

УДК 004.94:631.8

Наталя Дьоміна, кандидат технічних наук, доцент,
завідувачка кафедри вищої математики і фізики,
Дмитро Одновол, старший викладач
кафедри вищої математики і фізики,
Таврійський державний агротехнологічний університет
імені Дмитра Моторного, м. Запоріжжя, Україна

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЯ ВНЕСЕННЯ АЗОТНИХ ДОБРІВ ЗА МОДЕЛЛЮ МІТЧЕРЛІХА З ВИКОРИСТАННЯМ МЕТОДУ НЬЮТОНА В MATLAB

Анотація. Обґрунтовано математичну модель оптимізації норм внесення азотних добрив під пшеницю озиму з урахуванням економічних та екологічних чинників. Для опису функції відгуку врожайності застосовано модель Мітчерліха, яка найбільш адекватно відтворює ефект насичення та закон спадної граничної продуктивності. Сформульовано нелінійну цільову функцію прибутку, що враховує вартість добрив, ціну реалізації продукції та квадратичний екологічний штраф за надлишкове внесення азоту. Для пошуку глобального максимуму функції використано метод Ньютона в середовищі MATLAB. Проведено оцінювання параметрів моделі, чисельний пошук оптимуму та аналіз чутливості, що дало змогу порівняти приватно-економічний та еколого-економічний оптимуми. Отримані результати забезпечують визначення агроекологічно обґрунтованої оптимальної норми азоту.

Ключові слова: математичне моделювання, метод Ньютона, MATLAB, модель Мітчерліха, нелінійна оптимізація, азотні добрива.

Abstract. The paper substantiates a mathematical model for optimizing nitrogen fertilizer application rates for winter wheat considering economic and environmental factors. The Mitscherlich model is used to describe the crop yield response to nitrogen, accurately reflecting the saturation nature of yield growth and the law of diminishing marginal productivity. A nonlinear profit objective function is constructed taking into account fertilizer costs, crop market price, and a quadratic environmental penalty for excessive nitrogen application. Newton's method implemented in MATLAB is applied to determine the global maximum of the objective function. Parameter estimation, numerical optimization, sensitivity analysis, and comparison of private-economic and ecological-economic optima are performed. The obtained results allow for the determination of an agroecologically justified optimal nitrogen rate.

Keywords: mathematical modeling, Newton's method, MATLAB, Mitscherlich model, nonlinear optimization, nitrogen fertilizers.

Сучасне сільське господарство дедалі більше орієнтується на принципи точного землеробства, де прийняття технологічних рішень базується не лише на емпіричному досвіді, а й на математичних моделях, цифровому аналізі та оптимізаційних алгоритмах. Однією з найважливіших задач агроінженерії є визначення оптимальної норми внесення азотних добрив, оскільки саме азот є основним фактором формування врожайності зернових культур. Недостатнє внесення азоту знижує врожайність і прибутковість виробництва, тоді як надлишкове внесення призводить до перевитрат ресурсів і значних екологічних наслідків.

З огляду на це, сучасна агроекономіка переходить від класичного підходу максимізації прибутку до еколого-економічного підходу, у якому враховуються зовнішні екологічні ефекти. Для реалізації такого підходу необхідним є застосування математичних моделей оптимізації, що дозволяють формалізувати виробничі та екологічні процеси. [1–3].

Для опису реакції врожайності на азотне живлення використано класичну модель Мітчерліха у вигляді:

$$Y(N) = a(1 - e^{-bN})$$

де $Y(N)$ – врожайність культури, т/га; N – норма внесення азоту, кг д.р./га; a – асимптотичне значення максимально можливої врожайності; b – коефіцієнт інтенсивності відгуку культури на азот.

Модель Мітчерліха вважається однією з найбільш обґрунтованих для опису агрономічних процесів, оскільки вона враховує ефект насичення: початкові дози азоту забезпечують значний приріст урожайності, але подальше збільшення норми внесення дає все менший ефект. Це відповідає закону спадної граничної продуктивності та закону Лібіха–Мітчерліха [4]. На відміну від квадратичних або лінійних моделей, функція Мітчерліха є гладкою, монотонно зростаючою та асимптотично обмеженою, що робить її особливо зручною для подальшої

математичної оптимізації. Дослідження J. Sumelius підтвердили, що саме ця модель краще описує реакцію зернових культур на азот порівняно з квадратичними апроксимаціями [5].

Дохід від реалізації продукції описується виразом:

$$R(N) = p \cdot Y(N)$$

де p – ринкова ціна зерна.

Приватні виробничі витрати на азотне живлення моделюються як:

$$C(N) = c_N N$$

де c_N – повна приведена вартість 1 кг азоту, що включає вартість добрива, транспортування, логістику та внесення.

Однак така постановка враховує лише інтереси виробника. Для переходу до еколого-економічного оптимуму вводиться функція екологічних зовнішніх витрат. У роботах OECD, Agronomy та Ecological Economics показано, що гранична шкода від надлишкового азоту зростає швидше, ніж лінійно, тому для математичного опису доцільно використовувати опуклу функцію екологічного штрафу [6–8].

У даній роботі приймається квадратична форма:

$$D(N) = dN^2$$

де d – коефіцієнт екологічної інтерналізації.

Економічна інтерпретація параметра d може здійснюватися трьома шляхами: через нормативні екологічні платежі та екоподатки; через оцінювання реальних збитків від забруднення; через калібрування параметра таким чином, щоб оптимум збігався з екологічно допустимими нормами для конкретного регіону.

Таким чином, повна цільова функція прибутку набуває вигляду:

$$\Pi(N) = p \cdot a(1 - e^{-bN}) - c_N N - dN^2$$

Ця функція є нелінійною, не поліноміальною та потребує застосування чисельних методів оптимізації.

Для знаходження оптимального значення норми внесення добрив необхідно максимізувати функцію прибутку. Умова стаціонарності має вигляд:

$$\Pi'(N) = pab e^{-bN} - c_N - 2dN = 0$$

Аналітичний розв'язок цього рівняння у загальному випадку відсутній через одночасну наявність експоненціальної та лінійної складових. Саме тому задача переходить у площину чисельної оптимізації.

Друга похідна функції прибутку:

$$\Pi''(N) = -pab^2 e^{-bN} - 2d < 0$$

Для знаходження оптимуму необхідно розв'язати рівняння $\Pi'(N) = 0$. Аналітичний розв'язок цього рівняння відсутній через поєднання експоненціальної та лінійної складових, що обумовлює необхідність чисельної оптимізації. Оскільки $\Pi''(N) < 0$ для всіх $N > 0$, функція прибутку є строго увігнутою, що гарантує єдиність глобального максимуму та стійкість оптимального рішення.

Для чисельного знаходження оптимуму використано метод Ньютона з обчислення в СКМ MATLAB:

$$N_{k+1} = N_k - \frac{\Pi'(N_k)}{\Pi''(N_k)}$$

Метод Ньютона характеризується квадратичною швидкістю збіжності та є одним із найефективніших алгоритмів розв'язання задач нелінійної оптимізації за умови правильного вибору початкового наближення.

Параметри моделі Мітчерліха оцінювались у MATLAB за допомогою функції `lsqcurvefit`, що реалізує метод нелінійних найменших квадратів:

$$\min \sum (Y_i - Y(N_i))^2$$

Для перевірки стійкості моделі було проведено аналіз чутливості. Встановлено, що найбільший вплив на оптимальну норму внесення мають ринкова ціна зерна, вартість азотних добрив, коефіцієнт екологічного штрафу d , а також агрономічні параметри a та b .

При зростанні ціни зерна оптимальна норма збільшується, оскільки додатковий урожай стає економічно вигіднішим. При зростанні вартості добрив

або коефіцієнта екологічного штрафу оптимум зміщується в бік зменшення внесення азоту.

Особливо важливим є порівняння двох оптимумів: приватно-економічного ($d = 0$) та еколого-економічного ($d > 0$). У більшості випадків приватний оптимум перевищує екологічно допустиму межу, тоді як введення штрафного параметра дозволяє зменшити норму внесення до безпечного рівня залежно від регіону, типу ґрунту та культури.

Практична цінність моделі полягає у можливості її інтеграції в системи точного землеробства. MATLAB забезпечує високу ефективність реалізації всіх етапів: від оцінювання параметрів до сценарного моделювання [9]. Такий підхід забезпечує створення практичних інструментів підтримки прийняття рішень для агровиробництва. Запропонована модель може бути використана як основа для інтелектуальних систем управління агротехнологічними процесами.

Таким чином, запропонована математична модель поєднує агрономічну адекватність, економічну інтерпретацію та строгий математичний апарат нелінійної оптимізації. Використання методу Ньютона в MATLAB забезпечує швидке, стійке та надійне знаходження глобального оптимуму навіть для складних агроекономічних систем. Отримані результати підтверджують доцільність переходу від приватно-економічного до еколого-економічного підходу в задачах управління мінеральним живленням культур.

Список використаних джерел

1. Примак І. Д., Лотоненко І. В., Манько Ю. П. Наукові основи землеробства / за ред. І. Д. Примака. Київ : КВІЦ, 2008. 192 с.
2. Божко Л. Ю. Клімат і продуктивність овочевих культур в Україні : монографія. Одеса : Екологія, 2010. 365 с.
3. Агроекономічні та екологічні аспекти встановлення оптимального рівня врожайності нових сортів сільськогосподарських культур / за ред. О. В. Харченка. Суми : ФОП Щербина І. В., 2017. 154 с.
4. Dhanoa M. S., Sanderson R., Cardenas L. M., Shepherd A., Chadwick D. R., Powell C. D. et al. Overview and application of the Mitscherlich equation and its extensions to

- estimate the soil nitrogen pool fraction associated with crop yield and nitrous oxide emission. *Advances in Agronomy*. 2022. Vol. 174. P. 269–295.
5. Sumelius J. A response analysis of wheat and barley to nitrogen in Finland. *Agricultural and Food Science in Finland*. 1993. Vol. 2. P. 465–479.
6. Martínez-Dalmau J., Berbel J., Ordóñez-Fernández R. Nitrogen fertilization: A review of the risks associated with the inefficiency of its use and policy responses. *Sustainability*. 2021. Vol. 13, No. 10. Article 5625.
7. Крамарьов С. М., Крамарьов О. С., Демиденко В. Г., Хорошун К. О., Пісоцький С. С., Бондарь В. Ю., Рубан С. М., Цуркан К. П. Економічна ефективність використання карбамідно-аміачних сумішей (КАС) в сучасних системах удобрення сільськогосподарських культур. Дніпро : Нова ідеологія, 2020. 195 с.
8. DeBoe G. Impacts of agricultural policies on productivity and sustainability performance in agriculture: A literature review. Paris : OECD Publishing, 2020. 168 p.
9. Дьоміна Н. А., Одновол Д. Г., Леонтьєва В. В., Кондрат'єва Н. О. MATLAB – інструмент сучасної математичної підготовки інженерів: національний та міжнародний досвід. *Development of modern science: experimental and theoretical research: scientific multidisciplinary monograph*. 2025. С. 367–393.