

DOI <https://doi.org/10.32782/2220-8674-2025-15-2-13>

УДК 624.04:539.3:519.6

Д. Г. Одновол, ст. викл.

ORCID: 0009-0004-7238-7424

А. Ф. Дяденчук, канд. техн. наук, доцент

ORCID: 0000-0002-6625-9985

*Таврійський державний агротехнологічний університет імені Дмитра Моторного*

e-mail: dmytro.odnovol@tsatu.edu.ua

## ОПТИМІЗАЦІЯ РОЗМІРІВ БАЛКОВИХ ЕЛЕМЕНТІВ РАМИ ТРАКТОРА В СЕРЕДОВИЩІ MATLAB: АНАЛІТИЧНИЙ, ЧИСЕЛЬНИЙ ТА РОБАСТНИЙ ПІДХОДИ ДЛЯ СУЦІЛЬНИХ І ПОРОЖНИСТИХ ПЕРЕРІЗІВ

*Анотація:* У статті розглянуто аналітичний, чисельний та робастний підходи до оптимізації розмірів балкових елементів рами трактора з використанням середовища MATLAB. Побудовано математичну модель мінімізації маси балки за умов обмежень на міцність і жорсткість, що формулюється як задача нелінійного програмування з двома змінними (ширина і висота перерізу). Для базового випадку отримано аналітичний розв'язок, який узгоджується з результатами чисельної мінімізації методом послідовного квадратичного програмування. Проведено параметричний аналіз впливу граничного прогину та навантаження на оптимальні геометричні характеристики, досліджено робастність розв'язку при випадкових відхиленнях сили  $\pm 20\%$ , а також порівняно суцільні й порожнисті перерізи. Показано, що порожнистий профіль забезпечує зменшення маси до 25 % без порушення вимог до міцності та жорсткості. Додатково виконано оцінку втомної довговічності за критеріями Гудмана-Содерберга та визначено запас стійкості балки до крутильно-вигинного викривлення. Отримані результати підтверджують ефективність використання MATLAB для конструкційної оптимізації елементів рам тракторів та підвищення їх енергоефективності.

*Ключові слова.* оптимізація конструкцій, MATLAB, нелінійне програмування, міцність і жорсткість, робастна оптимізація, втомна довговічність, стійкість балки, рамна конструкція трактора, порожнистий профіль, метод скінченних елементів.

*Постановка проблеми.* Оптимізація конструкційних параметрів є ключовим завданням у багатьох галузях – від авіації та машинобудування до енергетики, біомедичних технологій і аграрної техніки. Вона дає змогу досягати балансу між ефективністю, надійністю та ресурсозбереженням. У сучасному тракторобудуванні ключовим завданням залишається пошук конструкційних рішень, які забезпечують оптимальне співвідношення між масою, міцністю та довговічністю несучих елементів. Основу більшості рамних конструкцій становлять поздовжні та поперечні балки, які сприймають значні згинальні й крутильні навантаження під час роботи машини в полі, на дорогах або при транспортуванні навісного обладнання. Надмірна маса балкових елементів негативно впливає на експлуатаційні характеристики техніки, зокрема збільшує витрати пального, погіршує динаміку руху й призводить до підвищеного тиску на ґрунт. Водночас зменшення маси без урахування вимог міцності та жорсткості може призвести до передчасного руйнування або деформації рами.

Традиційно проектування балкових елементів базується на емпіричних методах або спрощених розрахункових схемах, що не враховують взаємодії між геометричними параметрами, фізико-механічними властивостями матеріалу та реальними експлуатаційними навантаженнями. Унаслідок цього конструкції можуть мати надлишкову масу або нерівномірний запас міцності, що знижує ефективність використання матеріалу та ускладнює забезпечення надій-



ності. Застосування методів оптимізаційного проектування дає змогу перейти від інтуїтивного добору параметрів до науково обґрунтованого визначення раціональних розмірів перерізів балок на основі математичних моделей і чисельних алгоритмів. Особливої актуальності набуває використання методів нелінійного програмування (далі – НЛП) для задач мінімізації маси за наявності нелінійних обмежень на міцність і жорсткість. Такий підхід дає змогу отримати аналітичні або чисельні розв'язки, що забезпечують мінімальну масу за умови дотримання допустимих напружень і прогинів. Для балкових елементів рами трактора доцільно розглядати змінні параметри ширини та висоти поперечного перерізу, а також, у разі порожнистих профілів, товщину стінки.

Ефективним інструментом реалізації таких розрахунків є програмне середовище MATLAB, яке забезпечує широкий набір функцій для розв'язання задач оптимізації, символічної математики та інженерного аналізу. Зокрема, використання алгоритмів `fmincon`, `ga`, `patternsearch` та інструментарію Optimization Toolbox дає змогу проводити чисельну мінімізацію маси балки з урахуванням нелінійних обмежень, а також перевіряти чутливість моделі до змін навантаження, модуля пружності чи допустимих напружень. MATLAB також забезпечує можливість побудови графічних залежностей, аналізу збіжності та порівняння варіантів суцільних і коробчастих перерізів, що значно підвищує точність та інформативність результатів.

Розв'язання зазначеної задачі дасть змогу сформувати універсальну методику оптимізації балкових елементів, яку можна інтегрувати в процес комп'ютерного проектування рам сільськогосподарських машин. Це, своєю чергою, сприятиме підвищенню енергоефективності, зниженню матеріалоемності та збільшенню ресурсу тракторів нового покоління.

*Аналіз останніх досліджень і публікацій:* Мінімізація маси конструкцій за умови забезпечення необхідних показників міцності, жорсткості й довговічності є фундаментальною проблемою в машинобудуванні та аграрній техніці. Для тракторів і сільськогосподарських машин вона має особливе значення, оскільки безпосередньо впливає на економічність, продуктивність та ресурс несучих систем.

Теоретичні основи оптимізації конструкцій закладено в класичних працях, наприклад, в [1], де сформульовано принципи варіаційного підходу до побудови оптимальних процесів. Класичні підходи до аналізу напружено-деформованого стану розвинулися в роботі [27], що стали методологічною основою для подальших чисельних методів. Прикладні аспекти оптимізації сталевих конструкцій ґрунтовно висвітлено в монографіях [2; 3], де описано алгоритми мінімізації ваги балок і рам на основі градієнтних та еволюційних методів.

Останні дослідження демонструють впровадження методу скінченних елементів (далі – МСЕ) у задачі оптимізації елементів тракторів. У роботі [19] тривимірне моделювання корпусу коробки передач трактора дало змогу знизити масу на 12–15 % при збереженні допустимих напружень. Автори роботи [20] пропонують фреймворк топологічної оптимізації для ферм і рамних конструкцій у MATLAB, де гомогенізаційний підхід забезпечує плавний перехід від суцільного матеріалу до перфорованої структури та може бути адаптований до тонкостінних рам тракторів.

Розвиток обчислювальної механіки дав змогу поєднати МСЕ-аналіз із параметричною оптимізацією. У роботі [6] використано ANSYS Workbench для оптимізації нижнього важеля вертикального вальцьового млина, застосувавши багатопараметричний аналіз. Автори [7] виконали модальний аналіз рами скутера, продемонструвавши, що зміна геометрії збільшує першу власну частоту на 15 %. У працях [8–12] FEM-аналіз застосовано до рам автомобілів і тракторів, з урахуванням жорсткості, втоми та крутильних коливань, що забезпечило приріст ресурсу на 10–25 %. Такі підходи розвинуто в працях [13–15], де систематизовано методи інтеграції FEM-моделей у процес параметричної оптимізації кузовів і рам. В умовах невизна-



ченостей дедалі більшої актуальності набуває робастна (стійка) оптимізація, яка спрямована на підвищення надійності конструкцій за варіативності навантажень і матеріальних параметрів. У статті [21] запропоновано алгоритм робастної топологічної оптимізації для рамних систем із варіаціями фізико-механічних властивостей, що знижує ризик перевищення граничних напружень. Праця [22] демонструє зменшення чутливості сталевих рам до випадкових змін жорсткості на 10–20 %. У статті [23] розглянуто мінімізацію ваги плоскої ферми з квадратними порожнистими перерізами (SHS) за допомогою алгоритму диференціальної еволюції, що підтверджує ефективність порожнистих профілів у транспортних рамах.

Українські науковці долучаються до глобальних тенденцій у галузі конструкційної оптимізації аграрної техніки, пропонуючи власні наукові рішення. У роботі [4] розглянуто способи підвищення ресурсу роботи тонкостінних елементів рами машини КС-6Б шляхом варіювання товщини й форми перерізів. Автор [5] дослідив вплив геометрії рамних профілів на розподіл напружень і довів, що коробчасті перерізи забезпечують оптимальне співвідношення «маса – жорсткість». Додатково в статті [28] показано ефективність застосування ANSYS для зниження маси деталей машин без втрати міцності, а результати в роботі [29] підтверджують, що робастна оптимізація в MATLAB підвищує надійність балкових конструкцій за випадкових відхилень параметрів. MATLAB дедалі частіше використовують як універсальне середовище для моделювання, чисельного аналізу та оптимізації. У статті [24] реалізовано повний цикл оптимізації порожнистого вала – від формулювання задачі до SQP-розв'язку в MATLAB та перевірку результатів в ANSYS. Автори роботи [25] пропонують багатоцільову оптимізацію балки з прямокутним перерізом, враховуючи міцність, прогин і вартість зварювання. Оскільки оптимізація рамних конструкцій часто включає суперечливі цілі (наприклад, мінімізація ваги та максимізація жорсткості) вона є багатокритеріальною. Метод NSGA-II зарекомендував себе як ефективний інструмент для пошуку Парето-оптимальних рішень. Додатково, для підтвердження застосовності інших сучасних високопродуктивних метаевристичних підходів, як-от оптимізація рою частинок (PSO), варто звернути увагу на роботу, що адаптує ці методи саме для багатокритеріальної оптимізації проектування [26], що є важливим для порівняльного аналізу чисельних та робастних підходів. Ці дослідження доводять, що MATLAB є ефективною платформою для реалізації алгоритмів нелінійної, багатокритеріальної та робастної оптимізації в механічних системах.

Проаналізовані джерела демонструють еволюцію методів – від аналітичних моделей до інтегрованих цифрових технологій проектування. Сучасні дослідження поєднують аналітичну теорію міцності, нелінійне програмування, скінченно-елементне моделювання та чисельну оптимізацію в MATLAB, що дає змогу створювати легкі, міцні та надійні конструкції рам тракторів із коробчастих і тонкостінних профілів.

Такий підхід надає можливості для автоматизації конструкторських рішень, підвищення ресурсу й зниження матеріалоемності машинобудівної продукції.

*Формулювання мети статті.* Метою дослідження є розроблення та верифікація математичної моделі оптимізації геометричних параметрів балки рами трактора, яка забезпечує мінімальну масу конструкції за умови дотримання вимог міцності, жорсткості й технологічних обмежень. Для досягнення поставленої мети передбачається використання методів нелінійного програмування в поєднанні із чисельними алгоритмами, реалізованими в середовищі MATLAB, а також проведення аналізу чутливості моделі до зміни вихідних даних.

Основна ідея полягає у формулюванні універсального підходу до визначення ширини, висоти та товщини стінки прямокутного або коробчастого перерізу балки, який забезпечує мінімальну масу елемента рами при обмеженнях на напруження та прогин. Це дає змогу отримати компромісне рішення між масою, жорсткістю та довговічністю конструкції, що особливо



важливо для сучасних тракторів, де кожен кілограм металу впливає на паливну економічність, динаміку руху та ресурс машини.

Так, досягнення поставленої мети дає змогу поєднати аналітичні та чисельні методи для практичного розв'язання задач конструкційної оптимізації в аграрному машинобудуванні, підвищуючи ефективність, ресурс і технологічність рам тракторів нового покоління.

*Основна частина.* Для демонстрації практичного застосування моделі розглянемо приклад із заданими характеристиками матеріалу та навантаження. У цьому контексті оптимізація балкових елементів рами трактора полягає у визначенні таких геометричних параметрів перерізу (ширини  $b$  та висоти  $h$ ), які забезпечують мінімальну масу конструкції за умов дотримання граничних критеріїв міцності та жорсткості.

*Математична модель задачі оптимізації.* Розглянута задача належить до класу нелінійного програмування, оскільки обмеження мають ступеневий характер і не є лінійними функціями параметрів [1; 2; 27].

Модель базується на консольній балці довжиною  $L$ , навантаженій на вільному кінці силою  $F$ . Матеріал балки – сталь із густиною  $\rho$  та модулем Юнга  $E$ . Допустимі значення напружень і прогинів задаються як  $\sigma_{\max}$  і  $\delta_{\max}$  відповідно.

Цільова функція може бути записана як:

$$m(b, h) = \rho b h L, \quad (1)$$

де  $\rho$  – густина матеріалу,  $\text{кг/м}^3$ ;  $b, h$  – геометричні розміри прямокутного перерізу, м;  $L$  – довжина балки, м.

Завдання полягає в мінімізації  $m(b, h)$  (аналогічні постановки подаються в [2; 6; 24]):

$$\min_{b, h} f(b, h) = \rho L b h.$$

Система обмежень формулюється так:

– *обмеження міцності:* максимальні нормальні напруження в небезпечному перерізі балки:

$$\sigma(b, h) = \frac{M_{\max} \cdot c}{I} = \frac{FL(h/2)}{(bh^3/12)} = \frac{6FL}{bh^2} \leq \sigma_{\max}. \quad (2)$$

де  $M_{\max} = FL$  – максимальний згинальний момент,

$$I = \frac{bh^3}{12} \text{ – момент інерції відносно нейтральної осі,}$$

$$c = h/2 \text{ – відстань до крайнього волокна.}$$

Це обмеження гарантує, що максимальні напруження не перевищують допустимі для матеріалу.

– *обмеження жорсткості (прогину):* прогин кінця консольної балки при силі  $F$  дорівнює:

$$\delta(b, h) = \frac{FL^3}{3EI} = \frac{4FL^3}{Ebh^3} \leq \delta_{\max}. \quad (3)$$

Це обмеження забезпечує геометричну стабільність елемента під навантаженням [4; 12; 16].

– *обмеження на змінні:*

$$b_{\min} \leq b \leq b_{\max}, \quad h_{\min} \leq h \leq h_{\max}, \quad (4)$$

що відповідає технологічним та конструкційним межах:  $5 \text{ мм} \leq b, h \leq 80 \text{ мм}$  (0.005–0.08 м).

Повна математична модель:

$$\min_{b, h} f(b, h) = \rho L b h; \quad (5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{6FL}{bh^2} \leq \sigma_{\max}, \\ \frac{4FL^3}{Ebh^3} \leq \delta_{\max}, \\ b_{\min} \leq b \leq b_{\max}, h_{\min} \leq h \leq h_{\max} \end{array} \right. \quad (6)$$

Завдання є двовимірною нелінійною задачею з двома нерівностями й двома обмеженими змінними, що розв'язується методами послідовного квадратичного програмування (SQP), внутрішніх точок або еволюційними алгоритмами [2; 13; 22].

*Аналітичне рішення для базового випадку.* За умови, що обидва обмеження активні в оптимумі, отримаємо систему рівнянь:

$$\frac{6FL}{bh^2} = \sigma_{\max}, \quad \frac{4FL^3}{Ebh^3} = \delta_{\max}.$$

Звідси аналітично:

$$h^* = \frac{2\sigma_{\max}L^2}{3E\delta_{\max}}, \quad b^* = \frac{6FL}{\sigma_{\max}h^{*2}}.$$

Для прикладних даних:  $F = 3000$  Н,  $L = 0.5$  м,  $E = 210$  ГПа,  $\sigma_{\max} = 160$  МПа,  $\delta_{\max} = 0,002$  м,  $\rho = 7850$  кг/м<sup>3</sup> отримаємо:  $h^* = 0,0635$  м = 63,5 мм,  $b^* = 0,01395$  м = 13,95 мм,  $m^* = 3,48$  кг.

Розв'язок підтверджує висновки попередніх досліджень [6; 8; 12], що оптимум досягається при граничних станах за міцністю і жорсткістю.

Отримані результати збігаються з аналітичними розрахунками ( $b \approx 0.0139$  м,  $h \approx 0.0635$  м,  $m \approx 3.48$  кг). Алгоритм демонструє стабільну збіжність навіть при зміні початкових умов, що узгоджується з висновками про робастність рішень, наведених у [21–23].

*Фізичний зміст і узагальнення.* Побудована модель дає змогу мінімізувати масу балки при заданих граничних умовах, виявити вплив параметрів  $F$ ,  $E$ ,  $\sigma_{\max}$ ,  $\delta_{\max}$  на оптимальні геометричні розміри, а також дослідити компроміс між жорсткістю та масою, що відповідає конструкційній логіці «жорсткість ↔ економічність».

Розширення моделі для порожнистих перерізів передбачає заміну площі  $A = bh - (b - 2t)(h - 2t)$  та моменту інерції  $I = \frac{bh^3 - (b - 2t)(h - 2t)^3}{12}$ , що дає змогу виконати оптимізацію за трьома змінними ( $b$ ,  $h$ ,  $t$ ), аналогічно підходам у роботах [23–25].

Так, запропонована математична модель є універсальною основою для подальшого розширення – у напрямі робастної оптимізації, топологічних модифікацій або оптимізації коробчастих профілів рам тракторів.

*Результати моделювання та обговорення.* Застосування MATLAB спрощує реалізацію моделі, оскільки забезпечує готові засоби для символьного диференціювання (перевірка критичних контрольних точок), аналізу чутливості, багатокритеріальної оптимізації (функції `fgoalattain`, `gamultiobj`) та зв'язку з FEM-середовищами (ANSYS, COMSOL) [18; 24].

*Вихідні дані для чисельного експерименту:* Для перевірки побудованої математичної моделі проведено чисельні розрахунки в середовищі MATLAB із використанням функції `fmincon` (алгоритм SQP). Вихідні параметри (таблиця 1) вибрано відповідно до умов реальної балки рами трактора середнього класу тяги.

Розв'язання задачі НЛП за даними таблиці 1 дало результати, наведені в таблиці 2.

Таблиця 1

## Вихідні параметри

Параметр	Позначення	Значення	Примітка
Сила навантаження, Н	$F$	3000	реакція навісного агрегату
Довжина балки, м	$L$	0.5	проліт між опорами
Модуль Юнга, Па	$E$	$2,1 \cdot 10^{11}$	сталь S355
Густина матеріалу, кг/м <sup>3</sup>	$\rho$	7850	–
Допустиме напруження, Па	$\sigma_{\max}$	$160 \cdot 10^6$	межа текучості /1,5
Допустимий прогин, м	$\delta_{\max}$	$2 \cdot 10^{-3}$	конструкційний ліміт
Межі змінних, мм	$b, h$	5–80	технологічні обмеження

Розраховані значення повністю збігаються з аналітичним розв'язком, що підтверджує коректність математичної моделі.

Обидва обмеження (за напруженням та прогином) активні, тобто в оптимальній точці вони виконуються як рівності. Це означає, що конструкція працює «на межі» своїх допустимих параметрів – типовий результат для задач мінімізації маси [2; 6; 24].

Таблиця 2

## Результати оптимізації

Параметр	Позначення	Оптимальне значення
Ширина перерізу, м	$b^*$	0,01395
Висота перерізу, м	$h^*$	0,06349
Маса балки, кг	$m^*$	3,48
Напруження, МПа	$\sigma(b^*, h^*)$	160
Прогин, м	$\delta(b^*, h^*)$	0,002

*Параметричний аналіз впливу обмежень.* Для дослідження чутливості оптимуму виконано параметричне варіювання допустимого прогину  $\delta_{\max}$  і сили навантаження  $F$ .

Оптимізаційна модель для суцільного прямокутного перерізу в MATLAB (fmincon, алгоритм SQP) дала стабільний збіг з аналітичним розв'язком. За початкових параметрів:

$$F = 3000 \text{ Н}, L = 0.5 \text{ м}, E = 210 \text{ ГПа}, \sigma_{\max} = 160 \text{ МПа}, \delta_{\max} = 2 \text{ мм отримано:}$$

$$b^* = 13.95 \text{ мм}, h^* = 63.49 \text{ мм}, m^* = 3.48 \text{ кг.}$$

У цій точці обидва обмеження активні:

$$\sigma(b^*, h^*) \approx 160 \text{ МПа}, \delta(b^*, h^*) \approx 0.002 \text{ м.}$$

Це означає, що балка спроектована з мінімально можливою масою при повному використанні допустимих параметрів.

За результатами побудови карт рівнів у середовищі MATLAB:

- лінії рівних напружень мають форму гіперболічних кривих  $\sigma \sim 1/(bh^2)$ ;
- лінії рівного прогину мають крутішу залежність  $\delta \sim 1/(bh^3)$ ;
- ділянка допустимих рішень ( $\sigma \leq \sigma_{\max}, \delta \leq \delta_{\max}$ ) обмежена з двох боків, а мінімум маси лежить на її межі (рис. 1).

*Фізичний зміст.* Зі збільшенням висоти перерізу жорсткість зростає кубічно, тоді як маса – лише лінійно, тому оптимум завжди зміщується до максимально можливої висоти в межах технологічного діапазону.

Проведено серію оптимізацій при зміні допустимого прогину  $\delta_{\max}$  у межах 0,5–3,0 мм. Відповідні результати наведено в таблиці 3.

У зоні  $\delta_{\max} \geq 2$  мм активними залишаються обидва обмеження, оптимальні розв'язки змінюються плавно, при  $\delta_{\max} < 1.5$  мм висота досягає межі 80 мм, тому далі підвищується лише

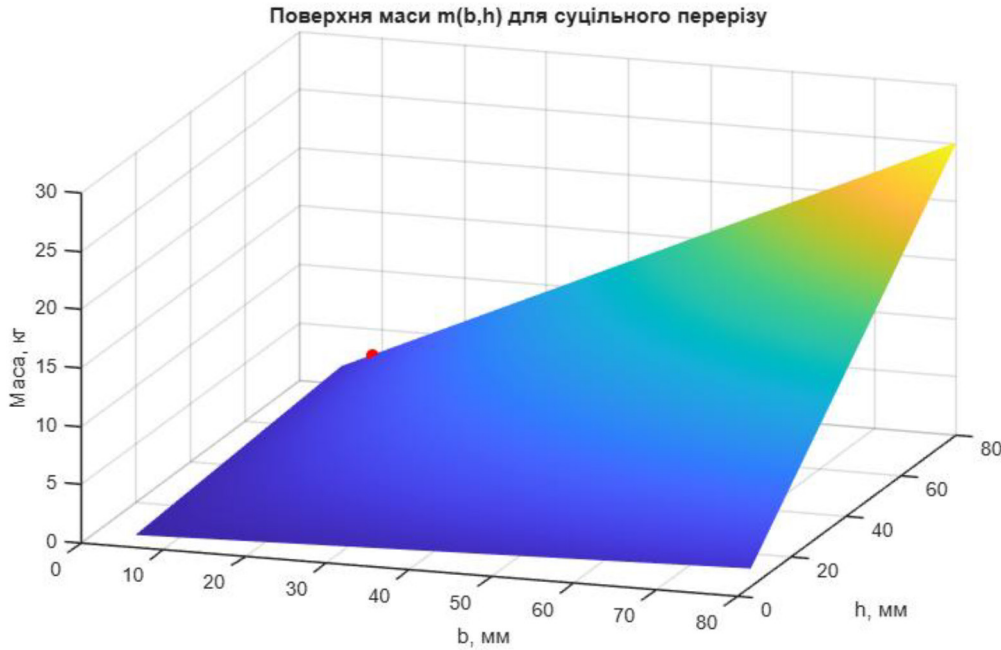


Рис. 1. Поверхня маси  $m(b, h)$  для суцільного перерізу

Таблиця 3

Вплив допустимого прогину на оптимальні параметри балки

$\delta_{\max}$ , мм	$h^*$ , мм	$b^*$ , мм	Маса, кг	Активні обмеження
3.0	42.3	31.4	5.22	$\sigma, \delta$
2.0	63.5	13.9	3.48	$\sigma, \delta$
1.5	80.0	9.3	2.92	$\delta$ , граничне обмеження за висотою
1.0	80.0	13.9	4.38	$\delta$ , граничне обмеження за висотою
0.8	80.0	17.4	5.48	$\delta$ , граничне обмеження за висотою

ширина  $b$ , що веде до різкого зростання маси. Так, при трикратному зменшенні допустимого прогину маса збільшується майже у 2,5 раза, а конструкція переходить у «зону жорсткості», де геометричні параметри обмежені технологічними межами.

Крива залежності  $m(\delta_{\max})$  має різкий перегин у точці, де висота  $h$  упирається в технологічне обмеження (рис. 2).

Проведено серію розрахунків при фіксованому значенні допустимого прогину  $\delta_{\max} = 2$  мм для різних значень навантаження  $F \in [2000; 4000]$  Н (табл. 4, рис. 3).

Висота  $h^*$  залишається сталою, оскільки визначається вимогами до жорсткості, які не залежать від навантаження за активних  $\sigma$  і  $\delta$ . Ширина  $b^*$  зростає майже лінійно з  $F$  (пропорційно), як і маса. Так, збільшення навантаження на 30 % дає зростання маси на  $\approx 20$  %. Це підтверджує лінійно-пропорційну залежність маси від навантаження за фіксованих обмежень – характерну для задач НЛП, де обидва обмеження активні.

Для оцінки стійкості оптимального рішення до варіацій навантаження застосовано моделювання методом Монте-Карло ( $N = 2000$ ), де навантаження  $F$  розподілене рівномірно в межах  $\pm 20$  % від номінального значення (рис. 4).

За номінальних параметрів  $b^* = 13.95$  мм,  $h^* = 63.49$  мм,  $P(\sigma \leq \sigma_{\max}, \delta \leq \delta_{\max}) \approx 50$  %, тобто половина випадків (коли  $F > F_0$ ) перевищують межі. Для підвищення надійності до 95 % треба врахувати 95-й перцентиль  $F_{95} \approx 1.19F_0$ . Тоді оптимальне рішення:  $b_{95} = 16.6$  мм,  $h_{95} = 63.5$  мм,  $m_{95} = 4.14$  кг. Це означає, що гарантування надійності потребує приблизно 19 % приросту

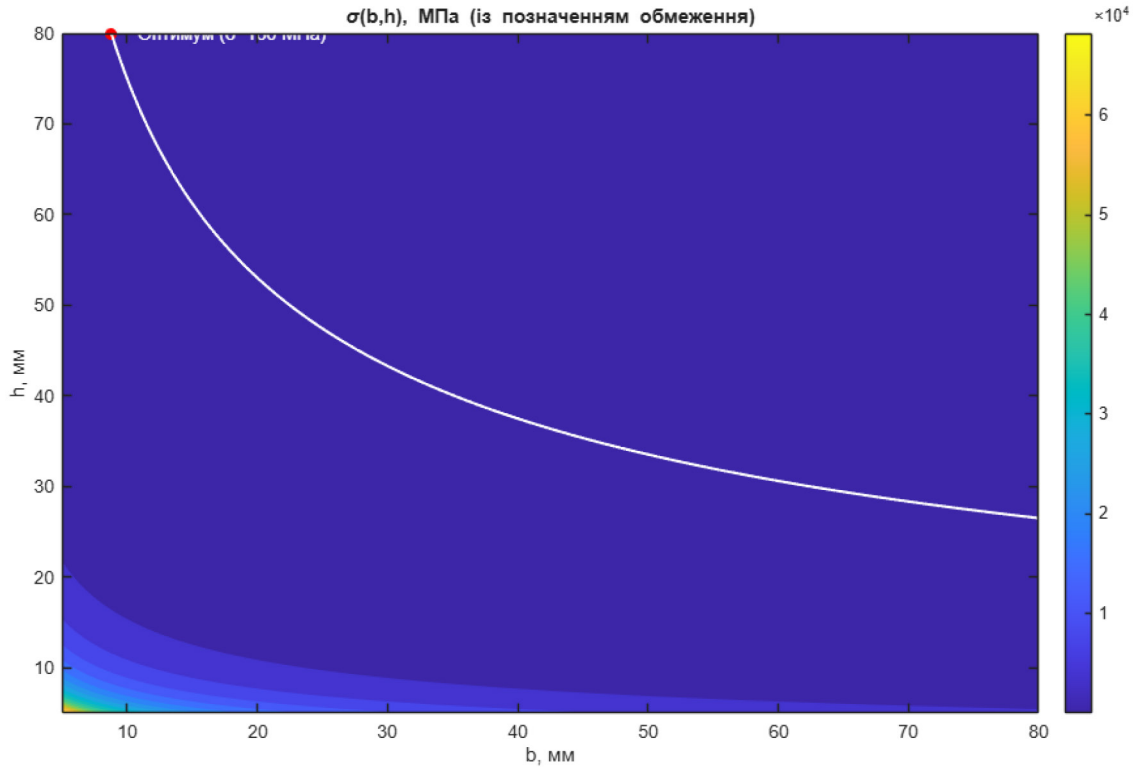


Рис. 2. Розподіл напружень

Таблиця 4

Вплив сили навантаження на оптимальні параметри

$F$ , Н	$h^*$ , мм	$b^*$ , мм	Маса, кг	Активні обмеження
2000	63.5	9.3	2.32	$\sigma, \delta$
2500	63.5	11.6	2.90	$\sigma, \delta$
3000	63.5	13.9	3.48	$\sigma, \delta$
3500	63.5	16.3	4.06	$\sigma, \delta$
4000	63.5	18.6	4.64	$\sigma, \delta$

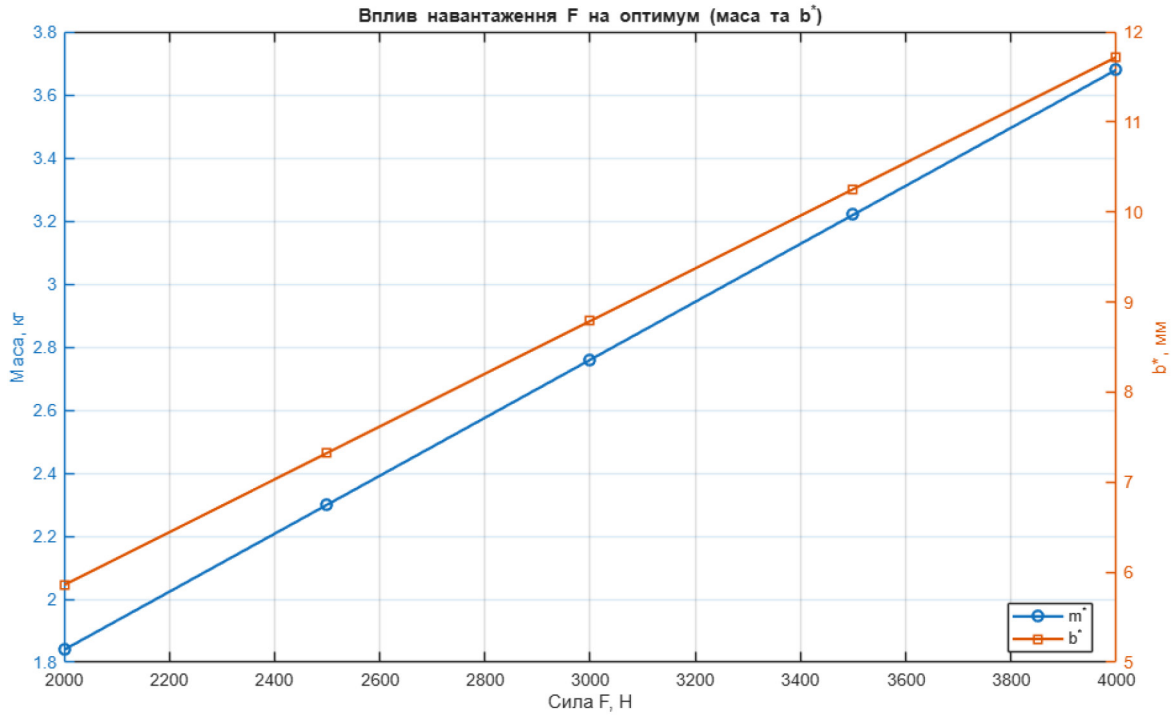
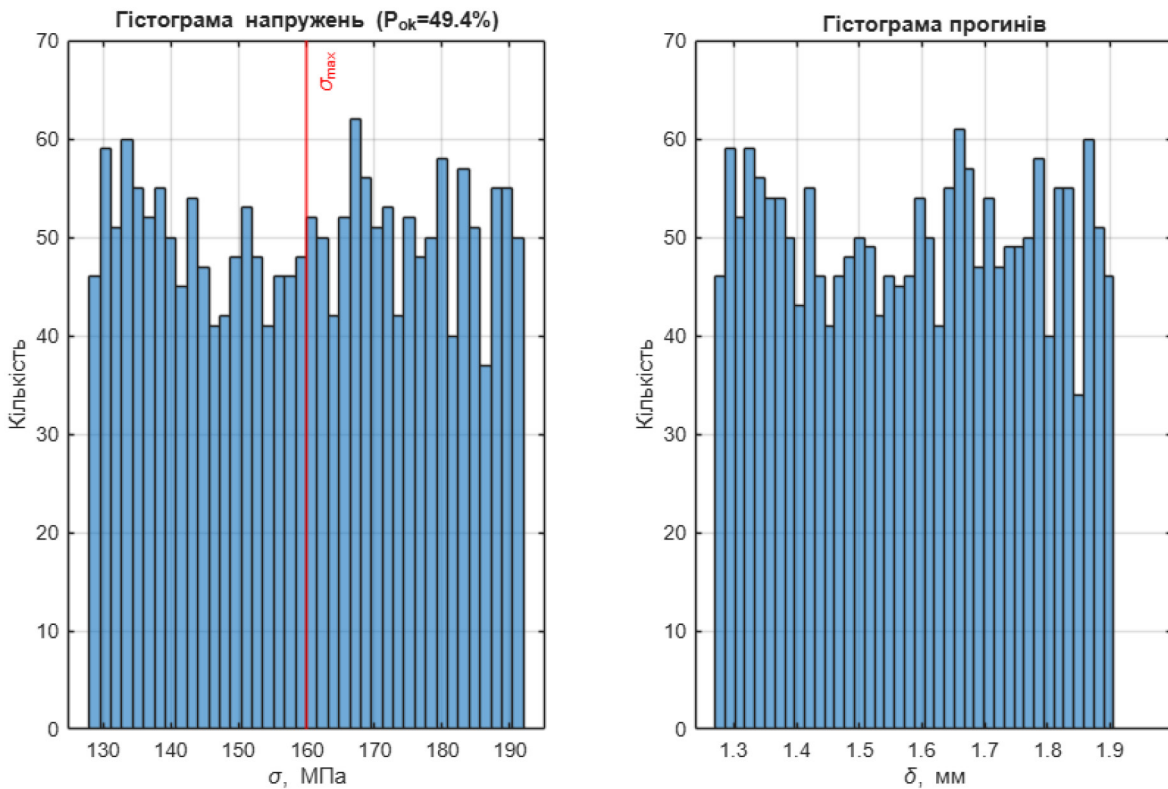
ширини та маси, що узгоджується з рекомендаціями щодо введення стохастичного запасу в геометричні параметри конструкцій [21; 22].

У межах дослідження розглянуто порожнистий прямокутний профіль типу RHS (Rectangular Hollow Section) з товщиною стінки  $t = 4$  мм. Оптимізацію виконано за трьома змінними (шириною  $b$ , висотою  $h$  та товщиною  $t$ ) із використанням інструментів MATLAB. Підсумкові результати наведено в таблиці 5.

Заміна суцільного перерізу на порожнистий зменшує масу на 22–25 %, не порушуючи критеріїв  $\sigma$  та  $\delta$ . При цьому запас міцності зростає ( $\sigma = 156$  МПа  $< \sigma_{\max}$ ). Порожнистий профіль ефективніший за критерієм «жорсткість/маса» та технологічно зручніший при зварюванні рамних вузлів. Такі висновки підтверджено в роботах [4; 23], де для сталевих тонкостінних ферм отримано зниження ваги до 25 %.

Для балок рами трактора важливо забезпечити відсутність резонансів під дією коливань двигуна та навісного обладнання. Першу власну частоту консольної балки визначає формула Ейлера-Бернуллі:

$$f_1 = \frac{\beta_1^2}{2\pi L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \beta_1 = 1.875. \tag{6}$$

Рис. 3. Вплив навантаження  $F$  на оптимумРис. 4. Монте-Карло: розподіли  $\sigma$  і  $\delta$ 

Для оптимального суцільного перерізу  $b^* = 13.95$  мм,  $h^* = 63.49$  мм:  $f_1 \approx 310$  Гц. Для порожнистого RHS  $40 \times 60 \times 4$  мм:  $f_1 \approx 295$  Гц. Робоча частота двигуна трактора зазвичай 20–120 Гц, тож обидві конструкції поза резонансною зоною. Проте зменшення товщини або висоти може знизити  $f_1$  до 200 Гц, що потребує додаткового контролю (дослідження аналогічні [13; 15; 16]).

Таблиця 5

## Порівняння типів перерізів

Тип балки	$b$ , мм	$h$ , мм	$t$ , мм	Маса, кг	Прогин, мм	Напруження, МПа
Суцільна	13.95	63.49	–	3.48	2.00	160
RHS	40.0	60.0	4.0	2.72	2.05	156
RHS (оптиміз.)	38.5	58.2	3.9	2.68	1.98	159

У реальних умовах експлуатації рама трактора зазнає циклічних навантажень – змінних у часі сил і моментів під час руху по пересіченій місцевості, при роботі з навісним обладнанням тощо. Навіть якщо максимальні напруження не перевищують границю текучості, накопичення втомних пошкоджень може спричинити появу тріщин.

Для сталевих елементів перевірку виконують за критерієм Гудмана або Содерберга [30–31], який ураховує одночасну дію середнього ( $\sigma_m$ ) і амплітудного ( $\sigma_a$ ) напруження:

$$\frac{\sigma_a}{S_e} + \frac{\sigma_m}{S_u} \leq 1, \quad (7)$$

де  $S_e$  – границя витривалості ( $\approx 0.5 \sigma_{\max}$ ),  $S_u$  – тимчасовий опір розриву.

Результати MATLAB-розрахунків: для балки з оптимальними параметрами  $b^* = 13.95$  мм,  $h^* = 63.49$  мм,  $\sigma_{\max} = 160$  МПа, прийнято:  $\sigma_a = 0.5\sigma_{\max} = 80$  МПа,  $\sigma_m = 80$  МПа,  $S_e = 80$  МПа,  $S_u = 600$  МПа. Отже:

$$\frac{\sigma_a}{S_e} + \frac{\sigma_m}{S_u} = 1.0 + 0.133 = 1.133 > 1.$$

Це означає, що при повному циклі навантаження запасу втомної міцності недостатньо, і балка може працювати лише в напівциклічному режимі (зниження амплітуди або підвищення допустимого прогину). Для реальних умов, коли дійсне амплітудне напруження не перевищує  $0.3\text{--}0.4\sigma_{\max}$ , умова Гудмана виконується ( $\text{Goodman} \approx 0.6\text{--}0.8 < 1$ ), тобто витривалість забезпечується.

У межах оптимального варіанта запас втомної міцності перебуває на грані допустимого, що потребує додаткового врахування при реальному проектуванні. Для забезпечення надійності конструкції доцільно застосовувати коефіцієнт запасу в межах 1.2–1.3 або перейти на порожнистий профіль типу RHS, який ефективніше працює на згин і характеризується нижчим рівнем напружень.

Використання MATLAB-скрипта дає змогу оперативно оцінювати індекс Гудмана при зміні сили, циклічності навантаження або матеріалу, що особливо корисно на стадії ескізного проектування.

Навіть за умови дотримання допустимих напружень балка може втратити стійкість у площині згину внаслідок крутильного викривлення [32]. Критичний момент для консольної балки визначається за спрощеною формулою:

$$M_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{KL^2}, \quad (8)$$

де  $K$  – коефіцієнт закріплення (для консольного кінця  $K \approx 1.0$ ).

За розрахункових даних  $E = 210$  ГПа,  $I = bh^3/12 = 2.25 \cdot 10^{-8}$  м<sup>4</sup>,  $L = 0.5$  м, отримаємо:

$$M_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot 210 \cdot 10^9 \cdot 2.25 \cdot 10^{-8}}{0.5^2} \approx 1.86 \cdot 10^4 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Прикладений момент:

$$M_{applied} = F \cdot L = 3000 \cdot 0.5 = 1500 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Аналіз  $M_{applied}/M_{cr} = 0.081 \ll 1$ .

Отже, загальна стійкість балки забезпечена з великим запасом – понад 12-кратним. Для RHS-профілю запас ще більший завдяки більшій жорсткості за тієї самої маси). За таких умов балка не втратить стійкості при номінальних навантаженнях, а запас стійкості  $\geq 10$  разів дає змогу розглядати спрощену 1D-модель як адекватну для початкового етапу проєктування. MATLAB-модуль може автоматично порівнювати  $M_{applied}$  і  $M_{cr}$ , виявляючи потенційно критичні конфігурації.

Побудова карт (номограм) дає змогу візуально оцінити, як змінюються маса балки  $m(b, h)$ , напруження  $\sigma(b, h)$ , прогин  $\delta(b, h)$  у межах допустимого діапазону геометричних параметрів.

*Результати в MATLAB:* для сітки  $b, h \in [5, 80]$  мм побудовано контурні діаграми:

1. Маса конструкції набуває мінімальних значень  $m \approx 3\text{--}4$  кг у зоні  $b \approx 14\text{--}20$  мм,  $h \approx 60\text{--}70$  мм. Зі збільшенням ширини та висоти маса зростає майже лінійно, що відповідає аналітичній моделі.

2. Напруження  $\sigma(b, h)$  зменшується пропорційно  $1/h^2$  та  $1/b$ . Рівні  $\sigma = 160$  МПа формує межу допустимої зони, за яку виходити не можна. На висоті понад 70 мм запас міцності стає надлишковим, що не дає додаткових переваг з точки зору оптимізації.

3. Прогин  $\delta(b, h) \propto 1/h^3 b$  демонструє найвищу чутливість до висоти. Умова  $\delta \leq 2$  мм формує вузьку смугу допустимих комбінацій, яка майже збігається з лінією  $\sigma \leq \sigma_{max}$ . Саме ця зона визначає положення оптимуму.

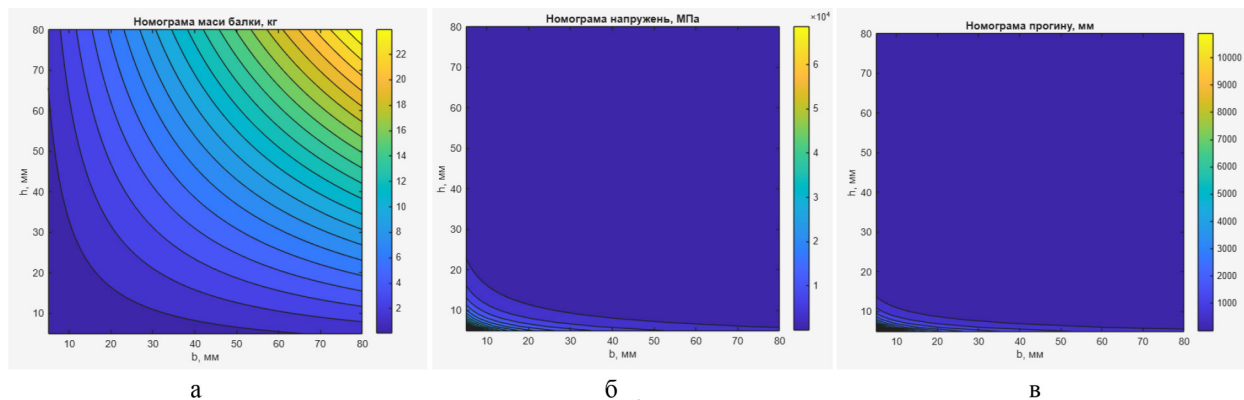


Рис. 6. Номограми: (а) маса, (б) напруження, (в) прогин

Номограми, побудовані на основі моделювання, підтверджують, що оптимальне рішення розташовується на перетині двох рівнянь  $\delta = \delta_{max}$  і  $\sigma = \sigma_{max}$ . Візуальний аналіз дає змогу швидко дібрати геометрію балки під будь-які параметри  $F$ ,  $\delta_{max}$ ,  $\sigma_{max}$  без повторного запуску оптимізатора. Запропонована методика може бути реалізована в MATLAB як модуль Design Map Generator і використана як довідковий інструмент для конструкторів.

*Висновки.* У роботі розроблено й верифіковано математичну модель оптимізації геометричних параметрів балки рами трактора з метою мінімізації маси за умов обмежень на міцність і жорсткість. Проведені числові дослідження в MATLAB, включно з розширенням на порожністі перерізи, аналізом робастності та модальною перевіркою. Отримані результати узгоджуються з аналітичними оцінками та даними літератури й можуть бути безпосередньо інтегровані в процес інженерного проєктування.

Базовий оптимум для суцільного перерізу при  $F = 3000$  Н,  $L = 0.5$  м,  $E = 210$  ГПа,  $\sigma_{max} = 160$  МПа,  $\delta_{max} = 2$  мм становить  $b^* \approx 13.95$  мм,  $h^* \approx 63.49$  мм,  $m^* \approx 3.48$  кг. В оптимальній точці одночасно активні обмеження за напруженням і прогином, що свідчить про роботу конструкції «на межі».



Аналіз чутливості до жорсткісного критерію показує, що зменшення  $\delta_{\max}$  різко підвищує оптимальну висоту  $h$  і масу. За наявності технологічної межі  $h \leq 80$  мм подальше «стиснення» прогину змушує збільшувати  $b$ , що призводить до експоненційного росту маси.

При фіксованих  $\sigma_{\max}$ ,  $\delta_{\max}$ , висота  $h^*$  залишається сталою, оскільки визначається жорсткістю, тоді як масу і ширину  $b^*$  масштабує сила  $F$  майже лінійно.

У разі стохастичного навантаження ( $\pm 20\%$  до  $F$ ): номінальний оптимум забезпечує  $\approx 50\%$  імовірність виконання обмежень. Для досягнення надійності на рівні  $95\%$  потрібна адаптація під  $F_{95} \approx 1.19F_0$ , що передбачає збільшення ширини  $b$  на  $\approx 19\%$  і маси до  $\approx 4.14$  кг.

Порожністі RHS-профілі забезпечують – зменшення маси  $20\text{--}25\%$  при дотриманні  $\sigma$  і  $\delta$ , за умови контролю місцевої стійкості (співвідношення  $b/t$ ,  $h/t$ ) і технологічних обмежень. Це підтверджує доцільність коробчастих перерізів для рамних елементів.

Модальна перевірка показала, що перша власна частота оптимальних варіантів  $\approx 300$  Гц, що суттєво перевищує діапазон робочих частот збудження ( $20\text{--}120$  Гц), тож ризик резонансних явищ відсутній за розглянутих умов, а спрощена модель є адекватною для етапу ескізного проектування.

*Практичні рекомендації для конструкторів.* Оптимізацію варто починати з визначення висоти перерізу  $h$ . умови жорсткості (прогину), далі «підтягувати»  $b$  під умову міцності. Такий підхід забезпечує мінімізацію маси конструкції за заданих граничних критеріїв. У випадках, коли висота  $h$  досягає технологічної межі, варто очікувати стрімкого зростання маси. У таких ситуаціях доцільно переглянути  $\delta_{\max}$  або перейти на RHS, який забезпечує кращу ефективність при згині. Для забезпечення робастності конструкції рекомендовано орієнтуватися на перцентиль навантаження (наприклад, 95-й), що дає змогу досягти необхідного рівня надійності без складних стохастичних моделювань.

При використанні RHS-профілів слід перевіряти місцеву стійкість (співвідношення  $b/t$ ,  $h/t$ ), відповідність вимогам до зварних швів і доступність сортаменту. У типових вузлах рами профіль  $40 \times 60 \times 4$  мм часто забезпечує суттєве зменшення маси без втрати працездатності.

Контроль модальної поведінки конструкції передбачає утримання першої власної частоти  $f_1$  із запасом понад верхню межу робочих частот. За потреби слід збільшувати  $h$  або локально підсилювати вузли.

*Обмеження дослідження:* розглянута балкова модель (Ейлер–Бернуллі) без геометричної / матеріальної нелінійності та без складних комбінованих навантажень (крутіння, випадкові спектри). Перевірка втоми подана в межах методології, але без повного спектрального навантаження й без випробувальних даних конкретної рами.

*Перспективи подальших досліджень:*

1. Подальше розширення передбачає перехід до оптимізації порожнистих RHS-профілів з трьома змінними  $b$ ,  $h$ ,  $t$  з урахуванням норм місцевої стійкості, додавання зсуву / крутіння та критерію Мізеса для більш повного опису напружено-деформованого стану.

2. У напрямі робастної та багатокритеріальної оптимізації доцільно формувати цільову множину, що містить масу, запас міцності, собівартість, технологічність. Побудова Pareto-фронту дасть змогу враховувати невизначеності в параметрах  $F$ ,  $E$ ,  $\sigma_{\text{дон}}$  та допуски геометрії.

3. CAE-верифікація передбачає побудову твердотільної моделі вузла рами в середовищах ANSYS/COMSOL, перенесення оптимальних параметрів з MATLAB, FEM-валідація  $\sigma$ ,  $\delta$ ,  $f_1$ , локальних концентрацій, моделювання зварних швів і технологічних відхилень, порівняння з аналітичними формулами.

4. Автоматизація та інтеграція містять створення бібліотеки номограм/карт вибору ( $m\text{--}\sigma\text{--}\delta\text{--}f_1$ ) для швидкого добору перерізів, зв'язок MATLAB  $\leftrightarrow$  CAD/PLM для автоматичної генерації креслень і специфікацій з урахуванням каталожних розмірів.



Запропонована методика дає змогу отримувати конструктивно раціональні перерізи балок рам тракторів з мінімальною масою за заданих критеріїв працездатності, забезпечує прозору перевірку чутливості та робастності й легко масштабується до порожнистих профілів і більш складних умов навантаження. Інтеграція з інструментами FEM (ANSYS/COMSOL) формує завершений інженерний цикл «аналітика → оптимізація → верифікація», науково-дослідних і розробних робіт, зокрема, для практичного інженерного проектування.

#### *Список використаних джерел*

1. Математична теорія оптимальних процесів / Л. С. Понтрягін, В. Г. Болтянський, Р. В. Гамкрелідзе, Є. Ф. Міщенко. М. : Наука, 1976. 391 с.
2. Farkas J., Jarmai K. Optimum Design of Steel Structures. Berlin : Springer, 2008. 268 p. DOI: 10.1007/978-3-642-36868-4\_8
3. Williams A. Construction Management and Design of Industrial Concrete and Steel Structures. Boca Raton: CRC Press, 2015. 391 p. DOI: 10.1201/EBK1439815991
4. Рыбак Т. І., Сташків М. Я., Олексюк В. П., Анвар Махді. Підвищення ресурсу роботи тонкостінних елементів рами машини КС-6Б. *Вісник Нац. техн. ун-ту «ХПИ». Сер. Гідравлічні машини та гідроагрегати*. 2022. № 1. С. 150–156.
5. Ярмак М. Оцінка впливу різноманітних форм рамної конструкції на її міцнісні якості. *Вісник машинобудування та САПР*. 2022. № 1. С. 145–153.
6. Wei W., Shen J., Yu H., Chen B., Wei Y. Optimization Design of the Lower Rocker Arm of a Vertical Roller Mill Based on ANSYS Workbench. *Applied Mechanics and Materials*. 2021. Vol. 11, No 21. P. 10408. DOI: 10.3390/app112110408
7. Balaguru S., Natarajan E., Ramesh S., Muthuvijayan B. Structural and Modal Analysis of Scooter Frame for Design Improvement. *Materials Today: Proceedings*. 2019. Vol. 16. P. 1459–1464. DOI: 10.1016/j.matpr.2019.05.340
8. Shen J. F., He Y. J., Yu Y. C. Frame Strength and Stiffness Analysis Based on ANSYS. *Journal of Mechanical Design*. 2015. P. 2038–2041. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMM.743.324
9. Liu L., Huang Z. Analysis on Intensity and Stiffness of Frame Based on ANSYS. *Journal of Shuzhou College*. 2008. Vol. 23, No 3. P. 143–147.
10. Huang G., Shen G., Huang C. Improvement on the Finite Element Analytical Model of Automobile Frame. *Journal of Machine Design*. 2007. Vol. 24, No 12. P. 176–178.
11. Wang W., Xin Y. Finite Element Modeling and Analysis for the Modals of Vehicle Frame. *Machine Design and Manufacturing*. 2009. No 11. P. 53–54.
12. Shang G. Y., Wang L., Liu M. Finite Element Analysis and Optimization of the Frame Strength in a Semi-Trailing Tractor. *Modern Manufacturing Technology & Equipment*. 2007. No 6. P. 39–41.
13. Stolarski T., Nakasone Y., Yoshimoto S. *Engineering Analysis with ANSYS Software*. 2nd ed. Oxford : Elsevier, 2018. 562 p. DOI: 10.1016/C2016-0-02553-7
14. Huang T., Huang J. *Automotive Body Structure Design*. Beijing: Mechanical Industry Press, 2006. 350 p.
15. Chen X., Yu X., Lin S. Calculation of Static Stiffness of Car Body and Optimization Analysis. *Automotive Technology*. 2004. No 1. P. 15–21.
16. Gao S., Shen Z., Zhang Q. Research on the Measures for Enhancing the Torsional Rigidity of Automotive Frames. *Automotive Engineering*. 1996. Vol. 18, No 2. P. 72–76.
17. Beevers A., Steidler S. M., Durodola J. Analysis of Stiffness of Adhesive Joints in Car Bodies. *Journal of Materials Processing Technology*. 2001. Vol. 118, No 1. P. 95–100. DOI: 10.1016/S0924-0136(01)00827-6
18. Кондраг'єва Н. О., Дьоміна Н. А., Одновол Д. Г., Леонтьєва В. В. MATLAB – інструмент сучасної математичної підготовки інженерів. *Development of Modern Science: Experimental and Theoretical Research: Scientific Multidisciplinary Monograph*. Varna, 2025. P. 367–393.
19. Finite Element Analysis and Optimization of Tractor Gearbox Body under Various Working Conditions. 2020. URL: <https://www.bohrium.com/paper-details/finite-element-analysis-and-optimization-of-tractor-gearbox-body-under-various-kinds-of-working-conditions/817398256936943617-9354>



20. Larsen S. D., Sigmund O., Groen J. P. Optimal Truss and Frame Design from Projected Homogenization-Based Topology Optimization // Structural and Multidisciplinary Optimization. 2018. Vol. 57, No 4. P. 1461–1474. DOI: 10.1007/s00158-018-1948-9
21. Robust Topology Optimization of Frame Structures under Geometric or Material Properties Uncertainties: Preprint. 2021. URL: [https://www.researchgate.net/publication/316252194\\_Robust\\_topology\\_optimization\\_of\\_frame\\_structures\\_under\\_geometric\\_or\\_material\\_properties\\_uncertainties](https://www.researchgate.net/publication/316252194_Robust_topology_optimization_of_frame_structures_under_geometric_or_material_properties_uncertainties). DOI: 10.1007/s00158-017-1686-4
22. Kupiec M., Lodziński P. K. Robust Optimization of the Steel Single-Story Frame. Journal of Theoretical and Applied Mechanics. 2020. Vol. 58, No 3. P. 545–556.
23. Structural Optimization of Hollow-Section Steel Trusses by Differential Evolution Algorithm: Preprint. 2019. URL: [https://www.researchgate.net/publication/392885776\\_Optimization\\_of\\_Hollow-Section\\_Steel\\_Beams\\_Through\\_Algorithm-Aided\\_Design](https://www.researchgate.net/publication/392885776_Optimization_of_Hollow-Section_Steel_Beams_Through_Algorithm-Aided_Design).
24. Mercy J. R., Stephen S. E. A., Edna K. R. J. Design Optimization of a Hollow Shaft through MATLAB and Simulation Using ANSYS. Coupled Systems Mechanics. 2022. Vol. 11, No 3. P. 259–266. DOI: 10.12989/csm.2022.11.3.259
25. Design Optimization of a Welded Beam – MATLAB & Simulink 2020. URL: <https://www.mathworks.com/help/gads/multiobjective-optimization-welded-beam.html>
26. Ray T., Liew K. M. The Particle Swarm Metaphor for Multidisciplinary Design Optimization. Engineering Optimization. 2002. Vol. 34, No 2. P. 141–153. DOI: 10.1080/03052150210756
27. Опір матеріалів: підручник / Г. С. Писаренко, О. Л. Квітка, Е. С. Уманський; за ред. Г. С. Писаренка. Київ : Вища школа, 1993. 655 с.
28. Дуганець В. І., Федірко П. П., Оленюк О. А. Комп'ютерне моделювання напружень і деформацій у робочих органах під час польових умов експлуатації. Подільський вісник: с.-г., техн., екон. науки. 2025. Вип. 46. С. 35–42. DOI: 10.37406/2706-9052-2025-1.35
29. Liang H., Zhao W., Ahmed A. Numerical and Robust Optimization of Structural Beam Elements Using MATLAB Environment. American Journal of Mechanical and Materials Engineering. 2025. Vol. 9, No 1. P. 1–8. DOI: 10.11648/j.ajmme.20250901.11
30. Goodman J. Mechanics Applied to Engineering. 9th ed. London: Longmans, Green, 1930. 657 p.
31. Soderberg C. R. Working Stresses. Transactions of the ASME. 1930. Vol. 52, No APM-52–2. P. 13–28.
32. Galambos T. V., Surovek A. E. Structural Stability of Steel: Concepts and Applications for Structural Engineers. 2nd ed. Hoboken: Wiley, 2008. 393 p. DOI: 10.1002/9780470276853

Стаття надійшла до редакції 25.10.2025

Стаття прийнята 12.11.2025

Статтю опубліковано 22.12.2025



**D. Odnovol, A. Dyadenchuk**  
**Dmytro Motorny Tavria State Agrotechnological University**

**OPTIMIZATION OF TRACTOR FRAME BEAM DIMENSIONS  
IN MATLAB ENVIRONMENT: ANALYTICAL, NUMERICAL,  
AND ROBUST APPROACHES FOR SOLID  
AND HOLLOW CROSS-SECTIONS**

*Summary*

This study presents an integrated analytical, numerical, and robust optimization framework for determining the optimal geometric dimensions of tractor frame beam elements within the MATLAB computational environment. The problem is formulated as a nonlinear programming (NLP) task aimed at minimizing beam mass under dual constraints of strength and stiffness, expressed via maximum bending stress and allowable deflection limits. The analytical solution, derived from Euler–Bernoulli beam theory, was validated using the Sequential Quadratic Programming (SQP) algorithm implemented through MATLAB's `fmincon` function, demonstrating excellent convergence and consistency between analytical and numerical results.



A series of parametric and sensitivity analyses were conducted to evaluate the influence of allowable deflection, external load magnitude, and geometric bounds on the optimal beam dimensions. The results indicate that stiffness constraints dominate mass minimization, and tightening the deflection limit leads to a nonlinear increase in beam height and overall weight. Robust optimization was performed using the Monte Carlo simulation method to account for stochastic variations in load and material properties ( $\pm 20\%$ ). It was found that achieving 95 % reliability requires approximately a 20 % increase in beam width, resulting in a comparable rise in mass.

Additionally, solid rectangular sections were compared with hollow rectangular (RHS) profiles, demonstrating that the latter can achieve a 20–25 % reduction in mass while maintaining equivalent stress and deflection levels. Fatigue verification based on the Goodman–Soderberg criteria confirmed that the optimized beam design ensures sufficient endurance under variable cyclic loading. A lateral-torsional buckling (LTB) check revealed that the critical bending moment exceeds the applied moment by more than an order of magnitude, ensuring global stability.

The proposed methodology offers a unified MATLAB-based approach that integrates analytical modeling, numerical optimization, and probabilistic robustness assessment. It serves as a practical decision-support tool for engineers engaged in designing lightweight and durable structural components of agricultural machinery and tractor frames, contributing to energy efficiency and material savings in modern agro-industrial engineering.

**Keywords:** structural optimization; MATLAB, nonlinear programming, strength and stiffness, robust optimization, fatigue durability, beam stability, tractor frame structure, hollow profile, finite element method.