УДК 517.958 + 519.685

Ніна Касімова, кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь,
Валентина Горбач, здобувачка третього (освітньо-наукового)
рівня вищої освіти кафедри інтегральних
та диференціальних рівнянь,
Ірина Циганівська, кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри алгебри і комп'ютерної математики,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
м. Київ, Україна

НАБЛИЖЕНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ОБ'ЄКТА КЕРУВАННЯ ДЛЯ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ВИРОДЖЕНИМ ПАРАБОЛІЧНИМ РІВНЯННЯМ

Анотація. У роботі розглядається задача оптимального керування для нелінійного виродженого параболічного рівняння монотонного типу. Дослідження проводиться у вагових просторах для ваг Макенгаупта та загальних вироджених ваг. Метод Гальоркіна використовується для обґрунтування існування слабкого розв'язку та як основа для побудови наближених розв'язків і чисельної симуляції.

Ключові слова: оптимальне керування, вироджене параболічне рівняння, вагові простори, метод Гальоркіна, чисельна симуляція.

Abstract. The paper considers an optimal control problem for a nonlinear degenerate parabolic equation of monotone type. The study is carried out in weighted spaces for Muckenhoupt weights and general degenerate weights. The Galerkin method is used to justify the existence of a weak solution and as a basis for constructing approximate solutions and numerical simulations.

Keywords: optimal control, degenerate parabolic equation, weighted spaces, Galerkin method, numerical simulation.

Розглядається задача оптимального керування у правій частині для нелінійного виродженого параболічного рівняння монотонного типу. Керування є розподіленою функцією $u = u(t,x)$, яка входить у праву частину рівняння стану.

Нехай $\Omega \subset R^N$ — обмежена область з ліпшицевою межею, $T > 0$, $Q=(0,T) \times \Omega$, $\Sigma =(0, T) \times \partial\Omega$, $2 \le p < +\infty$, $q = p/(p - 1)$. Нехай

$$\rho > 0 \text{ м. с. в } \Omega, \qquad \rho,\ \rho^{-1/(p-1)} \in L^1_{loc}(\Omega). \tag{1}$$

Розглянемо ваговий простір *W(Ω, ρdx)* з нормою

$$\|v\|_p = \left(\int_\Omega |v|^p\, dx + \int_\Omega p(x)|\nabla v|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{2}$$

а через *H(Ω, ρ dx)* позначимо замикання $C_0^\infty(\Omega)$ за нормою (2). У загальному виродженому випадку може мати місце

$$H(\Omega, \rho\, dx) \neq W(\Omega, \rho\, dx), \tag{3}$$

що пов'язано з ефектом Лаврентьєва.

Об'єкт керування має вигляд

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} - div\left(p(x)|\nabla y|^{p-2}\nabla_y\right) + |y|^{p-2}y = f + u, & (t,x) \in Q, \\ y = 0, & (t,x) \in \Sigma, \\ y(0,x) = y^0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{4}$$

Тут $y = y(t, x)$ — стан системи, а $u = u(t, x)$ — керування.

Нехай множина допустимих керувань $U_{ad} \subset L^q(Q)$ є непорожньою, опуклою, замкненою та обмеженою. Наприклад, можна брати

$$U_{ad} = \{u \in L^q(Q): u_a(t, x) \leq u(t, x) \leq u_b(t, x) \text{ м. с. в } Q\}. \tag{5}$$

Функціонал якості задається співвідношенння м

$$J(u,y) = \frac{1}{p}\int_Q |y - y_d|^p\, dx\, dt + \frac{\alpha}{q}\int_Q |u|^q\, dx\, dt \to inf. \tag{6}$$

Отже, задача оптимального керування полягає у знаходженні пари (u^0, y^0) такої, що

$$u^0 \in U_{ad}, \quad y^0 = y(u^0), \quad J(u^0, y^0) = \inf_{u \in U_{ad}} J(u, y(u)). \tag{7}$$

Можна розглядати два випадки для вагової функції.

Випадок 1. Ваги Макенгаупта. Нехай $\rho \in A_p$, тобто

$$[\rho]_{A_p} = \sup_B \left(\frac{1}{|B|}\int_B \rho(x)\, dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B \rho(x)^{-\frac{1}{\rho-1}}\, dx\right)^{\rho-1} < +\infty. \tag{8}$$

У цьому випадку вагові простори мають кращі властивості щільності, вкладень та компактності. Тому побудова слабкого розв'язку задачі (4) і наближеного розв'язку є технічно простішою.

Випадок 2. Загальні вироджені ваги. Нехай ρ задовольняє (1). У цьому випадку ми чітко вказуємо, що фазовим вважаємо простір $H(\Omega,\rho dx)$ і працюємо саме з H-розв'язками, оскільки може виникати ефект Лаврентьєва (3).

Для кожного фіксованого $u \in Uad$ у обох випадках існування слабкого розв'язку об'єкта керування (4) обґрунтовується методом Гальоркіна. Задача оптимального керування (7) досліджується прямим методом варіаційного числення. Метод Гальоркіна також дає природну основу для чисельної симуляції об'єкта керування. У випадку ваг Макенгаупта така апроксимація реалізується у більш регулярному функціональному середовищі. Для загальних вироджених ваг виникає додатковий виклик: при чисельній симуляції потрібно апроксимувати не лише стан y та керування u, але й саму вагу ρ за допомогою невироджених наближень. Тому наближені задачі повинні узгоджуватися з граничною H-постановкою.