

УДК 517.929

Олег Перегуда, кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри загальної математики,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
м. Київ, Україна

Василь Кравець, кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри вищої математики і фізики,
Таврійський державний агротехнологічний університет
імені Дмитра Моторного, м. Запоріжжя, Україна

ПРО ЗАДАЧУ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДЛЯ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У НЕСКІНЧЕННОВИМІРНИХ ПРОСТОРАХ

Анотація. Вивчається задача оптимального керування функціонально-диференціальним рівнянням параболічного типу в банаховому просторі, шляхом його заміни апроксимаційною системою параболічних рівнянь без запізнення.

Ключові слова: напівгрупа, слабка збіжність, мінімізатор, м'який розв'язок, оптимальне керування, апроксимаційна система.

Abstract. The problem of optimal control for a functional-differential equation of parabolic type in a Banach space is studied by replacing it with an approximating system of parabolic equations without delay.

Keywords: semigroup, weak convergence, minimizer, mild solution, optimal control, approximating system.

Розглядається задача оптимального керування для нескінченновимірного функціонально-диференціального рівняння в банаховому просторі:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + f_1(t, x(t), x(t-h)) + f_2(t, x(t), x(t-h))u, & t \in [0, T] \\ x(t) = \varphi(t), & t \in [-h, 0] \end{cases} \quad (1)$$

з критерієм якості

$$J[u] = \int_0^T G(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \inf. \quad (2)$$

Тут X – банахів простір з відповідною нормою $\|\cdot\|$, $A : X \rightarrow X$ лінійний, необмежений, замкнутий оператор і $D(A)$ його область значень, щільна в X , $h > 0$ – величина запізнення.

Нехай $L(X, X)$ - простір лінійних обмежених операторів, що діють з X в X . Вважаємо, що A є генератором C_0 напівгрупи $S(t) = e^{tA}$, $t \geq 0$ обмежених операторів.

Стосовно задачі (1)-(2) припускається виконання наступних умов:

A1) напівгрупа $S(t)$ є компактною при $t > 0$;

A2) $f_1 : [0, T] \times X \times X \rightarrow X$ та $f_2 : [0, T] \times X \times X \rightarrow L(X, X)$ є неперервні за сукупністю змінних;

A3) існує $K > 0$: $\|f_1(t, x, y)\| + \|f_2(t, x, y)\| \leq K(1 + \|x\| + \|y\|)$, для довільних t, x, y з області визначення;

A4) існує $K > 0$:

$$\begin{aligned} & \|f_1(t, x_1, y_1) - f_1(t, x_2, y_2)\| + \|f_1(t, x_1, y_1) - f_1(t, x_2, y_2)\| \\ & \leq K(1 + \|x_1 - x_2\| + \|y_1 - y_2\|), \end{aligned}$$

для $t \in [0, T]$, x_1, x_2, y_1, y_2 з області визначення;

A5) допустимі керування $u \in L^p(0, T; X)$ ($p > 1$) і $u(t) \in F$ м.с. $t \in (0, T)$, де F - опукла і замкнена множина в X ;

A6) $G : [0, T] \times X \times X \rightarrow [0, \infty)$ неперервна за сукупністю змінних і опукла по u при фіксованих x, t ;

A7) існують $C_0 > 0$, $C > 0$, $\nu > 0$:

$$\begin{aligned} & |G(t, x, u) - G(t, x_1, u)| \leq C_0(1 + \|x\|^\nu + \|x_1\|^\nu + \|u\|^p); \\ & G(t, x, u) \geq C\|u\|^p; \end{aligned}$$

A8) похідна Фреше L_u неперервна за сукупністю змінних і існують сталі $C_1 > 0$, $\alpha > 0$:

$$\|L_u(t, x, u)\|_* \leq C_1(1 + \|x\|^\alpha + \|u\|^{p-1}),$$

де $\|\cdot\|_*$ - норма в спряженому просторі X^* .

Розв'язок задачі (1) розуміємо у м'якому сенсі.

Задачі (1)-(2) ставиться у відповідність задача оптимального керування (3)-(4) для спеціально побудованої системи рівнянь без запізнення (3), яка називається апроксимаційною.

$$\begin{cases} \frac{dz_0(t)}{dt} = Az_0 + f_1(t, z_0(t), z_m(t)) + f_2(t, z_0(t), z_m(t))u(t), \\ \frac{dz_j(t)}{dt} = \frac{m}{h} (z_{j-1}(t) - z_j(t)), \quad t \in [0, T] \\ z_j(0) = \varphi(-\frac{h}{m}j), \quad j = \overline{0, m} \end{cases} \quad (3)$$

з відповідним критерієм якості

$$J_m[u] = \int_0^T G(t, z_0(t), u(t)) \rightarrow \inf. \quad (4)$$

Позначимо через $J^* = \inf_{u \in U} J[u]$, $J_m^* = \inf_{u \in U} J_m[u]$.

Має місце наступна теорема.

Теорема. Нехай виконуються умови A1)-A9). Тоді задачі (1)-(2) і (3)-(4) мають розв'язки $(x^*(t), u^*(t))$ і $(z_{0m}^*(t), u_m^*(t))$ відповідно. При цьому

$$1) \quad J_m^* \rightarrow J^*, \quad m \rightarrow \infty; \quad (5)$$

2) для будь-якого $\eta > 0$ існує m_0 таке, що для $m > m_0$ маємо

$$|J^* - J[u^*]| < \eta; \quad (6)$$

3) існує послідовність $m_k \rightarrow \infty, \quad k \rightarrow \infty$, така, що

$$z_{0m_k}^*(t) \rightarrow x^*(t) \quad \text{в } C([0, T]; X), \quad (7)$$

$$u_m^*(t) \rightarrow u^*(t) \quad \text{слабко в } L^p(0, T).$$

Якщо при цьому задача (1)-(2) має єдиний розв'язок, то збіжності (7) мають місце для всіх $m \rightarrow \infty$.

Список використаних джерел

1. Henry D., Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1981. 375 p.
2. Matvii O. V., Cherevko I. M. . On approximation of systems with delay and their Stability. *Nonlinear Oscillations*. 2004. V. 7(2). P. 207-215p.
3. Pazy A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Functional Differential Equations, Springer-Verlag, New York, 1983. 288 p.