

DOI <https://doi.org/10.32782/2220-8674-2025-15-2-19>

УДК 621.313.3.025.3-78

О. Ю. Вовк, канд. техн. наук

ORCID: 0000-0003-0154-6972

І. О. Попова, канд. техн. наук

ORCID: 0000-0001-5429-8269

Таврійський державний агротехнологічний університет імені Дмитра Моторного

e-mail: Oleksandr.vovk@tsatu.edu.ua

АНАЛІЗ НЕСИМЕТРИЧНИХ ТРИФАЗНИХ КІЛ ЗА ДОПОМОГОЮ МЕТОДУ КОНТУРНИХ СТРУМІВ

Анотація. У роботі розглянуто несиметричні режими роботи трифазних кіл. Проаналізовано методи розрахунку струмів в разі несиметрії навантаження і в разі несиметрії джерела. Виявлено, що для визначення струмів кола за несиметрії навантаження застосовується метод двох вузлів, а за несиметрії джерела – метод симетричних складових. Недоліком вказаних методів є значна кількість розрахункових дій. Для спрощення розрахунку сил струмів у фазах кола запропоновано застосовувати метод контурних струмів. На базі цього методу складено рівняння для визначення сил струмів трипровідних і чотирипровідних трифазних кіл у несиметричних режимах роботи.

Ключові слова: теоретичні основи електротехніки, несиметричне трифазне коло, напруга зсуву нейтралі, симетричні складові, контурні струми.

Постановка проблеми. На сучасному етапі розвитку науки і техніки пристрої та установки, що розробляються й упроваджуються, для своєї роботи застосовують електричну енергію. В електротехніці їх називають споживачами чи навантаженнями і класифікують так: навантаження постійного і змінного струму [1; 2]. Навантаження змінного струму переважно є трифазними. На них припадає близько 40 % виробленої у світі електричної енергії [3; 4]. Робота цих навантажень у трифазних системах обумовлює певні процеси, які призводять до виникнення несиметричних режимів [5; 6]. Вони виникають унаслідок нерівномірного розподілу однофазних навантажень між фазами трифазної системи, підключення потужних однофазних споживачів, впливу фотоелектричних модулів і зарядних станцій, пошкодження електрообладнання тощо [7; 8]. Виникнення несиметрії спричиняє порушення нормального функціонування трифазних навантажень, зокрема зниження ефективності роботи, збільшення споживання електроенергії та додаткове нагрівання [9; 10]. Тому дослідження несиметричних режимів роботи трифазних систем є актуальною задачею.

Аналіз останніх досліджень. На сьогодні існують багато публікацій результатів досліджень трифазних кіл за різних видів несиметрії [11–20]. Огляд цих публікацій показує, що аналіз несиметричних режимів таких кіл базується на двох методах розрахунків: перший із них – це метод двох вузлів, другий – метод симетричних складових.

Перший метод здебільшого застосовують для аналізу трифазних кіл у разі несиметрії навантаження чи лінії електропередачі. Його суть полягає у визначенні напруги зсуву нейтралі, а потім – сил струмів у фазах кола.

Для трипровідного трифазного кола розрахунок здійснюється так:

$$\dot{U}_N = \frac{\dot{E}_A/Z_A + \dot{E}_B/Z_B + \dot{E}_C/Z_C}{1/Z_A + 1/Z_B + 1/Z_C}; \quad (1)$$



$$\dot{I}_A = \frac{\dot{E}_A - \dot{U}_N}{Z_A}; \quad \dot{I}_B = \frac{\dot{E}_B - \dot{U}_N}{Z_B}; \quad \dot{I}_C = \frac{\dot{E}_C - \dot{U}_N}{Z_C}, \quad (2)$$

де \dot{U}_N – комплекс діючого значення напруги зсуву нейтралі;

$\dot{E}_A, \dot{E}_B, \dot{E}_C$ – комплекси діючих значень електрорушійних сил джерела;

Z_A, Z_B, Z_C – комплекси повних опорів фаз кола;

$\dot{I}_A, \dot{I}_B, \dot{I}_C$ – комплекси діючих значень струмів у фазах кола.

Аналіз рівнянь (1), (2) показує, що для знаходження комплексу діючого значення будь-якого струму у фазі кола потрібно виконати 34 розрахункові дії, включно з переведенням комплексних чисел із показової форми в алгебраїчну і навпаки.

Для чотирипровідного трифазного кола розрахунок здійснюється так:

$$\dot{U}_N = \frac{\dot{E}_A/Z_A + \dot{E}_B/Z_B + \dot{E}_C/Z_C}{1/Z_A + 1/Z_B + 1/Z_C + 1/Z_N}; \quad (3)$$

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{E}_A - \dot{U}_N}{Z_A}; \quad \dot{I}_B = \frac{\dot{E}_B - \dot{U}_N}{Z_B}; \quad \dot{I}_C = \frac{\dot{E}_C - \dot{U}_N}{Z_C}; \quad \dot{I}_N = \frac{\dot{U}_N}{Z_N}, \quad (4)$$

де \dot{I}_N – комплекс діючого значення струму нейтралі;

Z_N – комплекс повного опору нейтралі.

Аналіз рівнянь (3), (4) показує, що для знаходження комплексу діючого значення будь-якого струму у фазі кола потрібно виконати 39 розрахункових дій, включно з переведенням комплексних чисел із показової форми в алгебраїчну і навпаки.

Другий метод переважно застосовують для аналізу трифазних кіл у разі несиметрії джерела. Його суть полягає у визначенні симетричних складових напруг і струмів, а потім – сил струмів у фазах кола.

Для трипровідного трифазного кола розрахунок здійснюється так:

$$\dot{U}_1 = \frac{\dot{E}_A + e^{j120^\circ} \cdot \dot{E}_B + e^{j240^\circ} \cdot \dot{E}_C}{3}; \quad \dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{Z_A}; \quad (5)$$

$$\dot{U}_2 = \frac{\dot{E}_A + e^{j240^\circ} \cdot \dot{E}_B + e^{j120^\circ} \cdot \dot{E}_C}{3}; \quad \dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_2}{Z_A}; \quad (6)$$

$$\dot{I}_A = \dot{I}_1 + \dot{I}_2; \quad \dot{I}_B = e^{j240^\circ} \cdot \dot{I}_1 + e^{j120^\circ} \cdot \dot{I}_2; \quad \dot{I}_C = e^{j120^\circ} \cdot \dot{I}_1 + e^{j240^\circ} \cdot \dot{I}_2, \quad (7)$$

де \dot{U}_1, \dot{U}_2 – комплекси діючих значень напруг відповідно прямої і зворотної послідовностей;

\dot{I}_1, \dot{I}_2 – комплекси діючих значень струмів відповідно прямої і зворотної послідовностей.

Аналіз рівнянь (5)–(7) показує, що для знаходження комплексу діючого значення струму у фазі А кола потрібно виконати 47 розрахункових дій, включно з переведенням комплексних чисел із показової форми в алгебраїчну і навпаки.

Для чотирипровідного трифазного кола розрахунок здійснюється так:

$$\dot{U}_1 = \frac{\dot{E}_A + e^{j120^\circ} \cdot \dot{E}_B + e^{j240^\circ} \cdot \dot{E}_C}{3}; \quad \dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{Z_A}; \quad (8)$$

$$\dot{U}_2 = \frac{\dot{E}_A + e^{j240^\circ} \cdot \dot{E}_B + e^{j120^\circ} \cdot \dot{E}_C}{3}; \quad \dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_2}{Z_A}; \quad (9)$$

$$\dot{U}_0 = \frac{\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C}{3}; \quad \dot{I}_0 = \frac{\dot{U}_0}{Z_A + 3 \cdot Z_N}; \quad (10)$$

$$\dot{I}_A = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_0; \quad \dot{I}_B = e^{j240^\circ} \cdot \dot{I}_1 + e^{j120^\circ} \cdot \dot{I}_2 + \dot{I}_0; \quad \dot{I}_C = e^{j120^\circ} \cdot \dot{I}_1 + e^{j240^\circ} \cdot \dot{I}_2 + \dot{I}_0, \quad (11)$$

де \dot{U}_0 – комплекс діючого значення напруги нульової послідовності;

\dot{I}_0 – комплекс діючого значення струму нульової послідовності.

Аналіз рівнянь (8)–(11) показує, що для знаходження комплексу діючого значення струму у фазі А кола потрібно виконати 79 розрахункових дій, включно з переведенням комплексних чисел із показової форми в алгебраїчну і навпаки.

Таким чином, із викладеного випливає, що методи розрахунків, які на сьогодні застосовують до несиметричних трифазних кіл, мають значну кількість розрахункових операцій.

Формулювання мети статті (постановка завдання). У статті поставлено за мету обґрунтування можливості застосування методу контурних струмів для визначення сил струмів у фазах трифазного кола за несиметричних режимів роботи. Для цього потрібно розглянути застосування вказаного методу для трипровідного та чотирипровідного трифазного кола в разі несиметрії навантаження або джерела та зробити його порівняльний аналіз із методом двох вузлів і методом симетричних складових, за результатами якого дійти висновку про доцільність застосування методу контурних струмів.

Основна частина. Розглянемо розрахункову схему трипровідного трифазного кола, що складається з джерела й навантаження, з'єднаних зіркою, на якому позначимо контурні струми (рис. 1).

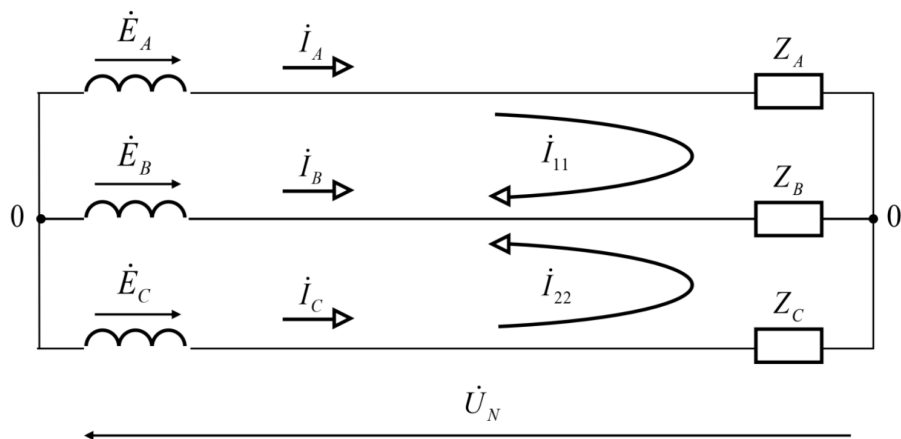


Рис. 1. Розрахункова схема трифазного кола «зірка – зірка» в несиметричному режимі

На розрахунковій схемі (рис. 1) позначено: \dot{I}_{11} , \dot{I}_{22} – комплекси діючих значень контурних струмів кола; інші літери розшифровано вище.

Складемо рівняння за методом контурних струмів для розрахункової схеми кола на рис. 1:

$$(Z_A + Z_B) \cdot \dot{I}_{11} + Z_B \cdot \dot{I}_{22} = \dot{E}_A - \dot{E}_B; \quad (12)$$

$$Z_B \cdot \dot{I}_{11} + (Z_B + Z_C) \cdot \dot{I}_{22} = \dot{E}_C - \dot{E}_B. \quad (13)$$

Для системи рівнянь (12), (13) запишемо загальний визначник:

$$\Delta = \begin{vmatrix} Z_A + Z_B & Z_B \\ Z_B & Z_B + Z_C \end{vmatrix} = (Z_A + Z_B) \cdot (Z_B + Z_C) - Z_B^2. \quad (14)$$

Після перетворень (14) отримаємо:



$$\Delta = Z_A Z_B + Z_B Z_C + Z_C Z_A. \quad (15)$$

Для системи рівнянь (12), (13) запишемо частковий визначник контурного струму \dot{I}_{11} :

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} \dot{E}_A - \dot{E}_B & Z_B \\ \dot{E}_C - \dot{E}_B & Z_B + Z_C \end{vmatrix} = (\dot{E}_A - \dot{E}_B) \cdot (Z_B + Z_C) - (\dot{E}_C - \dot{E}_B) \cdot Z_B. \quad (16)$$

Після перетворень (16) отримаємо:

$$\Delta_{11} = \dot{E}_A Z_B + \dot{E}_A Z_C - \dot{E}_B Z_C - \dot{E}_C Z_B. \quad (17)$$

Для системи рівнянь (12), (13) запишемо частковий визначник контурного струму \dot{I}_{22} :

$$\Delta_{22} = \begin{vmatrix} Z_A + Z_B & \dot{E}_A - \dot{E}_B \\ Z_B & \dot{E}_C - \dot{E}_B \end{vmatrix} = (\dot{E}_C - \dot{E}_B) \cdot (Z_A + Z_B) - (\dot{E}_A - \dot{E}_B) \cdot Z_B. \quad (18)$$

Після перетворень (18) отримаємо:

$$\Delta_{22} = \dot{E}_C Z_A + \dot{E}_C Z_B - \dot{E}_B Z_A - \dot{E}_A Z_B. \quad (19)$$

Поділивши (17) на (15), отримаємо:

$$\dot{I}_{11} = \frac{\dot{E}_A Z_B + \dot{E}_A Z_C - \dot{E}_B Z_C - \dot{E}_C Z_B}{Z_A Z_B + Z_B Z_C + Z_C Z_A}. \quad (20)$$

Поділивши (19) на (15), отримаємо:

$$\dot{I}_{22} = \frac{\dot{E}_C Z_A + \dot{E}_C Z_B - \dot{E}_B Z_A - \dot{E}_A Z_B}{Z_A Z_B + Z_B Z_C + Z_C Z_A}. \quad (21)$$

На підставі рис. 1 запишемо вирази струмів у фазах кола через контурні струми:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{11}; \quad \dot{I}_B = -\dot{I}_{11} - \dot{I}_{22}; \quad \dot{I}_C = \dot{I}_{22}. \quad (22)$$

З урахуванням (20), (21) перепишемо (22) так:

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{E}_A Z_B + \dot{E}_A Z_C - \dot{E}_B Z_C - \dot{E}_C Z_B}{Z_A Z_B + Z_B Z_C + Z_C Z_A}; \quad (23)$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{E}_C Z_A + \dot{E}_C Z_B - \dot{E}_B Z_A - \dot{E}_A Z_B}{Z_A Z_B + Z_B Z_C + Z_C Z_A}; \quad (24)$$

$$\dot{I}_B = -\dot{I}_A - \dot{I}_C. \quad (25)$$

Проведемо чисельне порівняння розрахунку струму у фазі А кола (рис. 1) за допомогою методу двох вузлів із розрахунком цього ж струму за допомогою методу контурних струмів. Для цього вважатимемо, що для розрахункової схеми на рис. 1 відомо: $\dot{E}_A = 220 \cdot e^{j0^\circ}$ В; $\dot{E}_B = 220 \cdot e^{-j120^\circ}$ В; $\dot{E}_C = 220 \cdot e^{-j240^\circ}$ В; $Z_A = 2 \cdot e^{j30^\circ}$ Ом; $Z_B = 5 \cdot e^{j50^\circ}$ Ом; $Z_C = 10 \cdot e^{j70^\circ}$ Ом.

Підставляємо ці значення у (3), (4) і здійснюємо розрахунок струму у фазі А кола за допомогою методу двох вузлів:

$$\dot{U}_N = \frac{\frac{220 \cdot e^{j0^\circ}}{2 \cdot e^{j30^\circ}} + \frac{220 \cdot e^{-j120^\circ}}{5 \cdot e^{j50^\circ}} + \frac{220 \cdot e^{-j240^\circ}}{10 \cdot e^{j70^\circ}}}{\frac{1}{2 \cdot e^{j30^\circ}} + \frac{1}{5 \cdot e^{j50^\circ}} + \frac{1}{10 \cdot e^{j70^\circ}}};$$

$$\dot{U}_N = \frac{110 \cdot e^{-j30^\circ} + 44 \cdot e^{-j170^\circ} + 22 \cdot e^{-j310^\circ}}{0,5 \cdot e^{-j30^\circ} + 0,2 \cdot e^{-j50^\circ} + 0,1 \cdot e^{-j70^\circ}};$$



$$\begin{aligned}\dot{U}_N &= \frac{95,263 - j55 - 43,332 - j7,641 + 14,141 + j16,853}{0,433 - j0,25 + 0,129 - j0,1532 + 0,0342 - j0,09397}; \\ \dot{U}_N &= \frac{66,072 - j45,788}{0,5962 - j0,49717} = \frac{80,3869 \cdot e^{-j34,7^\circ}}{0,7763 \cdot e^{-j39,8^\circ}} = 103,55 \cdot e^{j5,1^\circ} \text{ В}; \\ \dot{I}_A &= \frac{220 \cdot e^{j0^\circ} - 103,55 \cdot e^{-j5,1^\circ}}{2 \cdot e^{j30^\circ}} = \frac{220 - 103,14 - j9,21}{2 \cdot e^{j30^\circ}}; \\ \dot{I}_A &= \frac{116,86 - j9,21}{2 \cdot e^{j30^\circ}} = \frac{117,22 \cdot e^{-j4,5^\circ}}{2 \cdot e^{j30^\circ}} = 58,6 \cdot e^{-j34,5^\circ} \text{ А}.\end{aligned}$$

Підставляємо ці ж значення у (23) і здійснюємо розрахунок струму у фазі А кола за допомогою методу контурних струмів:

$$\begin{aligned}\dot{I}_A &= \frac{220e^{j0^\circ} \cdot 5e^{j50^\circ} + 220e^{j0^\circ} \cdot 10e^{j70^\circ} - 220e^{-j120^\circ} \cdot 10e^{j70^\circ} - 220e^{-j240^\circ} \cdot 5e^{j50^\circ}}{2 \cdot e^{j30^\circ} \cdot 5 \cdot e^{j50^\circ} + 5 \cdot e^{j50^\circ} \cdot 10 \cdot e^{j70^\circ} + 10 \cdot e^{j70^\circ} \cdot 2 \cdot e^{j30^\circ}}; \\ \dot{I}_A &= \frac{1100 \cdot e^{j50^\circ} + 2200 \cdot e^{j70^\circ} - 2200 \cdot e^{-j50^\circ} - 1100 \cdot e^{-j190^\circ}}{10 \cdot e^{j80^\circ} + 50 \cdot e^{j120^\circ} + 20 \cdot e^{j100^\circ}}; \\ \dot{I}_A &= \frac{707 + j843 + 752 + j2067 - 1414 + j1685 + 1083 - j191}{1,74 + j9,85 - 25 + j43,3 - 3,47 + j19,7}; \\ \dot{I}_A &= \frac{1128 + j4404}{-26,73 + j72,85} = \frac{4546,2 \cdot e^{j75,6^\circ}}{77,6 \cdot e^{j110,1^\circ}} = 58,6 \cdot e^{-j34,5^\circ} \text{ А}.\end{aligned}$$

Порівняння результатів розрахунків струму у фазі А, які здійснені за методом двох вузлів і за методом контурних струмів, вказує на їх ідентичність. При цьому результат за методом контурних струмів отриманий із меншою кількістю розрахункових операцій порівняно з результатом за методом двох вузлів.

Проведемо чисельне порівняння розрахунку струму у фазі А кола (рис. 1) за допомогою методу симетричних складових із розрахунком цього ж струму за допомогою методу контурних струмів. Для цього вважатимемо, що для розрахункової схеми на рис. 1 відомо: $\dot{E}_A = 200 \cdot e^{j0^\circ}$ В; $\dot{E}_B = 250 \cdot e^{-j120^\circ}$ В; $\dot{E}_C = 150 \cdot e^{-j240^\circ}$ В; $Z_A = Z_B = Z_C = 10 \cdot e^{j60^\circ}$ Ом.

Підставляємо ці значення у (5)–(7) і здійснюємо розрахунок струму у фазі А кола за допомогою методу симетричних складових:

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= \frac{200e^{j0^\circ} + e^{j120^\circ} \cdot 250e^{-j120^\circ} + e^{j240^\circ} \cdot 150e^{-j240^\circ}}{3} = \frac{200 + 250 + 150}{3} = 200 \cdot e^{j0^\circ} \text{ В}; \\ \dot{U}_2 &= \frac{200e^{j0^\circ} + e^{j240^\circ} \cdot 250e^{-j120^\circ} + e^{j120^\circ} \cdot 150e^{-j240^\circ}}{3} = \frac{200e^{j0^\circ} + 250e^{j120^\circ} + 150e^{-j120^\circ}}{3}; \\ \dot{U}_2 &= \frac{200 - 125 + j216,51 - 75 - j129,9}{3} = \frac{j86,62}{3} = 28,87 \cdot e^{j90^\circ} \text{ В}; \\ \dot{I}_1 &= \frac{200 \cdot e^{j0^\circ}}{10 \cdot e^{j60^\circ}} = 20 \cdot e^{-j60^\circ} \text{ А}; \quad \dot{I}_2 = \frac{28,87 \cdot e^{j90^\circ}}{10 \cdot e^{j60^\circ}} = 2,9 \cdot e^{j30^\circ} \text{ А}; \\ \dot{I}_A &= 20e^{-j60^\circ} + 2,9e^{j30^\circ} = 10 - j17,32 + 2,51 + j1,45 = 12,51 - j15,87 = 20,21e^{-j51,8^\circ} \text{ А}.\end{aligned}$$

Підставляємо ці ж значення у (23) і здійснюємо розрахунок струму у фазі А кола за допомогою методу контурних струмів:

$$\dot{i}_A = \frac{200e^{j0^\circ} \cdot 10e^{j60^\circ} + 200e^{j0^\circ} \cdot 10e^{j60^\circ} - 250e^{-j120^\circ} \cdot 10e^{j60^\circ} - 150e^{-j240^\circ} \cdot 10e^{j60^\circ}}{10 \cdot e^{j60^\circ} \cdot 10 \cdot e^{j60^\circ} + 10 \cdot e^{j60^\circ} \cdot 10 \cdot e^{j60^\circ} + 10 \cdot e^{j60^\circ} \cdot 10 \cdot e^{j60^\circ}};$$

$$\dot{i}_A = \frac{4000e^{j60^\circ} - 2500e^{-j60^\circ} - 1500e^{-j180^\circ}}{300 \cdot e^{j120^\circ}} = \frac{2000 + j3464 - 1250 + j2165 + 1500}{300 \cdot e^{j120^\circ}};$$

$$\dot{i}_A = \frac{2250 + j5629}{300 \cdot e^{j120^\circ}} = \frac{6062 \cdot e^{j68,2^\circ}}{300 \cdot e^{j120^\circ}} = 20,21 \cdot e^{-j51,8^\circ} \text{ А.}$$

Порівняння результатів розрахунків струму у фазі А, які здійснені за методом симетричних складових і за методом контурних струмів, вказує на їх ідентичність. При цьому результат за методом контурних струмів отриманий із меншою кількістю розрахункових операцій порівняно з результатом за методом симетричних складових.

Розглянемо розрахункову схему чотирипровідного трифазного кола, що складається з джерела й навантаження, з'єднаних зіркою, на якому позначимо контурні струми (рис. 2).

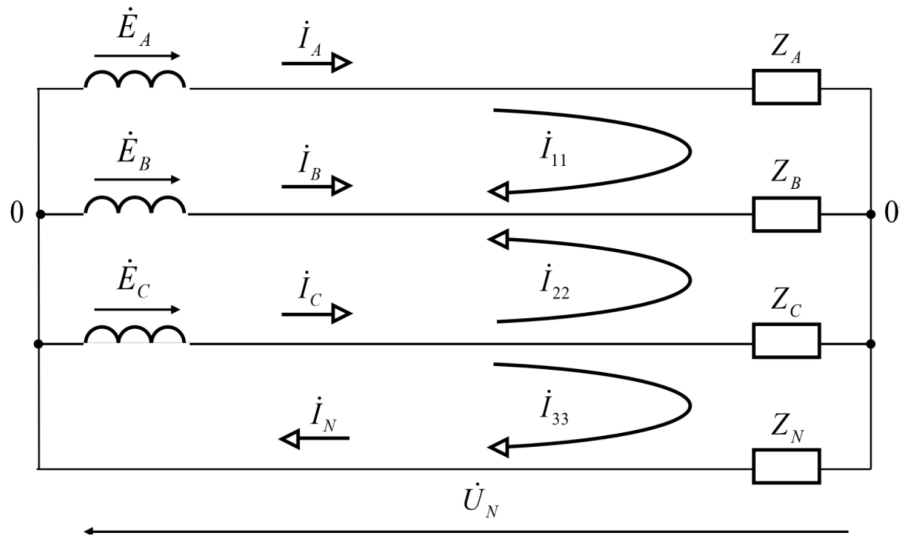


Рис. 2. Розрахункова схема трифазного кола «зірка – зірка з нулем» у несиметричному режимі

На розрахунковій схемі (рис. 2) позначено: \dot{I}_{11} , \dot{I}_{22} , \dot{I}_{33} – комплекси діючих значень контурних струмів кола; інші літери розшифровано вище.

Складемо рівняння за методом контурних струмів для розрахункової схеми кола на рис. 2:

$$(Z_A + Z_B) \cdot \dot{I}_{11} + Z_B \cdot \dot{I}_{22} = \dot{E}_A - \dot{E}_B; \quad (26)$$

$$Z_B \cdot \dot{I}_{11} + (Z_B + Z_C) \cdot \dot{I}_{22} + Z_C \cdot \dot{I}_{33} = \dot{E}_C - \dot{E}_B; \quad (27)$$

$$Z_C \cdot \dot{I}_{22} + (Z_C + Z_N) \cdot \dot{I}_{33} = \dot{E}_C. \quad (28)$$

Для системи рівнянь (26)–(28) запишемо загальний визначник:

$$\Delta = \begin{vmatrix} Z_A + Z_B & Z_B & 0 \\ Z_B & Z_B + Z_C & Z_C \\ 0 & Z_C & Z_C + Z_N \end{vmatrix}. \quad (29)$$

Після перетворень (29) отримаємо:

$$\Delta = Z_A Z_B Z_N + Z_B Z_C Z_N + Z_C Z_A Z_N + Z_A Z_B Z_C. \quad (30)$$

Для системи рівнянь (26)–(28) запишемо частковий визначник контурного струму \dot{I}_{11} :



$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} \dot{E}_A - \dot{E}_B & Z_B & 0 \\ \dot{E}_C - \dot{E}_B & Z_B + Z_C & Z_C \\ \dot{E}_C & Z_C & Z_C + Z_N \end{vmatrix}. \quad (31)$$

Після перетворень (31) отримаємо:

$$\Delta_{11} = \dot{E}_A Z_B Z_C + \dot{E}_A Z_B Z_N + \dot{E}_A Z_C Z_N - \dot{E}_B Z_C Z_N - \dot{E}_C Z_B Z_N. \quad (32)$$

Для системи рівнянь (26)–(28) запишемо частковий визначник контурного струму \dot{I}_{22} :

$$\Delta_{22} = \begin{vmatrix} Z_A + Z_B & \dot{E}_A - \dot{E}_B & 0 \\ Z_B & \dot{E}_C - \dot{E}_B & Z_C \\ 0 & \dot{E}_C & Z_C + Z_N \end{vmatrix}. \quad (33)$$

Після перетворень (33) отримаємо:

$$\Delta_{22} = \dot{E}_C Z_A Z_N + \dot{E}_C Z_B Z_N - \dot{E}_B Z_A Z_C - \dot{E}_B Z_A Z_N - \dot{E}_A Z_B Z_C - \dot{E}_A Z_B Z_N. \quad (34)$$

Для системи рівнянь (26)–(28) запишемо частковий визначник контурного струму \dot{I}_{33} :

$$\Delta_{33} = \begin{vmatrix} Z_A + Z_B & Z_B & \dot{E}_A - \dot{E}_B \\ Z_B & Z_B + Z_C & \dot{E}_C - \dot{E}_B \\ 0 & Z_C & \dot{E}_C \end{vmatrix}. \quad (35)$$

Після перетворень (35) отримаємо:

$$\Delta_{33} = \dot{E}_A Z_B Z_C + \dot{E}_B Z_A Z_C + \dot{E}_C Z_A Z_B. \quad (36)$$

Поділивши (32) на (30), отримаємо:

$$\dot{I}_{11} = \frac{\dot{E}_A Z_B Z_C + \dot{E}_A Z_B Z_N + \dot{E}_A Z_C Z_N - \dot{E}_B Z_C Z_N - \dot{E}_C Z_B Z_N}{Z_A Z_B Z_N + Z_B Z_C Z_N + Z_C Z_A Z_N + Z_A Z_B Z_C}. \quad (37)$$

Поділивши (34) на (30), отримаємо:

$$\dot{I}_{22} = \frac{\dot{E}_C Z_A Z_N + \dot{E}_C Z_B Z_N - \dot{E}_B Z_A Z_C - \dot{E}_B Z_A Z_N - \dot{E}_A Z_B Z_C - \dot{E}_A Z_B Z_N}{Z_A Z_B Z_N + Z_B Z_C Z_N + Z_C Z_A Z_N + Z_A Z_B Z_C}. \quad (38)$$

Поділивши (36) на (30), отримаємо:

$$\dot{I}_{33} = \frac{\dot{E}_A Z_B Z_C + \dot{E}_B Z_A Z_C + \dot{E}_C Z_A Z_B}{Z_A Z_B Z_N + Z_B Z_C Z_N + Z_C Z_A Z_N + Z_A Z_B Z_C}. \quad (39)$$

На підставі рис. 2 запишемо вирази струмів у фазах кола через контурні струми:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{11}; \quad \dot{I}_B = -\dot{I}_{11} - \dot{I}_{22}; \quad \dot{I}_C = \dot{I}_{22} + \dot{I}_{33}; \quad \dot{I}_N = \dot{I}_{33}. \quad (40)$$

З урахуванням (37) – (39) та перетворень перепишемо (40) так:

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{E}_A Z_B Z_C + ((\dot{E}_A - \dot{E}_B) Z_C + (\dot{E}_A - \dot{E}_C) Z_B) Z_N}{Z_A Z_B Z_C + (Z_A Z_B + Z_B Z_C + Z_C Z_A) Z_N}; \quad (41)$$

$$\dot{I}_B = \frac{\dot{E}_B Z_A Z_C + ((\dot{E}_B - \dot{E}_A) Z_C + (\dot{E}_B - \dot{E}_C) Z_A) Z_N}{Z_A Z_B Z_C + (Z_A Z_B + Z_B Z_C + Z_C Z_A) Z_N}; \quad (42)$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{E}_C Z_A Z_B + ((\dot{E}_C - \dot{E}_A) Z_B + (\dot{E}_C - \dot{E}_B) Z_A) Z_N}{Z_A Z_B Z_C + (Z_A Z_B + Z_B Z_C + Z_C Z_A) Z_N}; \quad (43)$$

$$i_N = \frac{\dot{E}_A Z_B Z_C + \dot{E}_B Z_A Z_C + \dot{E}_C Z_A Z_B}{Z_A Z_B Z_C + (Z_A Z_B + Z_B Z_C + Z_C Z_A) Z_N}. \quad (44)$$

Порівняння розрахунку сили струму у фазі А чотирипровідного кола за методом контурних струмів з аналогічними розрахунками за методами двох вузлів і симетричних складових здійснено так само, як і у випадку трипровідного кола. Результат показав їх ідентичність. При цьому метод контурних струмів дав змогу отримати результат із меншою кількістю розрахункових операцій порівняно з іншими методами.

Висновки. Таким чином, у роботі на базі методу контурних струмів отримані рівняння комплексів струмів у фазах трифазного кола. Вони дають можливість визначати струми у трифазних трипровідних і чотирипровідних колах, які працюють у несиметричних режимах. Отримані рівняння мають меншу кількість розрахункових дій порівняно з методами двох вузлів і симетричних складових, але не дають можливості у процесі розрахунку отримувати значення комплексу напруги зсуву нейтралі. Подальші дослідження мають бути спрямовані на з'ясування доцільності застосування інших методів розрахунку розгалужених кіл до аналізу несиметричних трифазних кіл.

Список використаних джерел

1. John A. Adebisi, Leokadia N.P. Ndjuluwa. A survey of power-consumption monitoring systems. *E-Prime—Advances in Electrical Engineering, Electronics and Energy*. 2024. Vol. 7. P. 100386. <https://doi.org/10.1016/j.prime.2023.100386>
2. Попова І. О., Квітка С. О., Вовк О. Ю. Дослідження несиметричного режиму на роботу динамічного індуктивного навантаження. *Праці ТДАТУ*. 2023. № 23 (1). С. 179–187. <https://doi.org/10.31388/2078-0877-2023-23-1-179-187>
3. Abu Al-Haija, Q. A Stochastic Estimation Framework for Yearly Evolution of Worldwide Electricity Consumption. *Forecasting*. 2021. Vol. 3. P. 256–266. <https://doi.org/10.3390/forecast3020016>
4. Вовк О. Ю., Квітка С. О., Попова І. О., Діордієв В. Т. Збереження роботоздатності трифазного статичного навантаження за неповнофазного живлення. *Праці ТДАТУ*. 2024. № 24 (1). С. 136–150. <https://doi.org/10.32782/2078-0877-2024-24-1-10>
5. Olczykowski Z. Electric Arc Furnaces as a Cause of Current and Voltage Asymmetry. *Energies*. 2021. Vol. 14 (16). P. 5058. <https://doi.org/10.3390/en14165058>
6. Вовк О. Ю., Квітка С. О., Квітка О. С. Контроль витрати ресурсу ізоляції асинхронних електродвигунів при відхиленні напруги живлячої мережі. *Праці ТДАТУ*. 2015. № 15 (2). С. 154–159.
7. Perera S., Elphick S. Impact and management of power system voltage unbalance. *Applied Power Quality. Elsevier*. 2023. P. 49–69. <https://doi.org/10.1016/B978-0-323-85467-2.00001-9>
8. Вовк О. Ю., Попова І. О. Покращення режиму роботи симетричного трифазного навантаження при несиметрії живильних напруг. *Праці ТДАТУ*. 2025. № 25 (1). С. 64–72. <https://doi.org/10.32782/2078-0877-2025-25-1-8>
9. Ma K., Fang L., Kong W. Review of distribution network phase unbalance: Scale, causes, consequences, solutions, and future research directions. *CSEE Journal of Power and Energy Systems*. 2020. Vol. 6 (3). P. 479–488. <https://doi.org/10.17775/CSEEJPES.2019.03280>
10. Torres I.C., Negreiros G.F., Tiba C. Theoretical and Experimental Study to Determine Voltage Violation, Reverse Electric Current and Losses in Prosumers Connected to Low-Voltage Power Grid. *Energies*. 2019. Vol. 12 (23). P. 4568. <https://doi.org/10.3390/en12234568>
11. Bellan D., Furga G.S., Pignari S.A. Circuit Representation of Load and Line Asymmetries in Three-Phase Power Systems. *International Journal of Circuits, Systems and Signal Processing*. 2015. Vol. 9. P. 75–80.
12. Weislik M., Kazala R., Strzabala P. Characteristics and Parameters of a Three-Phase, Three-Wire Balanced Circuit with Non-Linear Load. *Energies*. 2024. Vol. 17. P. 1867. <https://doi.org/10.3390/en17081867>
13. Makarov S. N., Ludwig R., Bitar S. J. Practical Electrical Engineering. *Springer Cham*. 2016. 987 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-21173-2>



14. Bird J. Bird's Electrical Circuit Theory and Technology. *Routledge*. 2021. 912 p.
15. Теорія електричних кіл : навч. посіб. / В. Д. Косенков, А. В. Горошко, А. С. Каштальян, В. Д. Бідюк. Хмельницький : ХНУ, 2024. 346 с.
16. Clarence Victor Christie. Electrical Engineering: the Theory and Characteristics of Electrical Circuits and Machinery. *Legare Street Press*. 2022, 428 p.
17. Хілов В. С. Теоретичні основи електротехніки : підручник. Київ : Видавництво «Каравела», 2021. 468 с.
18. Chatterjee Sh. Electrical Circuit Analysis and Network Theory. *AICTE*. 2022. 338 p.
19. Steinmetz Ch. P. Theory and Calculations of Electrical Circuits. *Legare Street Press*. 2022. 396 p.
20. K. Máslo, J. Koudelka, B. Batora, V. Vyčítal. Asymmetrical, Three-phase Power System Model: Design and Application. *Acta Polytechnica Hungarica*. 2023. Vol. 20 (11). P.9–27. <https://doi.org/10.12700/APH.20.11.2023.11.2>

Стаття надійшла до редакції 15.10.2025

Стаття прийнята 12.11.2025

Статтю опубліковано 22.12.2025



O. Vovk, I. Popova
Dmytro Motornyi Tavsria State Agrotechnological University

ANALYSIS OF ASYMMETRICAL THREE-PHASE CIRCUITS USING THE CONTOUR CURRENT METHOD

Summary

The article discusses three-phase electrical circuits operating in asymmetrical modes. It is noted that the causes of asymmetry in such circuits in practice may be the uneven distribution of single-phase loads between the phases of a three-phase system, the connection of powerful single-phase consumers, the influence of photovoltaic modules and charging stations, damage to electrical equipment, etc. The occurrence of asymmetry causes disruption to the normal functioning of three-phase loads, in particular a reduction in efficiency, increased electricity consumption and additional heating.

An analysis of publications on this topic has revealed that, at present, the calculation of currents in asymmetrical three-phase circuits is based on the two-node method or the symmetrical component method. The first method is mainly used in the analysis of three-phase circuits in cases of load or power line asymmetry. Its essence lies in determining the neutral displacement voltage and then the current forces in the circuit phases. The second method is mainly used in the analysis of three-phase circuits in the case of source asymmetry. Its essence lies in determining the symmetrical components of voltages and currents, and then the current forces in the circuit phases. One of the disadvantages of these methods is that their use involves a significant amount of calculations. Therefore, the aim of this article was to justify the possibility of using the contour current method to determine the current forces in the phases of a three-phase circuit under asymmetrical operating conditions.

To achieve this goal, the application of this method was considered for three-wire and four-wire three-phase circuits in the case of load or source asymmetry. Based on the results, a comparative analysis was made with the two-node method and the symmetrical component method. In the course of the study, the calculation diagrams of the circuits with marked contour currents and the compiled systems of equations using the contour current method were presented. The solutions to these systems of equations were expressions of the complexes of the effective values of the circuit currents. A numerical comparison of the obtained equations with the current equations using the two-node and symmetrical component methods was performed. As a result, it was established that the obtained equations have fewer calculation steps, but do not allow obtaining the value of the neutral displacement voltage complex during the calculation process. Further research should be aimed at clarifying the feasibility of using other methods of calculating branched circuits for the analysis of asymmetrical three-phase circuits.

Keywords: theoretical foundations of electrical engineering, asymmetrical three-phase circuit, neutral shift voltage, symmetrical components, contour currents.