DOI https://doi.org/10.32782/2220-8674-2025-15-2-32
УДК 514.18

О. Є. Мацулевич, канд. техн. наук ORCID: 0000-0001-5553-709X
О. Ю. Михайленко, ст. викладач ORCID: 0000-0002-8836-3222
М. В. Супрун, асистент ORCID: 0009-0000-5903-1336
Таврійський державний агротехнологічний університет імені Дмитра Моторного
e-mail: oleksandr.matsulevych.tsatu.edu.ua

ДИСКРЕТНА ІНТЕРПОЛЯЦІЯ СПІРАЛЕПОДІБНИХ ДИСКРЕТНО ПРЕДСТАВЛЕНИХ КРИВИХ НА ОСНОВІ НЕЛІНІЙНОГО ЗАКОНУ ЗМІНИ КУТІВ СУМІЖНОСТІ

Анотація. Дослідження зосереджено на проблемі інтерполяції дискретно представлених кривих (далі – ДПК), зокрема спіралей та замкнених контурів. Представлено нелінійну формулу для зміни кутів суміжності під час згущення спіралеподібних ДПК, яка випливає з підтвердженої тотожності, що пов'язує кути до й після процесу ущільнення. Шляхом накладання додаткових умов на співвідношення кутів розроблено різноманітні різницеві алгоритми. Вони гарантують відмінну розрахункову точність і повністю виключають осциляції згущеного контуру. Крім того, розроблено й теоретично підтверджено спосіб згущення, що базується на геометричних залежностях між кутами суміжності. Перевага цього способу полягає в його рівномірній ефективності як на опуклих сегментах, так і на перехідних зонах з можливістю відстежувати точки перетину.

Ключові слова: супроводжувальна ламана лінія, кут суміжності, кінцева різниця, спіралеподібна дискретно подана крива.

Постановка проблеми. Раніше було розглянуто згущення ДПК на основі основної тотожності шляхом накладення додаткових співвідношень між кутами суміжності ланок СЛЛ згущеної ДПК. Одержувані при цьому різницеві схеми дали змогу побудувати прості й ефективні розрахункові алгоритми, що гарантують відсутність осциляції при згущенні ДПК. Недоліком пропонованих при цьому способів є те, що закон зміни кутів суміжності після згущення має злами у вузлах або точках згущення. Тільки спосіб дискретної інтерполяції різницевих схем дає змогу одержати лінійний закон зміни кутів суміжності. Тут важливим є те, що побудова лінійного закону зміни кутів суміжності можлива лише тоді, коли цією властивістю лінійності володіють кути суміжності вихідної ДПК. За недотримання цієї умови можна побудувати згущення тільки з кусково-лінійним законом зміни кутів суміжності.

Аналіз останніх досліджень. Згущена ДПК в точках зламу графіка кутів суміжності матиме перегини кривини. Це варто враховувати при формуванні динамічних обводів, зокрема при профілюванні кулачків. Відзначимо, що, як указувалося раніше, з кожним кроком згущення кутів суміжності зменшуються приблизно вдвічі порівняно з попередніми значеннями. Крім того, процес згущення дає змогу одержати значення кутів суміжності як завгодно близько (на певному кроці) до точки зламу графіка. Так, що описаний процес зменшення кутів суміжності в точках зламу графіка з одночасним наближенням точок згущення до розглянутого вузла дає змогу одержати як завгодно мале (по абсолютній величині) значення стрибка кривини ДПК у вузлах зламу, хоча наявність такого стрибка жадає від дослідника контролю його величини й порівняння зі значеннями, що допускають при цьому.

Основна частина. Розглянемо можливості побудови згущення ДПК із нелінійним законом зміни кутів суміжності. За основу візьмемо поліноміальний закон, коли точки, що відповідають на графіку значенням кутів суміжності після згущення, розташовуються на параболі заданого ступеня.

Для початку розглянемо дискретні подання поліноміальних кривих, найбільшою мірою задовольняльному поставленому завданню. Такі подання вперше розглянуті в роботах акад. В. М. Найдиша й розвинені в роботах його учнів стосовно до рішення розглянутих ними завдань. Продовжимо ці дослідження стосовно до наших завдань. Дискретне подання прямої лінії, тобто залежність між ординатами її точок на рівномірній сітці з довільним кроком, має вигляд:

$$y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} = 0, \quad \overline{i = 1; n}. \tag{1}$$

Звідси маємо

$$y_i - y_{i-1} = y_{i+1} - y_i = \Delta_1, \tag{2}$$

де Δ_1 – перша кінцева різниця, постійна для всіх точок прямолінійного ряду. Для спрощення подальшого розгляду віднесемо її значення до нульового (початкової) точкового ряду, тобто:

$$y_1 - y_0 = \Delta_1.$$

Тоді ординати інших точок ряду виражаються через значення y_0 Δ_l у такий спосіб:

$$\begin{array}{l} y_1 = y_0 + \Delta_1 \\ y_2 = y_1 + \Delta_1 = y_0 + 2\Delta_1 \\ y_3 = y_0 + 3\Delta_1 \\ \hline y_k = y_0 + k\Delta_1 \end{array}. \tag{3}$$

Отриману (останню) рівність будемо використовувати надалі для розрахунку ординати довільної точки прямолінійного ряду.

Розглянемо 2-параболу. Її дискретне подання має вигляд

$$y_{i-1} - 3y_i + 3y_{i+1} - y_{i+2} = 0, \quad i = 1; n. \tag{4}$$

Звідси для $i = 1$ маємо

$$(y_0 - 2y_1 + y_2) = (y_1 - 2y_2 + y_3) = \Delta_2, \tag{5}$$

де Δ_2 – друга кінцева різниця для ординат y_0, y_1, y_2, віднесена до нульової точки.

Тоді

$$y_2 = y_0 + 2\Delta_1 + \Delta_2 \tag{6}$$

і далі, підставляючи (6) в (5) з огляду на (4), маємо:

$$\begin{array}{l} y_3 = y_0 + 3\Delta_1 + 3\Delta_2 \\ y_4 = y_0 + 4\Delta_1 + 6\Delta_2 \\ \hline y_k = y_0 + k\Delta_1 + C_k^2\Delta_2 \end{array}. \tag{7}$$

Для параболи 3-го порядку маємо:

$$y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2} = 0, \quad i = 2; n-2. \tag{8}$$

Провівши аналогічні підстанови раніше розглянутим викладенням, маємо:

$$\begin{array}{l} y_3 = y_0 + 3\Delta_1 + 3\Delta_2 + \Delta_3 \\ y_4 = y_0 + 4\Delta_1 + 6\Delta_2 + 4\Delta_3 \\ y_5 = y_0 + 5\Delta_1 + 10\Delta_2 + 10\Delta_3 \\ y_6 = y_0 + 6\Delta_1 + 15\Delta_2 + 20\Delta_3 \\ \hline y_k = y_0 + C_k^1\Delta_1 + C_k^2\Delta_2 + C_k^3\Delta_3 \end{array}. \tag{9}$$

Де Δ_3 – третя розділена різниця

$$\Delta_3 = -y_0 + 3y_1 - 3y_2 + y_3. \tag{10}$$

Аналогічно (9) для параболи 4-го порядку маємо

$$y_k = y_0 + C_k^1\Delta_1 + C_k^2\Delta_2 + C_k^3\Delta_3 + C_k^4\Delta_4, \tag{11}$$

де

$$\Delta_4 = y_0 - 4y_1 + 6y_2 - 4y_3 + y_4. \tag{12}$$

По суті, ми одержали дискретний аналог інтерполяційної формули Ньютона для обчислень ординат точок m-параболи на рівномірній сітці. Її достоїнство полягає в тому, що підвищення ступеня параболи не приводить до перерахунку точок на початку таблиці(y_0, y_1, …), тобто значення Δ_1, Δ_2, …, знайдені для параболи попереднього ступеня, залишаються незмінними.

Скористаємося формулами (2), (7) і (9) для формування згущеного графіка γ^0 кутів суміжності заданої ДПК, коли кути $\gamma_i^1, i = 1;n$ отримані з вихідних даних.

Розглянемо випадок прямолінійного розташування графіку γ_i^1 від N.

Запишемо основну тотожність для послідовного ряду точок

$$\begin{aligned}
&\gamma_{0,5}^1 + 2\gamma_1^1 + \gamma_{1,5}^1 = \gamma_1^0,\\
&\gamma_{1,5}^1 + 2\gamma_2^1 + \gamma_{2,5}^1 = \gamma_2^0,\\
&\gamma_{2,5}^1 + 2\gamma_3^1 + \gamma_{3,5}^1 = \gamma_3^0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\gamma_{i-0,5}^1 + 2\gamma_i^1 + \gamma_{i+0,5}^1 = \gamma_i^0.
\end{aligned} \tag{15}$$

Умова прямолінійного розташування точок $\gamma_{i-0,5}^1$, $i = \overline{i = 1;n}$ на підставі (3) має вигляд:

$$\begin{aligned}
&\gamma_1^1 = \gamma_{0,5}^1 + \Delta_1,\\
&\gamma_{1,5}^1 = \gamma_{0,5}^1 + 2\Delta_1,\\
&\gamma_2^1 = \gamma_{0,5}^1 + 3\Delta_1,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned} \tag{16}$$

Підставляючи (16) в (15), маємо:

$$\begin{aligned}
&\gamma_{0,5}^1 + \Delta_1 = \frac{1}{2}\gamma_1^0,\\
&\gamma_{0,5}^1 + 3\Delta_1 = \frac{1}{2}\gamma_2^0,\\
&\gamma_{0,5}^1 + 5\Delta_1 = \frac{1}{2}\gamma_3^0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\gamma_{0,5}^1 + (2k-1)\Delta_1 = \frac{1}{2}\gamma_k^0
\end{aligned}\ . \tag{17}$$

Крім $\gamma_{0,5}^1$ із кожної послідовної пари рівнянь (17) одержуємо значення Δ_1, що дає змогу побудувати прямолінійний ряд $\gamma_{i-0,5}^1$.

Воно дорівнює:

$$\gamma_{0,5}^1\Delta_1 = \frac{1}{4}\left(\gamma_2^0 - \gamma_1^0\right) = \frac{1}{4}\left(\gamma_3^0 - \gamma_2^0\right) = \frac{1}{4}\left(\gamma_4^0 - \gamma_3^0\right)\ldots. \tag{18}$$

При цьому $\gamma_{0,5}^1$ може бути визначене з кожного з рівнянь (17).

Очевидно, що $\Delta_1 = 0$ при рівності всіх кутів суміжності вихідної ДПК, тобто:

$$\gamma_1^0 = \gamma_2^0 = \gamma_3^0 = \ldots = \gamma_{n-1}^0. \tag{19}$$

На основі послідовної пари рівнянь (17) одержуємо умову для вихідних γ^0, що дасть змогу побудувати прямолінійний ряд точок кутів суміжності γ^1 згущеної ДПК.

Маємо:

$$\gamma_{i-1}^0 - 2\gamma_i^0 + \gamma_{i=1}^0 = 0, \ i = \overline{2; n-1}. \quad (20)$$

У такий спосіб ми одержали підтвердження раніше отриманого виводу про те, що умовою прямолінійного розташування значень кутів суміжності згущеної ДПК є прямолінійність розташування значень кутів суміжності вихідної ДПК.

Розглянемо можливість побудови точкового ряду значень $\gamma_{0,5}^1, i = \overline{1; n}$ для параболи другого порядку.

На підставі (7) маємо:

$$\begin{aligned} &\gamma_1^1 = \gamma_{0,5}^1 + \Delta_1, && \gamma_{1,5}^1 = \gamma_{0,5}^1 + 2\Delta_1 + \Delta_2, \\ &\gamma_2^1 = \gamma_{0,5}^1 + 3\Delta_1 + 3\Delta_2, && \gamma_{2,5}^1 = \gamma_{0,5}^1 + 4\Delta_1 + 6\Delta_2, \\ &\gamma_3^1 = \gamma_{0,5}^1 + 5\Delta_1 + 10\Delta_2, && \gamma_{3,5}^1 = \gamma_{0,5}^1 + 6\Delta_1 + 15\Delta_2, \end{aligned} \quad ((21)$$

Підставляючи (21) в (15), маємо

$$\begin{aligned} &\gamma_{0,5}^1 + \Delta_1 + \frac{1}{4}\Delta_2 = \frac{1}{2}\gamma_1^0, && \gamma_{0,5}^1 + 3\Delta_1 + \frac{13}{4}\Delta_2 = \frac{1}{2}\gamma_2^0, \\ &\gamma_{0,5}^1 + 5\Delta_1 + \frac{41}{4}\Delta_2 = \frac{1}{2}\gamma_3^0, && \gamma_{0,5}^1 + 7\Delta_1 + \frac{85}{4}\Delta_2 = \frac{1}{2}\gamma_4^0, \end{aligned} \quad (22)$$

Шуканий параболічний ряд значень кутів суміжності згущеної ДПК визначається трьома параметрами $\gamma_{0,5}^1$, Δ_1 і Δ_2. Їхні значення можна визначити з будь-якої трійки рівнянь (22). З першої трійки рівнянь маємо

$$\begin{aligned} \gamma_{0,5}^1 &= \frac{1}{32}\left(29\gamma_1^0 - 18\gamma_2^0 + 5\gamma_3^0\right), \\ \Delta_1 &= \frac{1}{16}\left(7\gamma_1^0 - 10\gamma_2^0 + 3\gamma_3^0\right), \\ \Delta_2 &= \frac{1}{32}\left(\gamma_1^0 - 2\gamma_2^0 + \gamma_3^0\right), \end{aligned} \quad (23)$$

З останньої рівності з (23) для послідовних трійок точок маємо:

$$\Delta_2 = \frac{1}{8}\left(\gamma_1^0 - 2\gamma_2^0 + \gamma_3^0\right) = \frac{1}{8}\left(\gamma_2^0 - 2\gamma_3^0 + \gamma_4^0\right),$$

Звідки:

$$\gamma_1^0 - 3\gamma_2^0 + 3\gamma_3^0 - \gamma_4^0 = 0, \quad (24)$$

Очевидно, що це співвідношення справедливо для будь-якої послідовної четвірки точок вихідної ДПК, тобто дійдемо висновку, що для побудови графіка кутів суміжності згущеної ДПК у вигляді параболи 2-го порядку необхідно, щоб значення кутів суміжності вихідної ДПК розташовувалися також на параболі 2-го порядку. Зворотне також справедливо.

Висновки. Майже нереально, щоб множина значень кутів суміжності γ_i^0 вихідної ДПК задовольняла співвідношенню 2-параболи:

$$\gamma_{i-1}^0 - 3\gamma_i^0 + 3\gamma_{i+1}^0 - \gamma_{i+2}^0 = 0, \quad i = \overline{2; n-3}. \quad (25)$$

Однак отримані вище співвідношення між параметрами дають змогу здійснити кускове моделювання, коли значення кутів суміжності задовольняють співвідношення (25) для трьох послідовних вузлів (і точок згущення між ними) вихідної ДПК, остання вузлова точка є точкою стику (злому графіка) і початковою точкою наступної трійки вузлових точок. Інакше кажучи, здійснюється кусково-параболічне моделювання графіка кутів суміжності γ^1.

Список використаних джерел

1. Щербина В. М. Особливості визначення початкових умов при згущенні спіралеподібних дискретно поданих кривих. Прикл. геом. та інж. графіка. Праці ТДАТА. Вип. 4, Т15 Мелітополь : ТДАТА, 2002. С. 97–105.
2. Михайленко О. Ю., Антонова Г. В. Технологія формоутворення елементів каркасу динамічної поверхні. *Науковий вісник ТДАТУ*. 2022. Вип. 12, том 2. № 26.
3. Мацулевич О. Є. Апроксимація дискретно представлених кривих у полярній системі координат за критерієм найменших граничних відхилень : автореф. дис... канд. техн. наук. Мелітополь, ТДАТУ, 2003. 21 с.
4. Мацулевич О. Є., Найдиш А. В. Моделювання спіралеподібних ДПК у полярній системі координат на основі кутів нахилу ланок СЛЛ. *Прикл. геом. та інж. графіка: Праці ТДАТА. Вип. 4. Т. 16*. Мелітополь : ТДАТА, 2002. С. 31–35.
5. Найдиш В. М., Щербина В. М. Неперервна інтерполяція спіралеподібних ДПК спеціальною функцією. *Праці Таврійська державна агротехнічна академія*. Мелітополь, 2003. Вип. 4, т. 19. С. 3–6.
6. Найдиш В. М., Щербина В. М. Згущення однозначних дискретно представлених кривих. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. Київ, 2003. Вип. 27. С. 22–27.
7. Найдиш В. М., Щербина В. М. Формування обводів другого порядку гладкості на основі спеціальної функції. *Сучасні проблеми геометричного моделювання: матеріали Міжнар. наук.-практ. конф*. Львів, 2003. С. 83–85.
8. Alrefo I. F., Matsulevych O.,Vershkov O., Halko S., Suprun, O., Miroshnyk, O. Designing the working surfaces of rotary planetary mechanisms. Naukovyi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universytetu, 2023. 4, 82–88. https:// doi.org/10.33271/nvngu/2023-4/082
9. Y. Havrylenko J. I. Cortez Y. Kholodniak G. T. Garcia. Modelling of surfaces of engineering products on the basis of array of points Tehnički vjesnik 27, 6(2020), 2034–2043. https://doi.org/10.17559/TV-20190720081227
10. Havrylenko Y. Kholodniak Y. Formation of geometric model of the impeller of the turbocharger. Proceedings of the Tavria State Agrotechnological University, 2014. 14, 48–53.
11. Havrylenko Y., Kholodniak Y., Halko S., Vershkov O., Miroshnyk O., Suprun O., Dereza O., Shshur T., Śrutek. M. Representation of a monotone curve by a contour with regular change in curvature. Entropy, 2021. 23(7), 923, 1–14. https://doi.org/10.3390/e23070923 Праці ТДАТУ Випуск 25. Том 2 110 Proceedings TSATU. 2025. 25.
12. Havrylenko Y., Kholodniak Y., Halko S., Vershkov O., Bondarenko L., Suprun, O., Miroshnyk, O., Shshur, T., Śrutek, M., & Gackowska M. (2021). Interpolation with specified error of a point series belonging to a monotone curve. Entropy, 23(5), 493, 1–13. https://doi.org/10.3390/e23050493
13. Холодняк Ю. В., Гавриленко Є. А. Розв'язання позиційних задач при моделюванні монотонних кривих ліній. Сучасні проблеми моделювання. 2022. Вип. 24. С. 173–181.
14. Холодняк Ю. В., Гавриленко Е. А. Моделирование каркаса динамических поверхностей. Інноваційні технології в агропромисловому комплексі : матеріали II всеукраїн. наук.-практ. Інтернет-конференції. Мелітополь : ТДАТУ, 2021. С. 21–24.
15. Холодняк Ю. В., Гавриленко Є. А. Моделювання кривих ліній із заданою точністю. Інноваційні технології в агропромисловому комплексі : матеріали II всеукраїн. наук.-практ. Інтернет-конференції. Мелітополь : ТДАТУ, 2021. С. 28–31.
16. Мацулевич О. Є., Щербина В. М. Використання пакету прикладних програм NETCRACKER. Фундаментальна підготовка фахівців у природничо-математичній, технічній, агротехнологічній та економічній галузях : матеріали Всеукраїнської наук.-практ. конференції з міжнар. участю, м. Мелітополь, присвяченої 85-річчю кафедри вищої математики і фізики ТДАТУ, 11–13 вересня 2017 р. Мелітополь, 2017. С. 107–108.

Стаття надійшла до редакції 19.10.2025
Стаття прийнята 05.11.2025
Статтю опубліковано 22.12.2025

O. Matsulevych, O. Mykhaylenko, M. Suprun
Dmytro Motornyi Tavria State Agrotechnological University

DISCRETE INTERPOLATION OF SPIRAL-LIKE DISCREETLY REPRESENTED CURVES BASED ON A NONLINEAR LAW OF CHANGE OF ADJACENCY ANGLES

Summary

Experimental scientific research, as well as solving practical problems of modeling various types of channel surfaces of internal combustion engines and their flat cross-sections, pose many requirements. The geometric model and calculation algorithms must be simple, taking into account an arbitrary number of specified conditions, and ensuring the possibility of local changes in the shape of a curved line or surface without oscillation.

Existing and known methods are not able to fully meet these requirements. The problem can be solved within the framework of discrete geometric modeling (DGM). Solving these problems using discrete geometric modeling, one of the directions of which is discrete interpolation (condensation). Known DGM methods allow all of the above problems to be solved, with the exception of ambiguous curves, for which the appropriate methods have not yet been developed.

The research focuses on the problem of interpolation of discretely represented curves (DRC), in particular spirals and closed contours. A key element of the proposed approach is the analysis of the dynamics of angle changes between adjacent segments of a broken DPC line, which serves as the basis for forming the necessary set of angles for curve condensation.

A nonlinear formula is presented for changing the angles of adjacency during the condensation of spiral-shaped DPCs, which follows from the confirmed identity linking the angles before and after the condensation process. Various difference algorithms have been developed by imposing additional conditions on the ratio of angles. These algorithms guarantee excellent calculation accuracy and completely eliminate oscillations of the condensed contour. In addition, a condensation method based on geometric dependencies between contiguity angles has been developed and theoretically confirmed. The advantage of this method is its uniform efficiency on both convex segments and transition zones with the ability to track intersection points.

The practical significance of the results obtained in this work lies in improving the accuracy of modeling and reducing time and material costs by obtaining more sophisticated models. The proposed methods are intuitive and allow designers to achieve the desired result more quickly by correcting the shape.

Condensation based on the proposed nonlinear law of change in adjacency angles when solving difference schemes obtained by imposing certain relationships between adjacency angles allows for a wide variety of solutions, among which the optimal one can be selected or constructed according to a specific criterion.

***Keywords*:** accompanying broken line, angle of adjacency, terminal difference, spiral-shaped discretely represented curve.