

УДК 621.225.001.1

**МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПРОЦЕСУ ОСАДЖЕННЯ ТВЕРДИХ
ЧАСТИНОК У ПРОФІЛЮЮЧІЙ ПРОТОЧНІЙ ЧАСТИНІ ОЧИЩУВАЧА
ДИНАМІЧНОГО ТИПУ**

**MATHEMATICAL MODEL OF THE PROCESS OF SEDIMENTATION OF
SOLID PARTICLES IN THE PROFILING FLOW PART OF A DYNAMIC
TYPE CLEANER**

А. А. Волошина, д-р техн. наук, А. І. Панченко, д-р техн. наук,

І. А. Панченко, Г. В. Лупинос

Таврійський державний агротехнологічний університет імені Дмитра Моторного

***Анотація.** У статті досліджено процес осадження твердих частинок у профілюючій проточній частині очищувача динамічного типу, що використовується для очищення робочих рідин у гідравлічних системах. Актуальність роботи зумовлена необхідністю підвищення якості очищення за одночасного забезпечення високої продуктивності та компактності очищувального обладнання. Метою роботи є розроблення математичної моделі процесу осадження твердих частинок з урахуванням конструктивних і функціональних параметрів профілюючої проточної частини. Фізичну модель побудовано на основі опису руху в'язкої ньютонівської рідини між паралельними горизонтальними дисками за умов осьової симетрії та малих чисел Рейнольдса. На основі рівнянь Нав'є-Стокса та рівняння нерозривності отримано аналітичні залежності для розподілу швидкостей і тиску в проточній частині очищувача. Для опису руху твердих частинок сформульовано систему рівнянь, що враховує дію сили тяжіння, в'язкого опору та переносного руху разом із потоком рідини. Запропоновано чисельний алгоритм визначення траєкторій частинок, який дозволяє оцінювати умови їх осадження та визначати ефективність очищення. Отримані результати можуть бути використані для інженерного розрахунку та оптимізації конструктивних параметрів очищувачів динамічного типу.*

***Ключові слова:** фізична модель, математична модель, в'язка рідина, багатофазний потік, гідродинаміка течії; чисельне моделювання; траєкторія руху; якість очищення.*

Вступ

Процеси осадження твердих частинок у потоці робочого середовища є ключовим елементом ефективної роботи різних апаратів очищення – від пиловловлювачів і циклонів до гідравлічних очищувачів у промислових системах. Такі процеси визначають продуктивність сепарації, ефективність видалення забруднень та загальну надійність обладнання, що працює в умовах двофазного потоку. У очищувальних апаратах динамічного типу профілююча проточна частина є критичною з точки зору формування умов для контакту між твердою фазою і потоком рідини або газу, де відбувається адсорбція [1], агрегація та подальше осадження частинок на поверхнях конструкцій або у збірних камерах. Висока складність цього процесу обумовлена мультифізичними явищами, що включають гідродинаміку потоку, взаємодію частинок зі стінками, турбулентність та зміни концентрації частинок у просторі і часі.

Математичне моделювання таких процесів дозволяє описати фізичну поведінку твердих частинок у потоці, передбачити швидкість осадження, профілі концентрації, а також оптимізувати геометрію апарата для підвищення сепараційної здатності. У класичних підходах до моделювання осадження частинок використовуються рівняння руху частинок, що враховують сили тяжіння, сили опору та інші силові фактори, а також баланс маси і імпульсу для часток і рідини. Початкові рівняння Стокса для швидкості осадження

сферичних частинок дозволяють описати кінетику процесу при низьких числах Рейнольдса, де вплив турбулентності незначний, але вони обмежені певними умовами експлуатації й не завжди адекватні для високошвидкісних потоків у динамічних сепараторах.

Сучасні дослідження розширюють ці класичні моделі за допомогою чисельних методів і підходів багатофазних потоків. Наприклад, моделі на основі CFD-DEM (computational fluid dynamics – discrete element method) дозволяють моделювати рух і осадження частинок із урахуванням взаємодії частинок між собою та з флуїдом, що суттєво підвищує точність прогнозування поведінки дисперсної фази [2]. Такі моделі стають особливо корисними при розгляді полідисперсних систем, в яких розподіл розмірів частинок, їх форма та взаємодія з потоками впливають на ефективність осадження і поведінку суспензії.

Важливим напрямом математичного моделювання є побудова спрощених, але адекватних моделей, що враховують динамічні аспекти процесів осадження й дозволяють швидко оцінювати параметри роботи обладнання. Запропоновано моделі [3, 4], які застосовують взаємозв'язок між потоком і седиментацією частинок у багатокомпонентних суспензіях, що дозволяє краще розуміти взаємодію між фазами при реальних умовах експлуатації.

Незважаючи на значний прогрес у цій галузі, питання побудови моделей, які б адекватно описували процеси осадження в профілюючих проточних частинах очищувачів динамічного типу з урахуванням впливу геометрії апарату, гідродинамічних характеристик та властивостей частинок, все ще залишаються предметом активних досліджень. Мета цієї роботи – розробити математичну модель, що враховує основні фізичні механізми осадження твердих частинок у таких системах та забезпечує можливість її подальшого використання для оптимізації конструктивних параметрів очищувальних апаратів.

Аналіз останніх досліджень

Процеси осадження твердих частинок у потоках рідин і газів є одними з базових механізмів, що визначають ефективність роботи очищувальних апаратів динамічного типу, включно з гідравлічними відстійниками, сепараторами та проточними очищувачами. У сучасних умовах підвищення вимог до якості очищення робочих рідин та енергетичної ефективності обладнання особливого значення набуває математичне моделювання процесів седиментації з урахуванням гідродинамічних, конструктивних і фізико-механічних факторів [5].

Класичні підходи до опису осадження ґрунтуються на рівняннях Стокса та Н'ютона, які дозволяють визначити швидкість осадження ізольованої частинки в ламінарному потоці за малих чисел Рейнольдса. Проте такі моделі мають обмежене застосування у реальних очищувачах динамічного типу, де спостерігаються складні профілі швидкостей, просторові градієнти тиску та взаємодія частинок між собою і з обмежувальними поверхнями [6]. У зв'язку з цим значна частина сучасних досліджень спрямована на розвиток узагальнених математичних моделей, що враховують багатофазний характер потоку.

Одним із найбільш поширених сучасних інструментів є підхід CFD-DEM, який поєднує рівняння Нав'є-Стокса для опису руху флуїду з дискретними рівняннями руху частинок. Цей метод дозволяє детально аналізувати траєкторії частинок, сили взаємодії та умови їх осадження у складних проточних каналах. У роботах [7–9] показано, що CFD-DEM моделі забезпечують високу відповідність експериментальним даним [10] під час дослідження процесів осадження і накопичення частинок у гідравлічних резервуарах та сепараторах. Особливо важливим є те, що такі моделі дозволяють враховувати вплив геометрії профілюючої проточної частини на кінетику седиментації.

Окремий напрям досліджень пов'язаний з аналізом впливу форми, розміру та щільності частинок на процес осадження [11]. Несферичні та полідральні частинки демонструють суттєво іншу кінематику руху порівняно зі сферичними, що призводить до змін у швидкості

осадження та характері формування осадового шару [12]. Це має принципове значення для очищувачів динамічного типу, де полідисперсний склад забруднень є типовим.

Значна увага у сучасній літературі приділяється також аналітичним і напіваналітичним моделям, які дозволяють отримати узагальнені залежності між конструктивними параметрами апарата та ефективністю осадження. Запропоновано математичні моделі седиментації визначення фракційного складу суспензій [13], що можуть використовуватися для вивчення багатокомпонентної твердорідинної суспензії [3]. Такі підходи є особливо цінними для інженерних розрахунків, оскільки дозволяють швидко оцінювати вплив параметрів конструкції без використання ресурсоемних чисельних методів.

Подальший розвиток отримали лагранжеві методи відстеження частинок, які широко застосовуються для аналізу осадження у турбулентних потоках. Запропонована модель [14] призначена для прогнозування максимальної амплітуди на основі аналітичного рішення лінеаризованих рівнянь дрібної води та використовується для того, щоб показати, що навіть невеликі обурення у потоці суттєво впливають на динаміку та можуть значно зменшити амплітуду хвилі. Поєднання лагранжевого підходу з рівняннями РВМ дало змогу враховувати агрегацію та фрагментацію частинок, а використання рівняння РВМ у обчислювальній гідродинаміці є найважливішим елементом моделювання багатофазних потоків [15].

Таким чином, аналіз сучасних досліджень свідчить про тенденцію до поєднання аналітичних і чисельних методів моделювання з метою більш повного врахування конструктивних і функціональних особливостей очищувальних апаратів. Водночас питання побудови узагальненої математичної моделі осадження твердих частинок у профільюючій проточній частині очищувача динамічного типу, яка б поєднувала фізичну наочність і інженерну придатність, залишається актуальним та потребує подальших досліджень.

Основний матеріал дослідження

Фізична модель процесу осадження твердих частинок ґрунтується на тому, що рідина, яка очищається, переміщається вздовж робочої поверхні очищувача з деякою швидкістю, що забезпечує при заданій товщині шару рідини H необхідну величину витрати Q . Частинки домішки, у міру переміщення рідини в горизонтальному напрямку рухаються, під дією сили тяжіння, вниз до осадової поверхні очисника, а рідина, що пройшла через проточну частину, втрачає тверді частинки домішки, що містяться в ній. Цей спосіб дозволяє вести процес безперервно і легко регулювати продуктивність та якість очищення робочої рідини при компактній конструкції пристрою.

Конструктивно такий очищувач виконується у вигляді системи паралельних горизонтальних дисків радіусом R , закріплених на вертикальній трубці радіусом R_1 , по якій рідина, що очищається, подається через отвори в трубці в простір між дисками (рис. 1). Міждисковий простір являє собою профільюючу проточну частину, кількість яких визначається величиною його продуктивності, якістю очищення і може бути досить великим. Усі профільні проточні частини, що позначені номерами 1, 2, ..., N (рис. 1), включені в схему пристрою паралельно одна одній та працюють однаково. Тому достатньо дослідити властивості однієї профільюючої проточної частини та встановити співвідношення якості очищення з конструктивними та функціональними параметрами.

Дослідження такого роду проводяться на основі математичного моделювання процесу осадження твердих частинок, які рухаються не тільки під дією сил тяжіння, Стокса, Архімеда, але й беруть участь у переносному русі разом з рідиною від центру проточної частини до її периферії. Швидкість в'язкої рідини, що рухається вздовж радіуса аналізованої профільюючої проточної частини, змінюється з висотою, що відраховується від дна проточної частини. При цьому шари рідини, що прилягають до обкладок проточної частини (верхньої та нижньої), не рухаються, а швидкість центральних шарів максимальна.

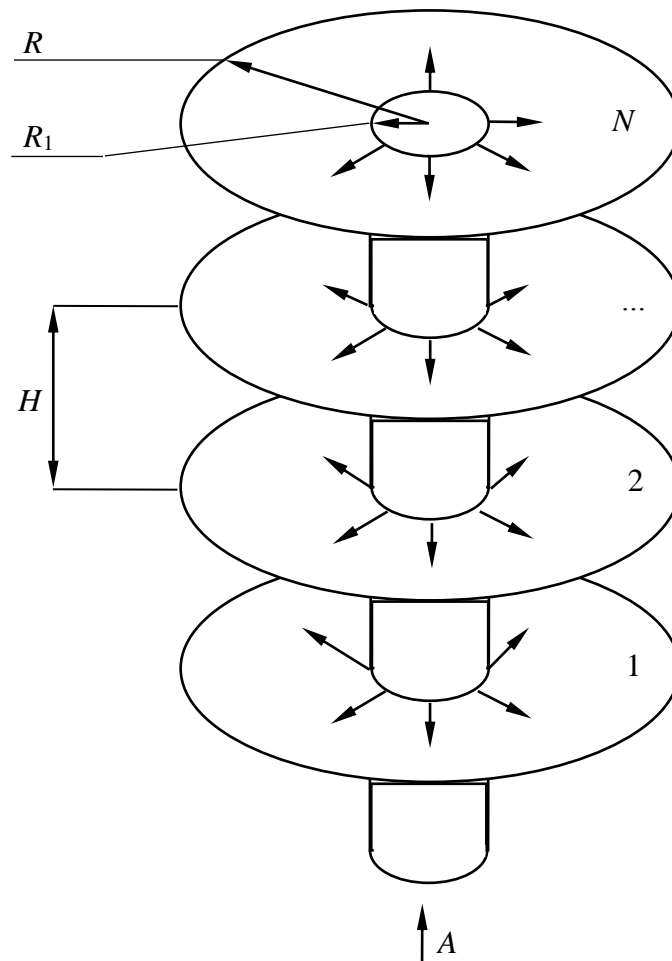


Рисунок 1 – Физическая модель очистителя динамического типа: A – трубка подачи очищаемой жидкости; $1, 2, \dots, N$ – рабочие ячейки (стрелками указано направление тока жидкости)

Тверда частка, що знаходиться в рідині, здійснює складний рух, при цьому її траєкторія залежить від початкової точки, в якій вона опиняється на вході в проточну частину, та від розміру частинки. Відомо [3], що великі частинки швидше досягають нижніх шарів рідини, що повільно рухаються в профільній проточній частині і осідають на її осаджувальну поверхню, а дрібні частинки виносяться за її межі, якщо вони на початку шляху опинилися у верхніх шарах, так як осаджуючись вони опиняються в швидкорухливих шарах.

Фізичне моделювання процесу осадження твердих частинок дозволяє розробити принципову схему очищувача динамічного типу, проаналізувати кінетику частинки і кінематику в'язкої рідини стосовно розробленої профільної проточної частини. Розв'язання даної задачі дає змогу знайти розподіл швидкостей, не тільки вздовж радіусу, а й по висоті профільюючої проточної частини.

Для встановлення залежностей, що визначають параметри руху в'язкої рідини по профільній проточній частині необхідно дослідити гідродинаміку течії в'язкої рідини по профільній проточній частині.

Розглянемо рух рідини, що витікає через отвір у стінці внутрішнього циліндра очищувача та повністю заповнює зазор між паралельними дисками однакового радіусу R , тобто обсяг профільної проточної частини (рис. 2). Вважаємо, що відстань між дисками дорівнює $2h$, а радіус циліндра – R_1 . Введемо циліндричну систему координат (r, φ, z) , як показано на рис. 2.

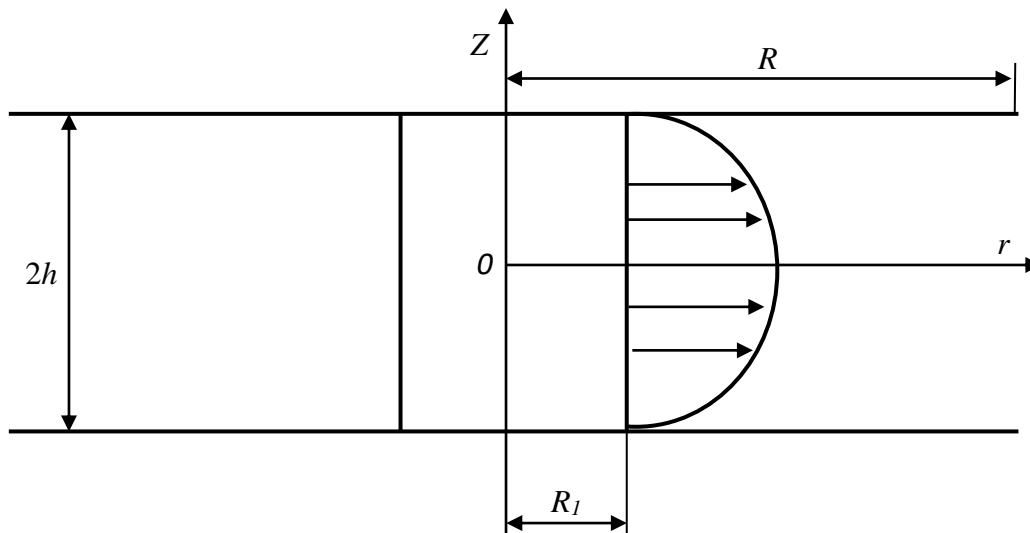


Рисунок 2 – Схема профілюючої проточної частини очистителя

Ізотермічний рух ньютонівської в'язкої нестисливої рідини описується системою рівнянь:

$$\begin{cases} \operatorname{div} V = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) \vec{V} = F - \frac{1}{\rho} \nabla \vec{P} + \nu \Delta \vec{V}, \end{cases} \quad (1)$$

де \vec{V} – швидкість руху рідини; \vec{P} – тиск рідини; ρ – щільність рідини; F – масова щільність об'ємних сил; $\nu = \eta / \rho$ – кінематична в'язкість рідини.

У наведеній системі рівнянь перше рівняння є рівнянням нерозривності, а друге – рівнянням руху.

На поверхні осаду проточної частини повинна виконуватися умова прилипання твердих частинок:

$$V = 0. \quad (2)$$

На проникній межі поверхні внутрішнього циліндра задається нормальна складова швидкості:

$$\vec{V} \vec{n} = f(r), \quad (3)$$

де r – радіус-вектор.

Припустимо, що рух рідини сталий, тоді швидкість не залежить від часу $\frac{dV}{dt} = 0$ і рівняння (1) приймає вигляд:

$$(\nu \nabla) V = F - \frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta V, \quad (4)$$

Рівняння (1) і (5) в циліндрічній системі координат приймуть вигляд:

$$\begin{cases} \frac{\partial(rV_r)}{\partial r} + \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0, \\ V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\varphi \partial V_r}{r \partial \varphi} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{V_\varphi^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \cdot \left(\Delta V_r - \frac{V_z}{r^2} - \frac{2\partial V_\varphi}{r^2 \partial \varphi} \right), \\ V_z \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{V_\varphi \partial V_\varphi}{r \partial \varphi} + V_z \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} + \frac{V_r V_\varphi}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial \varphi} + \nu \cdot \left(\Delta V_\varphi + \frac{2\partial V_r}{r^2 \partial \varphi} - \frac{V_\varphi}{r^2} \right), \\ V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\varphi \partial V_z}{r \partial \varphi} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \cdot \Delta V_z - g, \end{cases} \quad (5)$$

де V_r, V_φ, V_z – фізичні компоненти вектора \vec{V} ; Δ – лапласіан:

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (6)$$

Припустимо, що функція $f(r)$ залежить від координати φ , тоді рух рідини володіє осью симетрією і $\vec{V} = (V_{z(rz)}, 0, V_{z(rz)}, P(rz))$.

В цьому випадку третє рівняння тотожно, а інші рівняння спрощуються:

$$\begin{cases} \frac{\partial(rV_r)}{\partial r} + r \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0, \\ V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \cdot \left(\Delta V_r - \frac{V_r}{r^2} \right), \\ V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \cdot \Delta V_z - g. \end{cases} \quad (7)$$

З умови (2) маємо:

$$\begin{aligned} V_r|_{z=\pm h} &= 0, \\ V_z|_{z=\pm h} &= 0, \\ V_r|_{r=R_1} &= f(z). \end{aligned} \quad (8)$$

Співвідношення (8) мають бути узгоджені. Для цього необхідно, щоб функція $f(z)$ перетворювалася на нуль на поверхні дисків, тобто

$$V_r|_{z=\pm h} = 0. \quad (9)$$

При повільному русі рідини число Рейнольдса мале і дорівнює $Re = V \cdot R_1 / \nu$, де V – характерна величина швидкості. Тому непрямими членами (прискоренням) в порівнянні з членами, що враховують в'язкі сили та зміну тиску, можна знехтувати. Тоді рівняння (7) набуде вигляду:

$$\begin{cases} \frac{\partial(rV_r)}{\partial r} + r \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0, \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \cdot \left(\Delta V_r - \frac{V_r}{r^2} \right) = 0, \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \cdot \Delta V_z - g = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Припустимо, що відстань між дисками набагато менша ніж радіус циліндра: $h = R_1$. У цьому випадку з рівняння нерозривності потоку випливає:

$$\frac{V_z}{V_r} \approx \frac{h}{R_1} \ll 1, \quad (11)$$

де V_r, V_z – характерні значення швидкості вздовж осей V_r і V_z , відповідно.

Згідно з умовою (11) надалі приймаємо, що $V_z = 0$.

З урахуванням усіх зроблених припущень та спрощень рівняння (7) та (10) набувають вигляду:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial r}(rV_r) = 0, \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \cdot \left(\Delta V_z - \frac{V_r}{r^2} \right) = 0, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + g = 0. \end{cases} \quad (12)$$

З рівняння (12) випливає:

$$V_r = \frac{C_{(z)}}{r}.$$

Враховуючи умову (8), отримуємо:

$$V_r = \frac{R_1}{r} f(z). \quad (13)$$

Звідси випливає, що під час виконання умови (9), умови (8) також виконуються.

З рівняння (12) визначаємо тиск у рідині:

$$P_{(rz)} = -\rho \cdot g \cdot z + P_{1(r)}, \quad (14)$$

де $P_{1(r)}$ – функція від r , яка визначається при підстановці у рівняння (12) рівнянь (13) і (14):

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_1}{\partial r} + \nu \cdot \left(\Delta V_{r(rz)} - \frac{V_{r(rz)}}{r^2} \right) = 0. \quad (15)$$

Щоб знайти $P_{1(r)}$, необхідно встановити конкретний вид функції $f(z)$, що входить у рівняння (13) та задовольняє умові (7). Візьмемо функцію $f(z)$ у вигляді:

$$f(z) = A(h^2 - z^2), \quad (16)$$

де A – константа, яку можна виразити через витрату рідини Q .

В цьому випадку з рівняння (13) випливає:

$$V_r \Big|_{r=R_1} = f(z) = A \cdot (h^2 - z^2). \quad (17)$$

Поряд із квадратичною формою (16) для функції $f(z)$ умову (8) можна задовольнити і іншими біномами – кубічними, четвертим ступенем тощо. Вибір квадратичної форми виправдовується тим, що при течії рідини між двома паралельними площинами, залежність швидкості від z має саме такий вигляд.

Для визначення константи A з рівняння (17) необхідно знайти об'єм рідини, що витікає через бічну поверхню внутрішнього циліндра за одиницю часу:

$$Q = 2\pi \cdot R_1 \int_{-h}^h V_r dz = 2\pi \cdot R_1 \cdot A \int_{-h}^h (h^2 - z^2) dz = \frac{8\pi \cdot R_1}{3} \cdot h^3 \cdot A. \quad (18)$$

Звідки

$$A = \frac{3Q}{8\pi \cdot R_1 \cdot h^3}. \quad (19)$$

З рівняння (15) після диференціювання отримаємо:

$$P_1 = P_0 - 2A \cdot \eta \cdot R_1 \cdot \ln \frac{r}{R}, \text{ де } \eta = \rho \cdot V. \quad (20)$$

Підставляючи (10) у відповідні формули, отримаємо остаточно:

$$V_{r(r_2)} = \frac{2Q}{8\pi \cdot h^3} \frac{h^2 - z^2}{r}, \quad (21)$$

$$P_{(r_2)} = P_0 - \rho \cdot g \cdot z - \frac{3\eta \cdot Q}{4\pi \cdot h^3} \ln \frac{r}{R}. \quad (22)$$

З рівняння (22), зокрема, впливає, що падіння тиску рідини при віддаленні від центру осередку $r \rightarrow \infty$ прямо-пропорційне коефіцієнту в'язкості η і протікаючій кількості рідини Q , та зворотно-пропорційне кубу відстані $H = 2h$ між обкладками осередку. Це означає, що при зменшенні h вдвічі для підтримки сталості витрати Q необхідний тиск P_0 у внутрішньому циліндрі, звідки рідина надходить у проточну частину, підвищити у 8 разів.

З рівняння (21) впливає, що при сталості витрати Q зменшення відстані між обкладками профільної проточної частини в n раз веде до такого ж зростання швидкості радіального переміщення рідини, що скорочує час перебування її в зоні осаду і може погіршити якість очищення.

Опишемо траєкторії переносного руху частинок, що рухаються в горизонтальному напрямку вздовж осадової поверхні профілюючої проточної частини.

У циліндричній проточній частині очищувача, в силу своєї осьової симетрії, спостерігається лише радіальне переміщення рідини, і відсутні азимутальне та вертикальне переміщення – вздовж осі z циліндричної системи координат. В силу цього, рух твердих частинок буде проходити в площині, що проходить через вісь симетрії проточної частини, а їх траєкторії визначаються сукупністю значень двох координат – r , z і лежать в області обмежень по осі r значеннями від R_1 до R (рис. 2). По осі z , ця область обмежена висотою проточної частини $H = 2h$ ($h \geq z \geq -h$).

Зберігаючи прийняті позначення запишемо систему рівнянь для знаходження траєкторії твердої частки $z = z(r)$:

$$\begin{cases} \frac{dV_2}{dt} + \alpha \cdot V_2 = -\beta, \\ \frac{dz}{dt} = V_z, \quad V_{z(0)} = 0, \quad z_{(0)} = z_0, \\ \frac{dr}{dt} = V_{r(r_2)}, \quad r_{(0)} = R_1, \end{cases} \quad (23)$$

де $\alpha = \frac{9\eta}{2\rho \cdot a^2}$, $1/c$; $\beta = g \cdot (1 - \frac{\rho_1}{\rho})$, m/c^2 .

Рівняння (23) задаються в параметричному вигляді, що дозволяє знайти коефіцієнт осадження профілюючої проточної частини. Оскільки третє із рівнянь не лінійне, система може бути вирішена чисельними методами. Для розв'язання системи рівнянь (23) скористаємося методом Ейлера. Позначивши для краткості $V_{z(t)}$ через $y(z)$, а шаг ітерації за часом через τ , то m -ого шагу, отримуємо:

$$\begin{cases} y_{m+1} = y_m + \tau \cdot (-a \cdot y - \beta), \\ z_{m+1} = z_m + \tau \cdot y_{m+1}, \\ y_0 = V_{z(0)}, \quad z_0 = z_{(0)}, \\ r_{m+1} = r_m + \tau \cdot V_{r(r_m, z_m)}, \\ r_0 = R_1, \end{cases} \quad (24)$$

де $y_m = y(z_m)$, $y_{m+1} = y(z_{m+1})$.

Для вирішення системи рівнянь (24) у правій частині рівнянь підставляємо початкові значення y_0 , z_0 , r_0 , звідки визначаємо y_1 , z_1 , r_1 , які, у свою чергу, використовуються для знаходження наступного наближення y_2 , z_2 , r_2 і т.д. Для збіжності процесу, як показало дослідження цього питання на практиці, необхідно, щоб ці відносини дорівнювали би приблизно 500.

Вибір кроку здійснюється автоматично, причому в якості τ_i вибирається найменше з трьох значень τ , що задовольняють нерівностям:

$$\begin{cases} \tau |\alpha \cdot y_m + \beta| \ll |y_m|, \\ \tau |y_{m+1}| \ll |z_m|, \\ \tau |V_{r(r_{m+1}, z_{m+1})}| \ll |r_m|. \end{cases} \quad (25)$$

Час руху частки по розрахунковій траєкторії $z = z(r)$ обчислюються підсумовуванням τ_i :

Отримані результати моделювання дозволяють сформулювати практичні рекомендації щодо вибору геометричних параметрів профілюючої проточної частини з метою забезпечення раціонального співвідношення між продуктивністю очищувача та якістю очищення робочої рідини. Розроблена математична модель може бути використана як основа для створення програмних засобів чисельного аналізу та оптимізації конструкцій очищувачів динамічного типу, а також для подальших досліджень процесів осадження у багатофазних потоках.

Висновки

У результаті проведених досліджень розроблено фізичну та математичну моделі процесу осадження твердих частинок у профілюючій проточній частині очищувача динамічного типу, які враховують особливості руху в'язкої ньютонівської рідини між паралельними дисками за умов осової симетрії та малих чисел Рейнольдса. На основі рівнянь Нав'є-Стокса та рівняння нерозривності отримано аналітичні залежності для розподілу швидкостей і тиску в проточній частині очищувача, що дозволяє кількісно оцінювати вплив конструктивних параметрів (відстані між дисками, радіуса проточної частини) і фізичних властивостей рідини на гідродинамічні характеристики потоку. Встановлено, що зменшення міждискового зазору призводить до різкого зростання гідравлічного опору та необхідного перепаду тиску для забезпечення заданої витрати, що водночас скорочує час перебування рідини в осаджувальній зоні та може негативно впливати на якість очищення.

Сформульовано систему рівнянь руху твердої частинки в полі сил тяжіння, в'язкого

опору та переносного руху разом із потоком рідини, що дозволяє описати траєкторії частинок у межах профільюючої проточної частини очищувача. Запропоновано чисельний алгоритм визначення траєкторій руху твердих частинок на основі методу Ейлера, який дає змогу оцінити коефіцієнт осадження та встановити умови, за яких частинки досягають осаджувальної поверхні або виносяться з проточної частини. Встановлено, що ефективність осадження істотно залежить від початкового положення частинки у потоці, її розміру та швидкісного профілю рідини по висоті проточної частини, що підтверджує необхідність урахування кінематики потоку при проектуванні очищувачів динамічного типу.

Отримані результати моделювання дозволяють сформулювати практичні рекомендації щодо вибору геометричних параметрів профільюючої проточної частини з метою забезпечення раціонального співвідношення між продуктивністю очищувача та якістю очищення робочої рідини. Розроблена математична модель може бути використана як основа для створення програмних засобів чисельного аналізу та оптимізації конструкцій очищувачів динамічного типу, а також для подальших досліджень процесів осадження у багатофазних потоках.

Література

1. Wang P., Shen S., Zhou L., Liu D. Turbulent Aggregation and Deposition Mechanism of Respirable Dust Pollutants under Wet Dedusting using a Two-Fluid Model with the Population Balance Method. *International Journal of Environmental Research and Public Health*, 2019. 16 (18). 3359, <https://doi.org/10.3390/ijerph16183359>
2. Derakhshani S. M., Schott D. L., Lodewijks G. Modeling particle sedimentation in viscous fluids with a coupled immersed boundary method and discrete element method. *Particuology*, 2017. 31. 191–199, <https://doi.org/10.1016/j.partic.2016.09.006>
3. Wu Y., Wu W.-T.. Modeling on Effect of Particle Sediment on Fluid Flow and Heat Transfer of Solid–Fluid Suspension. *Energies*, 2021. 14 (2). 487, <https://doi.org/10.3390/en14020487>
4. Pavlenko I., Ochowiak M., Agarwal P. et al. Improvement of Mathematical Model for Sedimentation Process. *Energies*, 2021. 14 (15). 561, <https://doi.org/10.3390/en14154561>
5. Tsuji, Y., Tanaka, T. and Ishida, Y. Lagrangian Numerical Simulation of Plug Flow of Cohesion Less Particles in a Horizontal Pipe. *Powder Technology*, 1992. 71. 239–250, [https://doi.org/10.1016/0032-5910\(92\)88030-L](https://doi.org/10.1016/0032-5910(92)88030-L)
6. White D. A., Verdone N. Numerical modelling of sedimentation processes. *Chemical Engineering Science*, 2000. 55 (12). 2213–2222, [https://doi.org/10.1016/S0009-2509\(99\)00496-0](https://doi.org/10.1016/S0009-2509(99)00496-0)
7. Jylhä J.-P., Jokilaakso A. CFD-DEM models for matte droplet settling in a flash smelting settler. *Heliyon*, 2023. 9. e21570, <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2023.e21570>
8. Li M., Kong D., Guo Q., Liu X. et al. Investigation of Movement and Deposition Behaviors of Solid Particles in Hydraulic Water Reservoir via the CFD-DEM Coupling Method. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2022. 35. 118, <https://doi.org/10.1186/s10033-022-00788-z>
9. de Munck M.J.A., van Gelder J.B., Peters E.A.J.F., Kuipers J.A.M. A detailed gas-solid fluidized bed comparison study on CFD-DEM coarse-graining techniques. *Chemical Engineering Science*, 2023. 269. 118441, <https://doi.org/10.1016/j.ces.2022.118441>
10. Robinson R. J., Snyder P., Oldham M. J. Comparison of Analytical and Numerical Particle Deposition Using Commercial CFD Packages: Impaction and Sedimentation. *Inhalation Toxicology*, 2008. 20 (5). 485–497, <https://doi.org/10.1080/08958370701858435>
11. Zhang Z., Qiu Y., Xiong H., Tang R. Resolved CFD-DEM Simulation of Free Settling of Polyhedral Particles with Various Orientations: Insights Provided by Oscillation Behavior in Quiescent Liquid. *Journal of Marine Science and Engineering*, 2023. 11(9), 1685, <https://doi.org/10.3390/jmse11091685>

12. Bagheri G., Bonadonna C. On the drag of freely falling non-spherical particles. *Powder Technology*, 2016. 301. 526–544, <https://doi.org/10.1016/j.powtec.2016.06.015>
13. Chumak, V., Maksymiuk, M., Kosenko, O., Rudenko, V., Spaska, O. Mathematical modeling of the sedimentation process for determining the fractional composition of suspensions. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2021. 6(6 (114)). 23–31, <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2021.247133>
14. Defina A., Pradella I. Vortex-induced cross-flow seiching in cylinder arrays. *Advances in Water Resources* Volume, 2014. 7. 140–148, <https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2014.06.002>
15. Marchisio D. L., Fox R. O. Solution of population balance equations using the direct quadrature method of moments. *Journal of Aerosol Science*, 2005. 36 (1). 43–73, <https://doi.org/10.1016/j.jaerosci.2004.07.009>

UDC 621.225.001.1

Mathematical Model of the Process of Sedimentation of Solid Particles in the Profiling Flow Part of a Dynamic Type Cleaner

A. Voloshina, A. Panchenko, I. Panchenko, G. Lupinos
Dmytro Motornyi Tavria State Agrotechnological University

Summary

This article examines the process of solid particle sedimentation in the flow-through section of a dynamic cleaner, which is widely used to clean hydraulic fluids in hydraulic systems. Increasing demands on cleaning quality and the increasing intensity of hydraulic equipment use necessitate improved analysis and design methods for such cleaners based on scientifically validated mathematical models.

The aim of this study is to develop a mathematical model of the solid particle sedimentation process based on the design and functional parameters of the profiling flow-through section of a dynamic cleaner. To achieve this goal, a physical model of the process is constructed, based on the description of the motion of a viscous Newtonian fluid between parallel horizontal disks under conditions of axial symmetry and low Reynolds numbers.

Based on the Navier-Stokes equations and the continuity equation, analytical relationships are obtained for the velocity and pressure distribution in the flow-through section of the cleaner. The influence of geometric parameters, in particular, the distance between the disks and the radius of the flow-through section, as well as the physical properties of the fluid on the hydrodynamic characteristics of the flow is demonstrated. It has been established that decreasing the inter-disc gap leads to an increase in the pressure drop and the velocity of radial fluid movement, which significantly affects the conditions for solid particle settling.

To describe the motion of solid particles, a system of differential equations is presented that takes into account the effects of gravity, viscous drag, and translational motion along with the fluid flow. A numerical algorithm for determining particle trajectories based on the Euler method is proposed, enabling the estimation of the settling coefficient and the determination of conditions for the effective removal of solid impurities from the working fluid.

The obtained results can be used for engineering calculations and optimization of the design parameters of dynamic separators, as well as for the development of software tools for analyzing sedimentation processes in multiphase hydrodynamic systems.

Keywords: *physical model, mathematical model, viscous fluid, multiphase flow, flow hydrodynamics; numerical modeling; trajectory of movement; cleaning quality.*