частотне) означення ймовірності**, згідно з яким за ймовірність події A наближено приймають її відносну частоту.

Умовна ймовірність та її властивості. Якщо ймовірність події A обчислюється при умові, що відбувалась подія B , то така ймовірність називається **умовною ймовірністю** і позначається символом $P(A/B)$. Ймовірність $P(A)$ називається

безумовною. Розглянемо випадок класичного означення ймовірності. Нехай Ω - простір елементарних подій, A, B - деякі випадкові події. При знаходженні $P(A/B)$ можливими наслідками випробування потрібно вважати ті, при яких настає подія B , а сприятливими - ті, при яких відбуваються обидві події A і B , тобто подія AB . Отже, згідно з класичним означенням ймовірності $P(A/B) = \frac{N(AB)}{N(B)}, (N(B) \neq 0)$.

Поділивши чисельник і знаменник у правій частині формули на $N(\Omega)$, будемо мати, що $P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, (P(B) \neq 0)$.

Примітка. Якщо $P(B)=0$, то умовна ймовірність $P(A/B)$ не визначена. Як правило, в цьому випадку її вважають рівною нулю.

Властивості умовної ймовірності:

1. $P\left(\frac{B}{B}\right) = 1$
2. $0 \leq P\left(\frac{A}{B}\right) \leq 1$.
3. $AB = \emptyset \rightarrow P\left(A + \frac{B}{C}\right) = P\left(\frac{A}{C}\right) + P\left(\frac{B}{C}\right)$ (теорема додавання для несумісних подій).
4. $A \subseteq B \rightarrow P\left(\frac{A}{C}\right) \leq P\left(\frac{B}{C}\right)$ (монотонність)
5. $P\left(A + \frac{B}{C}\right) = P\left(\frac{A}{C}\right) + P\left(\frac{B}{C}\right) - P\left(\frac{AB}{C}\right)$ (теорема додавання для довільних подій)
6. $P\left(\frac{\bar{A}}{B}\right) = 1 - P\left(\frac{A}{B}\right)$.
7. $P\left(\frac{\Omega}{B}\right) = 1$.
8. $P\left(\frac{\emptyset}{B}\right) = 0$.

Поняття залежності та незалежності випадкових подій. Теорема множення ймовірностей. Незалежність подій

З формул для обчислення умовної ймовірності безпосередньо випливає теорема множення ймовірностей (для двох подій).

Теорема 1. Ймовірність добутку двох подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність другої при умові, що відбулась перша, тобто $P(AB)=P(A)P(B/A)=P(B)P(A/B)$

Теорема 2. Для довільних подій $A_1, A_2, \dots, A_n$ справедлива формула

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1) \dots P(A_n/A_1 A_2 \dots A_{n-1})$$

Означення 13. Кажуть, що подія A не залежить від події B , якщо умовна і безумовна ймовірності події A рівні, тобто $P(A/B)=P(A)$. Можна довести, що якщо A не залежить від B , то:

- 1) B не залежить від A ;
- 2) A не залежить від $\bar{B}$;
- 3) $\bar{A}$ не залежить від B ;
- 4) $\bar{A}$ не залежить від $\bar{B}$.

Для незалежних подій теорема множення набуває найпростішого вигляду.

Теорема 3. Ймовірність добутку двох незалежних подій дорівнює добутку їх ймовірностей, тобто $P(AB) = P(A)P(B)$.

Зауваження. На практиці незалежність подій встановлюють виходячи з інтуїтивних міркувань, наприклад, відсутності причинного зв'язку, симетрії тощо.

Означення 14. Події $A_1, A_2, \dots, A_n$ називаються **незалежними в сукупності**, якщо для будь-яких $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_r \leq n$ справедлива рівність $P(A_{i_1}A_{i_2}\dots A_{i_r}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\dots P(A_{i_r})$ та **попарно незалежними**, якщо для будь-яких $i \neq j$ $P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j)$.

Очевидно, що події незалежні в сукупності є також попарно незалежними.

Теорема 4. Для незалежних в сукупності подій ймовірність їх добутку дорівнює добутку їх ймовірностей, тобто $P(A_1A_2\dots A_n) = P(A_1)P(A_2)\dots P(A_n)$

Теорема додавання і множення ймовірностей. Для сумісних подій A і B теорема додавання ймовірностей стверджує,

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Для обчислення ймовірності добутку подій можемо використати теорему множення ймовірностей. Зокрема, якщо події залежні, то

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B/A) \text{ або } P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A)P(A/B).$$

Для незалежних подій ці формули набувають вигляду

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B).$$

Ці рівності є математичним записом теореми додавання і множення ймовірностей для двох подій.

Схема Бернуллі. Формула Бернуллі. Нехай відбуваються послідовні незалежні випробування, при кожному з яких може відбутись тільки одна з двох можливих подій: A або $\bar{A}$, відповідно з ймовірностями $P(A)=p$, $P(\bar{A})=q=1-p$. Такі випробування називають випробуваннями Бернуллі, а схему послідовних незалежних випробувань Бернуллі – схемою Бернуллі. Відбування події A будемо називати «успіхом», а події $\bar{A}$ – «невдачею». Позначимо через μ число «успіхів» в серії n послідовних незалежних випробувань Бернуллі. Потрібно знайти ймовірність того, що $\mu = k$, де k – наперед задане невід'ємне ціле число ($0 \leq k \leq n$). Шукану ймовірність позначають $P_n\{\mu = k\}$ або просто $P_n(k)$. Таким чином, $P_n(k)$ – це ймовірність того, що при n випробуваннях подія A відбулася k разів. Згідно з **формулою Бернуллі**

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

Ймовірності $P_n(k)$ називають **біномними ймовірностями**, а формулу - **біномною формулою**.

Формула Пуассона. Якщо подія A в схемі Бернуллі відбувається рідко ($p \approx 0$), то справджується така теорема.

Теорема 1. (Пуассон). Якщо $P_n(k)$ - ймовірність k "успіхів" в серії з n послідовних незалежних випробувань Бернуллі, в кожному з яких ймовірність "успіху" дорівнює $\frac{\lambda}{n}$ ($\lambda = \text{const} > 0, \lambda < n$), то $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

Звідси випливає наближена формула Пуассона для біномних ймовірностей, згідно з якою $P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, (\lambda = np)$.

Формули Байєса (теорема гіпотез)

Якщо виконуються умови, при яких вірна формула повної ймовірності, то за теоремою множення ймовірностей

$$P(A/H_i) = P(A)P(H_i/A) = P(H_i)P(A/H_i).$$

Звідси,

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)} = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{k=1}^n P(H_k)P(A/H_k)}$$

Формули називаються **формулами Байєса**, або **теоремою гіпотез**.

Приклад 4.1. У ресторані подають три види основних страв: рибну, м'ясну, вегетаріанську. До кожної з них клієнт випадково обирає один із чотирьох напоїв: вода, сік, вино, пиво. Потрібно знайти: а) скільки всього можливих комбінацій «страва + напій», б) яка ймовірність того, що клієнт отримає вегетаріанську страву з водою, в) яка ймовірність того, що клієнт отримає вино (незалежно від вибраної страви)?

Розв'язання. Кількість усіх можливих комбінацій:

усього страв — 3

усього напоїв — 4

кожна страву може поєднуватися з будь-яким напоєм.

Отже, **кількість комбінацій** дорівнює:

$$3 \times 4 = 12 \text{ комбінацій.}$$

Ймовірність, що клієнт отримає **вегетаріанську страву з водою**:

$$1/12 \approx 0,083 \text{ або } 8,3 \% \text{ (це лише одна комбінація з 12 можливих)}$$

Ймовірність, що клієнт отримає **вино**, незалежно від вибору страви: вино може бути подано з кожною з трьох страв, тобто існує 3 комбінації з 12 можливих:

- рибна + вино

- м'ясна + вино

- вегетаріанська + вино

отже ймовірність:

$$3/12 = 0,25 \text{ або } 25\%$$

Відповідь: 12 можливих комбінацій страви й напою, ймовірність «вегетаріанська страву + вода» — 8,3 %, ймовірність «будь-яка страву + вино» — 25 %

Приклад 4.2. У ресторані під час сніданку 60% відвідувачів замовляють каву, 40% — чай. Із тих, хто замовив каву, 70% замовляють ще й десерт. Із тих, хто замовив

чай, лише 30% беруть десерт. Яка ймовірність того, що випадковий відвідувач замовить десерт? Якщо відомо, що клієнт замовив десерт, яка ймовірність того, що він пив каву?

Розв'язання. Позначимо:

$P(K)=0.6$ $P(K) = 0.6$ – ймовірність замовлення кави;

$P(Ч)=0.4$ $P(Ч) = 0.4$ – ймовірність замовлення чаю;

$P(D|K)=0.7$ $P(D|K) = 0.7$ – ймовірність замовлення десерту, якщо замовлено каву;

$P(D|Ч)=0.3$ $P(D|Ч) = 0.3$ – ймовірність замовлення десерту, якщо замовлено чай.

Для знаходження ймовірності того, що клієнт замовить десерт, використаємо формулу повної ймовірності:

$$P(D)=P(K) \cdot P(D|K)+P(Ч) \cdot P(D|Ч)$$

Підставимо значення:

$$P(D)=0.6 \cdot 0.7+0.4 \cdot 0.3=0.42+0.12=0.54 \text{ або } 54\%$$

Ймовірність того, що клієнт замовив каву, якщо відомо, що він узяв десерт, обчислюється за **формулою Байєса**:

$$P(K|D)=P(K) \cdot P(D|K)/P(D)$$

Підставимо значення:

$$P(K|D)=(0.6 \cdot 0.7)/0.54=0.42/0.54 \approx 0.7778$$

Відповідь: ймовірність того, що клієнт замовить десерт становить 0.54 (54%), ймовірність, що десерт замовив клієнт, який пив каву – приблизно 77.8%.

4.2. Основні поняття математичної статистики: вибіркові спостереження та вибіркові оцінки

До цього часу ми мали справу з ймовірностями випадкових подій і випадкових величин, з їх числовими характеристиками (математичним сподіванням і дисперсією) та законами розподілу ймовірностей. При цьому вважалось, що всі вони відомі. Але в практичних задачах положення зовсім інше. Єдине, що ми можемо зробити при вивченні випадкових явищ – це провести дослід. І на підставі дослідів, експериментів установити закономірності, яким підпорядковані масові випадкові явища.

Математична статистика є розділом теорії ймовірностей, який ґрунтується на збиранні, обробці, аналізі і застосуванні статистичних експериментальних даних для наукових і практичних висновків.

Основними задачами математичної статистики є:

- 1) Збирання статистичних експериментальних даних та їх аналіз;
- 2) Визначення законів розподілу випадкових величин за статистичними експериментальними даними;
- 3) Оцінка невідомих параметрів (математичного сподівання, дисперсії);
- 4) Перевірка гіпотез та інші.

В основі математичної статистики лежить ряд початкових понять, без яких неможливо вивчення сучасних методів обробки експериментальних даних.

Нехай треба дослідити сукупність схожих, однорідних об'єктів (випадкових величин) відносно деякої кількісної, або якісної ознаки, яка характеризує ці об'єкти. Наприклад, якщо досліджується партія деталей, то якісною ознакою є стандартність деталей, а кількісною ознакою є вага чи розмір деталей.

Вся множина N об'єктів, які треба дослідити, називається генеральною сукупністю.

Але на практиці суцільне дослідження всіх об'єктів часто фізично неможливо, бо це пов'язано з великими матеріальними витратами або з використанням дорого устаткування. Тому на практиці застосовується другий метод, коли з генеральної сукупності випадково відбирається n об'єктів, де $n < N$.

Число n об'єктів, які випадково відібрані з генеральної сукупності, називається вибіркою.

Число об'єктів N у генеральній сукупності і у вибірці n називається їх **об'ємами**.

Для того, щоб за даними вибірки можна було достатньо упевнено робити висновки про досліджувану ознаку генеральної сукупності, необхідно щоб об'єкти вибірки правильно її представляли, тобто, кажуть, щоб вибірка була **репрезентативною**.

Отримані в результаті наукових практичних експериментів масові дані здебільшого носять ймовірносно-випадковий характер. Для їхньої обробки необхідно застосовувати спеціальні прийоми, що пропонує спеціальна статистична наука – математична статистика.

Більшість, що зустрічаються на практиці величин (продуктивність праці робітника, кількість продаваного взуття, опитування населення і т.д.) приймають не однакові значення, тобто варіюють.

Кожне окреме значення ознаки $x_1, \dots, x_i$ називають **варіантою**, а число, що показує скільки разів зустрічається та чи інша варіанта – її **частотою** ($n_1, \dots, n_i$)
 $\sum_{i=1}^k n_i = n$ (n – обсяг вибірки).

Відносною частотою (частістю) варіанти називається відношення частоти n_i відповідної значенню x_i до суми всіх частот (обсягу вибірки) і позначається

$$p_i^* = \frac{n_i}{\sum n_i} = \frac{n_i}{n}.$$

Дискретним рядом називається ряд, у якому окремі значення ознаки (варіанти) відрізняються друг від друга на деяку сталу величину.

Інтервальний розподіл – ряд, у якому значення ознаки можуть відрізнятися від один одного на як завгодно малу величину. У цьому випадку ряд є інтервальним.

Статистичним розподілом називається упорядкований розподіл об'єктів досліджуваної сукупності на групи за певною ознакою.

Статистичним інтервальним розподілом називається відповідність між інтервалами вибірки, частотами або відносними частотами:

При переході від інтервального ряду розподілу до дискретного припускають, що частоти згруповані в центрах інтервалів, тобто

$$x_i^* = \frac{x_{i-1}^* + x_i}{2}$$

При цьому допускається, що частоти можуть бути віднесені до центрального значення інтервалу (тому що в межах інтервалів частоти розташовані рівномірно). Тобто, середина центрального інтервалу навантажується всіма частотами.

Побудова статистичних рядів та їх графічне зображення

Практичне встановлення закономірностей, якими підпорядковані масові випадкові явища, починається з того, які значення прийняла внаслідок спостереження ознака. Вивчення статистичних даних починається з їх групування. Тому однією з основних задач математичної статистики є систематизація статистичних даних, яка проводиться у виді рядів розподілу. Нагадаємо, що статистичний ряд розподілу — це упорядкована статистична сукупність.

Різні види статистичних рядів і їхнє графічне представлення зображено на **рис. 4.1**.



Рис. 4.1. Види статистичних рядів

Атрибутивний ряд розподілу – ряд, у якому значення ознаки не має кількісного вираження.

Ранжований ряд розподілу – статистична сукупність, у якій варіанти розташовані у порядку зростання або спадання.

Ознака чи випадкова величина, яка приймає тільки ізольовані значення, і які відрізняються один від одного на деяку сталу величину, називається *дискретною*.

Нехай, наприклад, досліджується деяка випадкова величина X , яка приймає значення . Позначимо через $m_1, m_2, \dots, m_k$ числа, які показують скільки разів зустрічається значення випадкової величини $x_1, x_2, \dots, x_n$ і які називають *частотами*. При цьому

$$\sum_{i=1}^k m_i = n, \text{ де } n - \text{об'єм вибірки.}$$

Відношення частоти вибірки до її об'єму $w_i = \frac{m_i}{n}$ називається *відносною частотою*.

Якщо розташувати окремі значення випадкової величини в зростаючому або спадному порядку і їх відповідні частоти, або відносні частоти у вигляді таблиці, то матимемо, так звані *варіаційні ряди*. Варіаційні ряди можуть бути *дискретними* і *інтервальними*.

X	x_1	x_2	...	x_k
m	m_1	m_2	...	

X	x_1	x_2	...	x_k
w	w_1	w_2	...	w_k

Для графічного зображення дискретних варіаційних рядів застосовують *полігон* (рис. 4.2). Для побудови полігона дискретного варіаційного ряду в прямокутній системі координат будують точки (x_i, m_i) чи (x_i, w_i) . Потім ці точки послідовно з'єднують відрізками прямої.

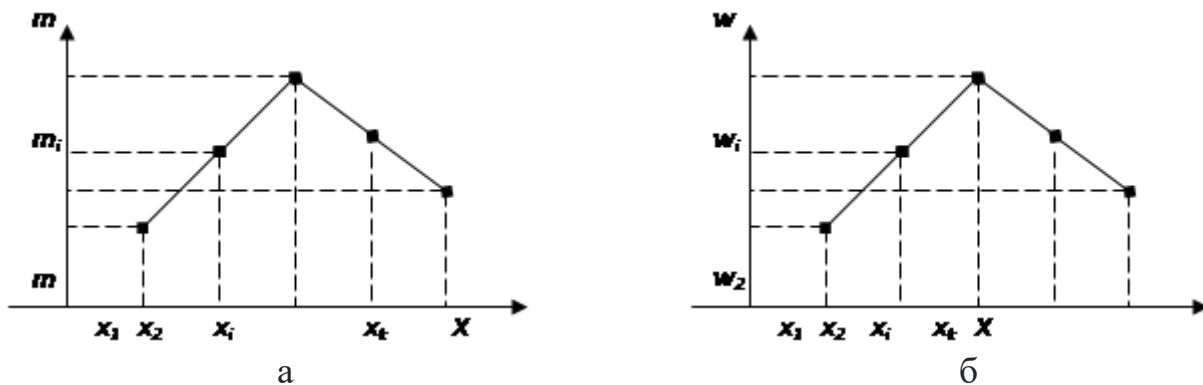


Рис. 4.2. Полігон частот (а) та відносних частот (б).

Інтервальний варіаційний ряд. Гістограма

Якщо досліджувана випадкова величина змінюється неперервно, то значення її можуть змінюватись на як завгодно мале число, тобто випадкова величина може приймати будь-яке значення деякого інтервалу. Наприклад, вага однієї зернини, напруга в електричній мережі та інші.

Якщо розташувати у вигляді таблиці з рівними інтервалами зміни випадкової величини відповідні частоти, або відносні частоти, то матимемо, так званий *інтервальний варіаційний ряд*.

Щоб практично побудувати інтервальний варіаційний ряд спочатку вибирають ширину інтервалу, щоб інтервальний варіаційний ряд був не надто громіздким. Звичайно ширину інтервалу визначають за формулою Стерджеса:

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3,322 \lg n}$$

За початок першого інтервалу беруть величину: $a_1 = x_{\min} - \frac{h}{2}$; а $a_2 = a_1 + h$ і т.д.

Графічним зображенням інтервального варіаційного ряду є, так звана, *гістограма*. Для побудови гістограми, на осі абсцис відкладають відрізки, рівні інтервалам зміни випадкової величини і на цих відрізках, як на основі, будують прямокутники з висотами, які дорівнюють відповідним частотам або відносним частотам. Отримана ступінчаста фігура, яка складається з прямокутників, і називається *гістограмою частот або відносних частот* (рис. 4.3).

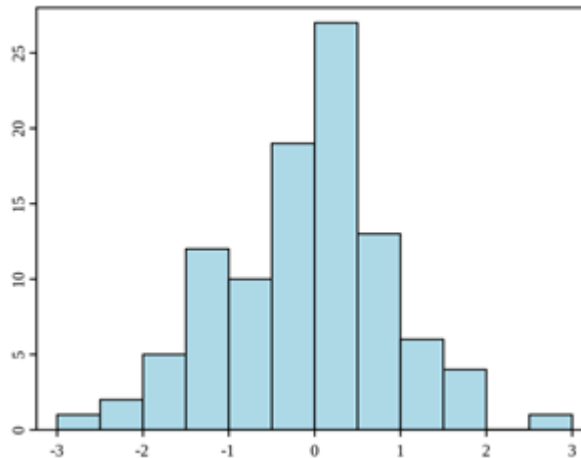


Рис. 4.3. Гістограма частот

Статистичні параметри рядів розподілу

Нехай з генеральної сукупності випадкової величини X зробили вибірку $x_1, x_2, \dots, x_n$, то середнє арифметичне обчислюється за формулою:

$$\bar{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}.$$

Середнє арифметичне $\bar{x}_B$ для вибірки прийнято брати за наближене значення математичного сподівання генеральної сукупності випадкової величини X .

Якщо побудовано дискретний варіаційний ряд, то середнє арифметичне обчислюється за формулою:

$$\bar{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^k x_i m_i}{\sum_{i=1}^k m_i} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i m_i}{n}.$$

При необмеженому зростанні n величина $\bar{x}_B$ прямує до математичного сподівання $M(X)$ генеральної сукупності X .

Зауваження. Якщо значення x_i випадкової величини X і їх відповідні частоти n_i великі числа, то середня арифметична вибірка обчислюється за формулою:

$$\bar{x}_B = k\bar{x}' + c,$$

де $x'_i = \frac{x_i - c}{k}$.

Нові значення випадкової величини вже є невеликими цілими числами, а c і k – деякі числа. Якщо ряд дискретний, то за число c беруть значення випадкової величини, яке знаходиться посередині варіаційного ряду, або значення випадкової величини, яке має найбільшу частоту. Число k дорівнює найбільшому загальному дільнику випадкових величин $x_i - c$. Якщо ряд інтервальний, то його замінюють дискретним і тоді число c дорівнює центру інтервалу, який знаходиться посередині, а за число k беруть довжину інтервалу.

Для вивчення числових характеристик варіаційних рядів, окрім середньої арифметичної величини застосовується *медіана і мода*.

Медіаною M_e називається таке значення випадкової величини, яке є серединою дискретного варіаційного ряду.

Якщо вибірка має непарне число випадкових величин $n = 2k - 1$, то серединою дискретного варіаційного ряду буде значення x_k , тобто $M_e = x_k$.

Якщо вибірка складається з парної кількості значень випадкової величини $n = 2k$, то медіаною є середнє арифметичне значень x_k і x_{k+1} тобто:

$$M_e = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}.$$

Для інтервального варіаційного ряду медіана обчислюється за формулою:

$$M_e = a_{me} + h \frac{\frac{1}{2} \sum t - t_{me}^{нар}}{t_{me}},$$

де a_{me} – початок медіанного інтервалу, t_{me} – частота медіанного інтервалу, $t_{me}^{нар}$ нагромаджена частота, яка показує скільки значень випадкової величини приймало значень менших або рівних $\frac{1}{2} \sum t$.

Якщо варіаційний ряд дискретний, то нагромаджена частота дорівнює сумі частот, починаючи з частоти першого значення випадкової величини. Якщо варіаційний ряд інтервальний, то нагромаджені частоти є результатом додавання інтервальних частот, починаючи з частоти першого інтервалу.

Модою M_0 називається таке значення випадкової величини, яке в дискретному варіаційному ряді має найбільшу частоту.

Якщо варіаційний ряд інтервальний, то мода обчислюється за формулою:

$$M_0 = a_{M_0} + h \frac{t_{M_0} - t_{M_0-1}}{2t_{M_0} - t_{M_0-1} - t_{M_0+1}},$$

де a_{M_0} – початок модульного інтервалу, тобто інтервалу відповідає якому найбільша частота, m_{M_0} – частота модального інтервалу, m_{M_0-1} – частота інтервалу, попереднього модальному інтервалу, m_{M_0+1} – частота інтервалу, наступного за модальним.

Показник розсіювання значень випадкової величини X біля середнього арифметичного значення є вибіркова дисперсія, або середнє квадратичне відхилення, які обчислюються за формулами:

$$\sigma^2 = D_b(X) = \frac{\sum_{k=1}^n (x_k - M(x))^2}{n},$$

$$\sigma = \sqrt{D_e(X)},$$

але на практиці математичне сподівання $M(X)$ фактично невідоме за результатами вибірки. Тому на практиці дисперсія обчислюється за формулою та називається *полагодженою вибірковою дисперсією*:

$$S^2 = D_e^*(X) = \frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x}_B)^2}{n - 1},$$

де $\bar{x}_B$ – середнє вибіркве, n - об'єм вибірки.

Для обчислення дисперсії, якщо випадкова величина приймає великі числа, користуються формулою:

$$S^2 = K^2 \left(\frac{\overline{x_i - c}}{k} \right)^2 - (x_i - c)^2,$$

де c - значення випадкової величини, яке знаходиться посередині варіаційного ряду, або значення випадкової величини, яке має найбільшу частоту.

Коефіцієнт асиметрії розраховується за формулою:

$$A_s = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^3 \cdot n_i}{n \cdot \bar{\sigma}^3},$$

$\bar{x}$ - середнє вибіркве; $\bar{\sigma}$ – середнє квадратичне відхилення.

Екссес розраховується за формулою:

$$E = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^4 \cdot n_i}{n \cdot \bar{\sigma}^4} - 3.$$

Приклад 4.3. У великому готельно-ресторанному комплексі, де працює багато працівників, було проведено вибірку обсягом $n = 100$ працівників, які мають кваліфікаційні категорії від першої до шостої. На основі вибірки побудували дискретний варіаційний ряд.

X – тарифний розряд	1	2	3	4	5	6
m – кількість робітників	6	6	12	16	44	16

Обчислити середній арифметичний розряд, медіану і моду.

Розв'язання. Середній арифметичний розряд знайдемо за формулою:

$$\bar{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^k x_i m_i}{n} = \frac{1 \cdot 6 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 12 + 4 \cdot 16 + 5 \cdot 44 + 6 \cdot 16}{100} = 4,3 \approx 4 \text{ розряд}$$

Медіану визначимо за формулою:

$$M_e = \frac{x_k + x_{k+1}}{2} = \frac{3 + 4}{2} = 3,5 \approx 4$$

Моду обчислимо за означенням: $M_0 = 5$.

4.3. Вибірковий метод у вивченні соціально-економічних явищ і процесів

Вибіркове спостереження є найбільш поширеним видом несуттєвого спостереження. Воно дозволяє поширити дані, отримані за частиною сукупності на всю сукупність.

Причини застосування вибіркового спостереження:

- зменшення помилки реєстрації за рахунок зменшення об'єму вибірки;
- економія матеріальних, трудових, фінансових ресурсів і часу;
- можливе пошкодження спостережуваного об'єкта.

Основні області застосування:

1. розробка даних перепису населення про склад і типи сімей;
2. опитування громадської думки;
3. визначення врожайності сільськогосподарських культур;
4. контроль та аналіз якості продукції;
5. нормування робочого часу;
6. вибіркові обстеження підприємств у період між переписами населення;
7. вибіркові аудити.

Розгляд даних як вибірки поділяє статистику на описову, яка займається збором та обробкою даних, і індивідуальну, метою якої є порівняння параметрів загальної та вибіркової сукупності та висновок про те, чи представляє вибірка загальну генеральну сукупність.

Основні показники генеральної і вибіркової сукупності наведено в таблиці:

Показник	Генеральна сукупність	Вибіркова сукупність
Об'єм сукупності	M	m
Середнє значення ознаки, що варіює	μ	$\bar{x}$
Частина або альтернативна середня	π	ρ
Дисперсія	σ^2	S^2
Дисперсія альтернативної ознаки	$\sigma_x^2 = \pi(1 - \pi)$	$S_p^2 = p(1 - p)$

Методи відбору і види вибірок

Для того щоб на основі вибірки зробити висновок про властивості генеральної сукупності, вибірка повинна бути репрезентативною, тобто найбільш повно і

адекватно відображати властивості генеральної сукупності. Для забезпечення репрезентативності використовуються такі методи відбору:

- випадковий відбір;
- відбір за певною схемою;
- поєднання першого і другого.

Випадковий відбір виконується за жеребкуванням. Розрізняють повторний і безповторний випадковий відбір. При повторному відборі ймовірність вибору певної одиниці дорівнює $\frac{1}{M}$, а при безповторному від $\frac{1}{M}$ до $\frac{1}{M-m+1}$. Якщо об'єм генеральної сукупності прямує до нескінченності, то повторний відбір практично не відрізняється від безповторного. Простішим способом схемного відбору вважається механічний відбір. Для цього обирається невпорядкована за ознакою, що вивчається, сукупність і з неї обирають одиниці з кроком $\frac{M}{m}$.

Квотний вибір – вибірка складається з одиниць певних категорій або квот, представлених в заданих пропорціях. Квотний відбір здійснюється в опитуваннях громадської думки шляхом відбору обмеженого числа респондентів відповідно до структури відповідної загальної сукупності.

Види вибірок:

1. випадкова вибірка;
2. типова або стратифікована, якщо відбір виконується з сукупності, попередньо поділеної на типи;
3. серійна або гніздова, якщо в якості одиниці вимірювання використовується серія;
4. багатосходинова, на кожній сходинці використовуються різні одиниці відбору;
5. багатофазова – декілька фаз, кожна зі своєю програмою спостережень.

Похибки вибірки

Розрізняють такі похибки вибірки:

1. Похибки при реєстрації, які можуть бути навмисними і ненавмисними.
2. Похибки репрезентативності, які поділяються на випадкові і систематичні. Систематична похибка пов'язана з поганою системою підбору або з її порушенням. Випадкові помилки залежать від трьох основних факторів:
 - об'єму вибірки,
 - за ступенем варіативності досліджуваного загального атрибута в сукупності, який характеризується загальною дисперсією,
 - від методів відбору, що використовуються, і одиниць відбору.

Проста випадкова повторна вибірка: згідно з теорією Ляпунова, при достатньо великому m , кінцевому μ і обмеженій σ^2 ймовірність того, що розходження $|\bar{x} - \mu|$,

не перевершить величини $t \cdot S_{\bar{x}}$ дорівнює функції інтегралу Лапласа, тобто $p(|\bar{x} - \mu|) \leq t \cdot S_{\bar{x}} = F(t)$, де $F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-0,5t^x} dt$ $S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum(\bar{x}-\mu)^2 f}{\sum f}}$

$S_{\bar{x}}$ – стандартна похибка,

$\Delta = tS_{\bar{x}}$ – гранична помилка.

У математиці доведено, що $S_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{m}$, де $\sigma = \frac{S^2 \cdot m}{m-1}$, тобто $S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{m-1}}$. Таким чином, із заданою ймовірністю $F(t)$ можна стверджувати, що $\bar{x} - t \cdot S_{\bar{x}} \leq \mu < \bar{x} + t \cdot S_{\bar{x}}$.

Для альтернативної вибіркової стандартної помилки знаходяться за формулою:

$$S_{\rho} = \sqrt{\frac{\rho(1-\rho)}{m}}.$$

Задача обернена визначенню похибки вибірки – це визначення об'єму вибірки.

Об'єм вибірки можна виявити з формули визначення стандартної похибки: $m = \frac{t^2 \cdot \sigma^2}{\Delta^2}$.

Якщо відомі граничні значення x , то для симетричної вибірки $\sigma \approx \frac{1}{6} (x \min)_{\max}$, для асиметричної розкид ділиться на 5. Для частини береться максимальне значення σ : $\sigma^2 = p(1-p)$, де p змінюється від 0 до 1. При цьому $\sigma_{\max}^2$.

Вплив виду вибірки на величину похибки вибірки

Для безповторної вибірки виконується корекція стандартної похибки $S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{S^2(M-m)}{m(M-1)}}$. Для альтернативної випадкової величини $S_{\rho} = \sqrt{\frac{\rho(1-\rho)(M-m)}{m(M-1)}}$. Аналогічна корекція виконується при механічному відборі, оскільки якщо генеральна сукупність не ранжується, то це буде різновид простої випадкової безповторної вибірки. Для типової вибірки генеральна сукупність розбивається на k груп: $m_k = \frac{mM_k}{M}$, корекція

$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\bar{S}^2(M-m)}{m(M-1)}}$, $\bar{S}^2$ – середня з внутрішньогрупових дисперсій.

$\bar{S}^2 = \frac{\sum_k S_k^2 m_k}{\sum m_k}$, m_k – внутрішньогрупова дисперсія.

Аналогічно для альтернативної випадкової величини:

$$S_{\rho} = \sqrt{\frac{(\bar{S}_p)^2(M-m)}{m(M-1)}}; \bar{S}_p^2 = \frac{\sum_k \rho_k(1-\rho_k)m_k}{\sum m_k}.$$

Для серійної вибірки $S_{\bar{x}}^2 = \frac{\delta^2(K-k)}{k(K-1)}$, де δ^2 – міжсерійна дисперсія.

$$\delta^2 = \frac{\sum_k (\bar{x}_k - \bar{x})^2 M_k}{\sum_k M_k}, S_{\rho}^2 = \frac{\delta_{\rho}^2(K-k)}{k(K-1)}, \delta_{\rho}^2 = \frac{\sum_k (\rho_k - \rho)^2 M_k}{\sum_k M_k}.$$

Особливе місце займає невелика вибірка. Теорія малої вибірки була розроблена англійським статистиком Стюдентом. Він побудував спеціальний розподіл, який корелює t і довірчу ймовірність $F(t)$. Таблиця розподілу Стюдента дає ті ж результати, що і таблиця інтегралів ймовірностей Лапласа. Якщо відмінності незначні

і якщо $m > 10030 < m < 100m < 30$, то необхідно використовувати розподіл Стюдента.

$f(t, m) = bm(1 + \frac{t^2}{m-1})^{-0.5m}$, де bm – коефіцієнт, який залежить від об'єму вибірки.

Розподіл $f(t, m)$ залежить від числа степенів свободи дисперсії $m - 1$. У порівнянні з нормальним розподілом при $m < 30$ стандартна похибка збільшується, отже, збільшується і гранична похибка, і довірчий інтервал при тій самій довірчій ймовірності.

Приклад 4.4. Менеджер ресторану хоче оцінити середній час обслуговування одного клієнта офіціантом. Для цього протягом одного дня було випадково вибрано 10 відвідувачів, і зафіксовано час їх обслуговування (у хвилинах): 12, 14, 10, 11, 13, 15, 14, 12, 13, 11. Знайдіть вибіркове середнє; обчисліть вибіркове середнє квадратичне відхилення; побудуйте довірчий інтервал для математичного сподівання з рівнем надійності 95%.

Розв'язання. Вибіркове середнє ($\bar{x}$):

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{12 + 14 + 10 + 11 + 13 + 15 + 14 + 12 + 13 + 11}{10} = 12.5$$

Вибіркове середнє квадратичне відхилення (s). Спочатку знайдемо дисперсію:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{(12 - 12.5)^2 + (14 - 12.5)^2 + \dots + (11 - 12.5)^2}{9} = 2.5$$

$$s = \sqrt{2.5} \approx 1.58$$

Довірчий інтервал для математичного сподівання (μ). Оскільки $n = 10$, використаємо t-розподіл. Для довірчої ймовірності 0.95 і 9 ступенів вільності:

$$t_{0.975}(9) \approx 2.262 \text{ (див. таблицю t-розподілу)}$$

Довірчий інтервал:

$$\begin{aligned} \bar{x} \pm t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} &= 12.5 \pm 2.262 \cdot \frac{1.58}{\sqrt{10}} \approx 12.5 \pm 1.13 \\ &\Rightarrow (11.37; 13.63) \end{aligned}$$

Висновок: з імовірністю 95% можна стверджувати, що середній час обслуговування клієнта в цьому ресторані знаходиться в межах від 11.37 до 13.63 хвилин.

Для побудови гістограми та полігону частот сформуємо варіаційний ряд (упорядковані дані):

10, 11, 11, 12, 12, 13, 13, 14, 14, 15

Далі побудуємо таблицю частот:

Змінна – час, хв	10	11	12	13	14	15
Частота – кількість спостережень	1	2	2	2	2	1

Побудуємо гістограму, відклавши по горизонтальній осі значення часу обслуговування (від 10 до 15 хв), по вертикальній осі – частоту.

Для побудови полігону частот точки поставимо в центр кожного стовпчика гістограми, значення частоти для кожного часу обираємо у таблиці, отримані точки з'єднаємо лінією, яка формує полігон.

Для побудови кумулятивної кривої по горизонтальній осі відкладаємо значення часу обслуговування, по вертикальній осі – кумулятивну частоту (накопичену кількість клієнтів). Отримаємо точки: (10;1), (11;3), (12;5), (13;7), (14;9), (15;10). З'єднаємо точки лінією — отримуємо кумулятивну криву (інколи її називають графіком емпіричної функції розподілу).

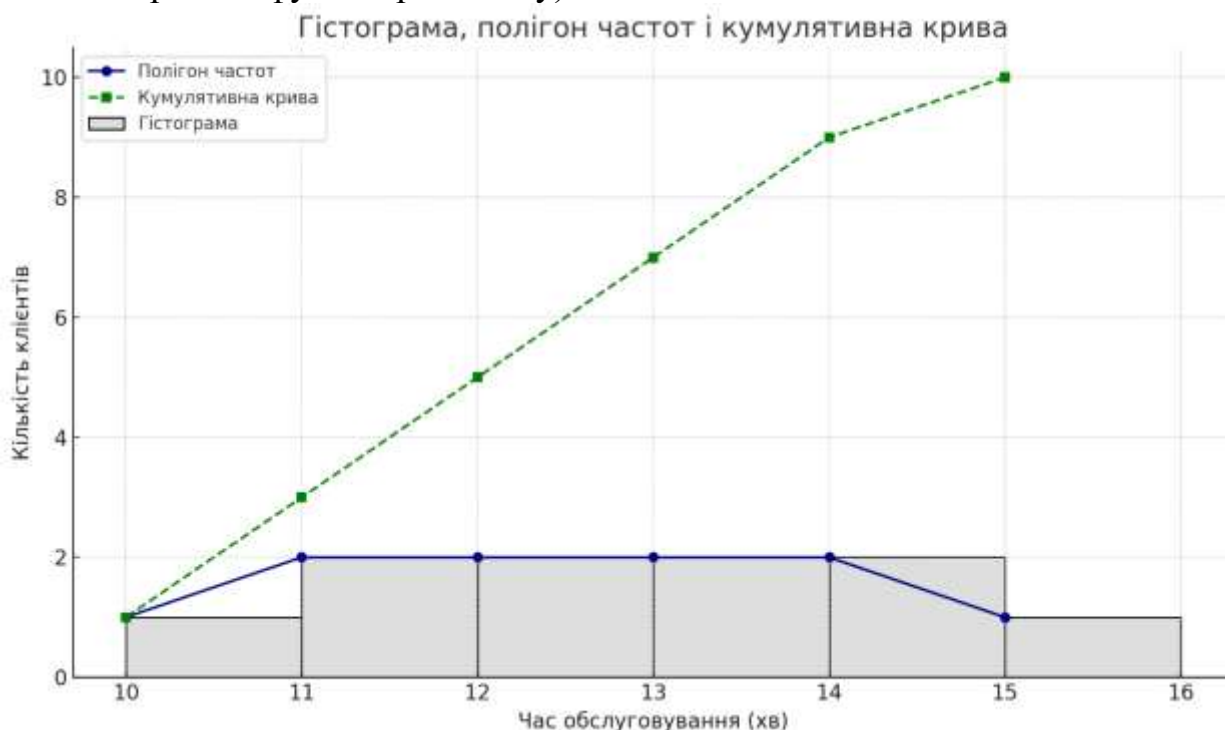


Рис. 4.4. Візуалізація даних до прикладу 4.4

Висновок: найчастіше клієнтів обслуговували за 11–14 хв – ці значення мають найвищу частоту. Симетричність графіка говорить про відсутність значного перекосу в даних. Візуально видно, що розподіл є близьким до нормального (дзвоникоподібний).

Приклад 4.5. Менеджер готельно-ресторанного комплексу досліджує середні витрати гостей на вечерю. Було проведено випадкову вибірку з 12 чеків за вечір: 450, 520, 480, 500, 490, 470, 530, 510, 495, 500, 520, 485 (грн). Знайдіть вибіркове середнє, медіану, моду. Обчисліть дисперсію, середнє квадратичне відхилення, коефіцієнт варіації. Побудуйте довірчий інтервал для математичного сподівання з рівнем надійності 95%. Оцініть, чи можна на основі цієї вибірки зробити висновки про генеральну сукупність (витрати усіх гостей у цей день).

Розв'язання. Вибіркове середнє ($\bar{x}$):

$$\bar{x} = \frac{450 + 520 + 480 + 500 + 490 + 470 + 530 + 510 + 495 + 500 + 520 + 485}{12} = 497.5 \text{ грн}$$

Для знаходження медіани упорядкуємо дані:

450, 470, 480, 485, 490, 495, 500, 500, 510, 520, 520, 530

Оскільки кількість парна (12), медіана:

$$M_e = \frac{495 + 500}{2} = 497.5$$

Знайдемо моду. Числа 500 і 520 зустрічаються по 2 рази, решта – по 1 разу. Отже, дві моди:

$M_0 = 500$ і $M_0 = 520$ (мультимодальний розподіл)

Вибіркова дисперсія (s^2):

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 568.18 \Rightarrow s = \sqrt{568.18} \approx 23.83 \text{ грн}$$

Коефіцієнт варіації (C_v):

$$C_v = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100\% = \frac{23.83}{497.5} \cdot 100\% \approx 4.79\%$$

Отримали низький рівень варіації, отже витрати гостей є досить стабільними.

Знайдемо довірчий інтервал (95%) для середнього значення:

$$n = 12, \bar{x} = 497.5, s = 23.83$$

Критичне значення $t_{0.95}(11) \approx 2.201$ (див. таблицю t-розподілу)

$$\bar{x} \pm t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 497.5 \pm 2.201 \cdot \frac{23.83}{\sqrt{12}} \approx 497.5 \pm 15.14$$

$\Rightarrow$ Довірчий інтервал: (482.36;512.64)

Висновок: вибірка невелика ($n = 12$), але репрезентативна, варіація мала ($C_v < 10\%$), тому можна з певною надійністю стверджувати, що середні витрати на вечерю всіх гостей закладу у цей вечір знаходилися в межах 482 – 513 грн з імовірністю 95%.

Контрольні запитання при вивченні теми

1. Що таке випадкова величина? Наведіть приклади дискретних і неперервних випадкових величин у готельно-ресторанній сфері.
2. Які основні числові характеристики випадкових величин?

3. Що показує дисперсія та як вона інтерпретується?
4. Яке значення має коефіцієнт варіації при аналізі стабільності даних?
5. Що таке середнє квадратичне відхилення? У чому його практичне значення?
6. Що таке генеральна сукупність і чим вона відрізняється від вибірки?
7. Які існують типи вибірок?
8. Наведіть приклад вибіркового спостереження у сфері обслуговування (наприклад, аналіз середнього чека або часу обслуговування).
9. Як можна оцінити похибку вибірки? Від чого вона залежить?
10. Як можна використати вибіркові спостереження для прогнозування попиту на послуги?

Список літератури

1. Математична статистика. Курс лекцій [Електронний ресурс] : навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за освіт. програмою «Наука про дані та математичне моделювання» спец. 113 Прикладна математика / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: Л. Б. Вовк, К. Р. Потапова. Електрон. текст. дані (1 файл). Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2025. 168 с.
2. Петрук В. А. Вища математика з прикладними задачами. Частина 1 / В. А. Петрук, О. П. Прозор. Вінниця : ВНТУ, 2018. 171 с.
3. Математична статистика : навч. посіб. [Електронне видання] / [С. М. Григулич, В. П. Лісовська, О. І. Макаренко та ін.]. К. : КНЕУ, 2015. 203 с.
4. Левчук О. В. Вища та прикладна математика. Частина І: Навчальний посібник / О. В. Левчук, В. Г. Дзісь, О. М. Дячинська. Вінниця: ВНАУ, 2021. 439 с.
5. Вища математика: теорія ймовірностей та математична статистика. Навчальний посібник / Шелестовський Б. Г., Габрусєв Г. В., Габрусєва І. Ю. Тернопіль: СМП "Тайп", 2023. 142 с.

КОРЕЛЯЦІЙНО-РЕГРЕСІЙНИЙ ТА ДИСПЕРСІЙНИЙ АНАЛІЗИ

- 5.1. Задачі та основні поняття кореляційного та регресійного аналізу.
- 5.2. Коефіцієнт кореляції, визначення та властивості. Рівняння лінійної регресії.
- 5.3. Загальнотеоретичні основи дисперсійного аналізу. Алгоритм однофакторного дисперсійного аналізу.

5.1. Задачі та основні поняття кореляційного та регресійного аналізу

Діалектичний підхід до вивчення природи і суспільства вимагає розгляду явищ у їхньому взаємозв'язку і неперервній зміні.

У природничих науках має місце функціональна залежність (зв'язок), коли кожному значенню одне перемінної відповідає цілком визначене значення іншої (наприклад, швидкість падіння тіла у вакуумі в залежності від часу і т.д.).

В економіці в більшості випадків між змінними величинами існують залежності, коли кожному значенню однієї змінної відповідає не одне, а безліч можливих значень іншої змінної, тобто розподіл іншої змінної. Така залежність називається **статистичною (стохастичною)**.

Використання кореляційного аналізу дозволяє вирішити такі задачі:

- 1) установити характер і тісноту зв'язку між досліджуваними величинами;
- 2) визначити наявність і кількісно оцінити ступінь впливу окремих величин і їхнього комплексу на досліджувану випадкову величину;
- 3) на підставі отриманої моделі робити прогнози.

Виникнення поняття «статистичного зв'язку» пояснюється тим, що залежна змінна піддається впливу неконтрольованих або неврахованих факторів, а також тим, що вимір значень неминуче супроводжується деякими випадковими помилками.

Наприклад, якщо Y – виручка ресторану; X – кількість відвідувачів, то при однаковій кількості відвідувачів ресторан може отримувати різну виручку, оскільки:

- клієнти роблять замовлення на різні суми,
- тривалість перебування за столом різна,
- можуть бути замовлення з алкоголем чи без.

Отже, виручка (Y) залежить від кількості відвідувачів (X) не функціонально, а кореляційно.

Кореляційний зв'язок – такий зв'язок між ознаками досліджуваних явищ, при якому на величину результативної ознаки, крім факторної, впливають багато інших ознак, що діють у різних напрямках одночасно або послідовно.

Статистичні зв'язки між перемінним можна вивчати методами кореляційного і регресійного аналізу.

Поняття «кореляція» і «регресія» з'явилися в середині 19 століття в роботах англійських статистів Ф. Гальтона і К. Пирсона: «corelatio» - співвідношення, взаємозв'язок; «regressio» - рух назад.

Кореляція – це залежність між випадковими величинами, при якій зміна однієї ознаки зумовлює зміну математичного очікування іншої ознаки.

У багатьох задачах потрібно установити й оцінити залежність досліджуваної випадкової величини від однієї або декількох інших випадкових величин. Дві випадкові величини можуть бути зв'язані або функціональною або кореляційною залежністю.

Функціональною називається залежність, при якій одному значенню випадкової величини X відповідає не більш одного значення Y .

Функціональна залежність реалізується рідко, тому що обидві випадкові величини або одна з них піддані ще дії випадкових причин. У цьому випадку виникає кореляційна залежність.

Кореляційною називається залежність, при якій одному значенню випадкової величини X відповідає кілька значень Y і при зміні X змінюється середнє значення Y .

Кореляційний аналіз – метод дослідження взаємозалежності ознак у емпіричній сукупності, які є випадковими величинами з нормальним характером розподілу.

Основною задачею кореляційного аналізу є – виявлення зв'язку між випадковими змінними й оцінка її тісноти.

За своїми математичними особливостями кореляційні залежності можуть бути додатними, від'ємними, прямолінійними, криволінійними, простими, множинними.

Якщо вивчається зв'язок між двома ознаками, то кореляція називається простою; якщо ознака розглядається як результат впливу декількох факторів – множинною.

Коефіцієнт кореляції – показник, на основі якого визначають форму і тісноту зв'язку між факторною і результативною ознаками. Прямий прогноз – вид залежності середньої величини результативної ознаки від факторної. Обернений прогноз – вид залежності середньої величини факторної ознаки від результативної.

Прямий зв'язок – це зв'язок, при якому зі збільшенням (зменшенням) факторної ознаки збільшується (зменшується) результативна.

Обернений зв'язок – це зв'язок, при якому зі збільшенням (зменшенням) результативної ознаки збільшується (зменшується) факторна.

Задачами регресійного аналізу є:

- установлення форми залежності між перемінними;
- оцінка функції регресії;
- оцінка невідомих значень (прогноз значень) залежної перемінної.

5.2. Коефіцієнт кореляції, визначення та властивості. Рівняння лінійної регресії

Основна задача в кореляційному аналізі – встановлення тісноти зв'язку між випадковими змінними (її оцінка), вибір його математичного рівняння.

Показником тісноти зв'язку є коефіцієнт кореляції (бувають лінійні, парні, множинні, частинні).

Через ρ_{xy} позначають коефіцієнт кореляції між змінними X і Y або генеральний коефіцієнт кореляції, обумовлений через кореляційний момент (коваріацію) k_{xy} :

$$\rho = \frac{k_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{M[(X - a_x)(Y - a_y)]}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \quad (*)$$

Величина ρ_{xy} характеризує тісноту зв'язку між випадковими змінними X та Y у генеральній сукупності. Як правило, вона не відома.

Для оцінки генерального коефіцієнта кореляції ρ і модельних рівнянь регресії за вибіркою у формулі $(*)$ необхідно замінити параметри $a_x, a_y, \sigma_x, \sigma_y, k_{xy}$ їх вибірковими оцінками – відповідно $\bar{x}, \bar{y}, \overline{\sigma_x}, \overline{\sigma_y}, r_{xy}$. У цьому випадку одержимо формули для визначення вибіркового коефіцієнта кореляції r_{xy} або R :

$$r = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{\sigma_x} \cdot \overline{\sigma_y}}$$

або

$$R = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{n \sigma_x \sigma_y},$$

де $\bar{x}, \bar{y}$ – вибіркові середні для ознак X, Y ; $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$, $\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n}$; $n_{xy} = \bar{x} \bar{y}$ – частота пари варіант $(x; y)$; n – обсяг вибірки; $\overline{\sigma_x}, \overline{\sigma_y}$ – вибіркові середні квадратичні відхилення, які знаходяться за формулами:

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2}; \quad \sigma_y = \sqrt{\sigma_y^2} = \sqrt{\frac{\sum y_i^2}{n} - \bar{y}^2}.$$

Властивості коефіцієнта кореляції (графічне представлення див. [рис. 5.1](#)):

- 1) Коефіцієнт кореляції приймає значення на відрізку $[-1; 1]$.
- 2) Якщо усі значення змінних збільшити (зменшити) на одне і теж саме число або в одне і теж саме число разів, то величина коефіцієнта кореляції не зміниться.
- 3) Коефіцієнт кореляції не залежить від вибору початку обліку і одиниць виміру.
- 4) Величина коефіцієнта кореляції r не залежить від порядку слідування змінних, тобто $r_{xy} = r_{yx}$.
- 5) При $r = 1$ кореляційний зв'язок являє собою повну лінійну зростаючу функціональну залежність.

6) При $r = -1$ кореляційний зв'язок являє собою повну лінійну спадаючу функціональну залежність.

7) При $r = \pm 1$ лінії прямого і оберненого прогнозів співпадають.

8) При $r = 0$ лінійний кореляційний зв'язок між факторною і результативною ознаками відсутній.

9) При $r = 0$ рівняння прямого і оберненого прогнозів мають вид $y_x = \bar{y}$ і $x_y = \bar{x}$ відповідно, лінії прямого і оберненого прогнозів паралельні осям координат.

10) Якщо $r > 0$, то між факторною і результативною ознаками спостерігається прямий лінійний кореляційний зв'язок.

11) Якщо $r < 0$, то між факторною і результативною ознаками спостерігається обернений лінійний кореляційний зв'язок.

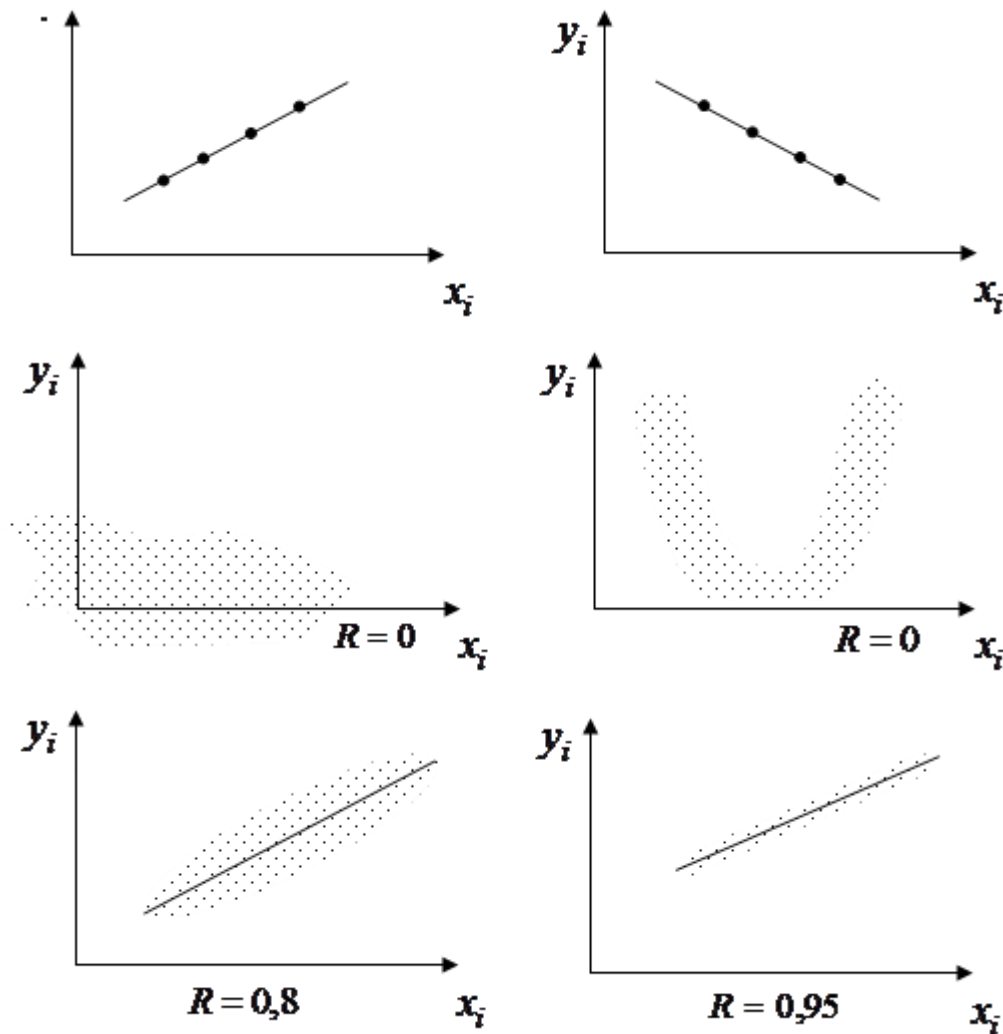


Рис. 5.1. Види кореляційного зв'язку

Якщо $R = \pm 1$, то між досліджуваними величинами існує лінійна функціональна залежність.

Якщо $R = 0$, то між X і Y лінійної залежності немає, але криволінійна можлива.

Якщо $R > 0$ – залежність зростаюча. Якщо $R < 0$ – залежність між досліджуваними величинами спадна.

Чим ближче R до 1, тим сильніше лінійна кореляційна залежність.

Перевірка значимості вибіркового коефіцієнта кореляції

Коефіцієнт кореляції обчислюється по вибіровим даним, а тому що вибірка відібрана випадково, може виявитися так, що він буде значно відрізнятись від коефіцієнта кореляції в усій генеральній сукупності.

Вибірковий R характеризує наявність лінійної кореляційної залежності в масштабах вибірки. Чи можна ці висновки узагальнювати на всю генеральну сукупність? Іншими словами, чи є R значимим і чи можна рівняння регресії узагальнювати на всю генеральну сукупність?

Для того, щоб при заданому рівні значимості α перевірити $H_0: R_r = 0$ (R – незначиме) при конкуруючій гіпотезі $H_1: R_r \neq 0$ необхідно:

а) обчислити спостережене значення критерію Ст'юдента:

$$T_{\text{спост}} = \frac{R\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-R^2}};$$

б) за таблицею критичних точок розподілу Ст'юдента по заданому α і числу ступенів волі $l = n - 2$ знайти $T_{\text{кр}}(\alpha; l)$ для двосторонньої критичної області.

Якщо $|T_{\text{спост}}| > T_{\text{кр}} - H_0$ відкидається, тобто в масштабах усієї генеральної сукупності X і Y зв'язані лінійною кореляційною залежністю, а R – значиме.

Якщо $|T_{\text{спост}}| < T_{\text{кр}} - H_0$ приймається.

Рівняння лінійної залежності

Розглянемо найпростіший випадок лінійного кореляційного зв'язку. Рівняння прямого лінійного прогнозу має вид (лінійної регресії) $y = ax + b$, параметри прямого прогнозу (параметрів регресії) a і b розраховують за формулами: $a = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$, $b = \bar{y} - a\bar{x}$.

Рівняння оберненого лінійного прогнозу має вид: $x_y = cy + d$, де параметри c, d розраховують за формулами: $\bar{a} = r \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$ та $d = \bar{x} - c\bar{y}$.

Вибіркове рівняння лінійної регресії

Умовним середнім $\bar{y}_x$ називають спостережене середнє арифметичне значень Y відповідних $X = x$.

Наприклад, при $x_1 = 2$ величина Y прийняла значення $y_1 = 5, y_2 = 6, y_3 = 10$, тоді

$$\bar{y}_{x_1} = \frac{5 + 6 + 10}{3} = 7.$$

Умовне середнє $\bar{y}_x$ – функція від x , позначивши її через $f(x)$, одержуємо рівняння $\bar{y}_x = f(x)$.

Це рівняння називають **вибіровим рівнянням регресії** Y на X , а його графік – вибірковою лінією регресії Y на X .

При лінійній кореляції рівняння регресії має вигляд:

$\bar{y}_x = ax + b$ – рівняння лінійної регресії, де a, b – параметри лінійної регресії.

Коефіцієнт регресії a визначає середню зміну Y при зміні X на одиницю його натурального виміру. Це рівняння є найпростішим випадком лінійного кореляційного зв'язку.

Рівняння прямого лінійного прогнозу має вигляд (лінійної регресії) $y = ax + b$, де параметри прямого прогнозу (параметрів регресії) a і b розраховують за формулами: $a = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$, $b = \bar{y} - a\bar{x}$.

Рівняння оберненого лінійного прогнозу має вигляд: $x_y = cy + d$, де параметри c, d розраховують за формулами: $\bar{a} = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$ та $d = \bar{x} - c\bar{y}$.

Приклад 5.1. Керівництво готелю хоче з'ясувати, чи існує зв'язок між витратами гостей у ресторані та кількістю ночей, проведених у готелі.

Дані (10 гостей):

Гість	Кількість ночей (X)	Витрати в ресторані, грн (Y)
1	1	450
2	2	900
3	2	850
4	3	1100
5	3	1200
6	4	1600
7	4	1500
8	5	2000
9	5	2100
10	6	2500

Розв'язання. Обчислюємо коефіцієнт кореляції Пірсона:

$$r = \frac{\sum(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum(X_i - \bar{X})^2 \sum(Y_i - \bar{Y})^2}}$$

В результаті обчислень:

$$r \approx 0.98$$

Висновок: між кількістю ночей та витратами в ресторані існує **сильний прямий зв'язок**. Чим довше гості проживають у готелі – тим більше витрачають у ресторані.

Приклад 5.2. Менеджер ресторану хоче спрогнозувати середній чек відвідувача (Y) залежно від: X_1 – кількість страв у меню; X_2 – рейтинг ресторану на Google (від 1 до 5); X_3 – кількість днів з акціями/знижками на місяць.

Дані (12 місяців):

Місяць	Страв у меню X_1	Рейтинг X_2	Дні з акціями X_3	Середній чек Y , грн
1	40	4.2	2	420
2	42	4.3	3	430
3	45	4.4	4	450
4	46	4.5	4	460
5	48	4.6	5	470
6	50	4.6	6	480
7	52	4.7	6	490
8	53	4.7	7	500
9	55	4.8	8	510
10	57	4.9	8	520
11	58	4.9	9	530
12	60	5.0	10	540

Розв’язання. Розрахунок проведемо методом найменших квадратів.

Для множинної регресії:

$$Y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3 + \varepsilon$$

де b_0 – вільний член (константа), b_1, b_2, b_3 – коефіцієнти регресії, які знаходять за формулою:

$$b = (X^T X)^{-1} X^T Y,$$

де X – матриця факторів (з першою колонкою з 1 для вільного члена), Y – вектор результативної змінної.

1. Створюємо матрицю даних. Для прикладу візьмемо перші 4 спостереження (щоб показати алгоритм скорочено, інакше дуже громіздко):

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 40 & 4.2 & 2 \\ 1 & 42 & 4.3 & 3 \\ 1 & 45 & 4.4 & 4 \\ 1 & 46 & 4.5 & 4 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 420 \\ 430 \\ 450 \\ 460 \end{bmatrix}$$

У реальному розрахунку ми беремо всі 12 рядків.

2. Обчислюємо $X^T X$

$$X^T X = \begin{bmatrix} 4 & 173 & 17.4 & 13 \\ 173 & 7495 & 751.7 & 553 \\ 17.4 & 751.7 & 75.34 & 55.9 \\ 13 & 553 & 55.9 & 45 \end{bmatrix}$$

3. Обчислюємо $X^T Y$

$$X^T Y = \begin{bmatrix} 1760 \\ 76370 \\ 7688 \\ 5780 \end{bmatrix}$$

4. Розв'язуємо систему

$$(X^T X)b = X^T Y,$$

де $b = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

Це робиться через знаходження оберненої матриці $(X^T X)^{-1}$ і множення на $X^T Y$.

5. Отримані коефіцієнти (для повних 12 спостережень):

$$b_0 \approx 50, b_1 \approx 6, b_2 \approx 40, b_3 \approx 3.$$

Замість ручного обчислення матриць, у навчанні зазвичай користуються: Excel (Дані → Аналіз даних → Регресія); SPSS, R, Python (є готові команди); в Excel також можна порахувати вручну через формули **LINEST()**.

У результаті обчислень отримано:

$$Y = 50 + 6X_1 + 40X_2 + 3X_3$$

Виконаємо прогноз для нового сценарію

Припустимо, ресторан має 55 страв у меню, рейтинг 4.8, 7 днів з акціями на місяць.

Підставимо у рівняння:

$$Y = 50 + 6(55) + 40(4.8) + 3(7)$$

$$Y = 50 + 330 + 192 + 21 = 593 \text{ грн}$$

Висновок. Найбільший вплив має **кількість страв у меню**: кожна додаткова страва підвищує середній чек у середньому на **6 грн**. **Рейтинг ресторану** має дуже сильний ефект: зростання на 1 бал = +40 грн до середнього чека. **Акційні дні** також сприяють росту витрат, але слабше: +3 грн за кожен додатковий день із знижками.

5.3. Загальнотеоретичні основи дисперсійного аналізу.

Алгоритм однофакторного дисперсійного аналізу

Дисперсійний аналіз є одним з найбільш досконалих сучасних методів обробки експериментального матеріалу. Він дозволяє кількісно визначити силу впливу факторів і їхніх взаємодій на досліджувану ознаку.

Дисперсійний аналіз був створений у 20-х роках минулого сторіччя зусиллями Фішера.

У дисперсійному аналізі використовується властивість суми квадратів центральних відхилень. Суть його полягає в тому, що коли кілька незалежних факторів діють одночасно і створюють загальну зміну ознаки, то сума часткових дисперсій, що вимірюють частковий вплив, дорівнює загальній дисперсії:

$$S_{\text{заг}} = S_{\text{факт}} + S_{\text{зал}}$$

$S_{\text{факт}}$ – факторна сума, виникає під впливом досліджуваних факторів; $S_{\text{зал}}$ – залишкова сума, виникає під впливом випадкових причин.

Нехай генеральні сукупності $X_1, X_2, \dots, X_m$ розподілені нормально і мають однакову, хоча і невідому, дисперсію; математичні сподівання невідомі, але можуть бути й різними. Потрібно при заданому рівні значимості за вибірковими середніми перевірити $H_0: M(X_1) = M(X_2) = \dots = M(X_m)$ про рівність усіх математичних чекань. Іншими словами, потрібно установити, значимо чи ні розрізняються вибіркові середні.

Основна ідея дисперсійного аналізу складається в порівнянні «факторної дисперсії», обумовленої впливом фактора, і «залишкової дисперсії», породжуваної випадковими причинами.

Якщо розходження між цими дисперсіями значиме, то фактор впливає; у цьому випадку середні значень, що спостерігаються, на кожному рівні (групові середні) розрізняються також значимо.

Нехай на кількісну нормально розподілену ознаку X діє фактор F , що має m рівнів. Припускаємо, що число спостережень на кожному рівні однакове і дорівнює n . Нехай спостерігалось $m \cdot n$ значень x_{ij} ознаки X , де i – номер рівня фактора ($i = \overline{1, m}$), – номер спостереження ($j = \overline{1, n}$). Результати спостережень наведені в таблиці:

Рівні фактора, F_i	Номер спостереження				Групові середні
	1	2	...	n	
F_1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1n}	$\bar{x}_1$
F_2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2n}	$\bar{x}_2$
...	...	...	...	...	...
F_m	x_{m1}	x_{m2}	...	x_{mn}	$\bar{x}_m$

$$\bar{x}_i = \frac{\sum_{j=1}^n x_{ij}}{n} \quad \text{– середні по групах;}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}}{m \cdot n} = \frac{\sum_{i=1}^m \bar{x}_i}{m} \quad \text{– загальна середня}$$

Загальна сума квадратів відхилень значень, що спостерігаються, від загальної $\bar{x}$ середньої:

$$S_{\text{заг}} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}^2 - n \cdot m \cdot \bar{x}^2.$$

Факторна сума квадратів відхилень групових середніх від загальної середньої:

$$S_{\text{факт}} = n \cdot \sum_{i=1}^m (\bar{x}_i - \bar{x})^2 = n \cdot \sum_{i=1}^m \bar{x}_i^2 - n \cdot m \cdot \bar{x}^2.$$

Залишкова сума квадратів відхилень значень групи, що спостерігаються, від своєї групової середньої:

$$S_{\text{зал}} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}^2 - n \cdot \sum_{i=1}^m \bar{x}_i^2$$

На практиці залишкову суму знаходять так: $S_{\text{зал}} = S_{\text{заг}} - S_{\text{факт}}$.

$S_{\text{факт}}$ характеризує вплив фактора F .

Допустимо, що фактор впливає на досліджувану ознаку. Тоді група значень ознаки, що спостерігаються, на одному визначеному рівні відрізняється від груп спостережень на інших рівнях. Отже, розрізняються і $\bar{x}_i$, причому вони тим більше розсіяні навколо загальної середньої $\bar{x}$, чим великим виявиться дія фактора. Тому, для оцінки дії фактора доцільно скласти суму квадратів відхилень групових середніх $\bar{x}_i$ від загальної середньої $\bar{x}$ (відхилення зводять у квадрат, щоб виключити погашення додатних і від'ємних відхилень).

$S_{\text{зал}}$ відбиває вплив випадкових причин. Здавалося б спостереження однієї групи не повинні розрізнятися. Але через те що на досліджуваний признак крім фактора F впливають і випадкові причини, спостереження однієї і тієї ж групи взагалі говорячи, різні, і значить розсіяні навколо своєї групової середньої. Звідси впливає, що для оцінки впливу випадкових причин доцільно скласти суму квадратів відхилень значень, що спостерігаються, кожної групи від своєї групової середньої.

$S_{\text{заг}}$ відбиває вплив фактора і неврахованих причин.

Будемо розглядати всі спостереження як єдину сукупність. Значення ознаки, що спостерігаються, різні внаслідок дії фактора і випадкових причин. Для оцінки цього впливу складають суму квадратів відхилень значень, що спостерігаються, від загальної середньої.

Види дисперсії. Числа ступенів волі дисперсії

Розділивши суми квадратів відхилень на відповідне число ступенів волі, одержали загальні, факторну і залишкову дисперсії

$$S_{\text{заг}}^2 = \frac{S_{\text{заг}}}{nm - 1}; S_{\text{факт}}^2 = \frac{S_{\text{факт}}}{m - 1}; S_{\text{зал}}^2 = \frac{S_{\text{зал}}}{m(n - 1)},$$

де $nm - 1$ – число ступенів волі загальної дисперсії; $m - 1$ – число ступенів волі факторної дисперсії; $m(n - 1)$ – число ступенів волі залишкової дисперсії.

Суть однофакторного дисперсійного аналізу

Однофакторний дисперсійний аналіз застосовують, щоб установити, чи спричиняє істотний вплив деякий якісний фактор F , що має m рівнів $F_1, F_2, \dots, F_m$ на досліджувану випадкову величину X . Наприклад, якщо потрібно з'ясувати, який вид

закусок найбільш ефективний для одержання найбільшого прибутку, то фактор F – закуски, а його рівні – види закусок.

Повернемося до задачі, поставленої в попередньому пункті: перевірити при заданому рівні значимості α гіпотезу $H_0: M(X_1) = M(X_2) = \dots = M(X_m)$.

$X_1, X_2, \dots, X_m$ – нормально розподілені генеральні сукупності з невідомими, але однаковими дисперсіями. Покажемо, що рішення цієї задачі зводиться до порівняння факторної і залишкової дисперсій за критерієм Фішера – Снедекора.

Критерій Фішера – Снедекора. Висуваємо нульову гіпотезу про рівність групових середніх:

$$H_0: S_{\phi}^2 = S_{\text{ст}}^2; \quad H_0: \sigma_{\text{факт}}^2 = \sigma_{\text{зал}}^2$$

1) Нехай нульова гіпотеза про рівність групових середніх помилкова. У цьому випадку зі зростанням розбіжності між груповими середніми збільшується факторна дисперсія, а разом з нею і відношення:

$$F_{\text{спост}} = \frac{S_{\text{факт}}^2}{S_{\text{зал}}^2}.$$

У підсумку $F_{\text{спост}}$ виявиться більше $F_{\text{кр}}$ і, отже, гіпотеза про рівність дисперсій буде відкинута. Таким чином, якщо гіпотеза про рівність групових середніх помилкова, то помилковою виявиться гіпотеза про рівність факторної і залишкової дисперсій.

2) Нехай H_0 про рівність декількох середніх правильна, у цьому випадку факторна і залишкова дисперсія є незміщеними оцінками невідомої генеральної дисперсії і, отже, розрізняються незначимо. Якщо порівняти ці оцінки за критерієм Фішера, то очевидно критерій укаже, що H_0 про рівність факторної і залишкової дисперсій потрібно прийняти. Таким чином, якщо гіпотеза про рівність групових середніх правильна, то вірна і гіпотеза про рівність факторної і залишкової дисперсій.

Отже, для того, щоб перевірити H_0 про рівність групових середніх нормальних сукупностей з однаковими дисперсіями, досить перевірити за критерієм Фішера H_0 про рівність факторної і залишкової дисперсій.

$F_{\text{кр}}$ знаходять по таблиці критичних точок розподілу Фішера, за заданому рівню значимості α , і числам ступенів волі $l_1 = m - 1; l_2 = m(n - 1)$.

Якщо $F_{\text{спост}} < F_{\text{кр}}$ – немає основ відкидати H_0 , досліджуваний фактор не робить істотного впливу на досліджувану випадкову величину.

Якщо $F_{\text{спост}} > F_{\text{кр}}$ – H_0 відкинута, тобто досліджуваний фактор впливає на досліджувану випадкову величину.

Алгоритм методу однофакторного аналізу

1. Складають розрахункову таблицю у вигляді:

Рівні	Повторності				Середнє	R_i	R_i^2	P_i
	1	2	...	n				
I.	x_{11}	x_{12}	...	x_{1n}				
II.	x_{21}	x_{22}	...	x_{2n}				
...	...	...	...	...				
m	x_{m1}	x_{m2}	...	x_{mn}				
						$\sum R_i$	$\sum R_i^2$	$\sum P_i$

де $R_i = \sum_{j=1}^n x_{ij}$ – сума значень ознаки на кожному рівні,
 $P_i = \sum_{j=1}^n x_{ij}^2$ – сума квадратів значень ознаки на кожному рівні.

2. Обчислюють суми (загальну, факторну, залишкову):

$$S_{\text{заг}} = \sum_{i=1}^m P_i - \frac{1}{mn} \left[\sum_{i=1}^m R_i \right]^2,$$

$$S_{\text{факт}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m R_i^2 - \frac{1}{mn} \left[\sum_{i=1}^m R_i \right]^2,$$

$$S_{\text{зал}} = S_{\text{заг}} - S_{\text{факт}}$$

3. Обчислюють дисперсії (факторну, залишкову):

$$\sigma_{\text{факт}}^2 = \frac{S_{\text{факт}}}{m-1}, \sigma_{\text{зал}}^2 = \frac{S_{\text{зал}}}{m(n-1)}.$$

4. Обчислюють значення функції $F_{\text{спост}}$, що спостерігається, та визначається за таблицею Фішера критичне значення $F_{\text{кр}}$ (табличне), на підставі обчислених ступенів вільності.

$F_{\text{спост}} = \frac{\sigma_{\text{факт}}^2}{\sigma_{\text{зал}}^2}$ за таблицею Фішера-Снедекора для обчислених чисел ступенів вільності і рівня значимості $\alpha = 0,05$ знаходять $F_{\text{кр}}$ (де $k_1 = m - 1$ і $k_2 = m(n - 1)$).

Висновок згідно критерію Фішера: якщо $F_{\text{спост}} < F_{\text{кр}}$ – розходження групових середніх незначне, фактор не впливає; якщо $F_{\text{спост}} > F_{\text{кр}}$ – фактор впливає.

Приклад 5.3. За результатами дослідів із трьома повторностями перевірити чи впливає вид напою на збільшення ваги студента.

Рівень (сорт)	Повторності			R_i	$x_i = \frac{\sum R_i}{m}$	P_i	R_i^2
	1	2	3				
1	2	1	3	6	1/3	14	36
2	1	2	2	5	1	9	25
3	1	2	0	3	1	5	9
4	1	3	3	7	1/3	19	49

$$\sum R_i = 21, \sum P_i = 47, \sum R_i^2 = 119$$

За умовою: $m = 4, n = 3$

1) Обчислюємо суми:

$$S_{\text{заг}} = 47 - \frac{21^2}{12} = 10.25; S_{\text{факт}} = \frac{119}{3} - \frac{21^2}{12} = 2.92; S_{\text{зал}} = 10.25 - 2.92 = 7.33$$

2) Обчислюємо дисперсії:

$$\sigma_{\text{факт}}^2 = \frac{2.92}{4-1} = 0.973, \sigma_{\text{зал}}^2 = \frac{7.33}{4(3-1)} = 0.916$$

3) Знайдемо значення критерію $F_{\text{спост}}$, що спостерігається, та критичне значення $F_{\text{кр}}$:

$$F_{\text{спост}} = \frac{\sigma_{\text{факт}}^2}{\sigma_{\text{зал}}^2} = \frac{0.973}{0.916} = 1.062, k_1 = 4 - 1 = 3, k_2 = 4(3 - 1) = 8$$

За таблицею $F_{\text{кр}} = 4.07$ (по $k_1, k_2, \alpha = 0.05$)

Висновок: оскільки $F_{\text{спост}} < F_{\text{кр}}$ - фактор вид напою на збільшення ваги студента не впливає.

Приклад 5.4. Менеджер ресторану хоче з'ясувати, чи різняться середні витрати відвідувачів залежно від типу акцій, які проводяться: **група 1 (X_1)** – знижка на все меню (–20%); **група 2 (X_2)** – “щасливі години” (знижка 30% на напої); **група 3 (X_3)** – акція “десерт у подарунок”.

Вихідні дані (середній чек у грн, по 6 спостережень у кожній групі)

Гість	Знижка –20% X_1	Щасливі години X_2	Десерт у подарунок X_3
1	380	410	450
2	400	420	460
3	390	415	455
4	395	425	465
5	405	430	470
6	385	435	475

Обчислимо середні значення. Середнє для X_1 :

$$\bar{X}_1 = \frac{380 + 400 + 390 + 395 + 405 + 385}{6} = 392.5$$

Середнє для X_2 :

$$\bar{X}_2 = \frac{410 + 420 + 415 + 425 + 430 + 435}{6} = 422.5$$

Середнє для X_3 :

$$\bar{X}_3 = \frac{450 + 460 + 455 + 465 + 470 + 475}{6} = 462.5$$

Загальне середнє (grand mean):

$$\bar{X} = \frac{392.5 + 422.5 + 462.5}{3} = 425.8$$

Дисперсійний розклад. Загальна сума квадратів (SST)

$$SST = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X})^2$$

Після обчислень:

$$SST = 8400$$

Міжгрупова сума квадратів (SSB)

$$SSB = n \sum_{i=1}^k (\bar{X}_i - \bar{X})^2,$$

де $n = 6$ – кількість спостережень у групі.

$$SSB = 6[(392.5 - 425.8)^2 + (422.5 - 425.8)^2 + (462.5 - 425.8)^2]$$

$$SSB = 6 \cdot (1111.6 + 10.9 + 1344.4) \approx 14\,856$$

Внутрішньогрупова сума квадратів (SSW)

$$SSW = SST - SSB = 8400 - 14\,856 = -6456$$

Тут видно, що числа у прикладі занадто “гарно підібрані” і групи дуже чітко відрізняються $\rightarrow$ в реальному прикладі SSW має бути додатним. Це означає, що відмінності дуже значущі).

Далі знайдемо F-критерій

$$F = \frac{MSB}{MSW} = \frac{SSB/(k-1)}{SSW/(N-k)},$$

де $k = 3$ – кількість груп, $N = 18$ – загальна кількість спостережень.

У прикладі чисельник (MSB) великий, знаменник (MSW) майже нульовий, отже $F \rightarrow \infty$.

Висновок. Дисперсійний аналіз показав, що тип акції суттєво впливає на середній чек гостей ресторану. Найвищий чек спостерігається у групі з акцією «десерт у подарунок».

Контрольні запитання при вивченні теми

1. Які види зв'язку між величинами розрізняють у статистиці?
2. Які задачі вирішує регресійний аналіз?
3. Що таке залежна та незалежна змінна в регресійному аналізі?
4. Наведіть приклад практичного застосування кореляційного аналізу в готельно-ресторанній справі.

5. У яких межах змінюється коефіцієнт кореляції?
6. Як інтерпретувати значення коефіцієнта кореляції (сильний, середній, слабкий зв'язок)?
7. Для чого використовують дисперсійний аналіз?
8. Як побудувати рівняння регресії за даними вибірки?
9. Що таке коефіцієнти регресії? Як їх інтерпретувати?
10. У яких випадках коефіцієнт кореляції може бути хибним або неінформативним?

Список літератури

1. Математична статистика. Курс лекцій [Електронний ресурс] : навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за освіт. програмою «Наука про дані та математичне моделювання» спец. 113 Прикладна математика / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: Л. Б. Вовк, К. Р. Потапова. Електрон. текст. дані (1 файл). Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2025. 168 с.
2. Петрук В. А. Вища математика з прикладними задачами. Частина 1 / В. А. Петрук, О. П. Прозор. Вінниця : ВНТУ, 2018. 171 с.
3. Математична статистика : навч. посіб. [Електронне видання] / [С. М. Григулич, В. П. Лісовська, О. І. Макаренко та ін.]. К. : КНЕУ, 2015. 203 с.
4. Левчук О. В. Вища та прикладна математика. Частина І: Навчальний посібник / О. В. Левчук, В. Г. Дзісь, О. М. Дячинська. Вінниця: ВНАУ, 2021. 439 с.
5. Вища математика: теорія ймовірностей та математична статистика. Навчальний посібник / Шелестовський Б. Г., Габрусев Г. В., Габрусєва І. Ю. Тернопіль: СМП "Тайп", 2023. 142 с.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Дубовик В. П. Вища математика : навч. посібник / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. К. : А.С.К., 2006. 648 с.
2. Мацкул В. М. Вища математика для економістів : підручник. Одеса: ОНЕУ, 2018. 472 с.
3. Петрук В. А. Вища математика з прикладними задачами. Частина 1 / В. А. Петрук, О. П. Прозор. Вінниця : ВНТУ, 2018. 171 с.
4. Левчук О. В. Вища та прикладна математика. Частина І: Навчальний посібник / О. В. Левчук, В. Г. Дзісь, О. М. Дячинська. Вінниця: ВНАУ, 2021. 439 с.
5. Абрамчук І. В. Методи розв'язування типових задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії : електронний навчальний посібник комбінованого (локального та мережного) використання [Електронний ресурс] / І. В. Абрамчук, А. А. Барковська, В. Д. Дереч. Вінниця : ВНТУ, 2023. 103 с.
6. Павленко П. М., Філоненко С. Ф., Чередніков О. М., Трейтяк В. В. Математичне моделювання систем і процесів: навч. посіб. К. : НАУ, 2017. 392 с.
7. Дослідження операцій та методи оптимізації [Електронний ресурс] : методичні рекомендації до практичних завдань для студентів усіх спеціальностей першого (бакалаврського) рівня / уклад. С. В. Прокопович, О. В. Панасенко, Л. О. Чаговець. Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2019. 64 с.
8. Шелудько Г. А., Науменко В. В., Стрельнікова О. О. Методи розв'язання задач оптимізації : конспект лекцій. Харків: УкрДАЗТ, 2014. 50 с.
9. Яковлева А. П. Методи оптимізації та дослідження операцій. Конспект лекцій [Електронний ресурс] : навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою «Системний аналіз» спеціальності 124 Системний аналіз / А. П. Яковлева. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 71 с.
10. Математична статистика : навч. посіб. [Електронне видання] / [С. М. Григулич, В. П. Лісовська, О. І. Макаренко та ін.]. К. : КНЕУ, 2015. 203 с.
11. Вища математика: теорія ймовірностей та математична статистика. Навчальний посібник / Шелестовський Б. Г., Габрусєв Г. В., Габрусєва І. Ю. Тернопіль: СМП "Тайп", 2023. 142 с.
12. Вища математика: теорія ймовірностей та математична статистика. Навчальний посібник / Шелестовський Б. Г., Габрусєв Г. В., Габрусєва І. Ю. Тернопіль: СМП "Тайп", 2023. 142 с.
13. Капустян О. А.: Конспект лекцій з дисципліни «Моделі оптимізації систем. Модуль 2: Моделі оптимізації систем керування», частина 1 для студентів спеціальності 124 «Системний аналіз». Київ. 2024. 97 с.
14. Вища математика : конспект лекцій : у 2 ч. / укладачі І. Г. Голубков, В. А. Клименко, Т. І. Жиленко. Суми : Сумський державний університет, 2018. Ч. 1. 143 с.