Василь Кравець, Наталя Сосницька

Застосування методу усереднення для дослідження коливних режимів функціонально-диференціальних рівнянь

Таврійський державний агротехнічний університет, м. Мелітополь, Україна
E-mail: v_i_kravets@ukr.net, nsosnickaya19@gmail.com

У роботі розглянуто багаточастотну систему диференціальних рівнянь із запізненням вигляду

$$\frac{dx}{d\tau} = \varepsilon a(x, x_\Delta, \varphi, \varphi_\Delta), \frac{d\varphi}{d\tau} = \omega(x) + \varepsilon b(x, x_\Delta, \varphi, \varphi_\Delta), \tag{1}$$

де x–n-мірний, а φ–m-мірний вектори, ε– малий параметр, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, $0 < \Delta$– стала, яка характеризує запізнення, $x_\Delta(t,\varepsilon) = x(t-\Delta,\varepsilon)$, $\varphi_\Delta(t,\varepsilon) = \varphi(t-\Delta,\varepsilon)$; вектор-функції $a(x, x_\Delta, \varphi, \varphi_\Delta)$, $b(x, x_\Delta, \varphi, \varphi_\Delta)$ і $\omega(x)$ визначені, достатньо гладкі і 2π-періодичні за змінними φ, φ_Δ в області $G = D \times R^m$, D–обмежена область в R^n. Багаточастотні системи звичайних диференціальних рівнянь досліджувались в [1, 2], випадок, коли $a = a_1(x, x_\Delta, \varphi) + a_2(x, x_\Delta, \varphi_\Delta)$ розглянутий в [3]. Відповідна системі (1) усереднена за швидкими змінними система набуває вигляду

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = \varepsilon a_0(\overline{x}), \frac{d\overline{\varphi}}{dt} = \omega(\overline{x}) + \varepsilon b_0(\overline{x}), \tag{2}$$

$$a_0(x) = \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \int\limits_0^{2\pi} a(x, x, \varphi, \psi) d\varphi d\psi.$$

Нехай праві частини системи (1) і (2) задовольняють умови:

1) частинні похідні вектор-функцій a і b за змінними φ, φ_Δ до порядку l, $l > 2m+1$, обмежені в області G;

2) вектор-функція ω обмежена разом із частинними похідними до другого порядку;

3) існує розв'язок усередненої системи (2), $\overline{x}(0) = x(0) = x_0$, який лежить в області D разом із деяким ρ-околом;

4) виконуються нерівності

$$\Big| \frac{\partial (k, \omega(x))}{\partial x}, a_0(x) \Big| \geq \sigma_1 > 0,$$

$$\sum_{\|k\| \geq 0} \Big| \frac{\partial a_k^{(i)}(x,x)}{\partial x_j} \Big| \leq \sigma_2; i,j = \overline{1,n}.$$

Тоді правильне наступне твердження.

Теорема 1 *Нехай система (1) при* $1 \le \|k\| \le N$ *має ізольовані резонанси і виконуються умови 1)–4). Тоді існує таке* $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0]$, *що при всіх* $t \in [0, \varepsilon^{-1}]$ *і* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$, *справджується нерівність;*

$$\|x(t,\varepsilon) - \overline{x}(\varepsilon t)\| \le c\varepsilon^{\frac{l-2m-1}{1+2(l-2m)}},$$

де $c > 0$ *і не залежить від* ε, $\overline{x}(\varepsilon t)$*– розв'язок усередненої системи,* $x(0,\varepsilon) = \overline{x}(0)$.

[1] Самойленко А.М., Петришин Р.І. *Математичні аспекти теорії нелінійних коливань.* – Київ: Наукова думка, 2004. – 474 с.

[2] Бигун Я.И., Фодчук В.И. *Применение метода усреднения для исследования одного класса многочастотных систем с запаздыванием* // Укр. мат. журнал – 1980. – **32**, №2. – С. 149–154.

[3] 3. Голец Б.И., Голец В.Л., Петришин Р.И. *Об усреднении в колебательных системах проходящих через резонанс* // Укр. мат. журнал – 1980. – **32**, №2. – С. 448–455.