

DOI <https://doi.org/10.32782/1994-4691-2025-2-76-3>

УДК 621.22:621.694.3

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТРАЄКТОРІЇ РУХУ ТВЕРДИХ ЧАСТИНОК У ВИХРОВИХ КАМЕРАХ

MATHEMATICAL MODELLING OF THE MOTION TRAJECTORY OF SOLID PARTICLES IN VORTEX CHAMBERS

А. С. Роговий^{1*}, д-р техн. наук, професор

ORCID: 0000-0002-6057-4845

Є. І. Тімченко¹, аспірант

ORCID: 0009-0008-8654-627X

Д. Р. Дьомін¹, аспірант

ORCID: 0009-0003-0314-1191

Є. М. Цента¹, канд. техн. наук

ORCID: 0000-0002-2607-2294

¹ Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»,*e-mail: Andrii.Rogovyi@khp.edu.ua

Анотація. Метою роботи є розробка аналітичної моделі для визначення траєкторії руху твердої частинки у вихровій камері газового середовища з урахуванням сил лобового опору та градієнта тиску. Наукова новизна полягає у використанні аналітичного підходу для потенційного руху газу, що дозволяє оцінити вплив розміру та густини частинок на їх динаміку без значних обчислювальних витрат. Практична цінність дослідження полягає у можливості застосування отриманих результатів для оптимізації конструкцій вихрових клапанів, вихорокамерних нагнітачів у системах транспортування газових середовищ із твердими вclusions. Основні результати показують, що траєкторії частинок мають спіралеподібний характер, а час перебування залежить від їх розміру та густини; неврахування сили тиску може призвести до похибки до 60 %. Врахування градієнта тиску для дрібних частинок та перспективність аналітичного моделювання як бази для подальших досліджень підтверджується результатами моделювання траєкторій.

Ключові слова: вихровий клапан; частинка, аналітичне моделювання, градієнт тиску, двофазний потік, газове середовище, вихорокамерний нагнітач.

Постановка проблеми

У сучасних системах транспортування газових і газопилових середовищ проблема надійності та довговічності запірної арматури залишається однією з ключових [1]. Особливо гостро вона проявляється при роботі з двофазними потоками, що містять тверді абразивні частинки [2]. Традиційні механічні засоби управління швидко виходять з ладу через інтенсивний знос контактних поверхонь, що призводить до значних економічних втрат і технологічних ризиків [3]. Одним із перспективних напрямів вирішення цієї проблеми є застосування елементів струминної мікротехніки [4], зокрема вихрових клапанів [5], які позбавлені багатьох недоліків механічних систем. Проте їх робота в умовах двофазних середовищ досі недостатньо досліджена, що обмежує можливості широкого впровадження.

Особливістю течії у вихрових камерах є наявність значного градієнта тиску по радіусу [6], який суттєво впливає на траєкторію руху твердих частинок та час їх перебування в камері. Від точності розрахунку цих параметрів залежить ефективність роботи вихрових клапанів, а також їх ресурс.

Аналіз останніх досліджень

Моделювання траєкторій руху твердих частинок у вихрових камерах є ключовим напрямом для оптимізації роботи апаратів у пневмотранспорті, сепараторах та енергетичних системах [7-9]. Сучасні дослідження демонструють перехід від

спрощених аналітичних моделей до високоточних чисельних методів, що враховують складну взаємодію фаз, турбулентність та градієнти тиску.

В роботі [10] використано томографічну PTV для валідації CFD-симуляцій у каналах зі штучно створеним закручуванням, що дозволило оцінити точність IDDES-моделі.

Дослідження Liu [11] на основі моделювання Рейнольдсових напруг показало, що масове навантаження та розмір частинок суттєво змінюють анізотропію потоку та структуру вихору. Сучасні підходи також включають гібридні методи: Wang [12] запропонував Vortex Particle Flow Map, що поєднує Ейлерову та Лагранжеву репрезентації для точного відтворення вихрової структури та траєкторій частинок.

Важливим напрямом є врахування градієнта тиску. Дослідження [13] показало переваги LES над RANS для моделювання двофазних закручених потоків у камерах з коаксіальними струменями. Останні роботи з прямого чисельного моделювання [14] демонструють можливість повного розв'язання руху частинок з урахуванням їх взаємодії та впливу на турбулентність.

Попри значний прогрес у застосуванні обчислювальної гідродинаміки (CFD-Computational Fluid Dynamics) та гібридних методів, аналітичні моделі залишаються важливими для отримання базових залежностей і швидкої оцінки впливу ключових параметрів [15, 16]. Саме тому в даній роботі запропоновано підхід, що ґрунтується на аналітичному розв'язанні для потенційного руху газу [17] у вихровій камері, що дозволяє дослідити траєкторії частинок у центральній зоні з мінімальними обчислювальними витратами [18].

Метою даної роботи є побудова математичної моделі руху ізольованої твердої частинки в зоні потенційного течії вихрової камери та аналіз впливу основних факторів (розміру, густини частинок і градієнта тиску) на їх траєкторію. Результати дослідження дозволяють сформулювати науково обґрунтовані рекомендації для проектування вихрових елементів у системах транспортування газових середовищ із твердими включеннями.

Методологія дослідження

Під час моделювання руху твердої частинки у вихровій камері було використано метод накладання руху ізольованої твердої частинки на рух газу. Для моделювання руху газу застосовано метод розбиття вихрової камери на чотири області: область змішування живильного та керуючого потоків, центральну область, область пограничних шарів на торцевих кришках та область витікання [19].

Припускаючи, що тверді частинки є ідеальними сферами, а їхня концентрація достатньо мала, щоб можна було знехтувати взаємним впливом [20], вважаючи, що вісь клапана розташована вертикально (рис. 1), а також, що розміри частинок досить великі, щоб можна було ігнорувати вплив турбулентних пульсацій на траєкторію, можна скласти математичну модель поведінки твердої частинки у вихровій камері.

Рух частинки масою M та радіусом R_c у вихровій камері в загальному вигляді описується рівнянням:

$$M \frac{d\bar{V}}{dt} = \bar{F}_{z0} + \bar{G}, \quad (1)$$

де \bar{F}_{z0} – головний вектор поверхневої гідродинамічної сили дії потоку на частинку, який зручно представити через суму складових (рис. 1): силу лобового опору \bar{F}_c та силу тиску рідини на частинку \bar{F}_r , яка виникає через градієнт тиску вздовж радіусу вихрової камери R , \bar{G} – головний вектор масових сил.

$$\bar{F}_{z0} = \bar{F}_c + \bar{F}_r, \quad (2)$$

$$F_r = \pi \cdot \rho \cdot V_R^2 \cdot R^2 \frac{R_c^2}{r^2}, \quad (3)$$

де V_R – тангенціальна складова швидкості газу на периферії вихрової камери; r – відстань від частинки до осі вихрової камери.

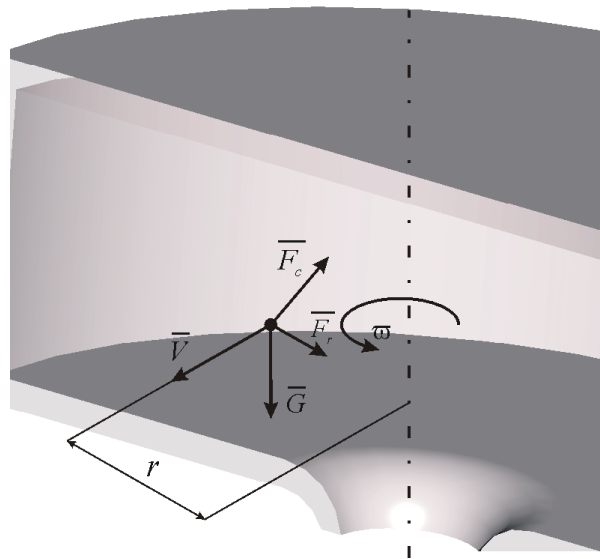


Рис. 1. Сили, що діють на тверду частинку у центральній частині камери

У приосьовій області, де виконується «закон твердого тіла», рух не розраховувався, оскільки за результатами обчислень вона становить приблизно 1,6 % від радіуса вихрової камери.

Після підстановки значень сил, що приходяться на одиницю маси та тотожних перетворень отримуємо математичну модель траєкторії руху твердої частинки в центральній області течії у безрозмірному вигляді:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \bar{x}}{d\bar{t}^2} = K_1 \left(\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} + K_2 \frac{\bar{y}}{x^2 + y^2} + K_3 \frac{\bar{x}}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right); \\ \frac{d^2 \bar{y}}{d\bar{t}^2} = K_1 \left(\frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} - K_2 \frac{\bar{x}}{x^2 + y^2} + K_3 \frac{\bar{y}}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right); \\ \frac{d^2 \bar{z}}{d\bar{t}^2} = K_1 \frac{d\bar{z}}{d\bar{t}} - \frac{gT_o^2}{R}. \end{cases} \quad (4)$$

$$K_1 = -4,5 \frac{\rho}{\rho_m} \frac{v_c \cdot T_o}{R_c^2}; \quad K_2 = \frac{T_o \cdot V_R}{R}; \quad K_3 = \frac{1}{6} \frac{V_R^2 \cdot T_o \cdot R_c}{R \cdot v_c}; \quad \bar{x} = \frac{x}{R}; \quad \bar{y} = \frac{y}{R}; \quad \bar{z} = \frac{z}{R};$$

де v_c – кінематична в'язкість газу; ρ – густина газу; ρ_T – густина твердої частинки; R – радіус вихрової камери;

Початкові умови для розрахунку:

$$\bar{t} = 0; \quad \bar{x}_0 = \bar{R}_0; \quad \bar{y}_0 = 0; \quad \left(\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} \right)_{i=0} = 0; \quad \left(\frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} \right)_{i=0} = \frac{1}{\bar{x}_0}. \quad (5)$$

Розрахунки проведено у програмному комплексі Matlab за методом Рунге-Кутта четвертого та п'ятого порядків [21].

У розрахунках прийнято $\tau = 2,397 \cdot 10^{-3} \text{ с}$ ($\tau = \frac{2}{9} R_c^2 \frac{\rho_m}{\rho} \frac{1}{v_z}$ – час релаксації частинки [22]) ($d = 10 \text{ мкм}$), $\tau = 4,698 \cdot 10^{-3} \text{ с}$ ($d = 14 \text{ мкм}$), $\tau = 9,587 \cdot 10^{-3} \text{ с}$ ($d = 20 \text{ мкм}$), $\tau = 21,571 \cdot 10^{-3} \text{ с}$ ($d = 30 \text{ мкм}$), $\tau = 239,7 \cdot 10^{-3} \text{ с}$ ($d = 100 \text{ мкм}$). Розрахунок проведено для значення $R_0 = 0,01 \text{ м}$. Середня швидкість входу повітря $V = 100 \text{ м/с}$; $V_R R = 1 \text{ м}^2/\text{с}$. Густина твердої частинки $\rho_T = 7800 \text{ кг/м}^3$, газу – $\rho = 1,28 \text{ кг/м}^3$. Для кожного моменту часу t визначалися координати $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, швидкості dx/dt , dy/dt та dz/dt , кут φ . Траєкторії побудовано у безрозмірних координатах $\bar{r} = r/R$. Результати розрахунку наведено на рис. 2.

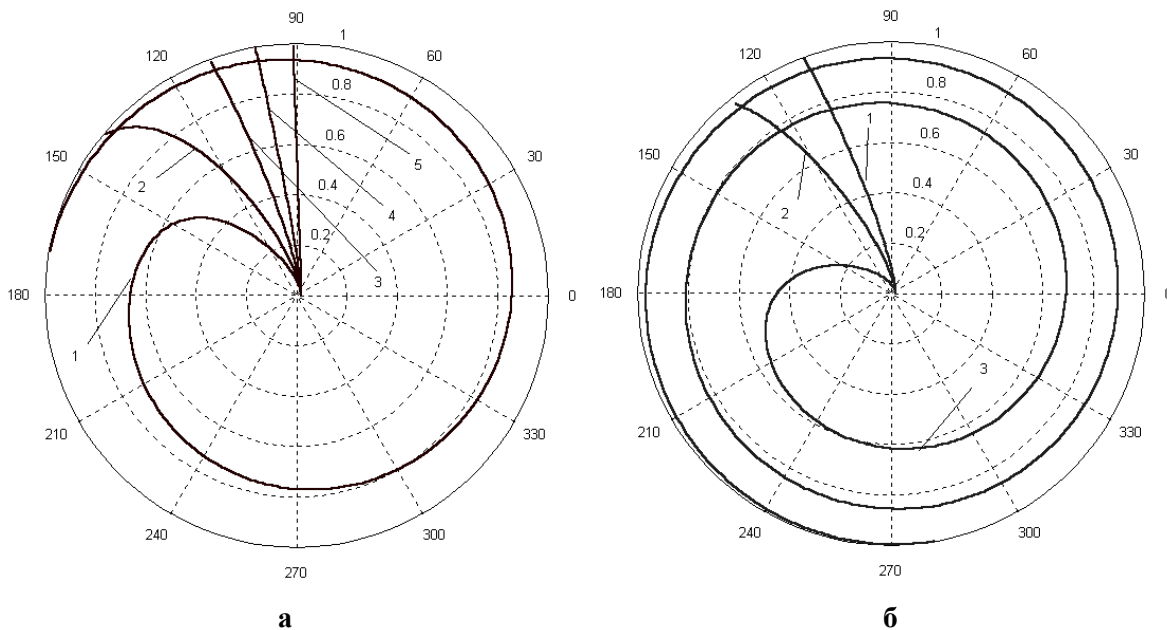


Рис. 2. Траєкторії сферичної твердої частинки в обертовому потоці вихрової камери:
 а – різного розміру (густина 7800 кг/м^3): 1 – діаметр 10 мкм ; 2 – 14 мкм ; 3 – 20 мкм ; 4 – 30 мкм ; 5 – 100 мкм ; б – різної густини (діаметр 20 мкм): 1 – густина 7800 кг/м^3 ; 2 – 4800 кг/м^3 ; 3 – 1800 кг/м^3

Результати дослідження

У розрахунках було визначено вплив градієнта тиску на час перебування твердої частинки в центральній області та у вихровому клапані (рис. 3). Розрахунок проводився як з урахуванням, так і без урахування градієнта тиску.

Як видно з рис. 2, траєкторії частинок мають форму спіралей із послідовно зменшуваними приростами полярного радіуса, тобто асимптотично наближаються до кола дуже великого радіуса. Як і очікувалося, чим більша частинка, тим менш викривлена її траєкторія і тим менше часу потрібно, щоб досягти стінок камери; аналогічно, чим більша густина частинки, тим менш викривлена її траєкторія і тим швидше вона досягає периферії камери.

Апроксимаційна залежність часу перебування твердої частинки в центральній зоні від густини та крупності частинки:

$$t = 1,208 \cdot 10^{11} \cdot \rho_T^{-2,44} \cdot R_c^{-3,51} \quad (6)$$

Як видно з рис. 4, неврахування сили тиску газу на криволінійну поверхню (сферу) може призвести до значної похибки в розрахунках, і лише для частинок із радіусом

понад 20 мкм цю силу можна ігнорувати. Однак величина похибки залежить не лише від радіуса частинки, а й від багатьох інших параметрів, таких як геометричні розміри камери, тиск у камері тощо. Наявність мінімуму на рис. 5 пояснюється тим, що за обраних параметрів розрахунку частинка проходить рівно один оберт, і в цьому випадку похибка є найменшою.

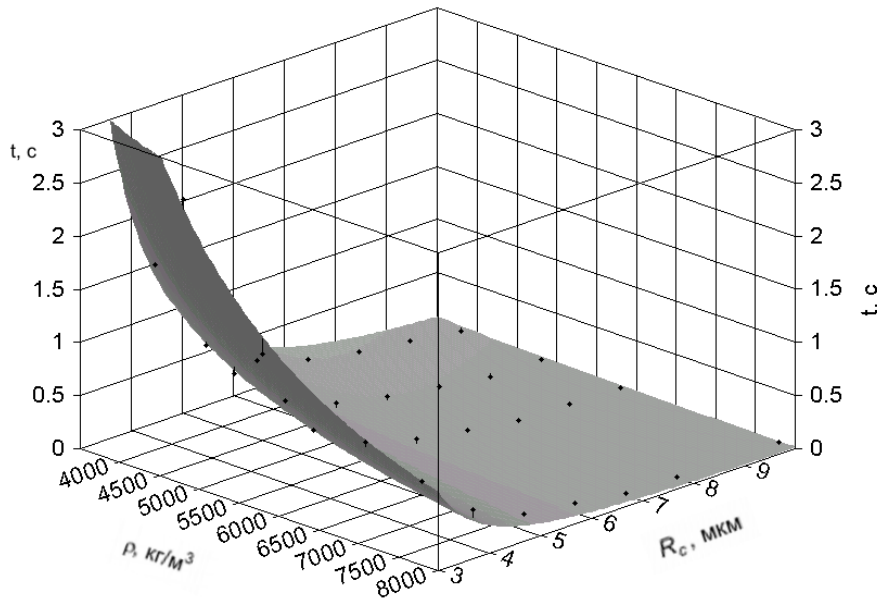


Рис. 3. Час перебування твердої частинки в центральній зоні вихрової камери

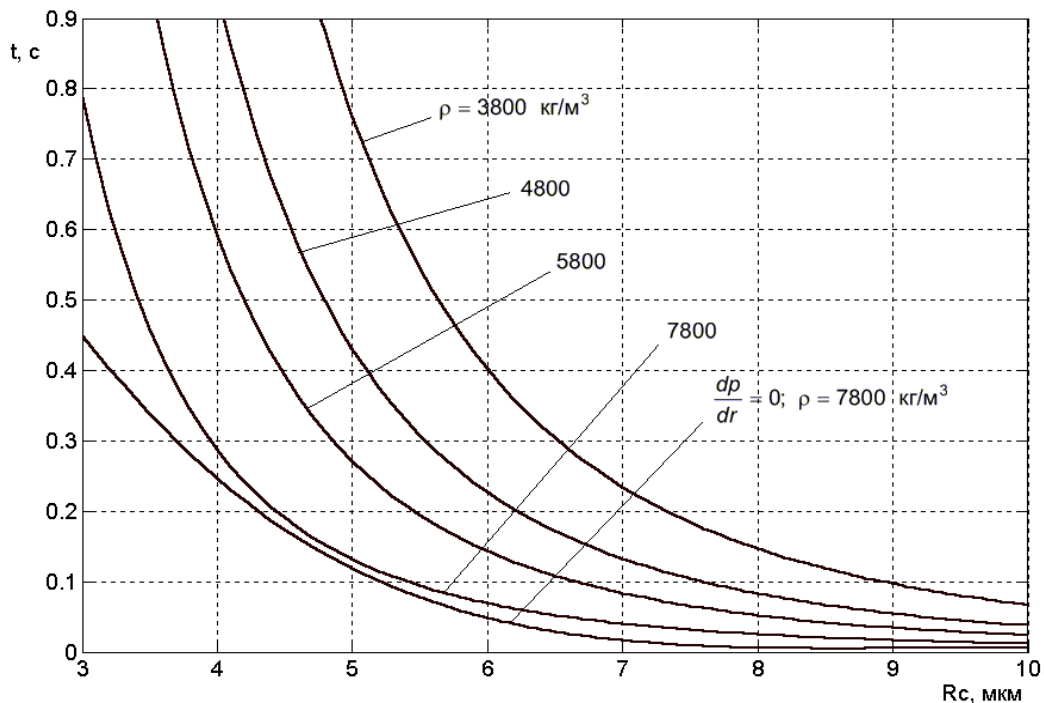


Рис. 4. Час перебування частинки в камері з урахуванням і без урахування впливу градієнта тиску

Отримані результати підтверджують суттєвий вплив градієнта тиску на траєкторію та час перебування частинок у вихровій камері.

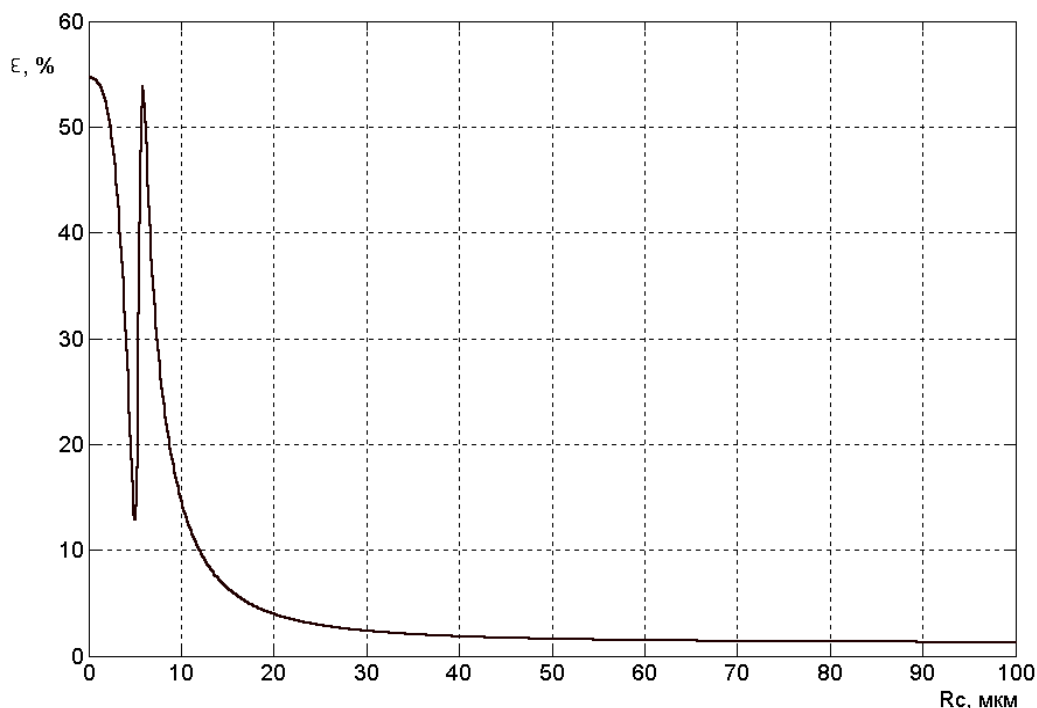


Рис. 5. Залежність похибки розрахунку часу перебування частинки в камері

Виявлено, що для дрібних частинок похибка розрахунку без урахування цієї сили може перевищувати 50 %, що узгоджується з даними сучасних CFD-досліджень. Аналітичний підхід, застосований у роботі, забезпечує швидку оцінку ключових параметрів і може слугувати основою для подальшої валідації чисельними методами.

Висновки

У роботі розроблено аналітичну модель руху твердої частинки у вихровій камері газового середовища з урахуванням сил лобового опору та градієнта тиску. Розрахунки показали, що траєкторії частинок мають спіралеподібний характер і асимптотично наближаються до периферії камери. Встановлено, що розмір і густина частинок суттєво впливають на час їх перебування: більші та щільніші частинки швидше досягають стінок. Неврахування сили тиску може призвести до похибки до 60 %, особливо для частинок радіусом менше 20 мкм. Отримані результати узгоджуються з сучасними тенденціями моделювання двофазних потоків і можуть бути використані для оптимізації конструкцій вихрових клапанів, вихорокамерних нагнітачів та підвищення їх надійності в системах транспортування газових середовищ із твердими включеннями.

Список використаних джерел.

1. Роговий А.С. Концепція створення вихорокамерних нагнітачів та принципи побудови систем на їх основі. *Вісник Східноукраїнського національного університету імені Володимира Даля*, 2017. № 3. С. 168–173.
2. Semenenko Y., Simes V., Khaminich O., Blyuss B., Blyuss O. Evaluation of efficiency and monitoring of the hydraulic transport complex operation modes using a mathematical model of the pulp formation unit. *Геотехнічна механіка*, 2024. 170, 28–40. <https://doi.org/10.15407/geotm2024.170.028>
3. Andrenko P., Lebedev A. Labyrinth screw pump theory. *Motrol. Motoryzacja i Energetyka Rolnictwa*, 2014. 16(6).
4. Syomin D., Rogovyi A. Mathematical simulation of gas bubble moving in central region of the short vortex chamber. *Teka Komisji Motoryzacji i Energetyki Rolnictwa*, 2012. 12(4).
5. Gutfreund A., Matsuki H., Plastovets V., Noah A., Gorzawski L., Fridman N., Anahory Y.

- Direct observation of a superconducting vortex diode. *Nature Communications*, 2023. 14(1). 1630. <https://doi.org/10.1038/s41467-023-37294-2>
6. Dixit D., Balapure K., Bhandari V. M. Enhanced disinfection efficiency using cu vortex diode for providing safe drinking water: Devising newer methodologies. *Environmental Quality Management*, 2024. 34(1). e22279. <https://doi.org/10.1002/tqem.22279>
 7. Wang R., Zhang Z., Yan X., Zhang H., Wang L. Hydrocyclone separation enhancement of fine particles based on interface control. *Minerals Engineering*, 2024. Vol. 209. 108628. <https://doi.org/10.1016/j.mineng.2024.108628>
 8. Gutierrez J. A., Narvaez J. A. G., Ceballos D. A. C., Chaves J. A. M. Development of a cyclone separator for particulate matter control in fique bag production: A case study at Empaques del Cauca SA. *Case Studies in Chemical and Environmental Engineering*, 2024. 10. 100951. <https://doi.org/10.1016/j.cscee.2024.100951>
 9. Gecim G., Erkoc E. Effect of the kinematic viscosity on liquid flow hydrodynamics in vortex mixers. *Chemical Engineering Research and Design*, 2024. 206. 54–61. <https://doi.org/10.1016/j.cherd.2024.04.034>
 10. Boldt R., Hanson D. R., Jiang L., McClain S. T. Particle Tracking Velocimetry Measurements and Simulations of Internal Flow with Induced Swirl. *Fluids*, 2025. 10(12). 323. <https://doi.org/10.3390/fluids10120323>
 11. Liu Y., Liu J., Li G. Effect of secondary-air flow on cold swirling particle-laden turbulent flows in methane-central combustor. *Physics of Fluids*, 2025. 37(7). <https://doi.org/10.1063/5.0275704>
 12. Wang S., Zhou J., Feng F., Li Z., Sun Y., Chen D., Zhu B. Fluid Simulation on Vortex Particle Flow Maps. *ACM Transactions on Graphics*, 2025. 44. 1–24. <https://doi.org/10.1145/3731198>
 13. Apte S.V., Mahesh K., Moin P., Oefelein J.C. Large-eddy simulation of swirling particle-laden flows in a coaxial-jet combustor. *International Journal of Multiphase Flow*, 2003. 29(8). 1311–1331. [https://doi.org/10.1016/S0301-9322\(03\)00104-6](https://doi.org/10.1016/S0301-9322(03)00104-6)
 14. Yan J., Gui N., Xie G., Gao J. Direct numerical simulation of particle-laden swirling flows on turbulence modulation. *Mathematical Problems in Engineering*, 2014. 2014(1). 257837. <https://doi.org/10.1155/2014/257837>
 15. Brazhenko V., Cai J. C., Fang Y. Utilizing a transparent model of a semi-direct acting water solenoid valve to visualize diaphragm displacement and apply resulting data for CFD analysis. *Water*, 2024. 16 (23). 3385. <https://doi.org/10.3390/w16233385>
 16. Тиньянова І. І., Дранковський В. Е., Тиньянов О. Д., Савенков Д. А. Погодження елементів проточної частини високоефективної оборотної гідромашини. *Вісник НТУ "ХПІ"*, 2024. № 1. С. 38-43. <https://doi.org/10.20998/2411-3441.2024.1.05>
 17. Дранковський В. Е., Миронов К. А., Тиньянова І. І., Резва К. С., Крупа Є. С., Кухтенков Ю. М. Математичне моделювання робочого процесу гідромашин: монографія. Харків : НТУ «ХПІ», 2022. 406 с.
 18. Dehghani S. R., Saidi M. H., Mozafari A. A., Ghafourian A. Particle trajectory in a bidirectional vortex flow. *Particulate Science and Technology*, 2009. 27 (1). 16–34. <https://doi.org/10.1080/02726350802611366>
 19. Роговий А.С. Особливості режимів роботи вихорокамерних нагнітачів. *Вісник Харківського національного автомобільно-дорожнього університету*, 2016. (75). С. 120–128.
 20. Taborda M.A., Sommerfeld M. Effect of wall-collision models on the transport of rigid, elongated non-spherical particles in a turbulent channel flow using an Euler/Lagrange approach. *Computers & Fluids*, 2025. 106940. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2025.106940>
 21. Junior C. F. L., Silva G. S., Mendes P. S., Machado V. A. D. S., Ribeiro B. N. Implementation of numerical methods of Euler and Runge-Kutta through MATLAB software for the solution of ordinary differential equations dedicated to teaching. *Journal of Engineering Research and Application*, 2018. 2248–9622. <https://doi.org/10.9790/9622-0805022429>
 22. Роговий А. С. Удосконалювання енергетичних характеристик струминних нагнітачів: автореф. дис....канд. техн. наук : 05.05.17. Східноукраїнський національний ун-т ім. Володимира Даля. Луганськ, 2007. 20 с.

Стаття надійшла до редакції 09.10.2025

Стаття прийнята 15.10.2025

Статтю опубліковано 15.12.2025



MATHEMATICAL MODELLING OF THE MOTION TRAJECTORY OF SOLID PARTICLES IN VORTEX CHAMBERS

A. Rogovyi¹, Ye. Timchenko¹, D. Domin¹, Ye. Tsenta¹

¹ National Technical University Kharkiv Polytechnic Institute, Kharkiv, Ukraine

Summary

This paper presents an analytical approach to modeling the trajectory of solid particles in a vortex chamber operating within a gaseous medium. The primary objective is to develop a simplified yet accurate mathematical model that accounts for the main forces acting on a particle: drag and pressure gradient, while minimizing computational complexity compared to full-scale CFD simulations. The novelty of the study lies in applying potential flow theory to describe the gas motion and superimposing the particle's movement on this flow, enabling rapid evaluation of particle dynamics under varying conditions.

The methodology involves dividing the vortex chamber into four distinct regions: the mixing zone of supply and control flows, the central core, boundary layers on end walls, and the outlet region. The particle is assumed to be an ideal sphere with negligible concentration effects, and its trajectory is calculated using force balance equations solved by the Runge-Kutta method (4th-5th order) in MATLAB. Initial conditions include particle size, density, and inlet gas velocity, allowing parametric analysis of their influence on motion.

Results indicate that particle trajectories form spirals with progressively decreasing radial increments, asymptotically approaching the chamber periphery. Larger and denser particles exhibit less curvature and shorter residence times, while smaller particles remain longer in the core region. Neglecting the pressure force introduces significant errors up to 60% for particles smaller than 20 μm highlighting the necessity of considering radial pressure gradients in design calculations.

The practical significance of this research lies in its applicability to the optimization of vortex valves and flow control devices in pneumatic transport systems, particularly for gas-solid mixtures. The proposed analytical model provides a cost-effective tool for preliminary design and can serve as a foundation for further validation through advanced CFD techniques and experimental studies.

Keywords: vortex valve, particle, analytical modeling, pressure gradient, two-phase flow, gaseous medium, vortex chamber amplifier.