УДК 519.654+62-5

ЗАСТОСУВАННЯ МНК ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ РАЦІОНАЛЬНОЇ ФУНКЦІЇ

Надикто В.Т., д.т.н.,
Величко О.В., к.фіз.-мат.н.
Таврійський державний агротехнологічний університет
тел.: (0619) 42-06-94

Анотація **– в роботі пропонується спосіб визначення коефіцієнтів раціональної функції вигляду $f(x)=bx(1-cx^2)^{-1}$ за відомими її значеннями при декількох значеннях змінної. Застосовується метод найменших квадратів. Наведено результати чисельних розрахунків з урахуванням похибок визначення значень функції.**

Ключові слова **– метод найменших квадратів, раціональна функція, нев'язка, частинні похідні, крива буксування.**

Постановка проблеми та аналіз останніх досліджень. Метод найменших квадратів – це ефективний спосіб обирати з функцій заданого вигляду ту, яка найкращим чином наближає експериментальні данні, задані системою точок. Найбільш часто за допомогою МНК отримують лінійну апроксимацію, але знаходять своє застосування і апроксимації більш високих степенів: квадратичні, кубічні і так далі [1].

Для класичного методу найменших квадратів потрібно, щоб шукана функція була лінійною відносно параметрів, що визначаються. Так, при апроксимації многочленами n-го степеня функція береться у вигляді $f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, де параметри a_k визначаються з умов мінімуму квадратичної нев'язки. Для функції іншого вигляду іноді вдається провести перетворення, яке лінеаризує ці функції відносно параметрів [2]. В даній статті ця ідея реалізована для функції вигляду $f(x)=\dfrac{bx}{1-cx^2}$, яка використовується для апроксимації кривих буксування мобільних енергетичних пристроїв [3-5]. Зауважимо, що отримані результати можуть бути використані для обчислення точок оптимуму [6].

© В.Т. Надикто, О.В. Величко

Формулювання цілей статті. В результаті експерименту було отримано набір точок $(x_1, y_1),...,(x_n, y_n)$. За допомогою методу найменших квадратів (МНК) потрібно підібрати криву вигляду $f(x) = \frac{bx}{1-cx^2}$, яка найкращим чином наближає задані точки на графіку.

Основна частина. При використанні класичного МНК до функцій заданого вигляду виникає наступна складність. Побудуємо функцію нев'язки

$$F(b,c) = \frac{1}{2}\sum\left(f(x_i) - y_i\right)^2 = \frac{1}{2}\sum\left(\frac{bx_i}{1-cx_i^2} - y_i\right)^2, \tag{1}$$

яку потрібно мінімізувати. Тут і надалі підсумовування проводиться по i від 1 до n.

Взяв частинні похідні по змінним b та c, отримаємо систему для обчислення цих параметрів:

$$\begin{cases} b\sum\frac{x_i^2}{\left(1-cx_i^2\right)^2} = \sum\frac{y_i x_i^3}{1-cx_i^2}, \\ b^2\sum\frac{x_i^4}{\left(1-cx_i^2\right)^3} = b\sum\frac{y_i x_i^3}{\left(1-cx_i^2\right)^2}. \end{cases} \tag{2}$$

Складність полягає в тому, що система (2) є нелінійною. Із неї можна виключити параметр b та отримати одне рівняння для визначення параметру c:

$$\sum\frac{x_i^2}{\left(1-cx_i^2\right)^2}\sum\frac{y_i x_i^3}{\left(1-cx_i^2\right)^2} = \sum\frac{y_i x_i^3}{1-cx_i^2}\sum\frac{x_i^4}{\left(1-cx_i^2\right)^3}. \tag{3}$$

Явних аналітичних формул для знаходження параметру c тут отримати не вдається, хоча рівняння (3), в принципі, можна розв'язувати чисельно. Після визначення c параметр b можна визначити з першого рівняння системи (2).

Як бачимо, безпосереднє застосування МНК в цьому випадку пов'язано з труднощами, тому пропонується наступний прийом.

Функцію нев'язки, яку потрібно мінімізувати, беремо в вигляді:

$$F(b,c)=\frac{1}{2}\sum\left(\frac{1}{f(x_i)}-\frac{1}{y_i}\right)^2=\frac{1}{2}\sum\left(\frac{1-cx_i^2}{bx_i}-\frac{1}{y_i}\right)^2, \tag{4}$$

Вона дорівнює нулю тоді та тільки тоді, коли крива проходить через всі задані точки, як і в класичному МНК. Взяв частинні похідні по змінним b та c, отримаємо, після перетворень, систему для визначення цих параметрів:

$$\begin{cases} -X_{-2}+2cn-c^2X_2+bT-cbZ=0, \\ -n+cX_2+bZ=0. \end{cases} \tag{5}$$

Тут $X_2=\sum x_i^2,\ X_{-2}=\sum\frac{1}{x_i^2},\ Z=\sum\frac{x_i}{y_i},\ T=\sum\frac{1}{x_iy_i}$.

Система (5) також є нелінійною. Але її можна звести до лінійної, якщо до першого рівняння прибавити друге, помножене на c. Будемо мати систему:

$$\begin{cases} -X_{-2}+cn+bT=0, \\ -n+cX_2+bZ=0; \end{cases} \tag{6}$$

розв’язати яку можна, наприклад, методом Крамера. Остаточні формули мають вигляд:

$$b=\frac{n^2-X_2X_{-2}}{nZ-TX_2}=\frac{n^2-\left(\sum x_i^2\right)\left(\sum\frac{1}{x_i^2}\right)}{n\left(\sum\frac{x_i}{y_i}\right)-\left(\sum\frac{1}{x_iy_i}\right)\left(\sum x_i^2\right)}, \tag{7}$$

$$c=\frac{X_{-2}Z-nT}{nZ-TX_2}=\frac{\left(\sum\frac{1}{x_i^2}\right)\left(\sum\frac{x_i}{y_i}\right)-n\left(\sum\frac{1}{x_iy_i}\right)}{n\left(\sum\frac{x_i}{y_i}\right)-\left(\sum\frac{1}{x_iy_i}\right)\left(\sum x_i^2\right)}. \tag{8}$$

Чисельний приклад. В якості тестового прикладу розглянемо набір точок, отриманих наступним чином. Візьмемо функцію

$$f(x)=\frac{0.2x}{1-0.6x^2}+t\sin x .$$

Тут другий доданок моделює випадкові похибки при експериментальному отриманні координат точок. Візьмемо $x_i=1+i, y_i=f(x_i)$. Наведемо таблицю абсцис та ординат точок при $t=0.1$ и $t=0.3$:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y_i(t=0.1)$	-0.2595	-0.1306	-0.0926	-0.0727	-0.0593	-0.0495	-0.0424	-0.0374	-0.0338
$y_i(t=0.3)$	-0.2204	-0.1206	-0.0918	-0.0754	-0.0615	-0.0499	-0.0417	-0.0366	-0.0335

При $t=0.1$, в результаті обчислень по формулам (7) и (8), була отримана функція $f(x)=\frac{0.2218x}{1-0.6649x^2}$, а при $t=0.3$ – функція $f(x)=\frac{0.2805x}{1-0.8404x^2}$. На рис. 1 та 2 зображені точки та графіки апроксимуючих функцій.

Як бачимо, в обох випадках ми отримали задовільні результати при достатньо великих похибках вимірювань.

Перспективи подальших досліджень. В даній статті ми від функції $f(x)=\frac{bx}{1-cx^2}$, яка нелінійно залежить від параметрів b та c, перешли до функції $\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{bx}-\frac{cx}{b}$, яка вже є лінійною відносно параметрів $\alpha=\frac{1}{b}$ та $\beta=\frac{c}{b}$. Ці параметри обчислюються методом найменших квадратів, і через них можна обчислити шукані значення b та c. Ці міркування легко узагальнити на функції вигляду $f(x)=bx^m\left(\sum_{j=1}^{k}c_jx^j\right)^{-1}$, що і планується зробити.

Висновки. Шляхом зміни функції нев'язки в методі найменших квадратів вдалося побудувати остаточні формули для визначення коефіцієнтів раціональної функції, яка застосовується для апроксимації кривої буксування. В прикладах показано, що гарні результати можна отримати і при достатньо великих значеннях похибок експериментального визначення координат точок.

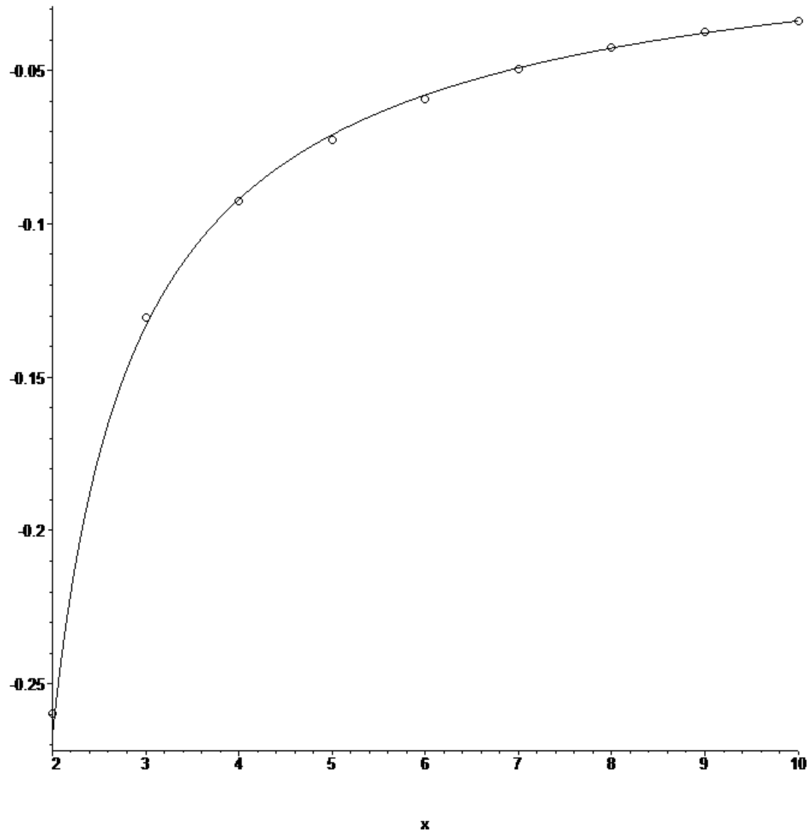

Рис. 2. Випадок $t = 0.1$

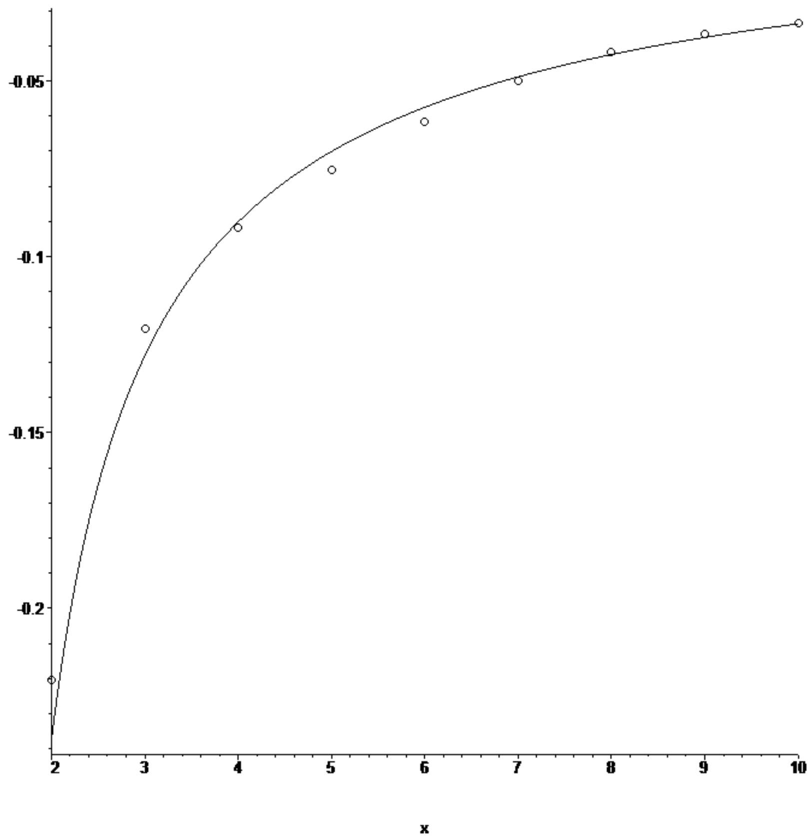

Рис. 3. Випадок $t = 0.3$

Література.

1. *Линник Ю.В.* Метод наименьших квадратов и основы математической теории обработки наблюдений / *Ю.В. Линник* //Фізматлит. – 1958. – 337с.

2. *Лоусон Ч.Л., Хенсон Р.Д.* Численное решение задач метода наименьших квадратов: Пер. с англ. / *Ч.Л. Лоусон, Р.Д. Хенсон* – Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. – 1986. – 232с.

3. *Сураев Н.Г.* Исследование тягового КПД и буксования тракторов / *Н.Г. Сураев* // Тракторы и сельскохозяйственные машины. – 1991. – №4. – С.16 – 20.

4. *Трепененков И.И.* Эксплуатационные показатели сельскохозяйственных тракторов / *И.И. Трепененков*.– М.: Государственное научно-техническое издательство машиностроительной литературы. – 1963. – 272 с.

5. *Кувачов В.П.* Землевикористання при облаштуванні поля для роботи енерготехнологічних засобів мостового типу / *В.П. Кувачов* // Науковий вісник Таврійського державного агротехнологічного університету. – 2013. – Вип.3, Т.1. – С.116 – 126.

6. *Надикто В., Величко О.* Означення точки оптимуму кривої та спосіб її визначення / *В. Надикто, О. Величко* // Техніка і технології АПК: наук.-вироб. журн. – 2014. – № 2 (53). – С.16 – 18.

ПРИМЕНЕНИЕ МНК ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ РАЦИОНАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

В.Т. Надыкто, Е.В. Величко

***Аннотация* – в работе предлагается способ определения коэффициентов рациональной функции вида $f(x)=bx(1-cx^2)^{-1}$ по известным ее значениям при некоторых значениях переменной. Применяется метод наименьших квадратов. Приведены результаты численных расчетов с учетом погрешностей определения значений функции.**

APPLICATION OLS FOR DETERMINATION OF PARAMETERS OF RATIONAL FUNCTIONS

V. Nadykto, H. Velichko

Summary

We propose a method for determining the coefficients of a rational function of the form $f(x)=bx(1-cx^2)^{-1}$ known for its values for some values of the variable. The method ordinary least squares used. Given the results of numerical calculations. Error in determining the values of the function considered.