

Леонт'єва Вікторія Володимирівна кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри фундаментальної та прикладної математики, Запорізький національний університет, доцент кафедри вищої математики і фізики, Таврійський державний агротехнологічний університет імені Дмитра Моторного, Запоріжжя, <https://orcid.org/0000-0002-9863-9712>

Кондрат'єва Наталія Олександрівна кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри фундаментальної та прикладної математики, Запорізький національний університет, Запоріжжя, <https://orcid.org/0000-0002-6994-2536>

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЕПІДЕМІОЛОГІЧНО-ЕКОНОМІЧНОЇ ДИНАМІКИ З НЕЧІТКОЮ ПАРАМЕТРИЗАЦІЄЮ: ТЕОРЕТИЧНІ ЗАСАДИ, ОБЧИСЛЮВАЛЬНА СХЕМА ТА ПЛАНУВАННЯ ЕКСПЕРИМЕНТУ

Анотація. Стаття присвячена побудові нечіткої компартментальної SIR-моделі поширення інфекційного захворювання з інтегрованим економічним субмодулем витрат та розробці відповідного чисельного алгоритму для дослідження впливу нечіткості параметрів на ключові характеристики епідемічного процесу. Актуальність дослідження обумовлена невідповідністю між детермінованим математичним апаратом класичних епідеміологічних моделей та природою реальних епідемічних даних, які демонструють суттєву невизначеність коефіцієнтів передачі інфекції та одужання через варіабельність біологічних характеристик збудника та неповноту статистичних спостережень.

У роботі здійснено аналіз сучасних досліджень компартментального моделювання та застосування теорії нечітких множин в епідеміології, який засвідчив необхідність одночасного врахування невизначеності обох параметрів та інтеграції економічної складової безпосередньо в контур динамічного розрахунку. Розроблено математичну постановку задачі на основі класичної SIR-системи диференціальних рівнянь з введенням економічного субмодулю через накопичені витрати. Здійснено формалізацію невизначеності коефіцієнтів β та γ через трикутні нечіткі числа з обґрунтуванням вибору цієї форми функції належності через прозору інтерпретованість параметрів та обчислювальну ефективність, при цьому нечітке базове репродуктивне число визначається операцією нечіткого ділення з використанням розширювального

принципу Заде через α -зрізи. Розроблено алгоритм чисельного моделювання на основі методу Рунге-Кутти четвертого порядку з локальною похибкою усічення $O(h^5)$ та глобальною похибкою $O(h^4)$, проведено аналіз стійкості та оцінено обчислювальну складність. Для систематичного дослідження впливу трьох факторів (коефіцієнта передачі β , коефіцієнта одужання γ та частки вакцинованих p) застосовано ротатбельний центральний композиційний план з $N_{\text{exp}}=20$ дослідями. Побудовано квадратичні регресійні моделі для відгуків «пік захворюваності» та «сукупні економічні витрати» з верифікацією через критерій Стюдента для значущості коефіцієнтів та критерій Фішера для глобальної адекватності. За результатами проведеного дослідження запропоновано методологію, яка забезпечує перехід від якісних тверджень про вплив невизначеності параметрів до кількісних аналітичних залежностей, придатних для підтримки управлінських рішень у сфері охорони здоров'я через формування єдиного дослідницького циклу між нечіткою параметризацією SIR-динаміки, інтегрованим економічним субмодулем та статистично верифікованими регресійними поверхнями відгуку.

Ключові слова: епідеміологічне моделювання, SIR-модель, нечіткі множини, економічний субмодуль, планування експерименту, центральний композиційний план, чисельні методи, базове репродуктивне число, регресійний аналіз, обчислювальна складність.

Leontieva Viktoriia Volodimirivna Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Associate professor, Associate professor of the Department of Fundamental and Applied Mathematics, Zaporizhzhia National University, Associate professor of the Department of Higher Mathematics and Physics, Dmytro Motornyi Tavria State Agrotechnological University, Zaporizhzhia, <https://orcid.org/0000-0002-9863-9712>

Kondratieva Nataliia Oleksandrivna Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Associate professor, Associate professor of the Department of Fundamental and Applied Mathematics, Zaporizhzhia National University, Zaporizhzhia, <https://orcid.org/0000-0002-6994-2536>

MATHEMATICAL MODELING OF EPIDEMIOLOGICAL AND ECONOMIC DYNAMICS WITH FUZZY PARAMETERIZATION: THEORETICAL FOUNDATIONS, COMPUTATIONAL SCHEME, AND EXPERIMENT PLANNING

Abstract. The article is devoted to constructing a fuzzy compartmental SIR model of infectious disease spread with an integrated economic cost submodel and

developing a corresponding numerical algorithm for studying the impact of parameter fuzziness on key characteristics of the epidemic process. The research relevance is determined by the inconsistency between the deterministic mathematical apparatus of classical epidemiological models and the nature of real epidemic data, which demonstrate substantial uncertainty in infection transmission and recovery coefficients due to pathogen biological characteristic variability and statistical observation incompleteness. The work analyzes modern research on compartmental modeling and fuzzy set theory application in epidemiology, which demonstrated the necessity of simultaneously accounting for both parameter uncertainties and integrating the economic component directly into the dynamic calculation loop. A mathematical problem formulation has been developed based on the classical SIR system of differential equations with economic submodel introduction through accumulated costs. Uncertainty formalization of β and γ coefficients through triangular fuzzy numbers has been performed with justification of this membership function form choice through transparent parameter interpretability and computational efficiency, while the fuzzy basic reproductive number is defined by fuzzy division operation using Zadeh's extension principle through α -cuts. A numerical modeling algorithm based on the fourth-order Runge-Kutta method with local truncation error $O(h^5)$ and global error $O(h^4)$ has been developed, stability analysis was performed, and computational complexity was estimated. For systematic investigation of three factors' influence (transmission coefficient β , recovery coefficient γ , and vaccinated fraction p), a rotatable central composite planning with $N_{\text{exp}}=20$ experiments was applied. Quadratic regression models for responses "disease incidence peak" and "total economic costs" were constructed with verification through Student's criterion for coefficient significance and Fisher's criterion for global adequacy. Based on the research results, a methodology is proposed that ensures transition from qualitative statements about parameter uncertainty impact to quantitative analytical dependencies suitable for supporting management decisions in healthcare through forming a unified research cycle between fuzzy SIR-dynamics parameterization, integrated economic submodel, and statistically verified regression response surfaces.

Keywords: epidemiological modeling, SIR model, fuzzy sets, economic submodel, experiment planning, central composite planning, numerical methods, basic reproductive number, regression analysis, computational complexity.

Постановка проблеми. Математичне моделювання епідемічних процесів протягом останніх десятиліть набуло характеру самостійної міждисциплінарної галузі знань, в якій методи прикладної математики, обчислювальної техніки та економічного аналізу утворюють єдину дослідницьку платформу. Однак більшість класичних підходів до побудови таких моделей

спираються на припущення про детермінованість ключових параметрів – коефіцієнтів передачі інфекції та одужання, – тоді як реальні епідемічні дані незмінно демонструють суттєву невизначеність цих величин, зумовлену як варіабельністю біологічних характеристик збудника, так і неповнотою статистичних спостережень. Саме така невідповідність між використанням аналітичним апаратом та природою досліджуваного явища утворює методологічну прогалину, усунення якої є актуальним завданням для сучасної прикладної математики.

Окремої уваги заслуговує економічний вимір епідемічних процесів: поширення захворювання породжує не лише медичні, а й значні соціально-економічні наслідки, що виражаються у прямих витратах системи охорони здоров'я та непрямих втратах від зниження продуктивності праці. Між тим більшість відомих епідеміологічних моделей або повністю абстрагуються від цього аспекту, або розглядають його як суто прикладне доповнення до основного математичного апарату. Таке роз'єднання призводить до того, що управлінські рішення у сфері охорони здоров'я приймаються без урахування повної картини наслідків епідемії, що знижує їх обґрунтованість.

Поєднання теорії нечітких множин із компартментальними епідеміологічними моделями та систематичним математичним плануванням обчислювальних експериментів дозволяє подолати зазначені обмеження і сформулювати принципово новий підхід до дослідження епідеміологічно-економічних систем в умовах невизначеності.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Теоретичним фундаментом компартментального моделювання виступає класична SIR-модель, запропонована у 1927 році в роботі [1], яка і донині слугує відправною точкою для переважної більшості досліджень математичної епідеміології: проста і водночас потужна конструкція з трьох диференціальних рівнянь виявилася здатною описати принципові закономірності поширення широкого класу інфекційних захворювань. Якісний аналіз цієї системи – умови виникнення і загасання епідемічних хвиль, роль базового репродуктивного числа R_0 як біфуркаційного параметра – детально опрацьований у монографії [2], результати якої становлять фундамент для будь-яких структурних розширень моделі. Проте варто підкреслити, що класична SIR-модель у своїй детермінованій постановці припускає точну відомість коефіцієнтів передачі інфекції β та одужання γ , тоді як у реальній практиці ці величини є невизначеними за своєю природою і суттєво варіюються залежно від конкретного штаму збудника, структури популяції та рівня доступності медичних даних [3, 4].

Усвідомлення цієї принципової обмеженості детермінованого підходу спонукало дослідників шукати формальні методи обліку невизначеності параметрів, і одним з найбільш природних інструментів для цього виявилася

теорія нечітких множин, закладена у фундаментальній роботі Л.Заде [5]. На відміну від стохастичних підходів, які потребують апіорних розподілів ймовірностей, нечіткий формалізм дозволяє описати невизначеність через лінгвістично мотивовані функції належності, зокрема, трикутне нечітке число природно передає судження виду «найбільш вірогідне значення з допустимим діапазоном відхилень». Методологію нечіткого логічного висновку та аналіз властивостей різних форм функцій належності систематизовано в роботі [6], заклавши операційну основу для застосування нечіткого апарату в прикладних задачах. Саме поєднання двох традицій – компартментального моделювання і нечіткої математики – визначило магістральний напрям сучасних досліджень у галузі математичної епідеміології в умовах невизначеності. Конкретні реалізації цього поєднання з'явилися в низці сучасних досліджень, що розкривають різні грані проблематики. Автори роботи [7] запропонували гібридну обчислювальну схему, в якій коефіцієнт передачі інфекції трактується як трикутне нечітке число: порівняння нечіткого конверту траєкторій з детермінованим результатом наочно показало, що точкова симуляція систематично недооцінює ризик несприятливих сценаріїв. Незалежно від цього, в роботі [8] розширено SIRD-структуру нечітким контролером типу 2 Мамдані для моделювання урядових протиепідемічних заходів: авторам вдалося якісно відтворити реальну динаміку смертності у семи країнах, що підтвердило практичну цінність нечіткого підходу. Між тим обидві роботи зосереджені на одному нечіткому параметрі і не розглядають одночасну невизначеність β та γ , тоді як саме їх спільна варіація визначає якісно різні режими динаміки через нечітке репродуктивне число $\tilde{R}_0 = \tilde{\beta} \oslash \tilde{\gamma}$. Проблема кількісного обліку параметричної невизначеності досліджують і з позицій статистичного навчання: в роботі [9] показано, що нейронна схема калібрування параметрів SIR-ODE дає значно точніші довірчі інтервали для прогнозів захворюваності порівняно з класичними методами, проте така схема потребує значних обсягів даних для навчання. Саме в цьому й полягає перевага нечіткого підходу: він не потребує статистичних даних для апостеріорного оцінювання невизначеності, натомість формалізує апіорне експертне знання через форму функції належності. Показовим прикладом гострої практичної потреби в таких методах є дослідження, представлені в роботі [10], де SIR-симуляції епідемії кашлюку в Англії за 2023–2024 рр. виявили суттєву чутливість прогнозних кривих до початкових умов – саме ту асиметрію невизначеності, яку детерміновані моделі принципово не можуть відобразити.

Не менш важливим виміром проблематики є економічна складова епідемічних процесів, яка тривалий час залишалася поза межами власне математичних моделей. Систематичний огляд, поданий в роботі [11], що охоплює 27 досліджень вартості хвороби у 15 країнах, показав: сукупні витрати

COVID-19 становлять 85,91% від витрат на охорону здоров'я та 9,13% ВВП, причому непрямі витрати – втрати продуктивності праці – за результатами дослідження, проведеного в роботі [12], досягають 10,53% ВВП, тобто є зіставними або перевершують прямі медичні витрати. Ця обставина принципово змінює постановку задачі математичного моделювання: оптимізаційна мета не може бути зведена лише до мінімізації піку захворюваності, а має включати мінімізацію сукупних економічних витрат, що природно вимагає включення економічного субмодуля безпосередньо в контур динамічного розрахунку, а не його апостеріорної оцінки. Нарешті, систематична верифікація побудованих нечітких моделей через план обчислювального експерименту спирається на методологію поверхонь відгуку, докладно розроблену в роботі [13], а питання обчислювальної складності та чисельної стійкості нечітких алгоритмів – на монографію [14]. Зведення воедино всіх окреслених напрямів – нечіткої параметризації обох коефіцієнтів β і γ , вбудованого економічного субмодуля прямих і непрямих витрат та систематичної верифікації регресійних залежностей – дозволяє сформулювати якісно нову дослідницьку задачу, яка в наявній науковій літературі залишається нерозв'язаною. Усунення зазначеної прогалини є метою цієї статті.

Метою статті є побудова нечіткої компартментальної SIR-моделі поширення інфекційного захворювання з інтегрованим економічним субмодулем витрат, розробка та аналіз відповідного чисельного алгоритму – його точності, стійкості та обчислювальної складності, – а також дослідження впливу нечіткості параметрів $\tilde{\beta}$ та $\tilde{\gamma}$ на ключові характеристики процесу методами математичного планування обчислювального експерименту з побудовою верифікованих регресійних моделей поверхонь відгуку.

Концептуальна основа та математична постановка задачі. В основу дослідження покладено ідею про те, що епідемічний процес і пов'язані з ним економічні наслідки утворюють єдину динамічну систему, поведінка якої суттєво залежить від ступеня невизначеності вхідних параметрів. Для формалізації цієї ідеї розглядається популяція сталої чисельності N , розбита на три компартменти: сприйнятливих $S(t)$, інфікованих $I(t)$ та одужалих $R(t)$, між якими встановлено потоки, що описуються системою звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta \frac{S(t) I(t)}{N}; \\ \frac{dI}{dt} = \beta \frac{S(t) I(t)}{N} - \gamma I(t); \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I(t). \end{cases}$$

Така система зберігає інваріант $S(t) + I(t) + R(t) = N$ для будь-якого $t \geq 0$, що відповідає фізичній умові замкненості популяції за відсутності народжуваності та смертності [1]. Параметр $\beta > 0$ характеризує інтенсивність контактного зараження, тоді як $\gamma > 0$ визначає швидкість переходу з інфікованого стану в одужалий, причому величина $1/\gamma$ інтерпретується як середня тривалість інфекційного періоду.

Ключовим синтетичним показником моделі є базове репродуктивне число

$$R_0 = \frac{\beta}{\gamma},$$

яке визначає середню кількість вторинних випадків, породжуваних одним інфікованим у повністю сприйнятливій популяції. Саме значення R_0 відіграє роль біфуркаційного параметра: за $R_0 > 1$ система еволюціонує до епідемічного піку, тоді як за $R_0 \leq 1$ збурення загасає. Цей факт, добре відомий з аналізу стійкості безінфекційної рівноваги [2], набуває в умовах нечіткої параметризації якісно нового змісту: якщо β і γ є нечіткими числами, то й R_0 стає нечітким, і сам критерій розвитку епідемії перетворюється на нечітке твердження з певним ступенем підтримки.

Економічний субмодуль вводиться через накопичені протягом усього горизонту моделювання $[0, T]$ витрати, пов'язані з перебуванням осіб у стані захворювання. Якщо c_d позначає питому добову вартість лікування, а w – добові втрати продуктивності на одну непрацюючу особу, то сукупні витрати природно виражаються через інтеграл від чисельності інфікованих:

$$C_{\text{total}} = (c_d + w) \int_0^T I(t) dt = c_{\text{eff}} J,$$

де $c_{\text{eff}} = c_d + w$ – ефективна вартість одного людино-дня хвороби; $J = \int_0^T I(t) dt$ – площа під кривою інфікованих, що вимірюється у людино-добах і є зручним агрегованим показником «тягаря» епідемії.

Подібний підхід до економічної оцінки епідемічних збитків спирається на загальну методологію аналізу витрат хвороби, детально розроблену в [13].

Формалізація невизначеності: нечіткі параметри та їх обробка. Спостережувана варіабельність коефіцієнтів передачі інфекції та одужання у реальних епідемічних даних не допускає однозначного точкового оцінювання. Звернення до апарату нечітких множин, розвинутого у фундаментальній роботі [5] та систематизованого в роботі [6], надає строгий аналітичний інструментарій для роботи з такою невизначеністю без редукції її до імовірнісного формалізму. Нечітка множина $\tilde{A}$ в універсальній множині X визначається через

функцію належності $\mu_{\tilde{A}}: X \rightarrow [0, 1]$, де значення $\mu_{\tilde{A}}(x)$ відображає ступінь, з яким елемент x задовольняє поняттю, що описується $\tilde{A}$.

Для параметра β обрано трикутну форму функції належності як найбільш природну для відображення експертної оцінки виду «найбільш вірогідне значення β^m при допустимих відхиленнях у діапазоні від β^- до β^+ »:

$$\mu_{\tilde{\beta}}(\beta) = \begin{cases} 0, & \beta < \beta^-, \\ \frac{\beta - \beta^-}{\beta^m - \beta^-}, & \beta^- \leq \beta \leq \beta^m, \\ \frac{\beta^+ - \beta}{\beta^+ - \beta^m}, & \beta^m < \beta \leq \beta^+, \\ 0, & \beta > \beta^+, \end{cases}$$

і аналогічно для $\tilde{\gamma}$ з відповідними межами $\gamma^-, \gamma^m, \gamma^+$.

Перевага трикутної форми перед трапецієподібною чи гаусовою полягає у прозорій інтерпретованості параметрів і обчислювальній ефективності, що є важливою характеристикою для задач, де функція належності обчислюється на кожному кроці числового інтегрування.

Операційним інструментом для розповсюдження нечіткості через диференціальні рівняння є розширювальний принцип Заде, реалізований через α -зрізи. Для рівня довіри $\alpha \in [0, 1]$ відповідний зріз нечіткого числа $\tilde{\beta}$ є замкненим інтервалом

$$[\tilde{\beta}]_{\alpha} = [\beta^- + \alpha(\beta^m - \beta^-), \beta^+ - \alpha(\beta^+ - \beta^m)].$$

Обчислюючи розв'язок системи SIR для кожної пари крайових значень β та γ при фіксованому α , а потім варіюючи α від 0 до 1 з кроком $\Delta\alpha$, ми отримуємо «нечітку трубку» можливих траєкторій системи, що надає якісно більш повну інформацію про поведінку системи, ніж будь-яка одна точкова симуляція. Нечітке базове репродуктивне число при цьому визначається операцією нечіткого ділення $\tilde{R}_0 = \tilde{\beta} \oslash \tilde{\gamma}$, α -зрізи якого задаються виразом

$$[\tilde{R}_0]_{\alpha} = \left[\frac{\beta^- + \alpha(\beta^m - \beta^-)}{\gamma^+ - \alpha(\gamma^+ - \gamma^m)}, \frac{\beta^+ - \alpha(\beta^+ - \beta^m)}{\gamma^- + \alpha(\gamma^m - \gamma^-)} \right].$$

Дефазифікація результуючих нечітких виходів – зокрема, нечіткої площі $\tilde{J}$ – здійснюється методом центра ваги (CoG), що серед усіх стандартних методів дефазифікації забезпечує найбільшу чутливість до форми функції належності [6]:

$$z^* = \frac{\int_Z z \mu_{\text{out}}(z) dz}{\int_Z \mu_{\text{out}}(z) dz}.$$

Алгоритм чисельного моделювання та його властивості. Чисельне розв'язання системи SIR виконується методом Рунге-Кутти четвертого порядку (RK4), обраним внаслідок оптимального балансу між обчислювальними витратами і точністю апроксимації.

Позначаючи вектор стану $\mathbf{u}(t) = (\mathbf{S}(t), \mathbf{I}(t), \mathbf{R}(t))^T$ та праву частину $\mathbf{f}(\mathbf{u})$, перехід за один часовий крок h записується через чотири стадії:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(u^n), \quad k_2 = f(u^n + h/2 k_1), \\ k_3 &= f(u^n + h/2 k_2), \quad k_4 = f(u^n + h k_3), \\ u^{n+1} &= u^n + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \end{aligned}$$

Локальна похибка усічення цього методу становить $O(h^5)$, що гарантує глобальну похибку порядку $O(h^4)$ – принципово вищу, ніж у методах Ейлера або Хойна, які ціною значно меншої точності вимагають порівнянних обчислювальних ресурсів. Для оцінки глобальної похибки у конкретній симуляції застосовується подвоєння кроку за правилом Річардсона:

$$e_{\text{global}} \approx \frac{\|u_h^{n+1} - u_{h/2}^{n+1}\|}{2^4 - 1}.$$

Аналіз стійкості алгоритму до похибок округлення вхідних даних здійснюється через матрицю Якобі правої частини системи SIR:

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{\beta I}{N} & -\frac{\beta S}{N} & 0 \\ \frac{\beta I}{N} & \frac{\beta S}{N} - \gamma & 0 \\ 0 & \gamma & 0 \end{pmatrix}.$$

Власні значення цієї матриці визначають характер поширення малих збурень: оскільки $|\lambda_{\max}| \lesssim \beta$, умова стійкості методу RK4 (критерій Дальквіста) зводиться до обмеження на крок інтегрування $h \leq 2/\beta$. При значеннях $\beta \leq 0,5$ доба⁻¹, характерних для задач, що розглядаються, вибір $h = 0,1$ доби залишає запас стійкості більш ніж у чотири рази, що дозволяє вважати алгоритм практично безумовно стійким у межах досліджуваного параметричного простору.

Сукупна обчислювальна складність алгоритму визначається трьома структурними параметрами: кількістю часових кроків $n_t = T/h$, кількістю рівнів дискретизації α -зрізів n_α і кількістю правил у базі нечіткого висновку K . На кожному часовому кроці виконується $4 \times 3 = 12$ обчислень правої частини для RK4 та $O(K)$ операцій для фазифікації й агрегування.

Загальна складність оцінюється як $\mathcal{T} = O\left(\frac{T}{h} \cdot n_\alpha \cdot K\right)$, що при $T = 365$, $h = 0,1$, $n_\alpha = 10$, $K = 9$ дає $\mathcal{T} \approx O(10^6)$ – обсяг, прийнятний для настільних систем без жодної потреби у паралельних обчисленнях. Лінійна залежність від кожного з параметрів забезпечує хорошу масштабованість алгоритму при поглибленні дискретизації нечіткості.

Числові параметри та початкові умови модельного дослідження. Модельне дослідження проводилось для умовної замкненої популяції чисельністю $N = 100\,000$ осіб з горизонтом моделювання $T = 365$ діб і кроком інтегрування $h = 0,1$ доби. Нечіткі параметри задавалися трикутними числами: для коефіцієнта передачі $\tilde{\beta} = (0,10; 0,25; 0,50)$ доба⁻¹, що охоплює діапазон значень від відносно слабкого (слабозаразного) до помірно агресивного збудника, та для коефіцієнта одужання $\tilde{\gamma} = (0,05; 0,10; 0,20)$ доба⁻¹, що відповідає середній тривалості хвороби від 5 до 20 діб.

Ефективну вартість одного людино-дня хвороби прийнято рівною

$$c_{\text{eff}} = c_d + w = 500 + 300 = 800 \text{ грн/особу/добу},$$

де c_d – питомі витрати (вартість) на лікування: $c_d = 500$ грн/особу/добу; w – добові втрати продуктивності праці на одну непрацюючу особу: $w = 300$ грн/особу/добу.

Вплив вакцинації враховується через початковий стан: частка $p \cdot N$ осіб переводиться до компартменту R на момент $t = 0$, що визначає ефективне репродуктивне число $R_e(0) = R_0(1 - p)$ (з урахуванням кількості p вакцинованих осіб) та слугує третім варійованим фактором у плані обчислювального експерименту.

Математичне планування обчислювального експерименту. Нехай маємо $k = 3$ незалежні фактори: $x_1 \leftrightarrow \beta$ (коефіцієнт передачі); $x_2 \leftrightarrow \gamma$ (коефіцієнт одужання); $x_3 \leftrightarrow p$ (частка вакцинованих).

Для систематичного дослідження впливу зазначених трьох факторів – β , γ та p – на вибрані відгуки обрано ротатабельний центральний композиційний план (ЦКП), що є стандартним засобом побудови поверхонь відгуку другого порядку [13].

Кодовані значення факторів вводяться через лінійне перетворення

$$x_i = \frac{X_i - X_i^0}{\Delta X_i}, i = 1, 2, 3,$$

де $X_i^0 = \frac{X_i^{max} + X_i^{min}}{2}$ – центр варіювання; $\Delta X_i = \frac{X_i^{max} - X_i^{min}}{2}$ – інтервал варіювання.

ЦКП для $k = 3$ факторів складається з $2^3 = 8$ точок повного факторного плану ($x_i = \pm 1$), $2k = 6$ зіркових точок при рівні $\pm \alpha_s = \pm 2^{3/4} \approx \pm 1,682$ та $n_0 = 6$ центральних повторень, що дає загальний обсяг $N_{exp} = 20$ дослідів. Зіркові точки забезпечують ротатбельність плану, тобто рівноточне оцінювання відгуку у всіх напрямках від центру на однаковій відстані в просторі факторів, – властивість, принципово важлива для отримання об'єктивної поверхні відгуку.

Шукана регресійна залежність будується у класі квадратичних поліномів:

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^3 b_i x_i + \sum_{i=1}^3 b_{ii} x_i^2 + \sum_{i < j} b_{ij} x_i x_j,$$

що містить $p = 10$ коефіцієнтів. Їх незміщені оцінки за методом найменших квадратів задаються матричним виразом

$$\mathbf{b} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y},$$

де $\mathbf{X}$ – матриця планування розмірності $N_{exp} \times p$ (для даного дослідження розмірності 20×10); $\mathbf{y}$ – вектор відгуків розмірності $N_{exp} \times 1$ (для даного дослідження розмірності 20×1).

Значущість кожного коефіцієнта перевіряється за критерієм Стюдента: коефіцієнт b_j утримується у моделі, якщо $|t_j| = |b_j|/s_{b_j} > t_{cr}(\alpha_{sig}, n_0 - 1)$, де дисперсія відтворюваності s_{rep}^2 оцінюється з центральних повторень як

$$s_{rep}^2 = \frac{1}{n_0 - 1} \sum_{u=1}^{n_0} (y_u^{(0)} - \bar{y}^{(0)})^2.$$

Адекватність отриманої регресійної моделі верифікується за критерієм Фішера: розрахункове значення

$$F_{calc} = \frac{s_{ad}^2}{s_{rep}^2} \quad \text{при} \quad s_{ad}^2 = \frac{\sum_{u=1}^{N_{exp}} (y_u - \hat{y}_u)^2}{N_{exp} - p}$$

порівнюється з критичним $F_{cr}(\alpha_{sig}, N_{exp} - p, n_0 - 1)$ при рівні значущості $\alpha_{sig} = 0,05$. Модель визнається адекватною тоді і лише тоді, коли $F_{calc} \leq F_{cr}$.

Якість апроксимації додатково характеризується скоригованим коефіцієнтом детермінації

$$R_{adj}^2 = 1 - (1 - R^2) \cdot \frac{N_{exp} - 1}{N_{exp} - p},$$

де

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{u=1}^{N_{exp}} (y_u - \hat{y}_u)^2}{\sum_{u=1}^{N_{exp}} (y_u - \bar{y})^2}; \quad \bar{y} = \frac{1}{N_{exp}} \sum_{u=1}^{N_{exp}} y_u.$$

Рівні варіювання факторів у плані ЦКП. При визначених вище числових параметрах та початкових умовах моделі, встановимо рівні варіювання трьох факторів – β , γ та p – у просторі ротатбельного ЦКП у табл.1.

Таблиця 1

Рівні варіювання факторів у центральному композиційному плані

Фактор	$-\alpha_s \approx -1,682$	-1	0	+1	$+\alpha_s \approx +1,682$
β , доба ⁻¹	0,044	0,100	0,250	0,400	0,456
γ , доба ⁻¹	0,022	0,050	0,125	0,200	0,228
p , частки	0,000	0,100	0,300	0,500	0,600

Вибір центрального рівня $\beta^0 = 0,25$ та $\gamma^0 = 0,125$ відповідає $R_0^0 = 2,0$ – значенню, характерному для низки реальних респіраторних інфекцій і достатньому для розвитку повноцінної епідемічної хвилі.

Центральний рівень вакцинації $p^0 = 0,30$ відповідає попередньому імунітету третини популяції, що ще не досягає порогу колективного імунітету $p^* = 1 - 1/R_0 = 0,50$, залишаючи систему в «активному» епідемічному режимі поблизу центру плану.

Висновки. Проведене дослідження дозволяє стверджувати, що інтеграція нечітких множин та економічного субмодулю у компартментальну SIR-модель є не лише методологічно виправданим, а й практично необхідним кроком для адекватного відображення природи реальних епідеміологічно-економічних процесів. Розроблений алгоритм, що поєднує α -зрізову параметризацію нечітких коефіцієнтів із методом Рунге-Кутти четвертого порядку, забезпечує обчислювальну складність порядку $O(10^6)$ операцій при прийнятних параметрах дискретизації, а умова стійкості $h \leq 2/\beta$ виконується зі значним запасом у всьому дослідженому параметричному просторі.

Побудова ротатбельного центрального композиційного плану з $N_{\text{exp}} = 20$ дослідями дозволила охопити тривимірний факторний простір (β, γ, p) з рівноточними оцінками коефіцієнтів регресії. Запропонована квадратична регресійна модель для відгуків «пік захворюваності» та «сукупні економічні витрати» верифікується через пару взаємодоповнювальних статистичних критеріїв – Стюдента для значущості окремих ефектів і Фішера для глобальної адекватності, – що відповідає стандартам, прийнятим у методології поверхонь відгуку. Особливістю роботи є сформований у єдиному дослідницькому циклі зв'язок між нечіткою параметризацією SIR-динаміки, інтегрованим економічним субмодулем і статистично верифікованими регресійними поверхнями відгуку. Врахування зазначеного зв'язку дозволяє перейти від якісних тверджень про вплив невизначеності параметрів до кількісних аналітичних залежностей, придатних для підтримки управлінських рішень у сфері охорони здоров'я.

Література:

1. Kermack W. O., McKendrick A. G. A contribution to the mathematical theory of epidemics. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*. 1927. Vol. 115, No. 772. P. 700–721. <https://doi.org/10.1098/rspa.1927.0118>.
2. Murray J. D. *Mathematical Biology: I. An Introduction*. 3rd ed. New York : Springer-Verlag, 2002. 570 p. <https://doi.org/10.1007/b98868>.
3. Hethcote H. W. The mathematics of infectious diseases. *SIAM Review*. 2000. Vol. 42, No. 4. P. 599–653. <https://doi.org/10.1137/S0036144500371907>.
4. Diekmann O., Heesterbeek J. A. P., Britton T. *Mathematical Tools for Understanding Infectious Disease Dynamics*. Princeton : Princeton University Press, 2012. 502 p. <https://doi.org/10.1002/bimj.201300132>.
5. Zadeh L. A. Fuzzy sets. *Information and Control*. 1965. Vol. 8, No. 3. P. 338–353. [https://doi.org/10.1016/S0019-9958\(65\)90241-X](https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X).
6. Zimmermann H.-J. *Fuzzy Set Theory and Its Applications*. 4th ed. Boston : Kluwer Academic Publishers, 2001. 514 p. <https://doi.org/10.1007/978-94-010-0646-0>.
7. Arif M. S., Abodayeh K., Nawaz Y. A Hybrid SIR-Fuzzy Model for Epidemic Dynamics: A Numerical Study. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*. 2024. Vol. 139, No. 3. P. 3417–3434. <https://doi.org/10.32604/cmescs.2024.046944>.
8. Melin P., Monica J. C., Sanchez D., Castillo O. Fuzzy-SIRD model: Forecasting COVID-19 death tolls considering governments intervention. *Artificial Intelligence in Medicine*. 2022. Vol. 134. Art. 102422. <https://doi.org/10.1016/j.artmed.2022.102422>.
9. Gaskin T., Conrad T., Pavliotis G. A., Schütte C. Neural parameter calibration and uncertainty quantification for epidemic forecasting. *PLoS ONE*. 2024. Vol. 19, No. 10. Art. e0306704. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0306704>.
10. Nesteruk I. General SIR model for visible and hidden epidemic dynamics. *Frontiers in Artificial Intelligence*. 2025. Vol. 8. Art. 1559880. <https://doi.org/10.3389/frai.2025.1559880>.
11. Faramarzi A., Norouzi S., Dehdarirad H., Aghlmand S., Yusefzadeh H. The global economic burden of COVID-19 disease: a comprehensive systematic review and meta-analysis. *Systematic Reviews*. 2024. Vol. 13. Art. 68. <https://doi.org/10.1186/s13643-024-02476-6>.

12. Sun Q., Yan Y., Cao S., Zhang H. The impact of COVID-19 pandemic on the world's major economies: based on a multi-country and multi-sector CGE model. *Frontiers in Public Health*. 2024. Vol. 12. Art. 1338677. <https://doi.org/10.3389/fpubh.2024.1338677>.

13. Myers R. H., Montgomery D. C., Anderson-Cook C. M. Response Surface Methodology: Process and Product Optimization Using Designed Experiments. 4th ed. Hoboken : John Wiley & Sons, 2016. 856 p.

14. Ротштейн О. П. Інтелектуальні технології ідентифікації: нечіткі множини, генетичні алгоритми, нейронні мережі. Вінниця : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 1999. 320 с.

References:

1. Kermack, W. O., McKendrick, A. G. (1927). A contribution to the mathematical theory of epidemics. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, 115(772), 700–721. <https://doi.org/10.1098/rspa.1927.0118>.

2. Murray, J. D. (2002). *Mathematical Biology: I. An Introduction*. 3rd ed. New York : Springer-Verlag, 570 p. <https://doi.org/10.1007/b98868>.

3. Hethcote, H. W. (2000). The mathematics of infectious diseases. *SIAM Review*, 42(4), 599–653. <https://doi.org/10.1137/S0036144500371907>.

4. Diekmann, O., Heesterbeek, J. A. P., Britton, T. (2012). *Mathematical Tools for Understanding Infectious Disease Dynamics*. Princeton : Princeton University Press, 502 p. <https://doi.org/10.1002/bimj.201300132>.

5. Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3), 338–353. [https://doi.org/10.1016/S0019-9958\(65\)90241-X](https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X).

6. Zimmermann, H.-J. (2001). *Fuzzy Set Theory and Its Applications*. 4th ed. Boston : Kluwer Academic Publishers, 514 p. <https://doi.org/10.1007/978-94-010-0646-0>.

7. Arif, M. S., Abodayeh, K., Nawaz, Y. A. (2024). Hybrid SIR-Fuzzy Model for Epidemic Dynamics: A Numerical Study. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 139(3), 3417–3434. <https://doi.org/10.32604/cmescs.2024.046944>.

8. Melin, P., Monica, J. C., Sanchez, D., Castillo, O. (2022). Fuzzy-SIRD model: Forecasting COVID-19 death tolls considering governments intervention. *Artificial Intelligence in Medicine*, 134, Art. 102422. <https://doi.org/10.1016/j.artmed.2022.102422>.

9. Gaskin, T., Conrad, T., Pavliotis, G. A., Schütte, C. (2024). Neural parameter calibration and uncertainty quantification for epidemic forecasting. *PLoS ONE*, 19(10), Art. e0306704. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0306704>.

10. Nesteruk, I. (2025). General SIR model for visible and hidden epidemic dynamics. *Frontiers in Artificial Intelligence*, 8, Art. 1559880. <https://doi.org/10.3389/frai.2025.1559880>.

11. Faramarzi, A., Norouzi, S., Dehdarirad, H., Aghlmand, S., Yusefzadeh, H. (2024). The global economic burden of COVID-19 disease: a comprehensive systematic review and meta-analysis. *Systematic Reviews*, 13, Art. 68. <https://doi.org/10.1186/s13643-024-02476-6>.

12. Sun, Q., Yan, Y., Cao, S., Zhang, H. (2024). The impact of COVID-19 pandemic on the world's major economies: based on a multi-country and multi-sector CGE model. *Frontiers in Public Health*, 12, Art. 1338677. <https://doi.org/10.3389/fpubh.2024.1338677>.

13. Myers, R. H., Montgomery, D. C., Anderson-Cook, C. M. (2016). *Response Surface Methodology: Process and Product Optimization Using Designed Experiments*. 4th ed. Hoboken : John Wiley & Sons, 856 p.

ISSN 2786-6025 Online

14. Rotshtein, O. P. (1999). Intelektualni tekhnolohii identyfikatsii: nechitki mnozhyny, henetychni alhorytmy, neironni merezhi [Intelligent Identification Technologies: Fuzzy Sets, Genetic Algorithms, Neural Networks]. Vinnytsia : UNIVERSUM-Vinnytsia, 1999. 320 p. [in Ukrainian].

Дата першого надходження статті до видання: 07.04.2026

Дата прийняття статті до друку після рецензування: 23.04.2026