

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ТАВРІЙСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ АГРОТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ДМИТРА МОТОРНОГО

Альона ДЯДЕНЧУК

МАТЕМАТИЧНІ ЗАДАЧІ В ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИЦІ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Запоріжжя – 2026

*Рекомендовано вченою радою Таврійського державного
агротехнологічного університету імені Дмитра Моторного
(Протокол №11 від 30.06.2026 р.)*

Рецензенти:

Савойський О.Ю. – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри енергетики та електротехнічних систем Сумського національного аграрного університету

Сімченко С.В. – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики, математичного моделювання та фізики Державного університету інформаційно-комунікаційних технологій

Вовк О.Ю. – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри електротехніки і електромеханіки імені професора В. В. Овчарова Таврійського державного агротехнологічного університету імені Дмитра Моторного

Д 99 Дяденчук А. Ф. Математичні задачі в електроенергетиці : навчальний посібник для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти. Запоріжжя, 2026. 217 с.

ISBN

Навчальний посібник підготовлено для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти зі спеціальності G3 «Електрична інженерія». Він має на меті сформулювати у здобувачів освіти фундаментальні знання з математичних методів, що застосовуються для аналізу, моделювання та оптимізації процесів в електроенергетиці. У посібнику послідовно викладено матеріал з основ математичного моделювання, оптимізаційних методів і програмування, матричних методів розрахунку електричних мереж, використання диференціальних рівнянь для опису перехідних процесів, а також ймовірнісних і статистичних підходів до оцінки надійності та ефективності роботи енергосистем. Викладений матеріал орієнтований як на аудиторне навчання, так і на самостійне опрацювання, і може бути корисним не лише здобувачам освіти, а й інженерам-практикам та молодим науковцям у галузі електроенергетики.

© Дяденчук А.Ф., 2026
© Таврійський державний
агротехнологічний університет
імені Дмитра Моторного, 2026

ЗМІСТ

ВСТУП	5
Тема 1 МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЯ В ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИЦІ	7
1.1. Основи математичного моделювання	7
1.1.1. Основні поняття, класифікація та властивості математичних моделей	7
1.1.2. Математичне моделювання	12
1.2. Оптимізація та математичне програмування в енергетиці	14
1.2.1. Задачі оптимізації, їх класифікація	14
1.2.2. Лінійне програмування	18
1.2.3. Методи розв'язування задач лінійного програмування	22
1.2.4. Застосування симплексного метода в галузі електроенергетики	27
1.2.5. Нелінійне програмування	34
1.2.6. Нелінійні оптимізаційні задачі в енергосистемах	37
Запитання для самоконтролю	42
Тема 2 МАТРИЧНІ МЕТОДИ В ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИЦІ	44
2.1. Введення в матричні методи	44
2.2. Методи розв'язування систем лінійних рівнянь (метод Крамера, метод оберненої матриці)	48
2.3. Використання матриць для аналізу систем електропостачання	52
2.3.1. Матричні способи подання графів електричних мереж	53
2.3.2. Розрахунок розгалужених кіл постійного струму (метод контурних струмів, метод вузлових потенціалів)	60
2.3.3. Аналіз мереж змінного струму	77
2.3.4. Однофазні електричні кола синусоїдального струму	81
Запитання для самоконтролю	94
Тема 3 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ В ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИЦІ	96
3.1. Основні теоретичні відомості про диференціальні рівняння	96
3.1.1. Диференціальні рівняння першого порядку	97
3.1.2. Методи розв'язання диференціальних рівнянь першого порядку	100
3.1.3. Диференціальні рівняння другого порядку	101
3.1.4. Диференціальні рівняння з частинними похідними	104
3.2. Застосування диференціальних рівнянь в задачах електроенергетики	108
3.2.1. Перехідні процеси у лінійних електричних колах	108
3.2.2. Перехідні процеси в електричних колах з послідовно з'єднаними резисторами і котушками	115

3.2.3. Перехідні процеси в колі з резисторами і конденсатором ...	117
3.2.4. Типові задачі застосування диференціальних рівнянь в електроенергетиці	119
3.2.5. Перехід від іменованих до відносних одиниць у розв'язанні диференціального рівняння	126
3.3. Чисельні методи розв'язування диференціальних рівнянь	126
3.4. Частотні властивості електричних кіл	132
Запитання для самоконтролю	138
Тема 4 ЙМОВІРНІСНІ МОДЕЛІ В ЗАДАЧАХ ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИКИ	139
4.1. Основні поняття теорії ймовірностей	139
4.2. Ймовірнісні моделі складних подій у роботі енергосистем	146
4.3. Випадкові величини. Закони розподілу випадкових величин	157
4.4. Оцінка ризиків в електроенергетиці (метод Монте-Карло)	169
4.4.1. Оцінка надійності електроенергетичної системи при невідомих ймовірностях безвідмовної роботи її елементів	171
4.4.2. Оцінка надійності системи при відомому законі розподілу безвідмовної роботи її елементів	173
4.5. Інтегральні характеристики режимів складних електричних мереж	175
4.5.1. Розрахунок інтегральних характеристик режимів із використанням комплексних випадкових величин	176
4.5.2. Розрахунок інтегральних характеристик дійсних і уявних складових параметрів режимів	177
4.5.3. Ймовірнісні характеристики модуля комплексної випадкової величини параметра режиму	179
Запитання для самоконтролю	181
Тема 5 СТАТИСТИЧНІ МЕТОДИ В ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИЦІ	183
5.1. Основні поняття математичної статистики	183
5.2. Числові характеристики вибірки. Розрахунок основних числових характеристик	186
5.3. Поняття та класифікація статистичних гіпотез	188
5.3.1. Поняття про статистичні гіпотези	188
5.3.2. Параметричні гіпотези	190
5.3.3. Непараметричні гіпотези	193
5.4. Зв'язок числових характеристик з теоретичними розподілами	195
5.5. Поняття взаємозв'язку. Лінійна кореляція і регресія	198
5.6. Застосування методів математичної статистики в енергетичних дослідженнях	204
Запитання для самоконтролю	213
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	214

ВСТУП

Дисципліна «Математичні задачі в електроенергетиці» є важливою складовою підготовки здобувачів вищої освіти спеціальності G3 «Електрична інженерія» (141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка») освітнього ступеня «Бакалавр». Вона формує базові знання та навички, необхідні для розв'язання широкого кола прикладних і теоретичних завдань, що виникають у процесі проектування, експлуатації та оптимізації роботи електроенергетичних систем.

Сучасна електроенергетика характеризується високим рівнем складності, багатфакторністю процесів та необхідністю прийняття рішень в умовах невизначеності. Ефективне функціонування енергосистем потребує глибокого розуміння математичних методів, які дозволяють описувати фізичні явища, моделювати режими роботи обладнання, прогнозувати поведінку системи та оцінювати її надійність. Саме тому математичний апарат є фундаментом інженерної діяльності у сфері енергетики. Від побудови математичних моделей і вибору оптимальних режимів роботи енергосистем до оцінки їхньої надійності та аналізу експериментальних даних – усі ці задачі потребують ґрунтовної математичної підготовки.

Метою даного навчального посібника є формування у здобувачів вищої освіти цілісного уявлення про математичні методи моделювання, аналізу, оптимізації та прогнозування процесів в електроенергетиці, а також розвиток умінь застосовувати ці методи у практичних розрахунках. Посібник охоплює ключові математичні розділи, що мають безпосереднє застосування в енергетичних дослідженнях, і демонструє їхню роль у розв'язанні інженерних задач.

У першій темі розглядаються основи математичного моделювання та оптимізації, включаючи класифікацію моделей, принципи побудови математичних описів енергетичних процесів, а також методи лінійного та нелінійного програмування, що застосовуються для оптимізації режимів роботи енергосистем.

Друга тема присвячена матричним методам, які є основою аналізу електричних мереж. Розглянуто способи подання електричних схем у вигляді матриць, методи розв'язування систем лінійних рівнянь, а також застосування матричного апарату для аналізу кіл постійного та змінного струму.

У третій темі подано теоретичні основи диференціальних рівнянь та методи їх розв'язування. Особливу увагу приділено моделюванню перехідних процесів у лінійних електричних колах, що є ключовим елементом аналізу динаміки енергетичних систем.

Четверта тема знайомить із ймовірнісними моделями, необхідними для оцінки надійності та ризиків у роботі енергосистем. Розглянуто основи теорії ймовірностей, моделі складних подій, метод Монте-Карло та підходи до оцінювання інтегральних характеристик режимів електричних мереж.

П'ята тема містить відомості з математичної статистики, що застосовуються для обробки експериментальних і виробничих даних. Наведено методи оцінювання числових характеристик вибірок, перевірки статистичних гіпотез, аналізу кореляційних зв'язків та побудови регресійних моделей.

Посібник побудовано таким чином, щоб забезпечити поступовий перехід від базових понять до складних прикладних задач. Такий підхід сприяє формуванню системного мислення, розвитку навичок математичного аналізу та здатності застосовувати теоретичні знання для розв'язання інженерних проблем. Наприкінці кожної теми наведено питання для самоконтролю, що дозволяють перевірити рівень засвоєння матеріалу та сприяють самостійній роботі студентів.

Навчальний посібник може бути використаний як у межах аудиторних занять, так і для самостійної підготовки здобувачів вищої освіти, а також стане корисним ресурсом для викладачів, інженерів-практиків та всіх, хто цікавиться математичними методами в електроенергетиці.

Тема 1

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЯ В ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИЦІ

1.1. Основи математичного моделювання

1.1.1. Основні поняття, класифікація та властивості математичних моделей

1.1.2. Математичне моделювання

1.2. Оптимізація та математичне програмування в енергетиці

1.2.1. Задачі оптимізації, їх класифікація

1.2.2. Лінійне програмування

1.2.3. Методи розв'язування задач лінійного програмування

1.2.4. Застосування симплексного метода в галузі електроенергетики

1.2.5. Нелінійне програмування

1.2.6. Нелінійні оптимізаційні задачі в енергосистемах

1.1. Основи математичного моделювання

1.1.1. Основні поняття, класифікація та властивості математичних моделей

Моделювання є універсальним і ефективним методом пізнання навколишнього світу.

Моделювання – це метод вивчення властивостей певного об'єкта шляхом вивчення властивостей іншого об'єкта, який більш зручний для вирішення дослідницьких завдань і знаходиться відповідно до вихідного об'єкта.

У цілому процес моделювання складається з декількох етапів (**рис. 1.1**). На першому етапі відбувається постановка проблеми й визначення властивостей оригіналу, що підлягає дослідженню. Далі – констатація складності або неможливості вивчення оригіналу в природі або в природному середовищі. За чим слідує етап підбору моделі, яка досить добре фіксує основні властивості оригіналу і проста у вивченні. Після чого проходить етап опрацювання моделі відповідно до поставленого завдання.

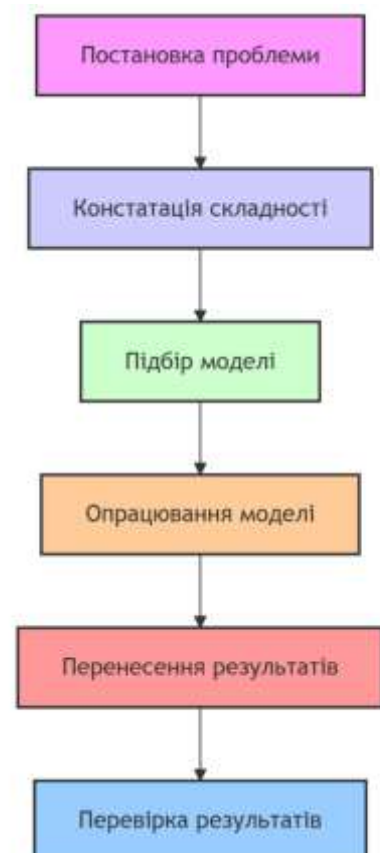


Рис. 1.1. Процес моделювання

Передостаннім етапом є перенесення результатів досліджень в оригінал, заключним – перевірка результатів дослідження за результатами вимірювань параметрів вихідного стану.

Таким чином, *моделювання є циклічним процесом*. Процес моделювання включає три основні елементи:

- суб'єкт (дослідник);
- об'єкт дослідження;
- модель, що відображає відносини суб'єкта, який пізнає, й об'єкта, який пізнається.

Модель – це матеріальний або уявний об'єкт, який в процесі пізнання (вивчення) замінює вихідний об'єкт, зберігаючи при цьому свої найбільш типові риси, характерні для задачі, що підлягає розв'язанню [12].

Слово «модель» сформовано від латинських слів *modus, modulus* – це «міра», «зразок», «норма». Поняття «модель» бере свій початок з будівельного мистецтва, і практично у всіх європейських мовах воно використовувалося для значення образу або прообразу предмета, схожого з оригінальним предметом у будь-якому відношенні, і володіє певними характерними рисами (рис. 1.2).

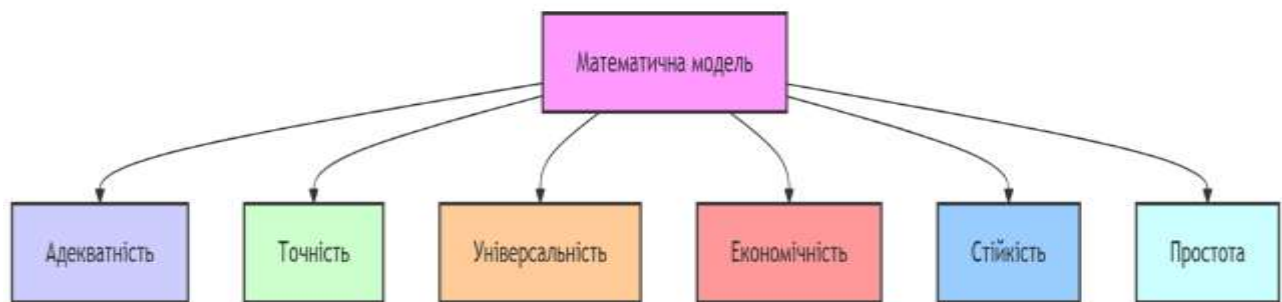


Рис. 1.2. Характеристики математичних моделей

Фундаментальна властивість: модель завжди «бідніша» за об'єкт оригіналу, оскільки при побудові моделі враховуються тільки ті фактори, які є найбільш значущими для дослідження.

Створення моделі є складним і творчим завданням, яке передбачає наявність у дослідника достатнього практичного досвіду, інтуїтивного мислення, глибокого розуміння відповідної галузі знань, а також застосування сучасних комп'ютерних технологій для досягнення збалансованих рішень і побудови ефективної моделі (рис. 1.3).



Рис. 1.3. Порядок формування ефективної моделі

Мета моделювання виникає, коли суб'єкт моделювання вирішує завдання, що стоїть перед ним, і залежить як від розв'язуваної задачі, так і від суб'єкта моделювання [31].

Тобто **мета моделювання має подвійну природу**: з одного боку, вона об'єктивна, тому що впливає із завдання дослідження, а з іншого – суб'єктивна, оскільки залежить від суб'єкта моделювання (його знань, досвіду, мотивації тощо):

- для одного і того ж об'єкта суб'єкт може побудувати декілька моделей, якщо він вирішує різні завдання, що призводять до різних цілей моделювання;
- для одного і того ж об'єкта різні суб'єкти можуть побудувати різні моделі, навіть якщо завдання моделювання у них одне;
- можливий збіг моделей різних об'єктів, навіть якщо їх будували різні суб'єкти, виходячи з різних цілей моделювання.

Пізнавальна функція моделі полягає в тому, що вона репрезентує лише окремі, ключові характеристики оригінального об'єкта. Це означає, що жодна модель не може повністю замінити оригінал, а виконує лише часткове представлення його властивостей. Відповідно, для одного й того самого об'єкта можливо створити декілька моделей, кожна з яких наголошує на певному аспекті чи відображає різний рівень деталізації.

Завдання визначає характеристики моделі, поза контекстом завдання поняття моделі немає сенсу.

Використання моделі дозволяє [12]:

- дослідити структуру, властивості та закономірності розвитку реального об'єкта, а також його взаємозв'язки з оточуючим середовищем;
- опанувати навички керування об'єктом чи процесом, визначаючи найбільш доцільні способи досягнення поставлених цілей;
- передбачати як безпосередні, так і опосередковані наслідки впливу різних методів і підходів на об'єкт.

Для досягнення бажаної ефективності модель повинна відповідати таким критеріям:

- **адекватність** – відображення ключових характеристик об'єкта з належною повнотою;
- **універсальність** – можливість використання в аналізі широкого спектра об'єктів та задач;
- **економічна доцільність** – оптимальне співвідношення між витраченими обчислювальними ресурсами та результатами моделювання.

Під **адекватністю** моделі розуміють якісний і кількісний опис об'єкта (процесу) обраним набором характеристик з певним ступенем точності тими властивостями моделі, які мають істотне значення для дослідника. Повна адекватність означає ідентичність між моделлю і прототипом.

Вводиться поняття ступеня (міри) адекватності (варіюється від нуля (відсутність адекватності) до одиниці (повна адекватність)), який характеризує частку істинності моделі відносно обраної характеристики (властивості)

досліджуваного об'єкта. Чим більше властивостей вихідного об'єкта враховано в моделі, тим вище ступінь адекватності моделі. Введення кількісної міри адекватності дає можливість кількісно ставити й вирішувати такі завдання, як ідентифікація, стійкість, чутливість, адаптація, модельне навчання.

Класифікація моделей

Існують різні способи класифікації моделей [15, 2]: за класами завдань; за областю використання; за способом представлення тощо.

3 класів завдань, за якими поділяються моделі, можна назвати **аналіз, синтез, конструювання, проєктування, управління, утилізація**.

За областю використання моделі поділяються на:

- **освітні** – наочні посібники, різні тренажери, навчальні програми;
- **дослідні** – копії об'єктів, які використовуються для вивчення об'єкта та прогнозування його характеристик у майбутньому;
- **науково-технічні**, що використовуються для вивчення процесів і явищ (різні стенди, що моделюють фізичні та природні явища);
- **ігрові** – військові, економічні, спортивні та ділові ігри;
- **імітаційні**, які з різною точністю моделюють роботу об'єкта в різних умовах і, як правило, з урахуванням випадкових факторів.

Алгоритм (комп'ютерна програма), що реалізує імітаційну модель, відтворює процес функціонування системи в часі, а елементарні події, з яких складається процес, імітуються, зі збереженням їх логічної структури і послідовності їх проходження в часі [15]. Це дає можливість отримати інформацію про стан процесу в певні моменти часу з вихідних даних, що дає можливість оцінити характеристики системи. Прикладом імітаційної моделі є програма для розрахунку аварійного перехідного процесу в електроенергетичній системі, коли в процесі моделюються події спрацьовування різних захисних та керувальних пристроїв і перемикання обладнання системи [15].

Спосіб представлення моделі є найважливішою ознакою класифікації моделей (рис. 1.4).

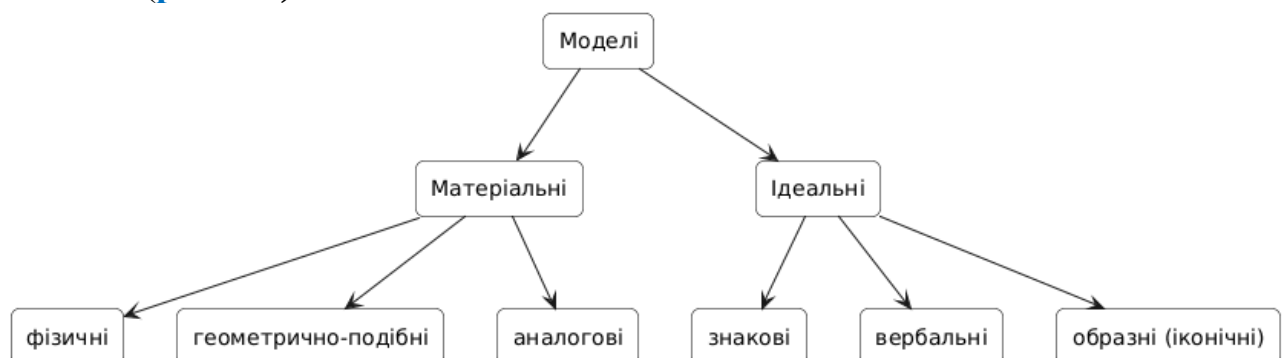


Рис. 1.4. Класифікація моделей за способом представлення

Матеріальні моделі є речовинний продукт людської діяльності, вони можуть бути безпосередньо чуттєво пізнані, оскільки існують реально, об'єктивно. Основною вимогою до побудови даного класу моделей є вимога подібності (подібності, аналогії) між моделлю та оригіналом. Матеріальні моделі

відображають роботу та конструкцію об'єкта оригіналу (геометричні, фізичні, динамічні, функціональні властивості).

Фізичні моделі є зменшеною або збільшеною копією об'єкта оригіналу, що допускає дослідження з наступним перенесенням властивостей на реальний об'єкт на основі теорії подібності. Існують моделі, що мають фізичну подібність до реальних об'єктів і відтворюють відповідні явища у зменшеному чи зміненому масштабі. Наприклад, у сфері астрономії застосовують модель зоряного неба у вигляді глобуса, а в гідроенергетиці, для проєктування гідроелектростанції, створюють діючі зменшені копії річок та запланованих гребель.

Геометрично подібні моделі репрезентують лише просторові характеристики об'єкта в зменшеному або зміненому масштабі. Прикладами таких моделей є архітектурні макети споруд, різноманітні муляжі з дерева, дроту чи скла, тривимірні зображення молекул і кристалів у хімічних дослідженнях, а також мініатюрні копії літаків, кораблів та інших технічних засобів.

Аналогові (або імітуючі) моделі відтворюють деяке явище за допомогою іншого, в якомусь сенсі зручнішого. У такому випадку як модель, так і її оригінал характеризуються спільним математичним виразом. Це дозволяє аналізувати одне явище шляхом вивчення іншого, фізично доступнішого. Наприклад, за допомогою теплових аналогів досліджують електричні процеси, коли розподіл температури відображає характер струмів і напруг.

Ідеальні моделі засновані на ідеальній (концептуальній) аналогії об'єкта та моделі. На відміну від матеріальних моделей, які найчастіше є експериментальними, ідеальні моделі теоретичні та існують у свідомості людини. Вони можуть бути перенесені на будь-який носій інформації.

Образні (іконічні) моделі відображають властивості об'єкта оригіналу за допомогою наочних образів, що мають прообрази в реальному світі, наприклад, представлення руху молекул газу або рідини як взаємодія пружних куль; уявне уявлення електричного струму як спрямованого руху електронів; модель атома у фізиці, запропонована свого часу Бором; тощо.

Вербальні моделі описують властивості об'єкта природною мовою з використанням правил синтаксису та семантики (наприклад, будь-яке наукове уявлення про якесь явище у формі його опису, текст технічної документації та ін.).

Знакове моделювання являє собою запис структури або деяких особливостей об'єктів, що моделюються, за допомогою знаків-символів якоїсь штучної мови [34]. Серед *знакових моделей* важливе місце займають *графічні* та *математичні*. *Графічні моделі* дають змогу візуалізувати ключові характеристики об'єкта засобами графіки, тоді як *математичні* – формалізують його властивості мовою математичних виразів для подальшого вирішення наукових чи прикладних задач.

Математичні моделі технічних об'єктів повинні бути узгоджені за складністю з можливостями людського сприйняття і з можливостями комп'ютерів по експлуатації цих моделей. Як правило, неможливо розв'язати всі проблеми в рамках одного опису. Більшість математичних моделей технічних

об'єктів можна віднести до одного з трьох узагальнених рівнів, які називаються **мікро-, макро- і метарівнями**.

1.1.2. Математичне моделювання

Наразі найбільш популярним видом моделювання є математичне.

Математичне моделювання – це засіб вивчення реального об'єкта, процесу або системи шляхом заміни їх математичною моделлю [32].

Математична модель дозволяє описати основні властивості вихідного об'єкта мовою математики за допомогою логічних і математичних побудов для його подальшого вивчення при вирішенні різних завдань. Методологія математичного моделювання продовжує постійно вдосконалюватися, охоплюючи все нові області – від розробки найскладніших технічних систем до управління технологічними процесами до аналізу в галузі економіки і політики.

Заміна вихідного об'єкта його математичною моделлю дає можливість вивчати його властивості і поведінку в різних ситуаціях відносно швидко і без істотних витрат і ризиків.

У порівнянні з експериментальними дослідженнями математичне моделювання має наступні переваги:

- ✓ економічність з погляду часу і вартості;
- ✓ можливість моделювати складні, небезпечні об'єкти і процеси без ризиків і випадкових наслідків;
- ✓ можливість зміни при необхідності в процесі аналізу часового масштабу;
- ✓ усунення прогалин у знаннях та виявлення нових якісних проблем у ході наукових досліджень;
- ✓ розв'язання цілого класу задач, які мають однаковий математичний опис;
- ✓ вміння моделювати об'єкт і процес по частинах при вивченні складних технічних об'єктів;
- ✓ використання універсальних апаратних і програмних засобів.

Можна виділити два підходи до створення математичних моделей:

1) **теоретичний підхід**, заснований на використанні відомих законів і математичних закономірностей;

2) **експериментальний підхід**, що дозволяє отримувати нові (раніше невідомі) логіко-математичні конструкції з використанням математичної статистики, необхідної для подальших досліджень.

Побудова математичної моделі передбачає виконання наступних кроків [30]:

- 1) визначення змінних, що характеризують параметри системи або процесу;
- 2) формулювання цільової функції відповідно до мети дослідження;
- 3) складання системи обмежень з урахуванням вхідних даних задачі та встановлених кількісних залежностей між ними.

При формуванні математичної моделі необхідно прийняти компромісне рішення між рівнями її простоти й адекватності (складності). Універсальність моделі залежить від кількості та характеристик вхідних і вихідних параметрів, що враховуються при її побудові. *Зі зростанням точності модель краще відображає особливості оригіналу, однак це обмежує коло об'єктів, до яких її можна застосувати. Водночас більш універсальні моделі, здатні охоплювати ширший спектр об'єктів, менш точно описують окремі з них, що негативно впливає на рівень економічної ефективності.* Звідси випливає необхідність прийняття другого компромісного рішення в процесі формування моделі.

У результаті прийняття цих рішень формується ефективна математична модель. Слід зазначити, що розробка точних і надійних методів перевірки адекватності моделі залишається досить складним завданням.

Моделювання систем електропостачання – це процес створення математичних або комп'ютерних моделей, які відображають поведінку, структуру й функціонування електроенергетичних систем з метою їх аналізу, оптимізації та прогнозування. До моделей висуваються наступні вимоги:

- ✓ адекватність моделі – модель повинна точно відображати основні фізичні та технологічні процеси в електропостачальній системі (наприклад, розподіл навантаження, втрати потужності, реакцію на зміни параметрів);

- ✓ скалярність та ієрархічність – системи моделюються на різних рівнях – від окремих елементів (трансформатори, лінії, споживачі) до глобальних мереж (місто, регіон, країна);

- ✓ урахування режимів роботи – модель має відображати як стаціонарні (установлені) режими роботи, так і перехідні процеси (включення, аварії, зміни навантаження);

- ✓ стійкість моделі – модель повинна бути стійкою до збурень і змін вхідних даних, тобто зберігати фізично обґрунтовану поведінку при моделюванні різних сценаріїв. Стійкість є критично важливою при аналізі перехідних процесів, інтеграції відновлюваних джерел енергії (ВДЕ) та плануванні аварійних режимів;

- ✓ урахування нелінійностей і стохастики – важливо враховувати можливі нелінійні характеристики обладнання та стохастичну природу змін навантаження або виробництва електроенергії (особливо в умовах ВДЕ);

- ✓ модульність і масштабованість – моделі повинні легко адаптуватися до нових компонентів або масштабування системи без необхідності повної перебудови;

- ✓ оптимізація і керованість – моделювання повинно забезпечувати можливість оптимізації енергоспоживання, зменшення втрат та розробки ефективних стратегій керування;

- ✓ інтеграція з сучасними цифровими технологіями – моделі мають враховувати розвиток інтелектуальних систем керування (Smart Grid), автоматизованих систем диспетчерського управління, цифрових підстанцій, відновлюваних джерел енергії та накопичувачів.

Як приклад розглянемо один з можливих методів аналізу адекватності моделі – приклад аналізу адекватності моделі прогнозування електроспоживання.

1. Формування вихідних та модельних даних. Припустимо, що ми маємо реальні виміряні значення електроспоживання $Y = \{Y_j\}$ та значення, отримані за математичною моделлю $\tilde{Y} = \{\tilde{Y}_j\}$. Y_j – споживана потужність за фактичними даними (МВт), $\tilde{Y}_j$ – розрахункове значення потужності, отримане за моделлю.

2. Обчислення вектору відносних похибок. Для кожного моменту часу j розраховується відносна похибка:

$$\varepsilon_j = \frac{Y_j - \tilde{Y}_j}{Y_j}, \quad j = 1 \dots n.$$

Це дозволяє оцінити, наскільки модельні дані відрізняються від реальних.

3. Оцінка точності моделі. Використовуються два показники:

1. Максимальна похибка (∞ -норма):

$$\varepsilon_m = \max |\varepsilon_j|$$

визначає найбільше відхилення між розрахунковими і фактичними значеннями.

2. Середньоквадратична похибка (L-норма):

$$\varepsilon_L = \sqrt{\sum_{j=1}^n \varepsilon_j^2}$$

дозволяє оцінити загальну якість прогнозу.

4. Критерій адекватності моделі. Модель вважається адекватною, якщо похибки не перевищують допустимий рівень Δ_{max} :

$$\Delta_{max(L)} \leq \Delta_{max}$$

де Δ_{max} – граничне значення похибки, яке визначається вимогами до точності.

5. Висновки. Якщо модель не проходить критерій адекватності (тобто похибки перевищують допустиме значення), слід переглянути:

- параметри математичної моделі,
- точність вихідних даних,
- наявність систематичних помилок у розрахунках.

Такий метод добре підходить для перевірки точності прогнозних моделей електроспоживання, балансування енергосистеми, управління навантаженням і генерацією. Таким чином, точність математичної моделі визначається ступенем збігу розрахункового і фактичного процесу і залежить головним чином від точності вихідних даних і зроблених припущень.

1.2. Оптимізація та математичне програмування в енергетиці

1.2.1. Задачі оптимізації, їх класифікація

Оптимізація – це широке поняття, яке охоплює всі методи знаходження найкращого розв’язку певної задачі.

Оптимізація полягає в знаходженні оптимальних альтернатив серед безлічі об'єктів (можливих рішень, сценаріїв, варіантів проєктованої системи) в заданих умовах, при заданих обмеженнях, тобто оптимальних альтернатив [28]. З точки зору інженерних розрахунків, методи оптимізації дозволяють вибрати оптимальний варіант конструкції, оптимальний розподіл ресурсів тощо.

Поняття оптимальності отримало строге і точне представлення в різних математичних теоріях, міцно увійшло в практику проєктування та експлуатації технічних систем, зіграло важливу роль у формуванні сучасних системних понять, широко використовується в адміністративній і суспільній практиці, стало поняттям, відомим практично кожній людині, оскільки прагнення до підвищення ефективності праці, будь-яка цілеспрямована діяльність знайшла своє вираження, свою зрозумілу форму в ідеї оптимізації [10].

Під час розв'язання задач оптимізації, як правило, потрібно визначити найкращі значення певних параметрів, які характеризують досліджувану проблему. У сфері інженерії такі параметри традиційно називають *розрахунковими*. Зокрема, як розрахункові параметри можуть використовуватися значення лінійних розмірів об'єкта, маси, температури тощо.

Вибір оптимального розв'язку або порівняння двох альтернативних розв'язків здійснюється за допомогою деякої залежної величини (функції), що визначається конструктивними параметрами [22]. Ця величина називається *цільовою функцією* (або *критерієм якості*). У процесі розв'язання задачі оптимізації слід знаходити такі значення параметрів проєктування, при яких цільова функція має мінімум (або максимум) [22]. Таким чином, *цільова функція* є глобальним критерієм оптимальності в математичних моделях, що описують інженерні або економічні проблеми.

Попри різне змістовне формулювання проблеми, структура задачі оптимізації однотипна і містить наступні складові:

1. Цільова функція $F(x)$ n -вимірного векторного аргументу $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, тобто $F(x) \in R^n$.
2. Обмеження (умови) у вигляді нерівностей $g_j(x) \leq 0$.
3. Обмеження (умови) у вигляді рівнянь $h_k(x) = 0$.
4. Діапазон допустимих значень $x \in D \subset R^n$.

Обмеження неминуче з'являються при проєктуванні технічних об'єктів і виникають з урахуванням конкретної фізико-технологічної доцільності внутрішніх параметрів елементів, обмеженості ресурсів і т. д.

Задача оптимізації задається трійкою (U, F, D) , де F – функція, визначена на множині U , а D – деяка підмножина U множини. Функція F називається *цільовою функцією*; D – сукупність *допустимих розв'язків* (*допустима область*) задачі оптимізації; U – простір оптимізації.

Оптимізаційна задача максимізації (U, F, D) (мінімізації) полягає в знаходженні найбільшого (найменшого) значення цільової функції F на допустимій множині D .

Будь-яка задача максимізації (U, F, D) зводиться до задачі мінімізації $(U, -F, D)$.

Розв'язати оптимізаційну задачу означає знайти її оптимальний розв'язок або встановити нерозв'язність цієї задачі. Наприклад, задача максимізації (мінімізації) (U, F, D) буде нерозв'язною, якщо цільова функція F є необмеженою зверху (знизу) на множині D .

Методи розв'язання задач оптимізації залежать як від виду цільової функції F , так і від типу множини допустимих рішень D . $F = \{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ – цільова функція, що підлягає оптимізації, або цільовий функціонал, критерій якості – чисельно виражає ступінь досягнення цілей функціонування об'єкта, що оптимізується. Цільова функція $F = \{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ – це набір критеріїв якості, які повинні бути оптимізовані одночасно. Відповідно, при $k = 1$ ми маємо задачу однокритеріальної або скалярної оптимізації, а при $k > 1$ маємо задачу багатокритеріальної або векторної оптимізації.

Вектор невідомих $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ може містити один компонент ($n = 1$), і тоді ми маємо одновимірну задачу оптимізації, або він може мати багато компонентів ($n > 1$), і тоді це багатовимірна задача оптимізації або задача оптимізації з багатьма змінними.

Допустима площа D може збігатися з оптимізаційним простором ($D = U$), що означає, що обмежень на невідомі немає. У цьому випадку ми маємо проблему **безумовної** оптимізації або задачу **необмеженої** оптимізації. Якщо $D \subset U$, то не всі значення змінних в задачі справедливі, тобто на них є деякі обмеження. Відповідна задача оптимізації називається **умовною** або **обмеженою** задачею.

Оптимізаційний простір U може співпадати з евклідовим простором, і ми отримуємо **оптимізаційну задачу з неперервними змінними**.

Якщо змінні є цілочисельними, то відповідна задача називається **цілочисельною оптимізацією**. Окремим випадком цілочисельної оптимізації є **булева оптимізація**, в якій змінні можуть приймати тільки два значення – нуль і одиницю. Якщо цільова функція приймає значення з множини дійсних чисел, то така задача називається **псевдобулевою оптимізуючою задачею**, щоб підкреслити її відмінність від випадку, коли значення функції також дорівнюють нулю або одиниці.

Залежно від різних характеристик, оптимізаційні задачі поділяються на кілька типів:

за типом цільової функції та обмежень

- ✓ лінійні – якщо цільова функція та обмеження є лінійними:

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

методи розв'язку: симплекс-метод, метод двоїстого програмування.

- ✓ нелінійні – містять нелінійні залежності:

$$f(x) = x_1^2 + e^{x_2} + \sin(x_3)$$

методи розв'язку: метод градієнтного спуску, метод множників Лагранжа.

- ✓ опуклі та неопуклі задачі – розрізняються за формою допустимої області та поведінкою цільової функції.

за типом змінних

- ✓ неперервні – змінні можуть приймати будь-які значення у визначеному діапазоні;
- ✓ дискретні (цілочислові, комбінаторні) – змінні приймають лише фіксовані значення;
- ✓ змішані – містять як дискретні, так і неперервні змінні.

за кількістю критеріїв оптимізації

- ✓ однокритеріальні – одна цільова функція (наприклад, мінімізація паливних витрат на електростанціях);
- ✓ багатокритеріальні – оптимізація кількох параметрів одночасно (наприклад, мінімізація витрат і максимізація надійності).

за рівнем визначеності вихідних даних

- ✓ детерміновані – всі параметри точно відомі;
- ✓ стохастичні (ймовірнісні) – містять випадкові параметри (наприклад, прогнозування попиту на електроенергію).

за способом розв'язку

- ✓ аналітичні методи – розв'язки отримуються у вигляді формули;
- ✓ чисельні методи – використовують алгоритми та обчислювальні підходи (методи Ньютона, градієнтний спуск);
- ✓ евристичні методи – використовують апроксимації, генетичні алгоритми, метод рою частинок.

Наведемо класифікацію задач оптимізації з урахуванням конкретної форми задачі й властивостей функції, що входять в її формулювання.

Насамперед цільова функція та обмеження можуть бути задані не лише у вигляді аналітичних виразів, а й реалізовані у формі комп'ютерних алгоритмів, імітаційних моделей, інтерактивних людино-машинних процедур або ж як емпіричні дані, отримані безпосередньо з реальної системи. Такі задачі оптимізації називаються оптимізаційними задачами з неявними функціями або **задачами пошукової оптимізації**. Процес оптимізації в цьому випадку більше схожий на експерименти, ніж на розрахунок.

Якщо всі функції, що входять в постановку задачі, записані в явній аналітичній формі $F = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, то відповідна задача оптимізації називається **задачею математичного програмування** [8]. Найчастіше математичним програмуванням називають оптимізаційні задачі з обмеженнями, підкреслюючи їх відмінність від задач безумовної оптимізації.

У математичному програмуванні основними розділами є: лінійне програмування, ціле, опукле програмування.

Задача оптимізації (U, F, D) , в якій цільова функція F є лінійною функцією на $U = R^n$, а D – множиною розв'язків деякої системи лінійних рівнянь і лінійних нерівностей з невідомих, називається **задачею лінійного програмування**. Система лінійних рівнянь і нерівностей, що визначає множину D , називається **системою обмежень задачі лінійного програмування**.

при обмеженнях:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq (=, \geq) b_i, i = \overline{1, m};$$

$$x_j \geq 0; j = \overline{1, n}.$$

Вектор $\bar{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, компоненти якого задовольняють функціональним і прямим обмеженням поставленої задачі, називаються **планом** (або допустимим рішенням) ЗЛП.

Всі допустимі розв'язки утворюють **область задачі лінійного програмування**, або **область допустимих розв'язків** (ОДР). Допустимий розв'язок, який забезпечує максимум або мінімум цільової функції $f(X)$, називається **планом оптимальної задачі** і позначається $f(\bar{X}^*)$, де $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$.

Розрізняють декілька форм запису математичної моделі ЗЛП (**рис. 1.5**, **табл. 1.1**).



Рис. 1.5. Форми запису математичної моделі ЗЛП

Таблиця 1.1. Форми запису математичної моделі задачі лінійного програмування [35]

Складові моделі	Форми запису математичної моделі ЗЛП			
	Загальна	Стандартна		Канонічна
Обмеження	$\sum a_{ij}x_j \left\{ \begin{matrix} \geq \\ \leq \\ = \end{matrix} \right\} b_i$	$\sum a_{ij}x_j \leq b_i$	$\sum a_{ij}x_j \geq b_i$	$\sum a_{ij}x_j = b_i$
Керовані змінні	Довільний знак	$x_j \geq 0, j = \overline{1, n}$		$x_j \geq 0, j = \overline{1, n}$
Цільова функція	$F(x) \rightarrow extr(max, min)$	$F(x) \rightarrow max$	$F(x) \rightarrow min$	$F(x) \rightarrow min$

Канонічна форма називається **переважною** або з переважними змінними, якщо кожне рівняння обмеження включає в себе рівняння з коефіцієнтом +1, якого немає в жодному іншому рівнянні обмежень і в цільовій функції.

Канонічна форма задачі лінійного програмування вважається формою з **базисними змінними** або **переважною**, якщо кожне обмеження містить унікальну змінну x_j з коефіцієнтом $+1$, яка не входить в інші обмеження чи цільову функцію. Якщо, крім цього, всі вільні члени в системі обмежень є невід'ємними ($b_i \geq 0$), така форма вважається **допустимою**; у випадку наявності від'ємних значень – **недопустимою**.

Загальна, стандартна та канонічна форми подання ЗЛП еквівалентні, оскільки кожну з них можна трансформувати в іншу через елементарні математичні перетворення.

При необхідності задача мінімізації може бути замінена задачею максимізації, і навпаки, оскільки

$$\min f(x) = -\max(-f(x))$$

(мінімальне значення функції $f(x)$ дорівнює максимальному значенню взятої функції $-f(x)$ з протилежним знаком, **рис. 1.6**).

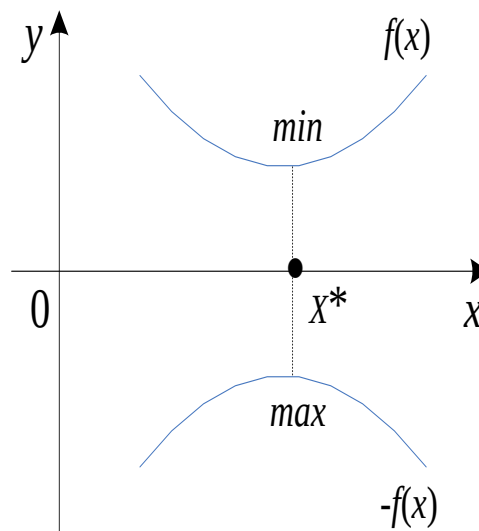


Рис. 1.6. Графічне представлення задач максимізації/мінімізації

Нерівності типу $\geq$ шляхом множення лівої та правої частин на -1 можна перетворити на нерівності типу $\leq$, і навпаки.

Обмеження-нерівності $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \begin{cases} \leq \\ \geq \end{cases} b_i$ перетворюються в обмеження-рівності шляхом додавання (віднімання) додаткових (балансу) невід'ємних змінних до лівих частин: $x_{n+i} \geq 0$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \{\pm\} x_{n+i} = b_i.$$

Якщо необхідно, то обмеження-рівність $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$ можна записати у вигляді системи-нерівностей:

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i, \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i. \end{cases}$$

Якщо якась змінна x_k в ЗЛП не підпорядкована умові відсутності невід'ємності, вона замінюється різницею двох інших невід'ємних змінних $x'_k \geq 0$ і $x''_k \geq 0$:

$$x_k = x'_k - x''_k.$$

Додаткові змінні, які вводяться при трансформації обмежень, несуть конкретне економічне навантаження, що відповідає суті розв'язуваної задачі. Їхнє значення дозволяє інтерпретувати результати моделі у контексті реальних економічних процесів.

Приклад 1.1 (задача лінійного програмування для розподілу енергоресурсів). Енергетична компанія має дві електростанції, які виробляють електричну енергію та постачають її до двох міст – А і Б. Потреба міста А становить 800 МВт, міста Б – 1200 МВт. Кожна електростанція має встановлені обмеження на максимальний обсяг виробництва та на можливу потужність постачання в кожне місто. Для виробництва електроенергії використовуються три типи палива. Дані стосовно витрати кожного виду палива на виробництво 1 МВт енергії на кожній станції, загальний доступний запас кожного виду палива та прибуток від постачання 1 МВт енергії наведено в таблиці.

Визначити, як розподілити виробництво електроенергії між двома станціями та постачання між містами так, щоб: 1) забезпечити потреби міст А і Б; 2) не перевищити доступні запаси палива та виробничі ліміти станцій; 3) отримати максимальний прибуток.

Тип палива	Станція 1 (МВт)	Станція 2 (МВт)	Загальний обсяг палива	Прибуток від постачання енергії (млн)
Паливо 1	3	5	9000	30
Паливо 2	4	3	7000	40
Паливо 3	2	6	9000	50

Розв'язання. Побудуємо математичну модель процесу, що розглядається. Позначимо через x_1 та x_2 – кількість електроенергії (у МВт), виробленої відповідно на станції 1 та станції 2. Саме ці величини є шуканими.

Прибуток від виробництва енергії залежить від того, скільки електроенергії виробляє кожна станція. За умовою, виробництво 1 МВт на станції 1 приносить 30 млн грн, а на станції 2 – 40 млн грн. Тому цільова функція, що описує загальний прибуток, має вигляд:

$$Z = 30x_1 + 40x_2.$$

Метою є максимізація прибутку від постачання енергії.

Далі врахуємо фізичні обмеження системи. Потреби міст становлять 800 МВт та 1200 МВт, тому сумарне виробництво має бути не меншим за:

$$x_1 + x_2 \geq 2000.$$

Кожна електростанція має власні обмеження, враховуючи які маємо:

$$\text{ліміти на виробництво } x_1 \leq 1500, x_2 \leq 2000.$$

$$\text{для палива 1} - 3x_1 + 5x_2 \leq 9000,$$

$$\text{для палива 2} - 4x_1 + 3x_2 \leq 7000,$$

$$\text{для палива 3} - 2x_1 + 6x_2 \leq 9000.$$

Оскільки виробництво не може бути від'ємним, формуємо ще умову невід'ємності:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Таким чином, задача зводиться до задачі лінійного програмування:

$$Z = 30x_1 + 40x_2 \rightarrow \max$$

за умов:

$$\begin{cases} x_1 \geq 800 \\ x_2 \geq 1200 \\ x_1 \leq 1500 \\ x_2 \leq 2000 \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 9000 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 7000 \\ 2x_1 + 6x_2 \leq 9000 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Отримана система повністю описує фізичний процес виробництва та постачання електроенергії з урахуванням ресурсних, технологічних та економічних обмежень.

Для розв'язання цієї задачі можна застосувати метод симплекс-метод або графічний метод (оскільки задача двовимірна), про які буде йти мова далі.

1.2.3. Методи розв'язування задач лінійного програмування

Методи розв'язування задач лінійного програмування – це алгоритми, що забезпечують знаходження оптимального розв'язку для задач, у яких цільова функція та обмеження є лінійними. Такі методи належать до обчислювальної математики.

На практиці розв'язування задач лінійного програмування застосовують різні підходи, що дають змогу ефективно знаходити оптимальні розв'язки залежно від розмірності та структури задачі. Розглянемо найпоширеніші з них.

Графічний метод. У лінійному програмуванні для визначення опуклих множин використовується графічний метод (багатогранник розв'язку). Якщо основна задача лінійного програмування має оптимальний план, то цільова функція приймає значення в одній з вершин багатогранника розв'язку ([рис. 1.7](#)) [38].

Графічний метод в основному використовується для розв'язання задач з невеликою кількістю змінних. Вона включає в себе наступні етапи:

1. Побудова багатогранника розв'язків.

Геометричний зміст системи обмежень полягає в наступному: рівняння $a_{11}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = b$ є гіперплощиною в n -вимірному просторі, а нерівність – це точки підпростору, що лежать з одного боку гіперплощини й утворюють опуклу множину. Отже, система обмежень ЗЛП є множиною точок у n -вимірному просторі; при цьому ця множина опукла і кожна точка є розв'язком системи нерівностей.

2. **Знаходження вектору** $\bar{c} = \text{grad } z = (c_1, \dots, c_n)$ **і вершини** **многокутника розв'язку, при якому досягається** $\max z$.

Відомо, що градієнтний вектор функції z показує напрямок найбільшого зростання функції. Через початок координат проводять лінію рівня $c_1x_1 + \dots + c_nx_n = h$. Лінія рівня має чудову властивість: після підстановки координат будь-якої її точки в вираз цільової функції z остання набуває постійне значення. Далі переміщуємо лінію рівня в напрямку вектора $\vec{c}$ доти, поки не буде досягнута кутова вершина багатокутника розв'язку або функція не буде встановлена як необмежена на множині розв'язків.

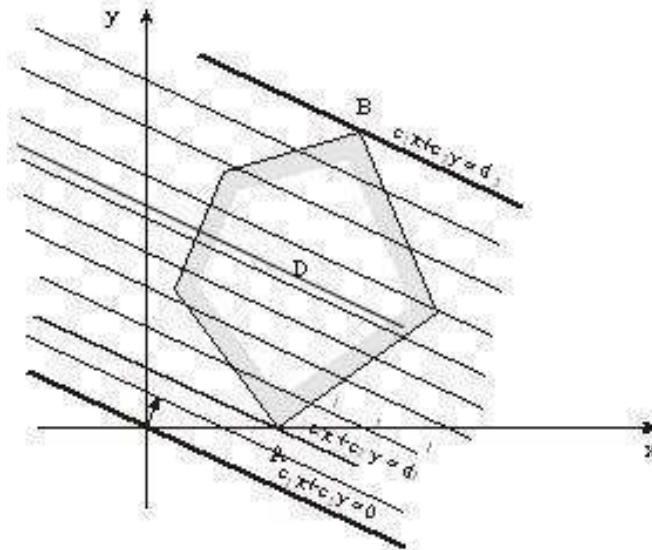


Рис. 1.7. Ілюстрація до графічного методу

3. Визначення координати кутової вершини, які є оптимальним планом, і значення цільової функції в цій точці.

Слід зазначити, що знаходження мінімального значення цільової функції відрізняється від знаходження її максимального значення тільки тим, що лінія рівня $c_1x_1 + \dots + c_nx_n = b$ рухається не в напрямку вектора $\vec{c}$, а в протилежному напрямку [37].

Простий перебір. Метод повного перебору передбачає розгляд багатовимірних паралелепіпедів, що охоплюють багатогранник, заданий системою обмежень. Щоб побудувати такий паралелепіпед, можна, наприклад, використати обмеження типу $2x_1 + 5x_2 \leq 10$, з яких безпосередньо випливають граничні значення $0 \leq x_1 \leq 10/2 = 5$ і $0 \leq x_2 \leq 10/2 = 5$, характерні для окремих змінних. Таким чином, загальні лінійні обмеження зводяться до індивідуальних обмежень по змінним. Після цього залишається визначити верхні межі для кожної змінної. У випадках, коли заданий багатогранник є необмеженим, допускається виділення його частини, яка орієнтована у бік початку координат і містить можливий розв'язок. Цю частину також можна помістити в багатовимірний паралелепіпед, хоча процес побудови в такому разі дещо складніший.

Проведемо перебір точок паралелепіпедів з кроком $1/10n$ послідовно за $n = 2, 3, \dots$, обчислюючи значення цільової функції і перевіряючи наявність обмежень. З усіх точок, які відповідають обмеженням, візьмемо ту, у якій цільова функція максимальна. Розв'язок знайдено з точністю до $1/10n$.

Метод спрямованого перебору передбачає пошук оптимального розв'язку шляхом поступового вдосконалення початкової допустимої точки. Спершу обирається точка, яка задовольняє усім обмеженням задачі. Далі її координати змінюються на задану величину Δ таким чином, щоб значення цільової функції зростало. Залежно від обраної стратегії, ці зміни можуть виконуватись за фіксованим алгоритмом або випадково.

Якщо у процесі зміни координат досягається межа допустимої області (наприклад, рівняння обмеження), подальший рух відбувається вздовж цієї межі, а при перетині кількох – по їх спільному перетину (ребру). Рух припиняється у вершині багатогранника, де не спостерігається подальшого покращення. Такий розв'язок вважається наближеним з точністю Δ . За потреби результат можна уточнити – зменшуючи крок до $\Delta/2$, $\Delta/4$ тощо, у межах околу знайденої точки.

Симплекс-метод є одним із перших спеціалізованих алгоритмів, розроблених для розв'язання задач лінійного програмування. На відміну від методів простого або спрямованого перебору, які мають універсальне застосування в задачах оптимізації, симплекс-метод орієнтований саме на лінійні моделі. Його у 1951 році запропонував американський математик Джордж Данциг [41].

Симплексний метод полягає в переміщенні обмежень опуклим багатогранником від вершини до вершини, при якому значення цільової функції поліпшується на кожному кроці до досягнення оптимуму.

Суть симплексного методу полягає в послідовному пошуку розв'язків, тобто послідовному переході від однієї вершини до іншої. Однак це перерахування не хаотичне, а таке, що на кожному кроці розв'язок вдосконалюється.

Симплексний метод складається з двох обчислювальних процедур:

- симплексний метод з натуральною основою;
- симплексний метод зі штучною основою.

Вибір конкретної обчислювальної процедури здійснюється після приведення початкової задачі лінійного програмування до її канонічного вигляду.

Для застосування симплексного методу з природним базисом ЗЛП у своїй канонічній формі повинна містити єдину підматрицю порядку m , і в цьому випадку початковий еталонний план (невід'ємний базисний розв'язок системи обмежень) є очевидним.

Симплексний метод зі штучною основою використовується при відсутності початкового еталонного плану початкової задачі лінійного програмування в канонічному вигляді. Така ситуація виникає, коли початкове обмеження містить знаки «дорівнює» або «більше або дорівнює».

У загальному випадку симплекс-метод складається з двох етапів:

1. *На першому етапі шукають допустимий розв'язок.*
2. *На другому етапі цей допустимий розв'язок удосконалюється до оптимального.*

Симплексний алгоритм застосовний для оптимізації лінійної цільової функції багатьох змінних, пов'язаних лінійними рівняннями обмежень, за умови, що рівняння обмежень і рівняння цільової функції є канонічними.

Система називається *канонічною системою*, якщо в кожному рівнянні є базисна змінна.

Базисні змінні – це невідомі змінні, які мають коефіцієнт, що дорівнює одиниці в одному з рівнянь системи (1.4) і не зустрічаються в інших рівняннях системи і в рівнянні цільової функції (1.5).

Небазисні змінні – це всі змінні, які не входять до базису, тобто ті, що в поточному симплекс-розв'язку дорівнюють нулю.

Нехай цільова мінімізована функція знаходиться в лінійній залежності від n невідомих $x_1, x_2, \dots, x_n$: при $x_i \geq 0$, де $i = 1, 2, \dots, n$.

Рівняння обмежень мають наступний канонічний вигляд:

$$\begin{cases} x_1 + a_{1,m+1}x_{m+1} + a_{1,m+2}x_{m+2} + \dots + a_{1,s}x_s + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ x_2 + a_{2,m+1}x_{m+1} + a_{2,m+2}x_{m+2} + \dots + a_{2,s}x_s + \dots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \dots \\ x_r + a_{r,m+1}x_{m+1} + a_{r,m+2}x_{m+2} + \dots + a_{r,s}x_s + \dots + a_{r,n}x_n = b_r \\ \dots \\ x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + a_{m,m+2}x_{m+2} + \dots + a_{m,s}x_s + \dots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases} \quad (1.4)$$

$$C_{m+1}x_{m+1} + C_{m+2}x_{m+2} + \dots + C_sx_s + \dots + C_nx_n = Z - Z_0 \quad (1.5)$$

де $x_1, x_2, \dots, x_m$ – базисні змінні, число базових змінних дорівнює m , число невідомих – n , причому $a_n > m$, а $x_i = 0$.

Якщо система (1.4) канонічного виду, в кожному рівнянні обмежень є базисна змінна – можна записати перший допустимий розв'язок: все небазисні змінні ($x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$) дорівнюють нулю, все базисні змінні ($x_1, x_2, \dots, x_m$) дорівнюють вільним членам $b_1, b_2, \dots, b_m$ і мінімізуюча функція Z дорівнює Z_0 .

Подальший обчислювальний процес більш зручний, якщо умови задачі записати в наступну симплексну таблицю:

Базис	c^b	c_1	c_2	$\dots$	c_{n+1}	$\dots$	c_{n+k}	b_i	
		x_1	x_2	$\dots$	x_{n+1}	$\dots$	x_{n+k}		

Критерій оптимальності цільової функції Z полягає в невід'ємності всіх коефіцієнтів C_j в системі (1.5) при пошуку мінімального значення Z ($C_j \geq 0$) і в недодатному всіх коефіцієнтів C_j в системі (1.5) при знаходженні максимального значення Z ($C_j \leq 0$).

Якщо всі $C_j \geq 0$, то будь-яка зміна небазисних змінних через їх від'ємність може або збільшувати значення Z , або зберігати його, що доводить оптимальність цього розв'язку.

Якщо хоча б один з коефіцієнтів в системі (1.5) $C_j < 0$, то зменшити Z можна за рахунок збільшення x_j . При цьому невідоме x_j виводиться з числа неосновних (про нього говорять, що він входить в базис).

Якщо кілька коефіцієнтів C_j в рівнянні цільової функції (1.5) від'ємні, то для прискорення процесу оптимізації доцільно вибирати коефіцієнт з найменшим значенням, тобто з найбільшим абсолютним значенням.

Позначимо такий найменший коефіцієнт через $C_s = \min(C_j)$, причому $C_s < 0$.

У базис буде введено невідому x_s . При введенні x_s в базис значення Z буде зменшуватися, оскільки добуток на $C_s \cdot x_s < 0$.

Якщо деякі $a_{i,s} > 0$, то є обмеження на збільшення величини x_s . У цьому випадку відповідні базисні змінні x_i будуть знижуватись і, як тільки хоч один з них досягне нульового значення, подальші збільшення x_s будуть неприпустимі.

Раніше всіх досягне нульового значення та базисна зміна x_i , для якої відношення $b_i/a_{i,s}$ буде мінімальним. Граничне значення x_s визначається з умови: $x_s = \min(b_i/a_{i,s})$, де $a_{i,s} > 0$.

При такому значенні x_s одна з базисних змінних x_i приймають нульове значення, тобто базисна величина x_i виводиться з базису в число небазисних змінних. Вибір індексу r визначається умовою $b_r/a_{r,s} = \min(b_i/a_{i,s})$, де $a_{i,s} > 0$.

Перш ніж приступити до подальшої оптимізації, необхідно привести систему граничних рівнянь і цільову функцію до її канонічного вигляду.

Для цього нову базову змінну x_s слід виключити з усіх рівнянь (1.4), крім рівняння прямої r , де коефіцієнт при x_s повинен дорівнювати одиниці.

З рівняння прямої r виражають змінну x_s та підставляють отриманий вираз в усі інші рівняння таблиці. *Перший крок оптимізації завершено.*

Після цього формується нова симплекс-таблиця, і процес оптимізації продовжується за тим самим алгоритмом.

Зауваження. У деяких випадках мінімальне відношення може виявитися однаковим для кількох рядків. Тоді виникає необхідність вибору єдиного ведучого рядка, оскільки довільний вибір може призвести до зациклення симплекс-методу (вироджений випадок). Щоб цього уникнути, *рекомендується робити цей вибір за наступним правилом: для даних рядків таблиці обчислюються такі відношення: a_{i1}/a_{is} і знаходиться рядок, для якого це відношення є мінімальним. Якщо такий рядок один, то він вважається ведучим. В іншому випадку обчислюються наступні співвідношення: a_{i2}/a_{is} , a_{i3}/a_{is} тощо. У результаті отримують єдиний ведучий рядок.*

Попри те що симплексний метод є досить ефективним алгоритмом, який показав хороші результати при розв'язанні прикладних задач лінійного програмування, він являє собою алгоритм з експоненціальною складністю. Причиною цього є комбінаторний характер симплексного методу, який

послідовно перебирає вершини багатогранника допустимих рішень у пошуках оптимального розв'язку.

1.2.4. Застосування симплексного метода в галузі електроенергетики

Симплексний метод широко застосовується в галузі енергетики для розв'язання задач оптимізації, зокрема при плануванні виробництва, розподілі ресурсів і мінімізації витрат. Основні напрямки застосування:

1. **Оптимальне управління генерацією електроенергії.** Використовується для визначення оптимальної кількості виробленої енергії різними станціями (тепловими, гідро, вітровими тощо) з урахуванням обмежень на витрати палива, екологічні норми та бюджет.

2. **Розподіл навантаження.** Симплексний метод дозволяє оптимально розподілити навантаження між генераторами, враховуючи ефективність кожного генератора, вартість виробництва та технічні обмеження.

3. **Моделювання енергетичних систем** застосовується для аналізу енергосистем у випадках, коли потрібно врахувати множинні обмеження, такі як транспорт енергії, викиди вуглецю, використання відновлюваних джерел.

4. **Планування розвитку енергетичної інфраструктури** допомагає визначити найбільш економічно доцільні проекти (наприклад, будівництво нових станцій або модернізацію існуючих) із максимальним економічним ефектом.

Симплексний метод надає потужний інструмент для прийняття оптимальних рішень, особливо в умовах обмежених ресурсів і жорстких вимог до ефективності. Він значно покращує стратегічне планування в енергетичній галузі.

Розглянемо застосування симплексного методу на прикладах виробничих задач. Для початку продовжимо розв'язання **прикладу 1.1** симплекс-методом.

Розв'язання. Нагадаємо, що згідно умови задачі було сформульовано задачу лінійного програмування:

$$Z = 30x_1 + 40x_2 \rightarrow \max$$

за умов:

$$\begin{cases} x_1 \geq 800 \\ x_2 \geq 1200 \\ x_1 \leq 1500 \\ x_2 \leq 2000 \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 9000 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 7000 \\ 2x_1 + 6x_2 \leq 9000 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Оскільки у задачі є обмеження типу $x_1 \geq 800$ та $x_2 \geq 1200$, для коректного старту симплекс-методу ми виконаємо заміну змінних:

Нехай $x_1 = 800 + \Delta x_1$ та $x_2 = 1200 + \Delta x_2$, де $\Delta x_1, \Delta x_2 \geq 0$. Це дозволить нам почати з точки, яка вже задовольняє мінімальні потреби міст.

Для приведення задачі до канонічного вигляду підставимо $x_1 = 800 + \Delta x_1$ та $x_2 = 1200 + \Delta x_2$ в обмеження палива:

$$3(800 + \Delta x_1) + 5(1200 + \Delta x_2) \leq 9000 \Rightarrow 3\Delta x_1 + 5\Delta x_2 \leq 600,$$

$$4(800 + \Delta x_1) + 3(1200 + \Delta x_2) \leq 7000 \Rightarrow 4\Delta x_1 + 3\Delta x_2 \leq 200,$$

$$2(800 + \Delta x_1) + 6(1200 + \Delta x_2) \leq 9000 \Rightarrow 2\Delta x_1 + 6\Delta x_2 \leq 200.$$

Тоді цільова функція буде мати вигляд:

$$Z = 30(800 + \Delta x_1) + 40(1200 + \Delta x_2) = 72000 + 30\Delta x_1 + 40\Delta x_2 \rightarrow \max.$$

Додамо слабкі змінні s_1, s_2, s_3 для перетворення у рівняння:

$$3x_1 + 5x_2 + s_1 = 600,$$

$$4x_1 + 3x_2 + s_2 = 200,$$

$$2x_1 + 6x_2 + s_3 = 200,$$

$$Z - 30x_1 - 40x_2 = 72000.$$

Перейдемо до наступного кроку – формуванню симплекс-таблиці (ітерація 1).

Базис	Δx_1	Δx_2	s_1	s_2	s_3	Вільний член (В.ч.)
s_1	3	5	1	0	0	600
s_2	4	3	0	1	0	200
s_3	2	6	0	0	1	200
Z	-30	-40	0	0	0	72000

Визначимо ведучий стовпець, для цього знайдемо найменший коефіцієнт у рядку Z , а це -40 (стовпець Δx_2). Для визначення ведучого рядка обчислимо відношення вільного члена до елементів стовпця Δx_2 :

$$600/5 = 120 \text{ (для } s_1),$$

$$200/3 = 66,67 \text{ (для } s_2),$$

$$200/6 = 33,33 \text{ (для } s_3).$$

Серед знайдених значень оберемо найменше – це і буде ведучий елемент, у нашому випадку значення в рядку s_3 та стовпцю Δx_2 (зафарбовано блакитним).

Приведемо отриманий ведучий елемент до 1, поділивши третій рядок на 6.

Базис	Δx_1	Δx_2	s_1	s_2	s_3	В. ч.
s_1	1,33	0	1	0	-0,83	433,33
s_2	3	0	0	1	-0,5	100
Δx_2	0,33	1	0	0	0,17	33,33
Z	-16,67	0	0	0	6,67	73333,33

Рядки s_1, s_2, Z оновлено за методом Гаусса, наприклад, $Z_{new} = Z_{old} - (-40) \times (\Delta x_2)_{new}$.

У сформованій таблиці у рядку Z від'ємний коефіцієнт -16,67 (стовпець Δx_1) вказує на ведучий стовпець, для визначення ведучого рядка обчислимо співвідношення:

$$433,33 / 1,33 = 325,8;$$

$$100 / 3 = 33,33;$$

$$33,33 / 0,33 = 100.$$

Ведучий елемент знаходиться у рядку s_2 , що відповідає значенню 3.

Під час оновлення таблиці приводимо значення до 1 та 0 поділивши рядок s_2 на 3, нулі робимо в інших рядках стовпця Δx_1 .

Базис	Δx_1	Δx_2	s_1	s_2	s_3	В. ч.
s_1	0	0	1	-0,44	-0,61	388,89
Δx_1	1	0	0	0,33	-0,17	33,33
Δx_2	0	1	0	-0,11	0,22	22,22
Z	0	0	0	5,56	3,89	73888,89

У таблиці у рядку Z всі коефіцієнти $\Delta x_1, \Delta x_2, s_1, s_2, s_3$ невід'ємні 0, 0, 0, 5,56, 3,89, отже, оптимальний розв'язок знайдено.

Повертаємося від дельт до основних змінних:

$$x_1 = 800 + \Delta x_1 = 800 + 33,33 = 833,33 \text{ МВт};$$

$$x_2 = 1200 + \Delta x_2 = 1200 + 22,22 = 1222,22 \text{ МВт}.$$

Максимальний прибуток:

$$Z = 30(833,33) + 40(1222,22) = 25000 + 48888,8 = 73888,8 \text{ млн грн.}$$

Відповідь: для отримання максимального прибутку в 73,89 млрд грн Станція 1 має виробляти 833,33 МВт, а Станція 2 – 1222,22 МВт.

Приклад 1.2. Енергетичне підприємство використовує три основні ресурси для виробництва електроенергії: паливо, обладнання та електричну енергію. Виробництво може здійснюватися двома технологічними способами. Витрати кожного ресурсу за один місяць роботи за кожним способом, а також загальний доступний обсяг ресурсів наведено в таблиці (в умовних одиницях) [43].

Ресурс	Витрати за 1 місяць за 1-м способом	Витрати за 1 місяць за 2-м способом	Загальний ресурс
Паливо	3	5	30
Обладнання	2	3	15
Електроенергія	4	3	45

За першим способом підприємство виробляє 10 МВт·год електроенергії за один місяць, за другим способом – 15 МВт·год за один місяць. Визначити, скільки місяців підприємство має працювати за кожним із двох способів, щоб, не перевищуючи наявні ресурси, забезпечити максимально можливий сумарний випуск електроенергії.

Розв'язання. Сформулюємо математичну модель ситуації, що розглядається. Для цього позначимо через x_1 кількість місяців роботи за першим способом, а через x_2 – за другим способом. Метою є максимізація сумарного випуску електроенергії:

$$Z = 10x_1 + 15x_2 \rightarrow \max.$$

Враховуючи обмеження ресурсів, маємо систему нерівностей:

$$\text{паливо } 3x_1 + 5x_2 \leq 30,$$

$$\text{обладнання } 2x_1 + 3x_2 \leq 15,$$

$$\begin{aligned} &\text{електроенергія } 4x_1 + 3x_2 \leq 45, \\ &\text{умова невід'ємності } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Для перетворення нерівностей у рівняння додамо слабкі змінні s_1, s_2, s_3 , які позначають залишки відповідних ресурсів:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 + s_1 &= 30, \\ 2x_1 + 3x_2 + s_2 &= 15, \\ 4x_1 + 3x_2 + s_3 &= 45. \end{aligned}$$

Цільова функція у формі для симплекс-таблиці:

$$Z - 10x_1 - 15x_2 = 0.$$

Побудуємо початкову таблицю симплекс-методу (ітерація 1).

Базис	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	В. ч.
s_1	3	5	1	0	0	30
s_2	2	3	0	1	0	15
s_3	4	3	0	0	1	45
Z	-10	-15	0	0	0	0

Виберемо ведучий стовпець: найменший коефіцієнт у рядку Z – це -15 (стовпець x_2). Ведучий рядок визначимо обчислюючи відношення В. ч./ x_2 :

$$\begin{aligned} 30/5 &= 6 \text{ (для } s_1), \\ 15/3 &= 5 \text{ (для } s_2) - \text{шуканий мінімум,} \\ 45/3 &= 15 \text{ (для } s_3). \end{aligned}$$

Отже, ведучим елементом буде 3 (рядок s_2 , стовпець x_2).

Для приведення ведучого елемента до 1 поділимо другий рядок на 3:

Базис	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	В. ч.
s_1	3	5	1	0	0	30
x_2	0,67	1	0	0,33	0	5
s_3	4	3	0	0	1	45
Z	-10	-15	0	0	0	0

Приведемо стовпець x_2 до вигляду 0, 1, 0, 0:

$$\begin{aligned} \text{рядок } s_1: (s_1) - 5 \times (x_2), \\ \text{рядок } s_3: (s_3) - 3 \times (x_2), \\ \text{рядок } Z: (Z) - (-15) \times (x_2). \end{aligned}$$

Таким самим чином проведемо оновлення інших рядків (ітерація 2).

Базис	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	В. ч.
s_1	-0,33	0	1	-1,67	0	5
x_2	0,67	1	0	0,33	0	5
s_3	2	0	0	-1	1	30
Z	0	0	0	5	0	75

В отриманій таблиці у рядку Z всі коефіцієнти при змінних x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 є невід'ємними 0, 0, 0, 5, 0.

Примітка: коефіцієнт при x_1 став рівним 0, що вказує на можливість існування альтернативних оптимальних планів, але поточний план уже є оптимальним.¹

Таким чином, $x_1 = 0$ місяців (робота за 1-м способом), $x_2 = 5$ місяців (робота за 2-м способом), тоді максимальний сумарний випуск:

$$Z = 10 \times 0 + 15 \times 5 = 75 \text{ МВт} \cdot \text{год}$$

Відповідь: підприємство має працювати 5 місяців за другим способом і 0 місяців за першим, що дозволить виробити 75 МВт·год енергії, повністю використавши ресурси палива та обладнання ($s_1 = 5$ вказує на залишок палива, а $s_2 = 0$ та $s_3 = 30$ на використання інших ресурсів).

Приклад 1.3. Енергетична компанія експлуатує три типи електростанцій: газову, вугільну та сонячну. Кожна з них характеризується власною продуктивністю та потребує різних ресурсів для роботи. При плануванні виробництва компанія обмежена загальним бюджетом, допустимим рівнем викидів вуглекислого газу та площею, яку можна виділити під сонячні панелі.

Відомо, що:

- газова електростанція за один день роботи виробляє 50 МВт·год електроенергії, потребує витрат у розмірі 4000 доларів і спричиняє 100 т викидів CO_2 ;

- вугільна електростанція виробляє 70 МВт·год за день, має вартість експлуатації 5000 доларів і генерує 200 т CO_2 ;

- сонячна електростанція виробляє 30 МВт·год за день, потребує 3000 доларів, не створює викидів CO_2 , але займає 5 га площі.

Доступні ресурси підприємства становлять:

- загальний бюджет – 50 000 доларів,
- максимально допустимий обсяг викидів – 1000 т CO_2 ,
- доступна площа для сонячних панелей – 20 га.

Визначити, скільки днів повинна працювати кожна з трьох електростанцій, щоб за наявних ресурсних обмежень забезпечити максимально можливий сумарний обсяг виробництва електроенергії.

Розв'язання. Побудуємо математичну модель, позначивши через x_1 – кількість днів роботи газової станції, x_2 – вугільної, x_3 – сонячної. Метою є максимізація сумарного випуску електроенергії:

$$Z = 50x_1 + 70x_2 + 30x_3 \rightarrow \max.$$

Також врахуємо систему обмежень (бюджет, викиди, площа та умову невід'ємності відповідно):

$$4000x_1 + 5000x_2 + 3000x_3 \leq 50000 \text{ (для зручності проведення підрахунків поділимо на 1000: } 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 50),$$

$$100x_1 + 200x_2 \leq 1000 \text{ (поділимо на 100: } x_1 + 2x_2 \leq 10),$$

¹ Зверніть увагу! *Базисні змінні* – це змінні, що перелічені в крайньому лівому стовпці «Базис». Дані змінних s_1, x_2 та s_3 ми беремо прямо зі стовпця В.ч.: $s_1 = 5, x_2 = 5, s_3 = 30$. *Небазисні змінні* – це змінні, які відсутні у стовпці «Базис». За правилами симплекс-методу, значення всіх небазисних змінних автоматично дорівнюють нулю, отже, $x_1 = 0, s_2 = 0$.

$$5x_3 \leq 20 \text{ (або } x_3 \leq 4),$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Додамо слабкі змінні s_1, s_2, s_3 для перетворення нерівностей у рівняння:

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + s_1 = 50 \\ x_1 + 2x_2 + s_2 = 10 \\ 5x_3 + s_3 = 20 \\ Z - 50x_1 - 70x_2 - 30x_3 = 0 \end{cases}.$$

З урахуванням отриманої системи рівнянь сформуємо початкову симплекс-таблицю (ітерація 1).

Базис	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	В. ч.
s_1	4	5	3	1	0	0	50
s_2	1	2	0	0	1	0	10
s_3	0	0	5	0	0	1	20
Z	-50	-70	-30	0	0	0	0

Найменший коефіцієнт у рядку Z – це -70, отже, ведучим буде стовпець x_2 . Ведучий елемент буде 2 (рядок s_2 , стовпець x_2), оскільки

$$50/5=10,$$

$$10/2=5 \text{ (мінімум)}$$

Далі приведемо елементи до 1 поділивши другий рядок на 2, та проведемо оновлення інших рядків (наприклад, $Z_{new} = Z_{old} + 70 \times x_2$) (ітерація 2).

Базис	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	В. ч.
s_1	1,5	0	3	1	-2,5	0	25
x_2	0,5	1	0	0	0,5	0	5
s_3	0	0	5	0	0	1	20
Z	-15	0	-30	0	35	0	350

Найменший у Z елемент -30, отже стовпець x_3 є ведучим.

$$25/3=8,33,$$

$$20/5=4 \text{ (мінімум),}$$

отже ведучий елемент 5 (рядок s_3 , стовпець x_3).

Оновимо дані, поділивши третій рядок на 5.

Базис	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	В. ч.
s_1	1,5	0	0	1	-2,5	-0,6	13
x_2	0,5	1	0	0	0,5	0	5
x_3	0	0	1	0	0	0,2	4
Z	-15	0	0	0	35	6	470

Залишився один від'ємний елемент -15 (стовпець x_1), ведучий елемент знаходиться в рядку s_1 , стовпцю x_1 – 1,5:

$$13/1,5=8,67 \text{ (мінімум),}$$

$$5/0,5=10.$$

Оформлюємо фінальну таблицю, поділивши перший рядок на 1,5 та оновивши інші рядки.

Базис	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	В. ч.
x_1	1	0	0	0,67	-1,67	-0,4	8,67
x_2	0	1	0	-0,33	1,33	0,2	0,67
x_3	0	0	1	0	0	0,2	4
Z	0	0	0	10	10	0	600

У рядку Z всі коефіцієнти при змінних невід'ємні (0, 0, 0, 10, 10, 0), отже, оптимальний розв'язок знайдено. Небазисними змінними є s_1 та s_2 . Оскільки коефіцієнт при s_3 у рядку Z також дорівнює 0, це вказує на можливість альтернативного оптимуму (але ми вже маємо максимальне значення).

Значення змінних:

$$\begin{aligned}x_1 &= 8,67 \text{ (газова станція),} \\x_2 &= 0,67 \text{ (вугільна станція),} \\x_3 &= 4,00 \text{ (сонячна станція).}\end{aligned}$$

Максимальний прибуток (вироблена енергія):

$$Z = 50(8,67) + 70(0,67) + 30(4) = 433,5 + 46,9 + 120 = 600,4 \text{ МВт}\cdot\text{год.}$$

Відповідь: для отримання максимального обсягу електроенергії у 600,4 МВт·год підприємство має забезпечити роботу газової станції протягом 8,67 днів, вугільної – 0,67 днів, а сонячної – 4 днів. При цьому бюджет та ліміт викидів будуть використані повністю.

На основі розв'язаних задач та принципів лінійного програмування, можна сформулювати загальний алгоритм симплекс-методу.

Алгоритм розв'язання задачі симплекс-методом

1. Побудова математичної моделі:

- визначаються шукані змінні $x_1, x_2, \dots, x_n$;
- формулюється цільова функція Z , яку необхідно максимізувати або мінімізувати;
- записується система лінійних обмежень на ресурси у вигляді нерівностей.

2. Приведення задачі до канонічного вигляду:

- нерівності виду « $\leq$ » перетворюються на рівняння шляхом додавання додаткових (слабких) змінних s_n , які позначають невикористані ресурси;
- цільова функція перетворюється на вигляд рівняння, де всі змінні знаходяться з одного боку, а вільний член – з іншого ($Z - c_1x_1 - c_2x_2 \dots = 0$).

3. Формування початкової симплекс-таблиці:

- коефіцієнти системи обмежень та цільової функції заносяться до спеціальної таблиці;
- за початковий базис зазвичай обираються додаткові змінні s_n .

4. Перевірка плану на оптимальність:

- аналізується рядок цільової функції Z : якщо в задачі на максимізацію всі коефіцієнти при змінних у рядку Z невід'ємні ≥ 0 , поточний план є оптимальним; якщо є від'ємні коефіцієнти, план можна покращити.

5. Вибір ведучого стовпця та рядка:

— для визначення ведучого стовпця обирається стовпець з найбільшим за модулем від'ємним коефіцієнтом у рядку Z (це змінна, що вводиться до базису);

— для визначення ведучого рядка для кожного рядка обчислюється відношення вільного члена до додатного елемента ведучого стовпця, а потім обирається рядок з мінімальним результатом – це змінна, що виводиться з базису;

— для визначення ведучого елемента визначаємо число, що знаходиться на перетині ведучого стовпця та рядка.

6. Перерахунок таблиці (Метод Гаусса-Жордана):

— ведучий елемент приводиться до одиниці (весь рядок ділиться на його значення);

— всі інші елементи у ведучому стовпці обнуляються за допомогою елементарних перетворень рядків.

7. Повторення ітерацій:

— процес повторюється з п. 4 доти, доки в рядку цільової функції не зникнуть від'ємні коефіцієнти (для задачі на максимум) та всі додатні (для задачі на мінімум)².

8. Формулювання відповіді. З фінальної таблиці виписуються значення змінних (вони дорівнюють вільним членам відповідних базисних рядків) та максимальне значення цільової функції.

1.2.5. Нелінійне програмування

Загальна задача оптимізації полягає у пошуку екстремуму цільової функції

$$Z(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \text{extr}$$

n змінних, при m обмеженнях, заданих у формі рівнянь і/або нерівностей

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_1 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq b_2 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_m \end{cases}$$

і граничних умов, які задають діапазон змін d_i

$$< x_i < D_i, i = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (1.6)$$

Якщо в математичній моделі оптимізаційної задачі присутні нелінійні залежності, для розв'язування такої задачі використовуються методи нелінійного програмування.

Більшість реальних оптимізаційних задач є нелінійними. Нелінійна цільова функція може мати один або декілька екстремумів. Існуючі методи нелінійного програмування дозволяють знайти один екстремум цільової функції і не дають відповіді на питання: чи є цей екстремум локальним чи глобальним?

² Для розв'язання задачі на мінімізацію часто використовують метод переходу до максимізації шляхом зміни знаків усіх коефіцієнтів цільової функції за правилом $\min Z = -\max (-Z)$, що дозволяє застосувати стандартний алгоритм симплекс-методу, після чого отриманий результат цільової функції знову змінюють на протилежний для отримання фінальної відповіді.

Тому при багатоекстремальній цільовій функції діапазон змінних (1.6) розбивається на ряд вузких діапазонів, наприклад,

$$d_i < x_i < a_i, a_i < x_i < b_i, b_i < x_i < D_i, i = 0, 1, 2, \dots, n, \quad (1.7)$$

в кожному з яких відшукують локальний екстремум цільової функції. З отриманих локальних екстремумів обирається глобальний екстремум.

Для випадку (1.7) оптимізаційна задача розв'язується три рази: в діапазоні змін $d_i < x_i < a_i$, в діапазоні $a_i < x_i < b_i$ і в діапазоні $b_i < x_i < D_i$. В результаті отримаємо три локальні екстремуми. З трьох локальних екстремумів обирається глобальний екстремум.

Найпростішими задачами нелінійного програмування є задачі безумовної оптимізації, в яких відшукуються абсолютний екстремум цільової функції без обмежень і граничних умов.

З курсу вищої математики відомо, в точці екстремуму (мінімуму, максимуму) нелінійної функції всі її частинні похідні дорівнюють нулю. Отже, для знаходження екстремуму нелінійної функції n змінних необхідно визначити її частинні похідні за всіма змінними і прирівняти їх до нуля. Розв'язання отриманої системи n рівнянь з n невідомими дасть значення змінних, при яких досягається екстремум функції.

Варто відмітити, що точний розв'язок системи рівнянь, в загальному випадку системи нелінійних рівнянь, представляє собою достатньо складну задачу. Тому для пошуку екстремуму нелінійної функції часто використовують інші методи, наприклад градієнтні методи.

Задачі безумовної мінімізації на практиці зустрічаються рідко, однак методи їх розв'язування є основою розв'язування більшості практичних задач умовної оптимізації. У таких задачах відшукується умовний екстремум цільової функції, тобто екстремум функції при наявності обмежень і граничних умов.

У більшості практичних оптимізаційних задач шукані змінні набувають тільки додатні або нульові значення. У цьому випадку граничні умови будуть мати вигляд

$$x_i > 0, i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Методи нелінійного програмування

Нелінійні оптимізаційні задачі можуть мати складну структуру, кілька локальних екстремумів і різні типи обмежень. Тому для їх розв'язування застосовують спеціальні чисельні методи, які можна умовно поділити на кілька груп.

1. Градієнтні методи використовують інформацію про похідні цільової функції:

- метод найшвидшого спуску – рух у напрямку, протилежному градієнту, з вибором оптимального кроку. Підходить для гладких функцій, але може збігатися повільно;

- метод Ньютона використовує градієнт і матрицю Гессе. Має квадратичну швидкість збіжності, але вимагає обчислення другої похідної;

- квазі-Ньютонівські методи наближено відтворюють Гессе, зберігаючи високу швидкість збіжності. Є стандартом у практичних задачах оптимізації.

2. Методи умовної оптимізації для задач із обмеженнями застосовують спеціальні підходи.

- метод множників Лагранжа дозволяє знайти стаціонарні точки при рівняннях-обмеженнях, використовується для аналітичного розв'язування простих задач;

- метод штрафних функцій переносить обмеження в цільову функцію у вигляді штрафів за їх порушення, дає можливість застосовувати методи безумовної оптимізації;

- бар'єрні методи забезпечують рух усередині допустимої області, «відштовхуючись» від меж, є основою сучасних внутрішньоточкових алгоритмів;

- метод проєкцій градієнта полягає в проєктуванні точки на допустиму область після кожного кроку, є ефективним при простих обмеженнях типу $x_i \geq 0$.

3. Методи глобальної оптимізації застосовуються, коли функція має багато локальних екстремумів:

- метод перебору діапазонів (розбиття області) відповідає підходу, описаному у формулі (1.7): область поділяється на підобласті, у кожній знаходиться локальний екстремум;

- стохастичні методи (генетичні алгоритми, імітація відпалу) дають змогу уникати «застрягання» в локальних мінімумах, використовуються для складних, негладких функцій;

- методи рою частинок, еволюційні стратегії працюють без похідних, добре підходять для задач із шумом або дискретними параметрами.

4. Методи для опуклих задач застосовуються, коли цільова функція та область допустимих розв'язків є опуклими, і тоді задача має лише один глобальний мінімум:

- внутрішньоточкові методи є найефективнішими для великих опуклих задач, використовуються в сучасних пакетах оптимізації (Matlab, Gurobi, CVX);

- метод субградієнтів працює для негладких опуклих функцій.

5. Чисельні методи без похідних застосовуються, коли похідні недоступні або функція не є гладкою:

- метод Нелдера-Міда (симплекс-метод у просторі параметрів³) працює з геометричним симплексом, не потребує похідних, добре підходить для задач малої розмірності;

- метод координатного спуску, при якій оптимізація відбувається по одній змінній за раз. Метод простий, але може бути повільним.

Методи нелінійного програмування вибирають залежно від гладкості функції, наявності обмежень, розмірності задачі, кількості локальних екстремумів, доступності похідних.

³ Тут назва «симплекс-метод» не має відношення до класичного симплекс-методу Данціґа. У методі Нелдера–Міда термін «симплекс» означає геометричну фігуру (трикутник, тетраедр тощо), яка деформується під час пошуку мінімуму нелінійної функції. У симплекс-методі Данціґа «симплекс» – це опуклий багатогранник допустимих розв'язків задачі лінійного програмування, а алгоритм рухається між його вершинами. Це два різні методи, що збігаються лише за назвою.

У практиці енергетики, економіки та технічних наук найчастіше застосовують градієнтні методи, методи штрафів і бар'єрів, внутрішньоточкові методи, стохастичні алгоритми для глобальної оптимізації.

1.2.6. Нелінійні оптимізаційні задачі в енергосистемах

Задача оптимального розподілу активної потужності в енергосистемі.

Однією з важливих оптимізаційних задач електроенергетики є розподіл сумарної активної потужності споживачів енергосистеми між електричними станціями цієї системи. Розглянемо це завдання у загальному вигляді найпростішого випадку, коли в енергосистемі є лише теплові електростанції, які працюють на одному виді палива.

В існуючій енергосистемі необхідно так розподіляти активне навантаження між електростанціями, щоб витрати на вироблення електроенергії були б мінімальними. Основною складовою цих витрат є вартість палива. Тому як цільової функції, що мінімізується, приймемо сумарну витрату палива в енергосистемі.

Нехай у енергосистемі є n теплових електростанцій. Для агрегатів кожної електростанції відомі витратні показники, тобто, залежності витрати палива B від активної потужності P , що виробляється станцією. Ці видаткові характеристики мають нелінійний характер і наступний загальний вигляд:

$$B_i(P_i), i = 1, 2, \dots, n.$$

Цільова функція буде являти собою суму таких нелінійних залежностей:

$$Z = B_1(P_1) + B_2(P_2) + \dots + B_n(P_n) \rightarrow \min. \quad (1.8)$$

В енергосистемі має бути баланс потужностей, у відповідності з яким сума потужностей, що виробляється станціями, повинна дорівнювати сумарній споживаній потужності

$$P_1 + P_2 + \dots + P_n = P_{\text{спож}}. \quad (1.9)$$

Вираз балансу активної потужності (1.9) і є технічним обмеженням в даній оптимізаційній задачі. Граничні умови будуть невід'ємними значеннями шуканих потужностей електростанцій

$$P_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.10)$$

Співвідношення (1.8), (1.9) і (1.10) є математичною моделлю поставленої оптимізаційної задачі, для розв'язання якої використаємо метод Лагранжа.

Складемо функцію Лагранжа

$$L = B_1(P_1) + B_2(P_2) + \dots + B_n(P_n) + \lambda(P_1 + P_2 + \dots + P_n - P_{\text{спож}}) \rightarrow \min.$$

Для визначення мінімуму функції Лагранжа обчислимо всі її частинні похідні і прирівняємо їх до нуля:

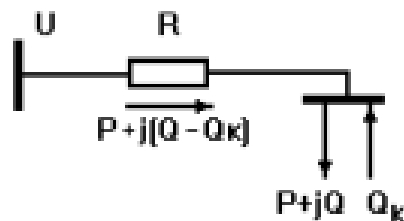
(1.11)

$$\frac{\partial B_1}{\partial P_1} = \frac{\partial B_2}{\partial P_2} = \dots = \frac{\partial B_n}{\partial P_n}$$

Таким чином, оптимальний розподіл активної потужності між електростанціями має місце при рівності між собою похідних від видаткових характеристик кожної станції.

Більшість споживачів електроенергії, крім активної потужності, споживає і реактивну потужність. На відміну від активної потужності, реактивну потужність можна отримати безпосередньо у споживачів від спеціальних джерел реактивної потужності.

Основна ідея компенсації реактивної потужності полягає у наступному. Розглянемо найпростішу схему електропостачання (**рис. 4.7**), що включає лінію з активним опором R , що зв'язує джерело живлення напругою U і споживач потужністю $P + jQ$.



Втрати активної потужності в лінії за відсутності у споживача компенсуючого пристрою ($Q_k = 0$) складає

(1.12)

при встановленні у споживача компенсуючого пристрою ($Q_k \neq 0$) ці втрати зменшаться до величини

$$\Delta P = (P_2 + (Q - Q_k)^2 R) / U^2. \quad (1.13)$$

Таким чином, компенсація реактивної потужності дозволяє зменшити втрати активної потужності у схемі електропостачання та, отже, покращити техніко-економічні показники цієї схеми.

З виразів (1.12) і (1.13) видно, що втрати потужності P мають дві складові: втрати від протікання по лінії активної потужності P і втрати від протікання по лінії реактивної потужності Q або $(Q - Q_k)$. Оскільки компенсація реактивної потужності впливає лише на другу складову втрат, надалі розглядатимемо втрати від протікання лініями лише реактивних потужностей.

При проектуванні схеми електропостачання зазвичай мінімізуються грошові витрати на цю схему. Зниження втрат потужності за рахунок установки компенсуючих пристроїв зменшує витрати на схему, оскільки кожен втрачений кВт потужності необхідно виробити на електростанціях і, отже, витратити на це кошти. Однак і пристрої, що компенсують, вимагають грошових витрат.

У зв'язку з цим виникає завдання визначення оптимальної потужності пристроїв, що компенсують, що відповідає мінімуму сумарних витрат. Таке завдання відноситься до задачі безумовної оптимізації і може бути вирішена, наприклад, градієнтними методами.

Для системи електропостачання величина сумарної потужності компенсуючих пристроїв може бути заданою якимись технічними умовами. У цьому випадку задану потужність Q_k потрібно оптимально розподілити всередині системи електропостачання. Це вже завдання умовної оптимізації і вирішується, наприклад, методом Лагранжа.

Розглянемо таке завдання для радіальної схеми електропостачання (рис. 4.8). Джерело живлення має напругу U . Від цього джерела живляться n споживачів із реактивними потужностями $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$. Активні опори ліній між джерелом та споживачами становлять $R_1, R_2, \dots, R_n$. У кожного i -го споживача може встановлюватися пристрій, що компенсує потужністю Q_{ki} .

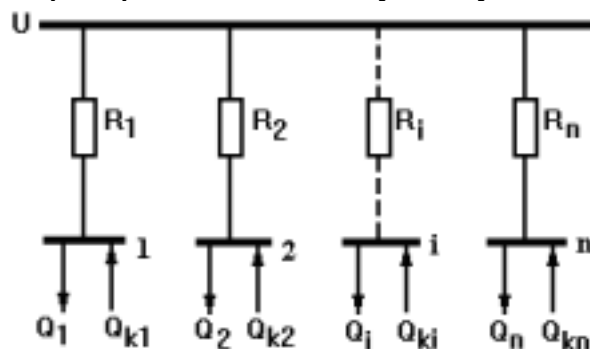


Рис. 4.8. Радіальна схема електропостачання

Потрібно знайти оптимальний розподіл між споживачами $1, 2, \dots, n$ заданої сумарної потужності компенсуючих пристроїв Q_k . Критерій оптимальності – мінімум втрат активної потужності у схемі.

Цільова функція, яка підлягає мінімізації, що представляє собою втрати активної потужності в схемі, має наступний вигляд:

$$\Delta P = \sum_{i=1}^n (Q_i - Q_{ki})^2 R_i / U^2 \rightarrow \min.$$

Відносний мінімум цільової функції шукається при обмеженні

$$\sum_{i=1}^n Q_{ki} = Q_k \text{ або } \sum_{i=1}^n Q_{ki} - Q_k = 0.$$

Запишемо функцію Лагранжа:

$$L = \sum_{i=1}^n (Q_i - Q_{ki})^2 R_i / U^2 + \lambda \left(\sum_{i=1}^n Q_{ki} - Q_k \right) \rightarrow \min.$$

Для пошуку мінімуму функції L обчислюємо її частинні похідні прирівнюємо їх до нуля:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial Q_{k1}} &= -\frac{2R_1(Q_1 - Q_{k1})}{U^2} + \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial Q_{k2}} &= -\frac{2R_2(Q_2 - Q_{k2})}{U^2} + \lambda = 0, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{\partial L}{\partial Q_{ki}} &= -\frac{2R_i(Q_i - Q_{ki})}{U^2} + \lambda = 0, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{\partial L}{\partial Q_{kn}} &= -\frac{2R_n(Q_n - Q_{kn})}{U^2} + \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= \sum_{i=1}^n Q_{ki} - Q_k = 0. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Аналіз систем (1.14) показує, що оптимальний розподіл заданої сумарної величини компенсуючих приладів Q_k в радіальній схемі електропостачання підпорядковується рівності

$$R_1(Q_1 - Q_{k1}) = R_2(Q_2 - Q_{k2}) = \dots = R_i(Q_i - Q_{ki}) = \dots = R_n(Q_n - Q_{kn}).$$

Розглянемо задачу оптимального розподілу заданої потужності компенсуючих приладів Q_k між споживачами $1, 2, \dots, n$ в магістральній схемі електропостачання (рис. 4.9).

Мінімізація цільової функції має вигляд:

$$\begin{aligned} \Delta P &= \frac{R_1(\sum_{i=1}^n Q_i - \sum_{i=1}^n Q_{ki})^2}{U^2} + \frac{R_2(\sum_{i=2}^n Q_i - \sum_{i=2}^n Q_{ki})^2}{U^2} + \dots + \\ &+ \frac{R_i(\sum_{i=i}^n Q_i - \sum_{i=i}^n Q_{ki})^2}{U^2} + \dots + \frac{R_n(Q_n - Q_{kn})^2}{U^2} \rightarrow \min. \end{aligned}$$

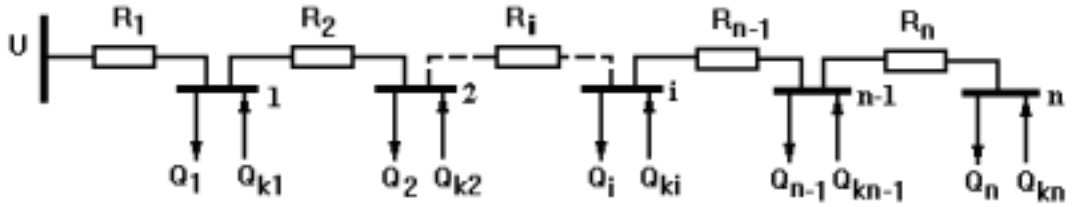


Рис. 4.9. Магістральна схема електропостачання

Відносний мінімум цільової функції знаходиться при обмеженні

$$\sum_{i=1}^n Q_{ki} = Q_k \quad \text{або} \quad \sum_{i=1}^n Q_{ki} - Q_k = 0.$$

Запишемо функцію Лагранжа

$$\begin{aligned} L = & \frac{R_1(\sum_1^n Q_i - \sum_1^n Q_{ki})^2}{U^2} + \frac{R_2(\sum_2^n Q_i - \sum_2^n Q_{ki})^2}{U^2} + \dots + \\ & + \frac{R_i(\sum_i^n Q_i - \sum_i^n Q_{ki})^2}{U^2} + \dots + \frac{R_n(Q_n - Q_{kn})^2}{U^2} + \lambda \left(\sum_1^n Q_{ki} - Q_k \right) \rightarrow \end{aligned} \quad (1.15)$$

$\rightarrow \min.$

Для пошуку мінімуму функції L обчислюється її частинні похідні і прирівнюються до нуля:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial Q_{k1}} &= -a_1 \left(\sum_1^n Q_i - \sum_1^n Q_{ki} \right) + \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial Q_{k2}} &= -a_1 \left(\sum_1^n Q_i - \sum_1^n Q_{ki} \right) - a_2 \left(\sum_2^n Q_i - \sum_2^n Q_{ki} \right) + \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial Q_{k3}} &= -a_1 \left(\sum_1^n Q_i - \sum_1^n Q_{ki} \right) - a_2 \left(\sum_2^n Q_i - \sum_2^n Q_{ki} \right) - \\ & \quad - a_3 \left(\sum_3^n Q_i - \sum_3^n Q_{ki} \right) + \lambda = 0, \\ & \quad \dots \dots \dots \\ \frac{\partial L}{\partial Q_{ki}} &= -a_1 \left(\sum_1^n Q_i - \sum_1^n Q_{ki} \right) - a_2 \left(\sum_2^n Q_i - \sum_2^n Q_{ki} \right) - \dots - \\ & \quad - a_i \left(\sum_i^n Q_i - \sum_i^n Q_{ki} \right) + \lambda = 0, \\ & \quad \dots \dots \dots \\ \frac{\partial L}{\partial Q_{k,n-1}} &= -a_1 \left(\sum_1^n Q_i - \sum_1^n Q_{ki} \right) - a_2 \left(\sum_2^n Q_i - \sum_2^n Q_{ki} \right) - \dots - \\ & \quad - a_i \left(\sum_i^n Q_i - \sum_i^n Q_{ki} \right) - \dots - a_{n-1} (Q_{n-1} + Q_n - Q_{k,n-1} - Q_{kn}) + \lambda = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial Q_{k2}} = & -a_1 \left(\sum_1^n Q_i - \sum_1^n Q_{ki} \right) - a_2 \left(\sum_2^n Q_i - \sum_2^n Q_{ki} \right) - \dots - \\ & -a_i \left(\sum_i^n Q_i - \sum_i^n Q_{ki} \right) - a_n (Q_n - Q_{kn}) + \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = & \sum_1^n Q_{ki} - Q_k = 0, \end{aligned}$$

де $a_i = 2R_i / U^2$.

З 1-го рівняння отриманої системи:

$$a_1 \left(\sum_1^n Q_i - \sum_1^n Q_{ki} \right) = \lambda \quad (1.16)$$

З урахуванням цього співвідношення з 2-го рівняння системи слідує, що

$$\left(\sum_2^n Q_i - \sum_2^n Q_{ki} \right) = 0. \quad (1.17)$$

Підставивши співвідношення (1.16) і (1.17) в третє рівняння системи, отримаємо

$$\left(\sum_3^n Q_i - \sum_3^n Q_{ki} \right) = 0. \quad (1.18)$$

і так далі. З третього знизу рівняння отриманої системи отримаємо

$$Q_{n-1} + Q_n - Q_{k,n-1} - Q_{kn} = 0. \quad (1.19)$$

З передостаннього рівняння системи отримаємо

$$Q_n - Q_{kn} = 0 \text{ або } Q_{kn} = Q_n. \quad (1.20)$$

Як видно з (1.20), у останнього n -го споживача варто установити компенсуючий прилад потужністю, що дорівнює реактивній потужності цього споживача. У цьому випадку кажуть про повну компенсацію реактивної потужності споживача.

Відповідно до (1.17), (1.18), (1.19) у $(n-1)$ -го, ... 3-го і 2-го споживачів також варто виконати повну компенсацію реактивної потужності.

Однак при розстановці компенсуючих приладів необхідно врахувати обмеження – останнє рівняння отриманої системи. Таким чином, в магістральній схемі електропостачання компенсуючі прилади варто встановити у відповідності з умовами повної компенсації реактивної потужності $Q_{ki} = Q_i$, починаючи від кінця магістральної схеми до її початку (від n -го споживача до 1-го споживача), до виконання умови $\sum Q_{ki} = Q_k$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Якщо у i -го споживача ця умова виконується, то у споживачів $1, 2, \dots, i-1$ компенсуючі пристрої не встановлюються.

Запитання для самоконтролю

1. Що таке математична модель? Наведіть приклади.
2. Які етапи побудови математичної моделі?

3. Які існують класифікації математичних моделей?
4. Що таке математичне моделювання та як воно пов'язане з реальними процесами?
5. Які завдання вирішуються за допомогою математичного моделювання?
6. Наведіть приклади математичного моделювання в енергетиці.
7. Як перевіряють адекватність математичної моделі?
8. Що таке задача оптимізації? Яка її загальна постановка?
9. Як класифікують задачі оптимізації за типом цільової функції?
10. Які оптимізаційні задачі найбільш характерні для енергетики?
11. Що таке лінійне програмування?
12. Як виглядає загальна форма задачі лінійного програмування?
13. Що таке допустиме розв'язання та область допустимих рішень?
14. У яких галузях енергетики найчастіше застосовується лінійне програмування?
15. Які основні методи розв'язання задач лінійного програмування?
16. У чому полягає суть геометричного методу?
17. Як працює симплекс-метод? Які етапи він включає?
18. Як можна застосувати симплекс-метод до задач енергетичного планування?

МАТРИЧНІ МЕТОДИ В ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИЦІ

- 2.1. Введення в матричні методи
- 2.2. Методи розв'язування систем лінійних рівнянь (метод Крамера, метод оберненої матриці)
- 2.3. Використання матриць для аналізу систем електропостачання
 - 2.3.1. Матричні способи подання графів електричних мереж
 - 2.3.2. Розрахунок розгалужених кіл постійного струму (метод вузлових потенціалів, метод контурних струмів)
 - 2.3.3. Аналіз мереж змінного струму
 - 2.3.4. Однофазні електричні кола синусоїдального струму

2.1. Введення в матричні методи

У теорії систем лінійних рівнянь, в диференціальних рівняннях та інших математичних об'єктах важливу роль відіграють матриці – таблиці чисел, за допомогою яких можна не тільки компактно записувати системи рівнянь, але і, виконуючи над ними певні операції, розв'язувати самі рівняння. Перейдемо до викладу основних понять і тверджень, пов'язаних з матрицями.

Матрицею розміру $m \times n$ називають таблицю чисел

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

яка складається з m рядків $(a_{i1}, \dots, a_{in})$ і n стовпців $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \equiv$

$\{a_{ij}, a_{2j}, \dots, a_{mj}\} (i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n})$. При цьому числа a_{ij} називаються **елементами матриці A** . Матриця A називається **квадратною матрицею розмірності m** , якщо кількість m її рядків збігається з кількістю стовпців ($n = m$).

Додавання і віднімання матриць – одна з найпростіших дій над ними, адже необхідно додавати або віднімати відповідні елементи двох матриць. Головне пам'ятати, що додавати і віднімати можна тільки матриці однакового розміру, тобто ті, у яких однакова кількість рядків і однакова кількість стовпців.

Наприклад, припустимо, що дано дві матриці однакового розміру 2×3 , тобто з двома рядками і трьома стовпцями:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & 3 \end{pmatrix} \text{ та } B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Сума двох матриць:

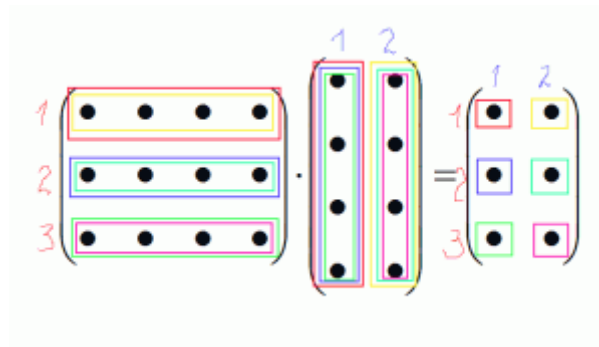
$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+3 & 1+2 & 2+6 \\ 0+1 & 8+4 & 3+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 8 \\ 1 & 12 & 8 \end{pmatrix}.$$

Множення матриці на число визначається рівністю

$$\alpha \cdot A \equiv \alpha \cdot (a_{ij}) \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha a_{ij})$$

(тобто при множенні матриці на число кожен елемент цього числа потрібно помножити на це число).

Матриці можуть бути помножені одна на одну тільки в тому випадку, якщо їх розміри узгоджені, тобто коли число стовпців першої матриці дорівнює числу рядків другої матриці:



Спочатку слід визначити добуток векторного рядка $a = (a_1, \dots, a_p)$ на вектор-стовпець $b = \{b_1, \dots, b_p\}$ (що має однакову кількість компонентів):

$$a \cdot b \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^p a_j b_j = a_1 b_1 + \dots + a_p b_p.$$

Наприклад,
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 7 & -1 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & -4 & 19 \\ -18 & 9 & -7 \\ 15 & -6 & 9 \end{bmatrix}.$$

Ще одна дія з матрицями – транспонування, тобто перетворення. **Транспонування матриці** – це операція, що перетворює матрицю $A = [a_{ij}]$ у матрицю A^T , де кожен елемент займає симетричне місце відносно головної діагоналі:

$$A_{ij}^T = A_{ji}.$$

Транспонування застосовують для узгодження розмірності при множенні матриць, аналізу симетричних властивостей та зміни орієнтації даних у математичних моделях.

Часто зустрічаються такі спеціальні типи матриць:

1. **Діагональна матриця** – квадратна матриця, у якій всі елементи, що не належать головній діагоналі, дорівнюють нулю.

$$\text{diag}(a_1, \dots, a_n) \equiv \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

2. **Одинична матриця** – діагональна матриця, у якій всі елементи головної діагоналі дорівнюють 1.

$$E \equiv I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

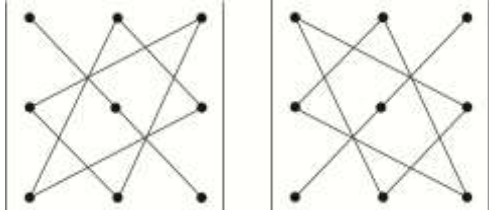
3. **Нульова матриця** – матриця, всі елементи якої дорівнюють нулю.
4. **Симетрична матриця** – квадратна матриця, яка дорівнює своїй транспонованій матриці.
5. **Антисиметрична матриця** – квадратна матриця, у якої транспонована матриця дорівнює мінус початковій.

Під час розв'язування задач часто виникає потреба обчислити **визначник** квадратної матриці (детермінант), оскільки визначник існує лише для квадратних матриць :

$$\det A \text{ або } \Delta$$

Визначник матриці найчастіше обчислюють двома найпоширенішими способами: за правилом трикутників (методом Сарруса) та за теоремою Лапласа.

1. Правило трикутників (правило Сарруса)

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ &= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - \\ &\quad - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}. \end{aligned}$$


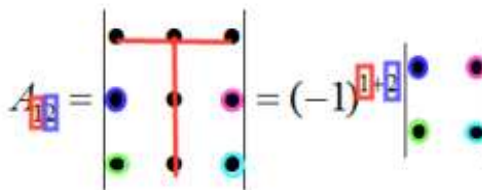
Розглянемо на прикладі правило Сарруса:

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 8 & -3 & 4 \\ 4 & 8 & 8 \end{vmatrix} = \\ &= 1 \cdot (-3) \cdot 8 + 4 \cdot 4 \cdot 4 + 8 \cdot 8 \cdot 8 - 8 \cdot (-3) \cdot 4 - 4 \cdot 8 \cdot 8 - 1 \cdot 4 \cdot 8 = 360. \end{aligned}$$

2. **Теорема Лапласа** або одна з властивостей визначника «Розкладання визначника на елементи деякого рядка».

Визначник матриці дорівнює сумі добутків елементів рядку (будь-якого рядка або стовпця) на відповідні їм алгебраїчні доповнення.

Для визначення алгебраїчного доповнення матриці необхідно піднести (-1) до степеня суми чисел рядка і стовпця і помножити отриманий вираз на мінор цієї матриці, тобто на визначник матриці, отриманий з вихідної матриці шляхом викреслення i -го рядка і j -го стовпця.



$$A_{11} = \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix}$$

Розглянемо приклад знаходження алгебраїчного доповнення елементів матриці. Нехай задано матрицю A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо алгебраїчні доповнення для двох елементів:

1. Для елемента, який знаходиться в першому рядку та першому стовпцю:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = (-1)^2 (5 \cdot 9 - 6 \cdot 8) = -3.$$

2. Для елемента, який знаходиться в третьому рядку та другому стовпцю:

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = (-1)^5 (1 \cdot 6 - 3 \cdot 4) = 6.$$

А тепер, використовуючи алгебраїчне доповнення матриці, знайдемо визначник матриці A , використовуючи теорему Лапласа. Розкладемо за першим рядком:

$$|A| = 1 \cdot (-1)^2 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^3 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3 + 12 - 9 = 0.$$

Основні властивості визначників

1) Транспонування матриці A не впливає на значення її визначника — детермінант залишається незмінним: $|A^T| = |A|$.

2) При перестановці будь-яких двох рядків (чи двох стовпців) матриці її визначник змінює знак на протилежний.

3) Визначник матриці, яка має нульовий рядок (або нульовий стовпець), дорівнює нулю.

4) Визначник матриці, елементи якої в одному рядку (або стовпці) пропорційні елементам іншого рядка (або стовпця), дорівнює нулю.

5) Якщо всі елементи одного рядка або стовпця матриці мають спільний множник, його можна винести за знак визначника як окремий множник:

$$\begin{vmatrix} ka_1 & ka_2 & ka_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

6) Якщо до якого-небудь рядка визначника додати інший рядок, помножений на будь-яке число k , то визначник не зміниться. Те ж буде і для стовпців визначника.

$$7) \text{ Сума визначників } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 + c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 + c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 + c_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

8) Визначник добутку двох квадратних матриць однієї і тієї ж розмірності дорівнює добутку визначників цих матриць: $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

Оборотність матриць. Обчислення оберненої матриці.

Квадратна матриця A оборотною, якщо існує квадратна матриця B (тієї ж розмірності) така, що $AB = BA = E$. При цьому матриця B називається оберненою до матриці A і позначається $B = A^{-1}$.

Теорема 1. Для того щоб матриця A була оборотною, необхідно і достатньо, щоб її визначник не дорівнював нулю (у цьому випадку матриця A називається невинродженою або неособливою матрицею). При цьому її обернена матриця має вигляд

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

Наприклад,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad - bc} & -\frac{b}{ad - bc} \\ -\frac{c}{ad - bc} & \frac{a}{ad - bc} \end{bmatrix}$$

або

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = -\frac{1}{32} \begin{bmatrix} -10 & -6 & 22 \\ -5 & -3 & -5 \\ 4 & -4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{16} & \frac{3}{16} & -\frac{11}{16} \\ \frac{5}{32} & \frac{3}{32} & \frac{5}{32} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}.$$

Системою лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), що містять m -лінійних рівнянь з n -невідомими, називається система виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases},$$

де числа a_{ij} , $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ називаються коефіцієнтами системи, числа a_{ij} – вільними членами, x_i – невідомі.

Позначимо:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} - \text{матриця системи (основна матриця),}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} - \text{матриця вільних членів,}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} - \text{матриця невідомих.}$$

Тоді, користуючись правилами множення матриць, систему запишемо у матричному вигляді:

$$A \cdot X = B.$$

Матриця, отримана з матриці A , приєднанням стовпця вільних членів, називається *розширеною матрицею системи лінійних рівнянь*.

$$A_p = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \text{ and } \overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Розв'язком системи називається набір значень невідомих

$$x_1 = c_1, x_2 = c_2, \dots, x_n = c_n,$$

при підстановці яких у вихідну систему все рівняння системи перетворюються у вірні числові рівності. Будь-який розв'язок системи можна записати у вигляді матриці-стовпця

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Якщо система має хоча б один розв'язок, вона називається **сумісною**. Якщо система не має жодного розв'язку, то вона називається **несумісною**. Кожен розв'язок сумісної системи називається **частковим розв'язком**. Сукупність усіх розв'язків сумісної системи називається **загальним розв'язком**.

Система називається **визначеною**, якщо вона має тільки один розв'язок, і **невизначеною**, якщо вона має більше одного.

Дві системи називаються еквівалентними (рівносильними), якщо вони мають однаковий спільний розв'язок.

Система лінійних рівнянь називається *однорідною*, якщо вільні члени дорівнюють нулю.

[illegible]

Однорідна система завжди сумісна, тому що в ній завжди є нульовий розв'язок.

Система **неоднорідна**, якщо хоча б один з вільних членів b_i ($i = \overline{1, 3}$) не дорівнює нулю.

Розв’язання СЛАР методом Крамера. Розглянемо систему n лінійних рівнянь з n невідомими

[illegible]

Правило Крамера: якщо визначник матриці системи з n лінійних рівнянь з n невідомими не дорівнює нулю ($\Delta \neq 0$), то система має єдиний розв'язок⁴ і цей розв'язок знаходимо за формулою:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = \overline{1, n},$$

де

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} - \text{головний визначник матриці системи, що}$$

складається з коефіцієнтів при невідомих, а

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & b_i & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, n) - \text{ визначник матриці, що}$$

отримують з матриці системи заміною i -го стовпця стовпцем вільних членів b_i .

Нехай задано систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими x , y , z :

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2. \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

Визначники Δ_x , Δ_y , Δ_z отримують з головного визначника системи Δ , якщо в ньому замінити відповідно коефіцієнти при x , y і z вільними членами b_1 , b_2 , b_3 .

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Система має єдиний розв'язок, що визначається формулами Крамера:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta}.$$

Приклад 2.1. Розв'язати систему рівнянь методом Крамера

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0. \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Розв'язання. Позначимо $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Обчислюємо головний визначник матриці методом Сарруса:

⁴ *Зауваження.* Якщо $\Delta = 0$ і хоча б один з $\Delta_i = 0$, то система несумісна.

Якщо $\Delta = 0$ і всі $\Delta_i = 0$, то система має нескінченну кількість розв'язків.

$$\begin{aligned}\Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= 1 \cdot (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \cdot 1 - (-1) \cdot (-1) \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot 1 = \\ &= -5.\end{aligned}$$

Оскільки $\Delta \neq 0$, система має єдиний розв'язок, і можна застосовувати правило Крамера.

Розрахуємо визначники Δ_{x_1} , Δ_{x_2} , Δ_{x_3} .

Для знаходження визначника Δ_{x_1} замінюємо перший стовпець матриці A стовпцем вільних членів – матриця B :

$$\begin{aligned} \Delta_{x_1} &= \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= 0 \cdot (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \cdot 1 - (-1) \cdot (-1) \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 1 - 0 \cdot 1 \cdot 3 = \\ &= 5. \end{aligned}$$

Для знаходження визначника Δ_{x_2} замінюємо другий стовпець матриці A стовпцем вільних членів – матриця B :

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 \cdot 1 + 0 \cdot 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \cdot 1 - (-1) \cdot 0 \cdot 1 - 0 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \cdot 1 = -5.$$

Для знаходження визначника Δ_{x_3} замінюємо третій стовпець матриці A стовпцем вільних членів – матриця B :

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 \cdot 1 - 0 \cdot (-1) \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 0 = -5.$$

Знаходимо розв'язок за правилом Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{5}{-5} = -1; x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{-5}{-5} = 1; x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = \frac{-5}{-5} = 1.$$

Відповідь: $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 1$.

Розв’язання СЛАР методом оберненої матриці. Для отримання розв’язку системи

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n = b_i \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

при $m = n$ в загальному вигляді допустимо, що квадратна матриця системи $A_{n \times n}$ не вироджена, тобто її визначник $|A| \neq 0$. У цьому випадку існує обернена матриця A^{-1} .

Запишемо систему в матричній формі: $A \cdot X = B$, де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \dots \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix} - \text{матриця коефіцієнтів при змінних,}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} - \text{матриця-стовпець змінних;}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} - \text{матриця-стовпець вільних членів.}$$

Помноживши зліва обидві частини рівності на матрицю A^{-1} :

$$\begin{aligned} A^{-1} \cdot (A \cdot X) &= A^{-1} B; \\ (A^{-1} \cdot A) \cdot X &= A^{-1} \cdot B; \\ E \cdot X &= A^{-1} \cdot B; \\ X &= A^{-1} \cdot B. \end{aligned}$$

Таким чином, розв'язок системи в матричному вигляді $X = A^{-1} \cdot B$.
Розв'яжемо **приклад 2.1** методом оберненої матриці.

Розв'язання: Позначимо $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Тоді в матричній формі система має вигляд: $A \cdot X = B$. Визначник матриці

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0,$$

тобто обернена матриця A^{-1} існує:

$$A^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} -4 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -5 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Визначимо

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} -4 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -5 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Відповідь: $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 1$.

Істотним недоліком розв'язку систем n лінійних рівнянь з n змінними за формулами Крамера і методом оберненої матриці є їхня велика трудоемність, пов'язана з обчисленням визначників і знаходження оберненої матриці.

2.3. Використання матриць для аналізу систем електропостачання

Матричні методи є потужним інструментом для аналізу та моделювання електричних систем. Вони дозволяють ефективно представляти параметри усталеного режиму, основні закони електротехніки та рівняння стану електричної системи.

Матричні методи застосовують для:

- о аналізу систем електропостачання (використання матриць для аналізу та моделювання електричних мереж; визначення напруг і струмів у системах з великою кількістю вузлів);
- о розв'язування систем лінійних рівнянь (методи, такі як метод Гаусса, метод оберненої матриці, метод Гаусса-Зейделя та метод простої ітерації; застосовуються для знаходження розв'язків систем рівнянь у мережах зі змінними параметрами);
- о моделювання динамічних процесів (представлення рівнянь стану електричної системи в матричній формі для аналізу динамічних режимів; визначення реакцій системи на перехідні процеси та збурення).

До переваг матричних методів можна віднести ефективність (спрощення складних обчислень та алгоритмів, зменшення обсягу ручних розрахунків, автоматизація процесів аналізу), універсальність (застосування до різних типів систем та моделей, використання у багатьох галузях інженерії та науки, гнучкість у розв'язанні різних задач), точність (забезпечення точних результатів при аналізі та моделюванні, зменшення похибок обчислень, підвищення надійності результатів).

Матричні методи значно полегшують аналіз та оптимізацію електричних систем, роблячи їх невід'ємною частиною сучасної електротехніки.

2.3.1. Матричні способи подання графів електричних мереж

Елементи електричної мережі (лінії, трансформатори тощо) у розрахунках замінюють відповідними схемами заміщення, що складаються з гілок із заданими опорами та провідностями. Таке подання дозволяє побудувати математичну модель мережі у вигляді графа. Подання електричної схеми у вигляді графа фактично повторює її структуру, але без зображення самих елементів.

Фактично **граф** – це діаграма, що складається з точок і ліній, що з'єднують ці точки (**рис. 2.1, а**). Точки називаються **вершинами графа**, а лінії – **ребрами**. На ребрах за потреби вказують напрямок струму або потоку потужності.

Граф, у якому ребра не мають напрямку, називається **неорієнтованим**. Граф називається **орієнтованим** (**рис. 2.1, б**), якщо кожна лінія оснащена стрілкою, що показує допустимий напрямок руху від вершини до вершини.

Неорієнтований граф $G(V, E)$ – це структура, що складається з:

- скінченної множини V , елементи якої називаються вершинами;
- скінченної множини E , елементи якої називаються ребрами;
- правила, яке визначає, які саме вершини з'єднує кожне ребро.

Граф без петель і кратних ребер називається **простим** графом. Кожне ребро однозначно визначає пару (u, v) вершин, яка йому відповідає, тому найзручніше ребро позначати (u, v) або (v, u) (порядок вершин не має значення).

Потужність множини V дорівнює числу вершин графа, що позначається літерою p , кількість ребер графа традиційно позначають буквою q .

Оскільки ребра задаються парами вершин, зручно попередньо впорядкувати множину V шляхом нумерації її елементів.

Найпростіший спосіб – перенумерувати вершини і позначити кожну вершину своїм номером. На **рис. 2.1, а** показано простий граф з 4 вершинами і 5 ребрами.

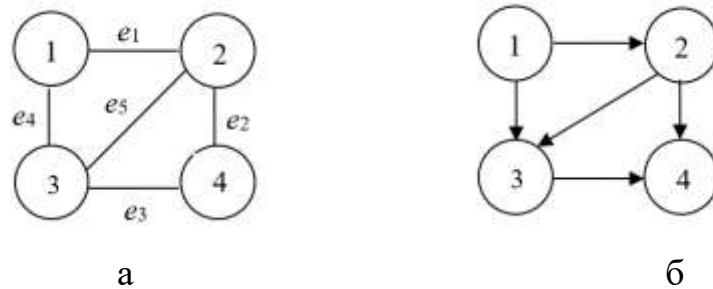


Рис. 2.1. Структура графа

Ребро e називається **петлею**, якщо воно з'єднує з ним вершину e . Кажуть, що ребро $e = (v, u)$ **інцидентне** вершинам u і v , а вершини u і v є інциденті ребру $e = (v, u)$. Іншими словами, ребро $e = (v, u)$ з'єднує вершини u і v , а вершини u і v є кінцями ребра e .

Вершини, інциденті одному і тому самому ребру, називаються **суміжними**. Ребра інциденті до однієї вершини також називаються суміжними.

Якщо ребро $e = (u, v)$ має свою першу вершину – вершину u і другу вершину – вершину v , то ребро e стає орієнтованим і називається **дугою**.

Граф G з дугами замість ребер називається **орієнтованим графом** або орграфом.

Дуга (u, v) на схемі зображується лінією зі стрілкою. Дуга орієнтована в напрямку від вершини u (перша вершина впорядкованої пари (u, v)) до вершини v (друга вершина впорядкованої пари (u, v)).

Ребро замінює дві протилежно спрямовані дуги. Дві стрілки на ребрі зазвичай не зображуються. На **рис. 2.1, б** показаний орієнтований граф з безліччю вершин $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ і безліччю дуг.

Для алгебраїчного задання графів використовують:

1. Матриця суміжності – квадратна матриця, що показує зв'язки між вершинами графа.
2. Матриця інцидентності – прямокутна матриця, що описує зв'язок між вершинами та ребрами.
3. Контурна матриця – використовується для формалізації другого закону Кірхгофа (сума напруг у контурі = 0).
4. Матриця перерізу – описує потоки у перерізах електричної мережі.

Отже, можливі такі різні *способи визначення графа*:

- а) за допомогою графічного зображення;
- б) із зазначенням множини вершин і набору ребер (дуг);
- в) матриця суміжності;
- г) матриця інцидентності.

Матриця суміжності неорієнтованого графа G являє собою квадратну матрицю з p рядків і p стовпців. Елементи матриці визначаються правилом:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо вершини } v_i, v_j \text{ з'єднані ребром;} \\ 0, & \text{в протилежному випадку, } i, j = 1, 2, \dots, p. \end{cases}$$

Матриця суміжності позначається буквою A .

Приклад графа і його матриці суміжності показаний на **рис. 2.2**.

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	0	0	0
2	1	0	1	0	1	0
3	0	1	0	1	1	1
4	0	0	1	0	1	1
5	0	1	1	1	0	1
6	0	0	1	1	1	0

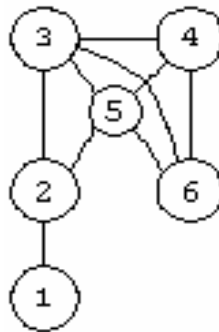


Рис. 2.2. Граф

Властивості матриці суміжності неорієнтованого графа:

1. Число одиниць в i -й лінії дорівнює степеню i -ї вершини, $i = 1, 2, \dots, p$.
2. Кількість одиниць в j -му стовпці дорівнює степеню j -ої вершини, $j = 1, 2, \dots, p$.
3. Число одиниць в матриці дорівнює подвоєному числу ребер.
4. $a_{ij} = 1 \Leftrightarrow a_{ji} = 1$, матриця суміжності симетрична відносно головної діагоналі, вона збігається з її транспонованою.

Матриця суміжності орієнтованого графа – це квадратна матриця, в якій p рядків і p стовпців, елементи яких визначаються правилом

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо в графі є дуга } (v_i, v_j); \\ 0, & \text{в протилежному випадку, } i, j = 1, 2, \dots, p. \end{cases}$$

Приклад орграфа і матриці його суміжності показаний на **рис. 2.3**.

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	1	0	0
2	0	0	1	0	1	0
3	0	1	0	1	0	0
4	0	0	0	0	0	1
5	0	0	1	0	0	1
6	0	0	0	1	1	0

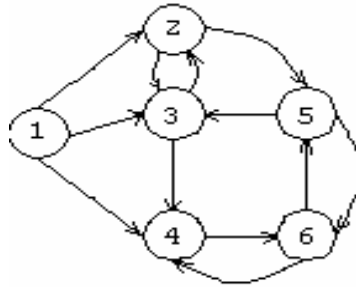


Рис. 2.3. Оргграф

Властивості матриці суміжності орієнтованого графа:

1. Число одиниць в i -й лінії дорівнює степеню виходу i -ї вершини, $i = 1, 2, \dots, p$.
2. Число одиниць в j -му стовпці дорівнює степеню входження j -ої вершини, $j = 1, 2, \dots, p$.
3. Кількість одиниць в матриці дорівнює числу дуг в графі.
4. Матриця суміжності не є симетричною відносно головної діагоналі.

Іноді, особливо в разі неорієнтованого графа, петля (ребро від i -ї вершини до себе) рахується як два ребра, тобто величина діагонального елемента a_{ii} в цьому випадку дорівнює подвоєному числу петель навколо i -ї вершини.

Таким чином, властивості матриці суміжності сформулюємо так:

1. Матриця суміжності простого графа (яка не містить петель або кратних ребер) є бінарною матрицею і містить нулі на головній діагоналі.
2. Матриця суміжності повного графа K_n містить одиниці у всіх його елементах, крім головної діагоналі, на якій розташовані нулі.
3. Матриця суміжності порожнього графа, який не містить ребер, складається тільки з нулів.
4. Матриця суміжності неорієнтованого графа симетрична, що означає, що вона має дійсні власні значення та ортогональний базис власних векторів. Множина власних значень називається **спектром графа** і є основним предметом теорії спектральних графів.

Матриця інцидентності – прямокутна матриця, де рядки відповідають вузлам, а стовпці – гілкам (ребрам).

Матриця інцидентності $B = (b_{ij})$ орієнтованого графа являє собою прямокутну матрицю $(n \times t)$, де n – число вершин, t – число ребер, які

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо вершина } x_i \text{ є початком дуги } a_j; \\ -1, & \text{якщо вершина } x_i \text{ є кінцем дуги } a_j; \\ 0, & \text{якщо вершина } x_i \text{ неінцидентна дузі } a_j. \end{cases}$$

Для неорієнтованого графа матриця інцидентності $B = (b_{ij})$ задається наступним чином:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо вершина } x_i \text{ інцидентна ребру } a_j; \\ 0, & \text{якщо вершина } x_i \text{ неінцидентна ребру } a_j. \end{cases}$$

Властивості матриці інцидентності орграфа:

1. Число одиниць в i -й лінії дорівнює степеню входження i -ї вершини, $i = 1, 2, \dots, p$.
2. Число одиниць з мінусом в i -й лінії дорівнює степеню виходу i -ї вершини, $i = 1, 2, \dots, p$.
3. Число одиниць в матриці дорівнює числу одиниць з мінусом і дорівнює числу дуг на графі.
4. У кожному стовпці матриці є рівно одна одиниця з плюсом і рівно одна з мінусом, оскільки кожна дуга з однієї вершини виходить і входить в одну вершину.

Матриця інцидентності, як і матриця суміжності, повністю визначає граф.

Для графа на **рис. 2.4** маємо число вузлів $m = 4$ і число гілок $n = 6$. Тоді запишемо матрицю інцидентності A_H , приймаючи, що елемент матриці a_{ij} (i – номер рядка; j – номер стовпця) дорівнює:

1, якщо гілка j з'єднана з вузлом i та орієнтована від нього,

-1, якщо вона орієнтована на нього,

0, якщо гілка j не підключена до вузла.

Зорієнтувавши гілки графа на **рис. 2.4**, отримаємо:

$$A_H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

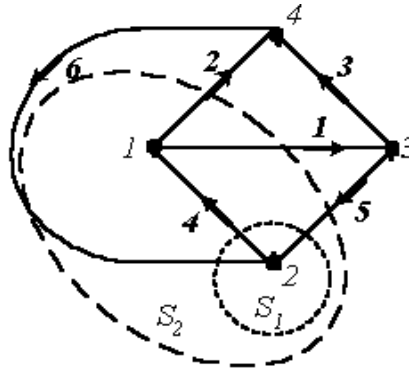


Рис. 2.4. Граф

Матриця A_H записується для всіх чотирьох вузлів і називається **невизначеною**. Слід зазначити, що сума елементів стовпців матриці A_H завжди дорівнює нулю, оскільки кожен стовпець містить один елемент $+1$ і один елемент -1 , решта елементів – нулі.

Зазвичай при розрахунках заземлюється один (будь-який). Тоді приходять до вузлової матриці A (редукованої матриці), яку можна отримати з матриці A_H шляхом перекреслення будь-якого її рядка. Наприклад, якщо перекреслити рядок «4», то отримаємо

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Число рядків матриці $\mathbf{A}$ дорівнює числу незалежних рівнянь для вузлів $d = m - 1$, тобто числу рівнянь, записаних для електричного кола за першим законом Кірхгофа.

Використання подібної матриці у розрахунках малоефективне, оскільки вона містить багато нульових елементів і потребує значних витрат пам'яті та часу на пошук ненульових значень. Тому зазвичай застосовують її компактне подання – стрічкову матрицю $\mathbf{L}$.

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 7 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 4 & 8 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

У першому рядку матриці $\mathbf{L}$ вказується номер (ім'я) початкового вузла, а в другому, того ж стовпчика, – номер (ім'я) кінцевого вузла. Пара номерів вузлів у стовпчику утворює ім'я гілки, наприклад, для гілки b це 1 – 2.

Стрічкова форма графа є більш компактною і використовується при описі топології схеми електричної мережі.

Для складання матриці інцидентій $\mathbf{N}$ (друга матриця з'єднань) необхідно задати напрям обходу контурів. Так для графа мережі, наведеної на [рис. 2.5](#), можна вибрати як незалежні контури: I – { a, e, h }, II – { a, b, c, f, i, e }, III – { f, g, h }. При обході вказаних контурів за годинниковою стрілкою отримаємо наступну матрицю $\mathbf{N}$:

$$\mathbf{M} = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e & f & g & h & i & j \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

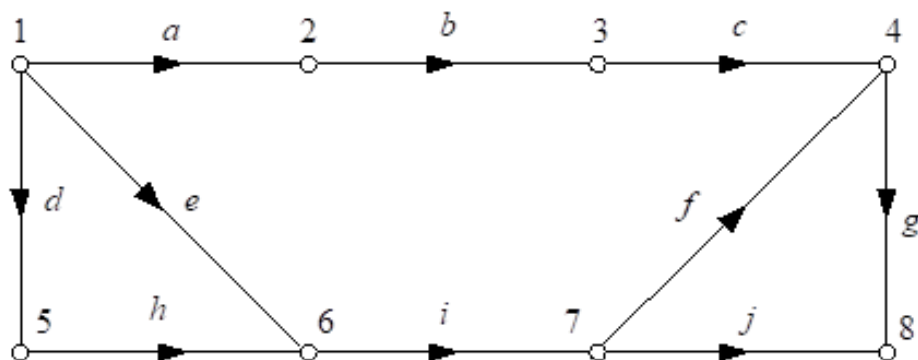


Рис. 2.5. Граф мережі без зображення ребер, пов'язаних з нейтральною площиною

Контурна матриця (матриця контурів) – таблиця коефіцієнтів рівнянь, складена за другим законом Кірхгофа. Рядки контурної матриці $\mathbf{B}$ відповідають контурам, а стовпці – розгалуженням схеми.

b_{ij} – елемент матриці B дорівнює:

1, якщо гілка j є частиною контуру i її орієнтація збігається з напрямком обходу петлі,

-1, якщо вона не збігається з напрямком обходу петлі,

0, якщо гілка j не є частиною контура i .

Матриця B , записана для основних контурів⁵, називається **матрицею головних контурів**. При цьому напрямок обходу контуру приймається за напрямок з'єднувальної гілки цього контуру. Виділивши дерево, утворене гілками 2-1-4 (рис. 2.6), записуємо коефіцієнти для матриці B .

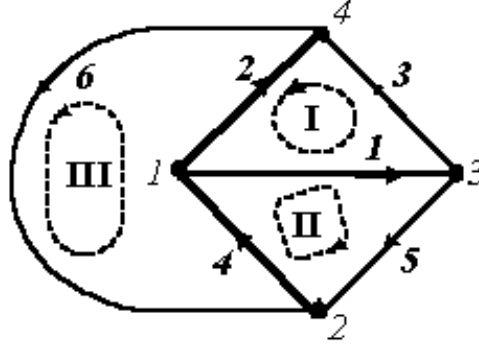


Рис. 2.6. Контури електричної схеми

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Якщо ввести стовпчасту матрицю вузлових потенціалів

$$\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \dots \\ \varphi_{m-1} \end{bmatrix}$$

і потенціал останнього вузла $\varphi_m = 0$, то матриця напруг гілок і матриця вузлових потенціалів пов'язані співвідношенням:

$$U = A^T \varphi,$$

де A^T – транспонована вузлова матриця.

Для визначення матриці B за відомою матрицею $A = A_d A_c$, де A_d – підматриця, що відповідає гілкам певного дерева, A_c – підматриця, що відповідає хордам, можна використовувати співвідношення

$$B = (-A_c^T A_d^{-T}).$$

Матриця перерізу – це таблиця коефіцієнтів рівнянь, складена за першим законом Кірхгофа для перерізів. Її рядки відповідають перерізам, а стовпці – гілкам графа.

⁵ Основні контури (незалежні контури) – це мінімальний набір контурів в електричному колі, які не можна отримати як суму інших контурів, тобто, це такі замкнені шляхи, кожен з яких додає нову незалежну інформацію про струми в колі.

Кількість основних контурів дорівнює числу гілок мінус число вузлів плюс один: $n - m + 1$.

Вибір основних контурів дозволяє записати незалежну систему рівнянь за другим законом Кірхгофа.

Матриця Q , складена для основних перерізів⁶, називається **матрицею головного перерізу**. Число рядків в матриці Q дорівнює числу незалежних перерізів.

Елемент q_{ij} матриці Q дорівнює:

- 1, якщо гілка входить до складу i -го перерізу і орієнтована за напрямком перетину (за додатній напрямок перетину приймається напрямок гілки дерева),
- 1, якщо вона орієнтована протилежно напрямку перетину,
- 0, якщо гілка j не входить до складу i -го перерізу.

Як приклад складемо матрицю Q основних перерізів для графа на **рис. 2.6**.
Із зазначенням на **рис. 2.6** орієнтацій гілок маємо:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Для топологічних матриць A , B і Q , складених для одного і того ж графа, виконується співвідношення:

$$\begin{aligned} AB^T &= 0, \\ QB^T &= 0. \end{aligned}$$

За якими, зокрема, можна перевірити правильність складання цих матриць. Тут 0 – матриця порядку 0 .

Наведені вище рівняння дозволяють зробити важливий висновок: знаючи одну з топологічних матриць, можна реконструювати інші з її структури.

2.3.2. Розрахунок розгалужених кіл постійного струму (метод контурних струмів, метод вузлових потенціалів)

У випадку, коли структура складного електричного кола та характеристики всіх його елементів відомі, розрахунок, як правило, полягає у визначенні струмів у гілках та потенціалів вузлових точок. Для аналізу розгалужених кіл із кількома джерелами живлення необхідно застосовувати спеціалізовані методи обчислення.

Кількість невідомих струмів в електричному колі дорівнює кількості його гілок n . Якщо джерела струму розміщено в окремих гілках, то відповідні напруги на цих ділянках U_j не є відомими наперед. Відтак, для повного аналізу схеми необхідно скласти систему з m незалежних рівнянь, що охоплюють усі гілки.

Для зменшення кількості невідомих та спрощення процесу розрахунку застосовують спеціальні методи аналізу електричних кіл. Найпоширенішими серед них є метод вузлових потенціалів та метод контурних струмів. Розглянемо їх докладніше.

Перший закон Кірхгофа та його зв'язок із методом вузлових потенціалів. Перший закон Кірхгофа формулюється як умова балансу струмів у вузлі, тобто алгебраїчна сума струмів гілок, з'єднаних у вузол, дорівнює нулю:

⁶ Основний переріз (незалежний переріз або головний переріз) – такий переріз електричного кола, який розділяє схему на дві частини і містить рівно одну хорду (гілку, що не входить у дерево).

$$\sum_k I_k = 0.$$

Даний закон є наслідком закону збереження заряду і справедливий не лише для вузлів, а й для будь-якого поперечного перерізу або замкненої поверхні. Наприклад, для поперечного перерізу S_2 графа на [рис. 2.4](#):

$$I_1 + I_2 - I_5 - I_6 = 0.$$

Оскільки один із вузлових балансів завжди лінійно залежний від інших, рівняння за першим законом Кірхгофа записують для $m - 1$ вузлів.

Введемо стовпчасту матрицю розгалужених струмів:

$$I = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \dots \\ I_n \end{bmatrix}.$$

Тоді перший закон Кірхгофа можна записати у вигляді:

$$AI = O,$$

де O – нульова матриця-стовпець. Наприклад, для схеми на [рис. 2.4](#):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Звідси, для першого вузла, отримуємо:

$$1 \cdot I_1 + 1 \cdot I_2 - 0 \cdot I_3 - 1 \cdot I_4 + 0 \cdot I_5 + 0 \cdot I_6 = I_1 + I_2 - I_4 = 0.$$

Матричний запис першого закону Кірхгофа описує лише топологію кола. Щоб отримати рівняння для розрахунку, струми гілок виражають через різницю потенціалів вузлів і провідності елементів:

$$I_{ij} = g_{ij}(\varphi_i - \varphi_j).$$

Після підстановки цих виразів у рівняння першого закону Кірхгофа отримуємо систему рівнянь, у якій невідомими є потенціали вузлів – основу методу вузлових потенціалів.

Метод вузлових потенціалів полягає у визначенні потенціалів усіх вузлів відносно одного опорного (нульового) вузла. Знайшовши потенціали, струми в гілках обчислюють за узагальненим законом Ома.

Після вираження струмів гілок через різницю потенціалів вузлів рівняння першого закону Кірхгофа переходять у систему рівнянь для вузлових потенціалів. У матричній формі вона записується так:

$$g^{(y)} \varphi = J^{(y)},$$

де $g^{(y)}$ – квадратна матриця вузлових провідностей; φ – матриця-стовпчик потенціалів вузлів; $J^{(y)}$ – матриця-стовпчик вузлових струмів.

Вузловий струм i -го вузла дорівнює алгебраїчній сумі струму джерела струму і струмів, що визначаються ЕРС джерел напруги:

$$J_i^{(y)} = J_i + \sum E_{ij} g_{ij}.$$

Рівняння для визначення потенціалів вузлів виглядає наступним чином

$$\varphi = (g^{(y)})^{-1} J^{(y)},$$

де $(g^{(y)})^{-1}$ – матриця, обернена матриці $g^{(y)}$.

Матрицю вузлових провідностей для відповідного кола можна скласти за формулою

$$g^{(y)} = AgA^T, \quad (2.1)$$

де A – матриця з'єднань; g – діагональна матриця провідностей гілок; A^T – транспонована матриця з'єднань.

Після виключення одного рівняння із системи (2.1) отримуємо систему незалежних лінійних рівнянь порядку $n - 1$. Однак кількість невідомих напруг залишається рівною n , тому в одному з вузлів необхідно задати напругу за величиною та фазою, щоб усі інші напруги визначалися відносно неї. Такий вузол називають **базисним**, і його фазу зазвичай приймають рівною нулю, суміщаючи вектор напруги з дійсною віссю; решта вузлів вважаються незалежними.

Для рівнянь вузлових потенціалів одне рівняння залежить від решти рівнянь і може бути отримано через суму всіх інших рівнянь. Оскільки струм в цьому вузлі може бути отриманий з балансу струмів у колі, то його називають **балансуючим**. Зазвичай це шини потужної електростанції чи системи.

На практиці часто базисний вузол поєднують із балансуючим, і надалі будемо вважати їх одним вузлом. Таким чином, після виключення рівняння для базисного (балансуючого) вузла з номером n маємо систему з $n - 1$ рівнянь, у які входить додатковий член із заданою напругою базисного вузла.

Розглянемо схему, наведену на [рис. 2.7](#), граф якого показаний на [рис. 2.8](#).

Оскільки коло має чотири вузли, то для знаходження струмів у гілках за допомогою методу вузлового потенціалу необхідно побудувати три незалежних рівняння. Отже, матриця з'єднання вузлової провідності розгалуження складається з трьох рядків і шести стовпців:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

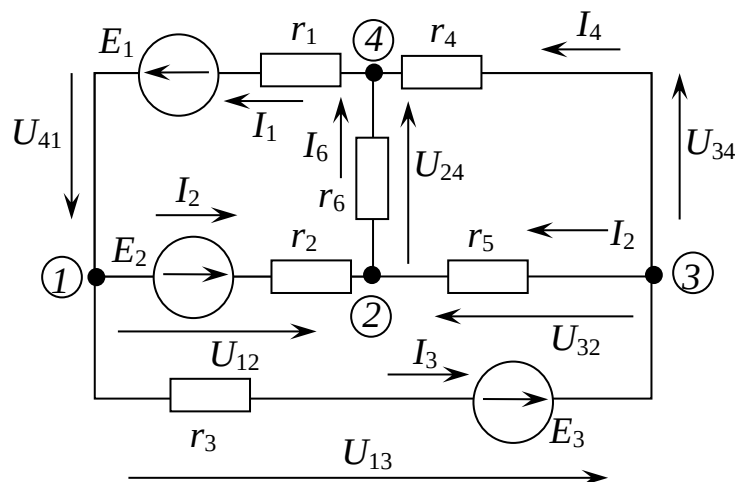


Рис. 2.7. Електричне коло постійного струму

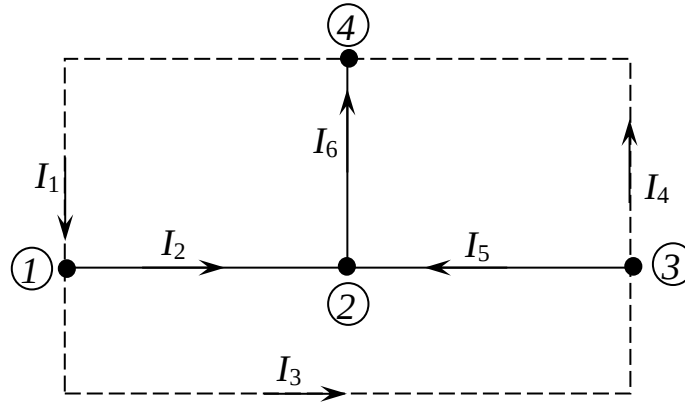


Рис. 2.8. Граф кола постійного струму

Діагональна матриця провідностей $g = \begin{bmatrix} g_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_6 \end{bmatrix}.$

Добуток матриць A і g дорівнює:

$$Ag = \begin{pmatrix} -g_1 & g_2 & g_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -g_2 & 0 & 0 & -g_5 & g_6 \\ 0 & 0 & -g_3 & g_4 & g_5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицю вузлових провідностей отримують множенням матриць Ag і A^T :

$$g^{(y)} = AgA^T = \begin{bmatrix} -g_1 & g_2 & g_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -g_2 & 0 & 0 & -g_5 & g_6 \\ 0 & 0 & -g_3 & g_4 & g_5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (g_1 + g_2 + g_3) & -g_2 & -g_3 \\ -g_2 & (g_2 + g_5 + g_6) & -g_5 \\ -g_3 & -g_5 & (g_3 + g_4 + g_5) \end{bmatrix}.$$

Матриця-стовпчик потенціалів вузлів $\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix}^T.$

Матриця-стовпчик вузлових струмів

$$J^{(y)} = \begin{bmatrix} -E_1 g_1 & -E_2 g_2 & -E_3 g_3 \\ & E_2 g_2 & \\ & & E_3 g_3 \end{bmatrix}.$$

Якщо матрицю A доповнити четвертим рядком, що відповідає вузлу 4, то отримаємо невизначену матрицю вузлових провідностей кола, для якої сума елементів за всіма чотирма рядками і чотирма стовпчиками дорівнює нулю. Визначник такої матриці дорівнює нулю. Після викреслення будь-якого рядка і відповідного цьому рядку стовпчика, отримаємо квадратну матрицю третього порядку.

Визначник невизначеної матриці симетричний відносно головної діагоналі. Якщо викреслений рядок не відповідає викресленому стовпцю, то і в цьому

випадку виходить деяка квадратна матриця, що відповідає незалежній системі рівнянь. Визначник такої матриці не має симетрії відносно головної діагоналі.

Якщо потенціал одного і того ж вузла кола, що відповідає перекресленій лінії матриці A , прийняти за нуль, то напруги на всіх гілках кола визначаються через потенціали вузлів за формулою $U = A^T \phi$, де додатний напрямок напруги U_{jp} збігається з додатним напрямком струму в гілці, про що свідчать формули для напруги кожної гілки. Наприклад, для схеми (рис. 2.9).

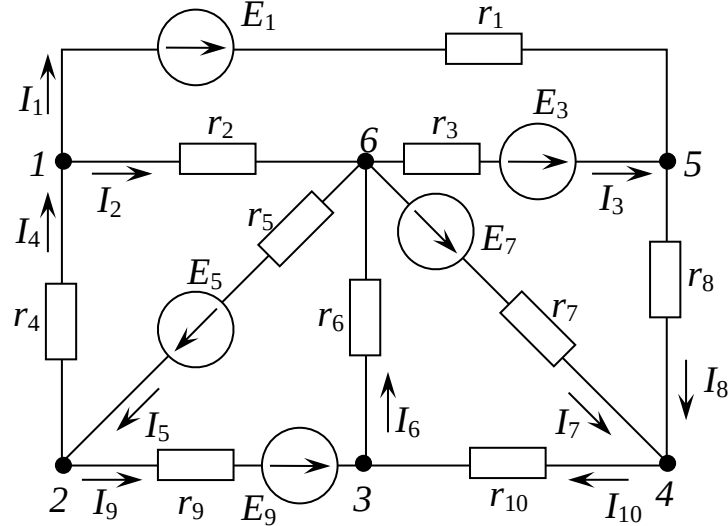


Рис. 2.9. Електричне коло

$$\begin{pmatrix} U_{41} \\ U_{12} \\ U_{13} \\ U_{34} \\ U_{32} \\ U_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -100 \\ 1-10 \\ 10-1 \\ 001 \\ 0-10 \\ 010 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varphi_1 \\ \varphi_1 - \varphi_2 \\ \varphi_1 - \varphi_3 \\ \varphi_3 \\ -\varphi_2 + \varphi_3 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}.$$

З цього виразу слідує: $U_{41} = -\varphi_1$, $U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$, $U_{13} = \varphi_1 - \varphi_3$, $U_{34} = \varphi_3$, $U_{32} = \varphi_3 - \varphi_2$, $U_{24} = \varphi_2$.

Алгоритм застосування методу вузлових потенціалів:

1. Позначити всі вузли та вибрати опорний (нульовий). Опорний вузол приймають за точку з потенціалом 0, щоб зменшити кількість невідомих (дозволяє працювати з потенціалами інших вузлів відносно нульового).

2. Позначити потенціали решти вузлів як невідомі. Якщо у схемі k вузлів, то невідомих буде $k - 1$. Саме ці потенціали визначатимуть усі струми в гілках.

3. Визначити, які гілки з'єднують які вузли, і обчислити провідності. Для кожної гілки з опором r_i обчислюють провідність $g_i = 1/r_i$. На цьому етапі формується структура майбутніх рівнянь: які вузли взаємодіють і через які елементи.

4. Скласти рівняння за першим законом Кірхгофа для кожного не опорного вузла. У кожному вузлі записують баланс струмів.

5. Виразити струми через різницю потенціалів та провідності. Для гілки між вузлами i та j струм записують як $I_{ij} = g_{ij}(\varphi_i - \varphi_j)$, а якщо є джерело напруги – з урахуванням його ЕРС. Даний крок дозволяє перевести рівняння першого закону Кірхгофа у форму, де невідомими є тільки потенціали.

6. Підставити вирази струмів у рівняння першого закону Кірхгофа та отримати систему для потенціалів. Після підстановки всі рівняння набувають вигляду $g(y)\varphi = J(y)$, які вже готові до розв'язання.

7. Розв'язати отриману систему рівнянь. Можна використати метод Крамера, обернену матрицю або будь-який інший лінійний метод. У результаті отримують значення всіх вузлових потенціалів.

8. Обчислити струми в гілках за знайденими потенціалами φ_i .

Розглянемо рекомендований порядок дій застосування методу вузлових потенціалів на конкретному прикладі.

Приклад 2.2. Електричне коло, схема якого наведена на [рис. 2.10](#), містить шість резистивних елементів з опорами $r_1 = 20 \text{ Ом}$, $r_2 = 10 \text{ Ом}$, $r_3 = 8 \text{ Ом}$, $r_4 = 10 \text{ Ом}$, $r_5 = 10 \text{ Ом}$, $r_6 = 5 \text{ Ом}$, а також три джерела напруги з ЕРС $E_3 = 30 \text{ В}$, $E_2 = 20 \text{ В}$, $E_5 = 50 \text{ В}$. Між двома вузлами підключено незалежне джерело струму $J_k = 3 \text{ А}$. Необхідно визначити потенціали вузлів та струми в усіх гілках.

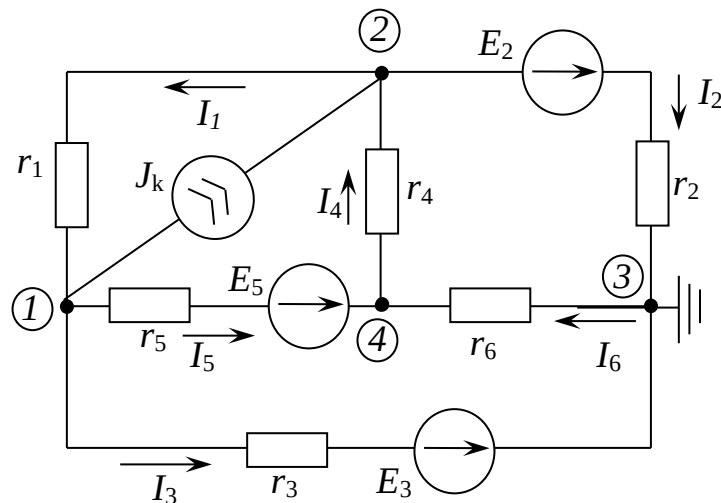


Рис. 2.10. Електричне коло постійного струму

Розв'язання. Проаналізувавши схему ([рис. 2.10](#)), бачимо, що коло містить 7 гілок і 4 вузли. Для методу вузлових потенціалів один вузол обираємо опорним (нульовим): потенціал третього вузла $\varphi_3 = 0$. Отже, невідомими є потенціали φ_1 , φ_2 , φ_4 .

За першим законом Кірхгофа складемо систему рівнянь для визначення потенціалів φ_1 , φ_2 , φ_4 , врахувавши провідності гілок, наявність джерел напруги та незалежного джерела струму.

$$\begin{cases} \varphi_1 \cdot g_{11} - \varphi_2 \cdot g_{12} - \varphi_4 \cdot g_{14} = \sum_1 E g - J_k \\ \varphi_2 \cdot g_{22} - \varphi_1 \cdot g_{21} - \varphi_4 \cdot g_{24} = \sum_2 E g + J_k \\ \varphi_4 \cdot g_{44} - \varphi_1 \cdot g_{41} - \varphi_2 \cdot g_{42} = \sum_4 E g \end{cases}$$

Згідно умови задачі провідності гілок становлять:

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{1}{r_1} = \frac{1}{20} = 0,05 \text{ См}; & g_2 &= \frac{1}{r_2} = \frac{1}{10} = 0,1 \text{ См}; \\ g_3 &= \frac{1}{r_3} = \frac{1}{8} = 0,125 \text{ См}; & g_4 &= \frac{1}{r_4} = \frac{1}{10} = 0,1 \text{ См}; \\ g_5 &= \frac{1}{r_5} = \frac{1}{10} = 0,1 \text{ См}; & g_6 &= \frac{1}{r_6} = \frac{1}{5} = 0,2 \text{ См}. \end{aligned}$$

Тоді сума провідностей гілок, підключених до відповідних вузлів:

$$\begin{aligned} g_{11} &= g_1 + g_3 + g_5 = 0,05 + 0,125 + 0,1 = 0,275 \text{ См}; \\ g_{22} &= g_1 + g_2 + g_4 = 0,05 + 0,1 + 0,1 = 0,25 \text{ См}; \\ g_{44} &= g_4 + g_5 + g_6 = 0,1 + 0,1 + 0,2 = 0,4 \text{ См}, \end{aligned}$$

а сума провідностей, що з'єднують різні вузли:

$$\begin{aligned} g_{12} &= g_{21} = g_1 = 0,05 \text{ См}; \\ g_{14} &= g_{41} = g_5 = 0,1 \text{ См}; \\ g_{24} &= g_{42} = g_4 = 0,1 \text{ См}. \end{aligned}$$

Вузлові струми обчислюємо як сумарний внесок джерел напруги у вигляді $\pm E g$ та джерела струму зі знаком, що відповідає його напрямку відносно вузла:

$$\begin{aligned} \sum_1 E g &= -E_3 \cdot g_3 - E_5 \cdot g_5 - J_k = -11,75 \text{ А}, \\ \sum_2 E g &= -E_2 \cdot g_2 + J_k = 1 \text{ А}, \\ \sum_4 E g &= E_5 \cdot g_5 = 5 \text{ А}. \end{aligned}$$

Після підстановки чисельних даних система набуває вигляду:

$$\begin{cases} 0,275 \cdot \varphi_1 - 0,05 \cdot \varphi_2 - 0,1 \cdot \varphi_4 = -11,75 \\ -0,05 \cdot \varphi_1 + 0,25 \cdot \varphi_2 - 0,1 \cdot \varphi_4 = 1 \\ -0,1 \cdot \varphi_1 - 0,1 \cdot \varphi_2 + 0,4 \cdot \varphi_4 = 5 \end{cases}$$

Розв'язуючи дану систему рівнянь довільним методом, визначаємо потенціали:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -43,33 \text{ В}, \\ \varphi_2 &= -4,44 \text{ В}, \\ \varphi_4 &= 0,55 \text{ В}. \end{aligned}$$

Визначаємо струми в гілках електричного кола, наведеного на **рис. 2.10**.

$$\begin{aligned} I_1 &= (\varphi_2 - \varphi_1) \cdot g_1 = (-4,44 - (-43,33)) \cdot 0,05 = 1,95 \text{ А}, \\ I_2 &= (\varphi_2 + E_2) \cdot g_2 = (-4,44 + 20) \cdot 0,1 = 1,56 \text{ А}, \\ I_3 &= (\varphi_1 + E_3) \cdot g_3 = (-43,33 + 30) \cdot 0,125 = -1,67 \text{ А}, \\ I_4 &= (\varphi_4 - \varphi_2) \cdot g_4 = (0,55 - (-4,44)) \cdot 0,1 = 0,49 \text{ А}, \\ I_5 &= (\varphi_1 - \varphi_4 + E_5) \cdot g_5 = (-43,33 - 0,55 + 50) \cdot 0,1 = 0,61 \text{ А}, \\ I_6 &= -\varphi_4 \cdot g_6 = -0,55 \cdot 0,2 = -0,11 \text{ А}. \end{aligned}$$

З контуру 121 визначаємо напругу на затискачах джерела струму:

$$U_k = \varphi_2 - \varphi_1 = -4,44 - (-43,33) = 38,89 \text{ В}.$$

Для впевненості у коректності отриманих вузлових потенціалів та струмів у гілках здійснимо перевірку балансу потужностей у колі. Даний крок проводиться як стандартна інженерна перевірка.

$$P_{E_2} = E_2 I_2, P_{E_3} = E_3 I_3, P_{E_5} = E_5 I_5, P_{J_k} = J_k U_k.$$

Потужність джерел:

$$\begin{aligned} P_{E_2} &= 20 \cdot 1,56 = 31,2 \text{ Вт}, & P_{E_3} &= 30 \cdot (-1,67) = -50,1 \text{ Вт}, \\ P_{E_5} &= 50 \cdot 0,61 = 30,5 \text{ Вт}, & P_{J_k} &= 3 \cdot 38,89 = 116,7 \text{ Вт}. \end{aligned}$$

Знак «-» вказує на те, що третє джерело працює в режимі споживача електроенергії (наприклад, заряджання акумулятора).

Сумарна потужність джерел:

$$P_{дж} = 31,2 - 50,1 + 30,5 + 116,7 = 128,3 \text{ Вт}.$$

Потужність, що споживається резистивними елементами розраховується за формулою:

$$P_i = I_i^2 \cdot r_i.$$

Тоді потужність приймачів:

$$\begin{aligned} P_1 &= 1,95^2 \cdot 20 = 76 \text{ Вт}, & P_2 &= 1,56^2 \cdot 10 = 24,3 \text{ Вт}, \\ P_3 &= 1,67^2 \cdot 8 = 22,3 \text{ Вт}, & P_4 &= 0,49^2 \cdot 10 = 2,4 \text{ Вт}, \\ P_5 &= 0,61^2 \cdot 10 = 3,7 \text{ Вт}, & P_6 &= 0,11^2 \cdot 5 = 0,1 \text{ Вт}. \end{aligned}$$

Сумарна потужність приймачів:

$$P_{пр} = 76 + 24,3 + 22,3 + 2,4 + 3,7 + 0,1 = 128,8 \text{ Вт}.$$

З порівняння потужності, що виробляється джерелами, і споживаної потужності приймачами випливає, що помилка розрахунку

$$\delta = \frac{P_{дж} - P_{пр}}{P_{дж}} \cdot 100\% = \left| \frac{128,3 - 128,8}{128,3} \right| \cdot 100\% = 0,4\%.$$

Отримана похибка не перевищує 0,5%, що підтверджує правильність розрахунків.

Відповідь: вузлові потенціали електричного кола становлять $\varphi_1 = -43,33 \text{ В}$, $\varphi_2 = -4,44 \text{ В}$, $\varphi_4 = 0,55 \text{ В}$; струми в гілках кола дорівнюють $I_1 = 1,95 \text{ А}$, $I_2 = 1,56 \text{ А}$, $I_3 = -1,67 \text{ А}$, $I_4 = 0,49 \text{ А}$, $I_5 = 0,61 \text{ А}$, $I_6 = -0,11 \text{ А}$; напругу на затискачах джерела струму $U_k = 38,89 \text{ В}$. Баланс потужностей виконується з відносною похибкою 0,4%, що підтверджує коректність розрахунків.

Другий закон Кірхгофа та його зв'язок із методом контурних струмів.

Запишемо напруги на гілках певного контуру:

$$\begin{aligned} U_{12} &= \varphi_1 - \varphi_2 \\ &+ \\ U_{23} &= \varphi_2 - \varphi_3 \\ &+ \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ U_{k1} &= \varphi_k - \varphi_1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Оскільки потенціал кожної i -ї точки виникає двічі, причому один раз з «+» і другий з «-», то сума в цілому дорівнює нулю.

Таким чином, другий закон Кірхгофа математично записується як:

$$\sum_k U_k = 0,$$

тобто напруга на затискачах певної гілки розгалуженого кола (сума напруг на затискачах гілок кола) дорівнює нулю. Даний закон є наслідком закону збереження енергії: повна робота джерел у контурі компенсується спадом напруги на пасивних елементах. Він справедливий для будь-якого замкненого контуру графа електричного кола.

Оскільки один із контурних балансів завжди лінійно залежний від інших, рівняння за другим законом Кірхгофа складають для $l = n - m + 1$ незалежних контурів.

Ввівши стовпчасту матрицю гілкових напруг:

$$U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \dots \\ U_n \end{bmatrix},$$

за другим законом Кірхгофа отримаємо у матричній формі:

$$B \cdot U = 0,$$

де B – матриця контурів (матриця циклів), а 0 – нульовий стовпець.

Наприклад, для схеми на [рис. 2.6](#):

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} = [0].$$

Звідки для першого контуру отримуємо:

$$1 \cdot U_1 - 1 \cdot U_2 + 1 \cdot U_3 + 0 \cdot U_4 + 0 \cdot U_5 + 0 \cdot U_6 = U_1 - U_2 + U_3 = 0;$$

для другого:

$$1 \cdot U_1 + 0 \cdot U_2 + 0 \cdot U_3 + 1 \cdot U_4 + 1 \cdot U_5 + 0 \cdot U_6 = U_1 + U_4 + U_5 = 0$$

тощо.

Матричний запис другого закону Кірхгофа описує лише топологію контурів, щоб отримати рівняння для розрахунку, напруги гілок виражають через контурні струми та параметри елементів. Для резистивних гілок:

$$U_k = R_k I_k.$$

У методі контурних струмів гілкові струми виражають через контурні:

$$I_k = \sum_j \alpha_{kj} I_{Cj},$$

де $\alpha_{kj} = 0, \pm 1$ залежно від того, чи проходить контур через гілку i в якому напрямку.

Після підстановки цих виразів у рівняння другого закону Кірхгофа отримуємо систему рівнянь, у якій невідомими є контурні струми – основу методу контурних струмів.

Метод контурних струмів належить до базових підходів для аналізу складних електричних кіл і має широке практичне застосування. Його суть полягає в тому, що кожному незалежному контуру електричного кола призначають відповідний контурний струм. Далі формують систему рівнянь за цими струмами, а на основі отриманих розв'язків обчислюють струми в окремих гілках схеми.

Таким чином, метод струмів є обчислювальним підходом, у якому шуканими величинами виступають струми в гілках електричного кола. Кількість невідомих у цьому випадку збігається з кількістю рівнянь, що формуються згідно з другим законом Кірхгофа $p = n - m + 1$.

Розглянемо алгоритм розрахунку електричного кола методом контурних струмів на прикладі схеми (**рис. 2.11**), що містить три незалежні контури. У кожному контурі вводимо власний контурний струм із заданим напрямком. Для кожного контуру складаємо рівняння за другим законом Кірхгофа.

Враховуючи суміжні гілки, струми в них визначаються як різниця відповідних контурних струмів:

- у гілці bd з опором R_2 , спільній для контурів із струмами I_{11} та I_{22} , протікає струм $I_{11} - I_{22}$.
- у гілці dc з опором R_5 , спільній для контурів із струмами I_{33} та I_{22} , протікає струм $I_{33} - I_{22}$.
- у гілці ad з опором R_4 , спільній для контурів із струмами I_{11} та I_{33} , протікає струм $I_{11} - I_{33}$.

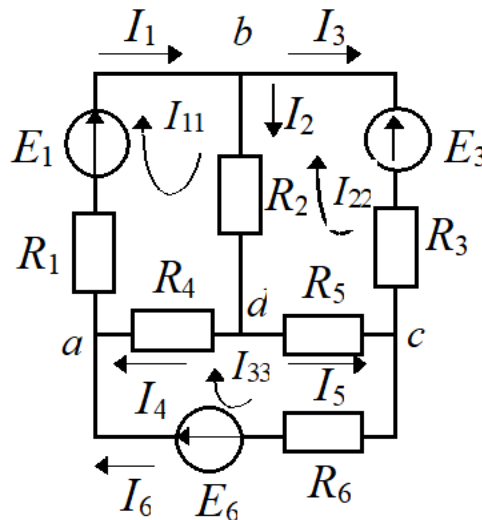


Рис. 2.11. Схема електричного кола

Тоді рівняння за другим правилом Кірхгофа для кожного незалежного контуру мають вигляд:

$$\begin{cases} R_1 I_{11} + R_2 (I_{11} - I_{22}) + R_4 (I_{11} - I_{33}) = E_1 \\ -R_2 (I_{11} - I_{22}) + R_3 I_{22} - R_5 (I_{33} - I_{22}) = -E_3 \\ -R_4 (I_{11} - I_{33}) + R_5 (I_{33} - I_{22}) + R_6 I_{33} = E_6 \end{cases} \quad (2.2)$$

Згрупуємо члени при однойменних струмах:

$$\begin{cases} I_{11} \cdot (R_1 + R_2 + R_4) + I_{22} \cdot (-R_2) + I_{33} \cdot (-R_4) = E_1 \\ I_{11} \cdot (-R_2) + I_{22} \cdot (R_2 + R_3 + R_6) + I_{33} \cdot (-R_5) = -E_3 \\ I_{11} \cdot (-R_4) + I_{22} \cdot (-R_5) + I_{33} \cdot (R_4 + R_5 + R_6) = E_6 \end{cases}$$

Введемо позначення:

$$\left. \begin{aligned} R_{11} &= R_1 + R_2 + R_4 \\ R_{22} &= R_2 + R_3 + R_6 \\ R_{33} &= R_4 + R_5 + R_6 \end{aligned} \right\} \text{ власні опори контурів}$$

$$\left. \begin{aligned} R_{12} &= R_{21} = -R_2 \\ R_{13} &= R_{31} = -R_4 \\ R_{23} &= R_{32} = -R_6 \end{aligned} \right\} \text{ загальні опори контурів}$$

$$\left. \begin{aligned} E_{11} &= E_1 \\ E_{22} &= -E_3 \\ E_{33} &= E_6 \end{aligned} \right\} \text{ контурні ЕРС}$$

У кінцевому вигляді система рівнянь для контурних струмів набуває такого вигляду:

$$\begin{cases} I_{11} \cdot R_{11} + I_{22} \cdot R_{12} + I_{33} \cdot R_{13} = E_{11} \\ I_{11} \cdot R_{21} + I_{22} \cdot R_{22} + I_{33} \cdot R_{23} = E_{22} \\ I_{11} \cdot R_{31} + I_{22} \cdot R_{32} + I_{33} \cdot R_{33} = E_{33} \end{cases}$$

у вигляді матриці

$$\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_{11} \\ I_{22} \\ I_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \end{pmatrix}$$

Власний опір контуру R_{ii} – це сума опорів усіх елементів, через які проходить i -й контурний струм уздовж свого замкненого шляху.

До власного опору включаються тільки ті опори, що належать даному контуру і не є спільними з іншими контурами. Фактично це повний опір, який «бачить» контурний струм у своєму контурі.

Повний опір кола ($R_{ij} = R_{ji}$) – це алгебраїчна сума опорів споживачів гілки (декількох гілок), що належать одночасно до i -го і j -го кіл. У цю суму опір включається зі знаком «+», якщо струми петлі протікають через заданий опір в одному і тому ж напрямку (по ньому), і знаком «-», якщо вони протікають в протилежному напрямку.

Контурна ЕРС – це алгебраїчна сума ЕРС джерел, що розташовані в межах контуру. Джерела, напрям дії яких збігається з напрямом обходу контуру, враховуються зі знаком «+». Джерела, що діють у протилежному напрямі – зі знаком «-».

Для розв'язання отриманої системи рівнянь доцільно застосовувати метод Крамера, який дозволяє ефективно знайти значення контурних струмів:

$$I_{11} = \frac{\Delta_1}{\Delta} \quad I_{22} = \frac{\Delta_2}{\Delta} \quad I_{33} = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

де Δ , Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 – визначники матриць, відповідно:

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}; \quad .$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} E_{11} & R_{12} & R_{13} \\ E_{22} & R_{22} & R_{23} \\ E_{33} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} R_{11} & E_{11} & R_{13} \\ R_{21} & E_{22} & R_{23} \\ R_{31} & E_{33} & R_{33} \end{vmatrix} \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & E_{11} \\ R_{21} & R_{22} & E_{22} \\ R_{31} & R_{32} & E_{33} \end{vmatrix}.$$

Після знаходження контурних струмів, струми в окремих гілках визначаються на основі першого правила Кірхгофа – струм у кожній гілці обчислюється як алгебраїчна сума контурних струмів, які проходять через цю гілку, з урахуванням їх напрямків.

Алгоритм застосування методу контурних струмів

1. Позначити всі струми в гілках та вибрати їх додатні напрямки задля узгодженості знаків у подальших рівняннях і правильного складання балансу струмів.

2. Вибрати довільним чином набір із p незалежних контурів та позначити для кожного з них додатній напрямок контурного струму. Незалежні контури повинні утворювати базис, тобто жоден з них не має бути лінійною комбінацією інших.

3. Визначити власні та взаємні (загальні) опори контурів, а також контурні ЕРС. Після цього скласти систему рівнянь виду (2.2) за другим законом Кірхгофа, в якій для кожного контуру записують суму падінь напруг та ЕРС.

4. Розв'язати отриману систему рівнянь для контурних струмів (наприклад, методом Крамера). У результаті визначити всі контурні струми, які є проміжними шуканими величинами.

5. Визначити струми в гілках за допомогою контурних струмів, використовуючи перший закон Кірхгофа: струм у кожній гілці дорівнює алгебраїчній сумі контурних струмів, що проходять через цю гілку, з урахуванням напрямків.

6. За потреби обчислити потенціали вузлів, застосовуючи узагальнений закон Ома. Потенціал вузла визначають через падіння напруги на гілках:

$$\varphi_i = \varphi_{\text{оп}} + \sum I_k \cdot r_k \pm E_k,$$

рухаючись від опорного вузла до вузла i уздовж будь-якого шляху.

7. Перевірити правильність розрахунків за допомогою балансу потужності. Сумарна потужність, що віддається джерелами, повинна дорівнювати сумарній потужності, що розсіюється на елементах кола.

Якщо в колі міститься q джерел струму, то число розглянутих разом рівнянь зменшується на q і стає рівним $p - q$, оскільки струми в таких гілках відомі (для контурів з $I_{ii} = J$ рівняння можна опустити). Система незалежних контурів повинна бути вибрана так, щоб кожне джерело струму входило лише в один контур, що дозволяє вважати відповідний контурний струм відомим. Напруги U_j джерел будуть включені як невідомі в праву частину рівнянь, тобто в склад контурної ЕРС.

Матричні рівняння контурних струмів. Рівняння струмів кола можна записати у вигляді матриці:

$$r^{(\kappa)} I^{(\kappa)} = E^{(\kappa)},$$

де $r^{(\kappa)}$ – квадратна матриця контурних опорів; $I^{(\kappa)}$ – матриця-стовпчик контурних струмів; $E^{(\kappa)}$ – матриця-стовпчик контурних ЕРС, що враховують джерела напруг і еквівалентні ЕРС від джерел струму.

Матрицю опорів контурів $r^{(\kappa)}$ можна отримати за схемою з використанням матриці контурів B :

$$r^{(\kappa)} = BrB^T,$$

де r – діагональна матриця опорів гілок; B^T – транспонована матриця контурів.

Розглянемо схему, наведену на **рис. 2.12**. Напрямок обходу кожного контуру співпадає з додатнім напрямом відповідного контурного струму, а напрямом гілок – з додатнім напрямом струмів у гілках.

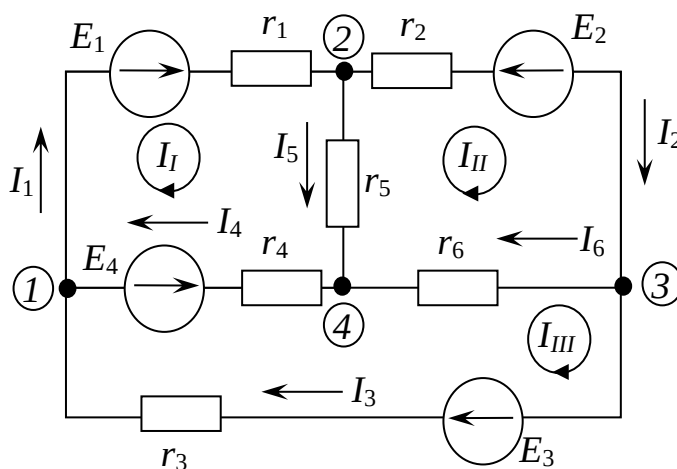


Рис. 2.12. Електричне коло постійного струму

Граф електричного кола, з вибраним деревом з четвертою, п'ятою і шостою гілкою, наведено на **рис. 2.13**.

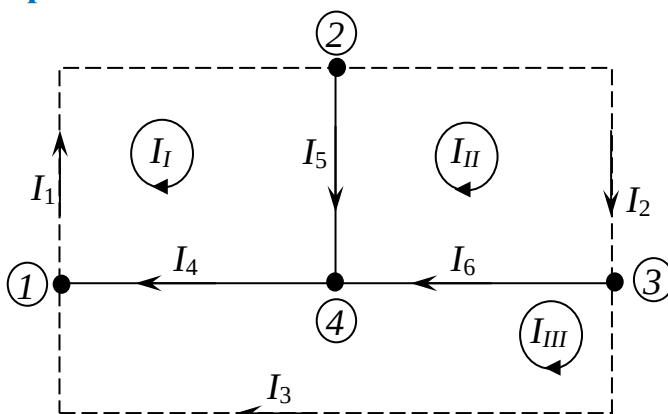


Рис. 2.13. Граф кола постійного струму

У даній схемі, незалежні контури містять контурні струми I_I , I_{II} , I_{III} , що відповідає першій, другій і третій гілкам зв'язку.

Матриця контурів B складається з трьох рядків і шести стовпців:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Діагональна матриця опорів $r = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_6 \end{bmatrix}.$

Добуток матриць B і r дорівнює:

$$Br = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 & r_4 & r_5 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 & 0 & -r_5 & r_6 \\ 0 & 0 & r_3 & -r_4 & 0 & -r_6 \end{bmatrix}.$$

Квадратна матриця контурних опорів

$$r^{(\kappa)} = BrB^T = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 & r_4 & r_5 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 & 0 & -r_5 & r_6 \\ 0 & 0 & r_3 & -r_4 & 0 & -r_6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (r_1 + r_4 + r_5) - r_5 - r_4 \\ -r_5(r_2 + r_5 + r_6) - r_6 \\ -r_4 - r_6(r_3 + r_4 + r_6) \end{bmatrix}.$$

Матриця-стовпчик контурних струмів $I^{(\kappa)} = \begin{bmatrix} I_I \\ I_{II} \\ I_{III} \end{bmatrix}^T.$

Матриця-стовпчик контурних ЕРС

$$E^{(\kappa)} = \begin{bmatrix} (E_1 - E_2) \\ (-E_2) \\ (E_3 + E_4) \end{bmatrix}^T.$$

Використовуючи рівняння $r^{(\kappa)}I^{(\kappa)} = E^{(\kappa)}$, отримуємо систему рівнянь, складену на основі другого закону Кірхгофа для контурів, кожен з яких включає тільки одну гілку зв'язку. Матриця струмів гілок I визначається через матрицю контурних струмів $I^{(\kappa)}$ за формулою $I = B^T I^{(\kappa)}$.

Наприклад, для електричного кола на [рис. 2.12](#):

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_I \\ I_{II} \\ I_{III} \end{bmatrix}.$$

З цього матричного рівняння отримаємо рівності, що визначають струми гілок через контурні струми:

$$I_1 = I_I; I_2 = I_{II}; I_3 = I_{III}; I_4 = I_I - I_{III}; I_5 = I_I - I_{II}; I_6 = I_{II} - I_{III}.$$

Приклад 2.3. Дано електричне коло постійного струму, схема якого наведена на **рис. 2.14**. Коло містить десять резистивних гілок з опорами $r_1 = 10 \text{ Ом}$, $r_2 = 15 \text{ Ом}$, $r_3 = 12 \text{ Ом}$, $r_4 = 12 \text{ Ом}$, $r_5 = 20 \text{ Ом}$, $r_6 = 9 \text{ Ом}$, $r_7 = 8 \text{ Ом}$, $r_8 = 12 \text{ Ом}$, $r_9 = 16 \text{ Ом}$, $r_{10} = 12 \text{ Ом}$, а також п'ять джерел ЕРС з напругами $E_1 = 100 \text{ В}$, $E_2 = 50 \text{ В}$, $E_6 = 90 \text{ В}$, $E_8 = 65 \text{ В}$, $E_{10} = 90 \text{ В}$. Використовуючи метод контурних струмів у матричній формі, розрахувати струми в усіх гілках кола.

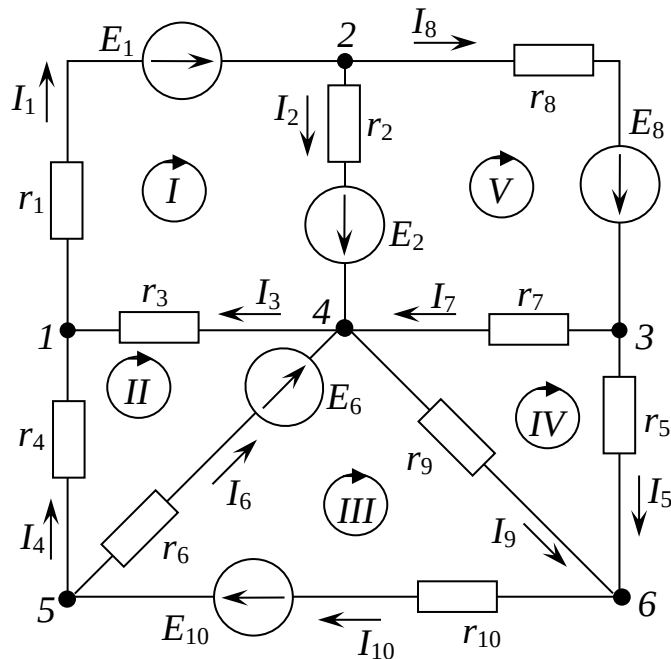


Рис. 2.14. Схема електричного кола

Розв'язання. Для застосування методу контурних струмів необхідно скласти матрицю контурів B , яка показує, через які гілки проходить кожен контурний струм і в якому напрямку. Оскільки в даному колі виділено п'ять незалежних контурів та десять гілок, матриця B має розмір 5×10 , тобто складається з п'яти рядків (за кількістю контурів) і десяти стовпців (за кількістю гілок). Кожен рядок відповідає одному контурному струму, кожен стовець відповідає певній гілці кола.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Після побудови матриці B формуємо діагональну матрицю опорів гілок r та обчислюємо добуток Br . Діагональна матриця опорів

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$\mathbf{Br} = \begin{pmatrix} 10 & 15 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & 12 & 0 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 16 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 20 & 0 & -8 & 0 & -16 & 0 \\ 0 & -15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 12 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Далі визначаємо матрицю контурних опорів:

$$r^{(\kappa)} = BrB^T = \begin{pmatrix} 10 & 15 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & 12 & 0 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 16 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 20 & 0 & -8 & 0 & -16 & 0 \\ 0 & -15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 12 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 & -12 & 0 & 0 & -15 \\ -12 & 33 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 37 & -16 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & 44 & -8 \\ -15 & 0 & 0 & -8 & 35 \end{pmatrix}.$$

За напрямками обходу контурів вектор контурних ЕРС має вигляд:

$$E^{(\kappa)} = \begin{bmatrix} E_1 + E_2 \\ -E_6 \\ E_6 + E_{10} \\ 0 \\ E_8 - E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150 \\ -90 \\ 180 \\ 0 \\ 15 \end{bmatrix}.$$

Контурні струми визначаються з матричного рівняння:

$$I^{(\kappa)} = (r^{(\kappa)})^{-1} E^{(\kappa)} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0,04 & 0,02 & 6,38 \cdot 10^{-3} & 5,65 \cdot 10^{-3} & 0,02 \\ 0,02 & 0,04 & 0,01 & 5,93 \cdot 10^{-3} & 8,29 \cdot 10^{-3} \\ 6,38 \cdot 10^{-3} & 0,01 & 0,04 & 0,01 & 5,98 \cdot 10^{-3} \\ 5,65 \cdot 10^{-3} & 5,93 \cdot 10^{-3} & 0,01 & 0,03 & 9,18 \cdot 10^{-3} \\ 0,02 & 8,29 \cdot 10^{-3} & 5,98 \cdot 10^{-3} & 9,18 \cdot 10^{-3} & 0,04 \end{vmatrix} \times$$

$$\begin{vmatrix} 150 \\ -90 \\ 180 \\ 0 \\ 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5,92 \\ 1,19 \\ 6,46 \\ 3,01 \\ 3,65 \end{vmatrix}.$$

Отже, контурні струми дорівнюють:

$$I_I = 5,92 \text{ A}, \quad I_{II} = 1,19 \text{ A}, \quad I_{III} = 6,46 \text{ A}, \quad I_{IV} = 3,01 \text{ A}, \quad I_V = 3,65 \text{ A}.$$

Струми гілок визначаються через контурні струми за формулою:

$$I = B^T I^{(\kappa)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5,92 \\ 1,19 \\ 6,46 \\ 3,01 \\ 3,65 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5,92 \\ 2,27 \\ 4,73 \\ 1,19 \\ 3,01 \\ 5,27 \\ 0,64 \\ 3,65 \\ 3,44 \\ 6,46 \end{vmatrix}.$$

Тобто для кожної гілки:

- якщо через гілку проходить один контур, то струм дорівнює відповідному контурному струму;
- якщо гілка спільна для двох контурів, то струм дорівнює алгебраїчній сумі контурних струмів з урахуванням напрямків;
- якщо гілка не входить до контуру, то її струм дорівнює нулю.

Відповідь: струми в гілках дорівнюють $I_1 = 5,92 \text{ A}$, $I_2 = 2,27 \text{ A}$, $I_3 = 4,73 \text{ A}$, $I_4 = 1,19 \text{ A}$, $I_5 = 3,01 \text{ A}$, $I_6 = 5,27 \text{ A}$, $I_7 = 0,64 \text{ A}$, $I_8 = 3,65 \text{ A}$, $I_9 = 3,44 \text{ A}$, $I_{10} = 6,46 \text{ A}$.

2.3.3. Аналіз мереж змінного струму

Напруга на послідовній RLC -гілці. Для послідовного кола, що складається з резистора R , індуктивності L та ємності C , через які протікає один і той самий струм $i(t)$, миттєва напруга на гілці визначається як сума миттєвих напруг на кожному елементі (рис. 2.15).

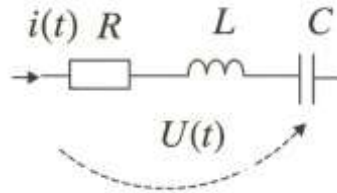


Рис. 2.15. Послідовне RLC -коло зі струмом $i(t)$ та напругою $U(t)$

У загальному вигляді кола, що містять L і C описуються системою інтегродиференціальних рівнянь (про них мова піде в темі 3). Однак у важливому для практики випадку сигналів гармонічної форми

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_0)$$

система зводиться до тригонометричних функцій. Визначимо напругу на елементах R, L, C .

$$\begin{aligned} U_R &= Ri(t) = RI_m \sin(\omega t + \varphi_0), \\ U_L &= L \frac{di}{dt} = \omega LI_m \sin(\omega t + \varphi_0 + 90^\circ), \\ U_C &= \frac{1}{C} \int i dt = \frac{1}{\omega C} I_m \sin(\omega t + \varphi_0 - 90^\circ), \end{aligned}$$

де $X_L = \omega L$ – індуктивний опір, $X_C = \frac{1}{\omega C}$ – ємнісний опір.

З отриманих виразів видно, що напруга на R співпадає зі струмом по фазі, на L випереджує струм на 90° , а на C відстає на 90° .

Сумарна миттєва напруга на послідовній RLC -гілці визначається як сума миттєвих напруг на її елементах:

$$\begin{aligned} U(t) &= \\ &= RI_m \sin(\omega t + \varphi_0) + X_L I_m \sin(\omega t + \varphi_0 + 90^\circ) + \\ &+ X_C I_m \sin(\omega t + \varphi_0 - 90^\circ) = U_m \sin(\omega t + \varphi_0) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Векторне представлення напруг. Для аналізу зручно використовувати діючі значення напруг:

$$U = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}}.$$

З векторної діаграми (рис. 2.16) випливає:

$$\begin{aligned} U &= \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} = I \sqrt{R^2 + X^2} = I \cdot Z, \\ \varphi &= \arctg \frac{U_L - U_C}{U_R} = \arctg \frac{X}{R}, \end{aligned}$$

де φ – кут зсуву між струмом і напругою. Розділивши всі сторони трикутника напруг на I , отримаємо подібний йому трикутник опорів, де R – активний опір; $X = X_L - X_C$ – реактивний опір гілки; $Z = R^2 + X^2$ – повний опір гілки.

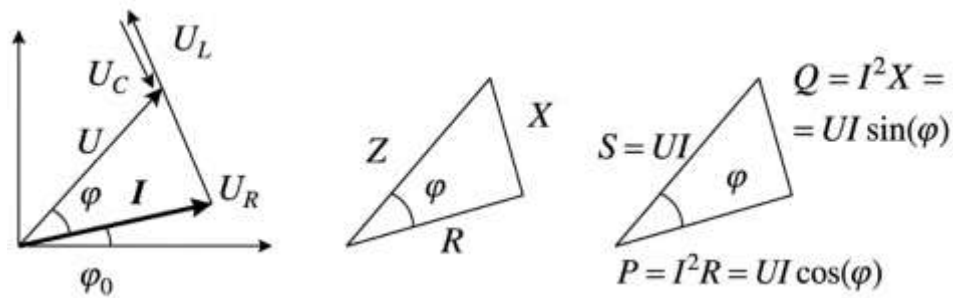


Рис. 2.16. Векторна діаграма напруг U_R, U_L, U_C , трикутник опорів R, X, Z та трикутник потужностей P, Q, S для послідовного RLC -кола

Помноживши всі сторони трикутника напруг на струм I , одержуємо трикутник потужностей:

$P = I^2 R = UI \cos \varphi$ [Вт] – активна потужність;

$Q = \pm I^2 X = UI \sin \varphi$ [ВАр] – реактивна потужність;

$S = UI$ [ВА] – повна потужність.

Знак «+» відповідає індуктивному характеру навантаження ($X > 0$), знак «-» – ємнісному ($X < 0$).

Комплексні числа в аналізі кіл змінного струму. У розрахунках складніших схем використання векторних діаграм стає незручним. Тому для аналізу електричних кіл змінного струму застосовують метод комплексних чисел, який дозволяє замінити тригонометричні залежності алгебраїчними операціями.

Комплексне число можна подати у вигляді:

$$M = a + jb = m \cos \varphi + j m \sin \varphi = m e^{j\varphi},$$

де a – дійсна частина, b – уявна частина, $m = \sqrt{a^2 + b^2}$ – модуль, $\varphi = \arctg b/a$ (+ π , якщо $a < 0$) – аргумент.

Комплексно спряжене число:

$$M^* = a - jb = m e^{-j\varphi};$$

$$MM^* = m^2.$$

Експоненціальні співвідношення:

$$j = e^{j90^\circ}; -j = e^{-j90^\circ}; -1 = e^{j180^\circ}.$$

При додаванні, відніманні зручною є алгебраїчна форма представлення комплексного числа:

$$(a_1 + jb_1) + (a_2 + jb_2) = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2).$$

При множенні і діленні, піднесенні до степені зручною є показникова форма:

$$\sqrt{M} = \sqrt{m} e^{\frac{\varphi}{2}}.$$

Для виконання розрахунків зручно використовувати формули переходу від показникової до алгебраїчної:

$$a = m \cos \varphi, b = m \sin \varphi.$$

Комплексне представлення гармонічних величин. Розглянемо комплексну функцію:

$$I_m e^{j(\omega t + \varphi_0)} = I_m \cos(\omega t + \varphi_0) + j I_m \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Між нею і миттєвим струмом $i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_0)$ існує однозначна відповідність: знаючи одну з них, можна відновити іншу.

Запишемо вираз (2.3) у комплексній формі:

$$R I_m e^{j(\omega t + \varphi_0)} + X_L I_m e^{j(\omega t + \varphi_0)} e^{j90^\circ} + X_C I_m e^{j(\omega t + \varphi_0)} e^{-j90^\circ} = U_m e^{j(\omega t + \varphi_0)}.$$

Розділивши всі частини члени на $\sqrt{2} e^{j\omega t}$, перейдемо від комплексних функцій до комплексних чисел:

$$R I e^{j\varphi_0} + j X_L I e^{j\varphi_0} - j X_C I e^{j\varphi_0} = U e^{j\varphi_0},$$

або

$$R \underline{I} + j X_L \underline{I} - j X_C \underline{I} = \underline{U}, \quad (2.4)$$

де $\underline{I} = I e^{j\varphi_0}$ – комплекс діючих значень струму; $\underline{U} = U e^{j\varphi_0}$ – комплекс діючих значень напруг. Вираз (2.4) можна записати компактніше:

$$\underline{I}(R + jX_L - jX_C) = \underline{I}Z = \underline{U}, \quad (2.5)$$

де $\underline{Z} = R + jX = \sqrt{R^2 + X^2} e^{j \arctg(\frac{X}{R})} = Z e^{j\varphi_k}$ – комплексний опір.

Комплексна схема заміщення гілки RLC. За виразами (2.4) і (2.5) можна відповідно представити комплексні схеми заміщення гілки з RLC (рис. 2.17). Для визначення $U(t)$ для гілки з RLC потрібно спочатку представити комплексну схему заміщення. Далі визначити за оригіналом струму його комплекс і розрахувати комплексний опір:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_0) \\ \underline{I} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j\varphi_0}, \underline{Z} = R + j\omega L - j \frac{1}{\omega C}.$$

Потім за законом Ома знаходиться комплекс напруг: $\underline{U} = \underline{I}Z$. За знайденим $\underline{U} = U e^{j\varphi_0}$ відновлюється шукана напруга:

$$U(t) = U \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Наприклад, на основі вихідної схеми (рис. 2.17) приведемо комплексну схему заміщення (спочатку розгорнута, потім компактна).

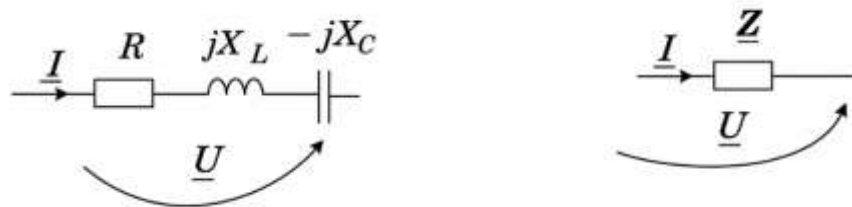


Рис. 2.17. Розгорнута комплексна схема гілки з опорами $R, jX_L, -jX_C$ та еквівалентна схема з повним опором Z

Система рівнянь для складнішої схеми

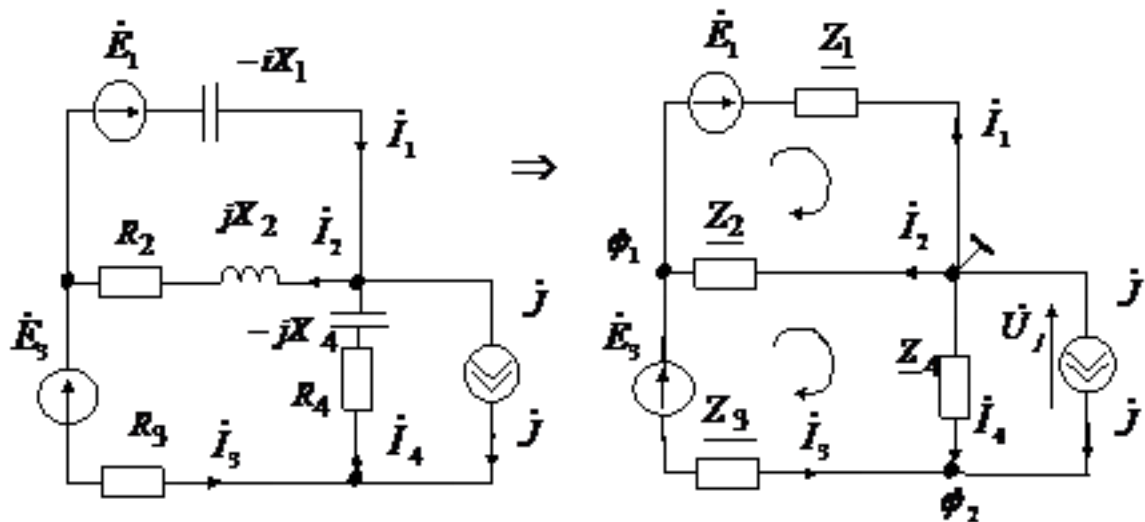


Рис. 2.18. Розгорнута схема електричного кола та її комплексна схема заміщення

За законам Кірхгофа складемо рівняння:

$$\begin{cases} -I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ I_3 + I_4 + J = 0 \\ -I_2 Z_2 - I_3 Z_3 + I_4 Z_4 = E_3' \\ I_1 Z_1 + I_2 Z_2 = E_1 \end{cases}$$

де відомі:

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{E_{m1}}{\sqrt{2}} e^{j\varphi_1}, E_3 = \frac{E_{m3}}{\sqrt{2}} e^{j\varphi_2}, J = \frac{J_m}{\sqrt{2}} e^{j\varphi_3}, \\ Z_1 &= -j \frac{1}{\omega C_1}, Z_2 = R_2 + j\omega L, \\ Z_3 &= R_3, Z_4 = R_4 - j \frac{1}{\omega C_4}. \end{aligned}$$

Тоді у матричній формі:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -Z_2 & -Z_3 & Z_4 \\ Z_1 & Z_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -J \\ E_3 \\ E_1 \end{bmatrix},$$

або

$$A \underline{I} = B.$$

Для визначення вектору шуканих струмів $\underline{I}$ помножимо рівняння ліворуч і праворуч на A^{-1} . Отримаємо

$$\underline{I} = A^{-1} B.$$

Тоді миттєві значення струмів можна розрахувати як:

$$i_k(t) = I_k \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi_k).$$

Для запису балансу потужності в комплексному вигляді розглянемо спочатку послідовну гілку RLC . Комплексна потужність визначається як

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = Z |\underline{I}|^2 = (R + jX) |\underline{I}|^2 = R |\underline{I}|^2 + jX |\underline{I}|^2 = P + jQ.$$

Такий запис одразу враховує активну та реактивну потужності споживача. Для розглянутого прикладу баланс потужності має вигляд:

$$\sum Z_k |I_k|^2 = \underline{E}_1 I_1^* - \underline{E}_3 I_3^* - \underline{U}_j J^*,$$

або у скороченому вигляді:

$$\underline{S}_{\text{потр}} = \underline{S}_{\text{джер}}.$$

Закон Ома в комплексній формі. Для будь-якої гілки електричного кола:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U} \pm \underline{E}}{\underline{Z}},$$

Розглянемо гілку електричного кола, яка містить комплексний опір $\underline{Z}$ та джерело ЕРС $\underline{E}$, підключену між вузлами з потенціалами $\underline{\varphi}_1$ та $\underline{\varphi}_2$. Струм у гілці позначимо $\underline{I}$.

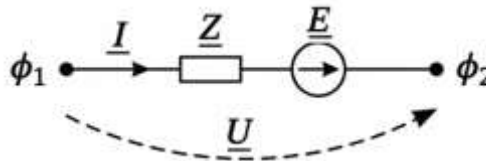


Рис. 2.19. Гілка кола з комплексним опором $\underline{Z}$ та ЕРС $\underline{E}$ між вузлами $\underline{\varphi}_1$ та $\underline{\varphi}_2$

Напруга на гілці визначається як різниця потенціалів вузлів з урахуванням ЕРС:

$$\underline{U} = \underline{\varphi}_1 - \underline{\varphi}_2 \pm \underline{E}.$$

Тоді комплексний закон Ома набуває вигляду:

$$\underline{I} = \frac{(\underline{\varphi}_1 - \underline{\varphi}_2) \pm \underline{E}}{\underline{Z}}.$$

Даний вираз використовується при складанні рівнянь за вузовими потенціалами та при аналізі складних електричних кіл у комплексній формі.

2.3.4. Однофазні електричні кола синусоїдального струму

У колах змінного струму необхідно враховувати не тільки струми зміщення, але і ЕРС самоіндукції, що робить аналіз таких кіл суттєво складнішим порівняно з колами постійного струму. Розглянемо лінійні електричні кола, у яких електричні та магнітні величини змінюються синусоїдально. Саме такі кола мають найширше застосування в електротехніці та енергетиці.

Параметри синусоїдальних електричних величин. Синусоїдальні електричні величини змінюються у часі за законом

$$x(t) = X_m \sin(\omega t + \varphi_0),$$

де X_m – амплітуда, ω – кутова частота, φ_0 – початкова фаза.

Значення величини в конкретний момент часу називають **миттєвим значенням**. На **рис. 2.20** наведено графік миттєвих значень струму i , яку можна розглядати як функцію часу t або пропорційну йому величини фазового кута $\omega \cdot t$. Синусоїдальна величина є періодичною функцією часу – через проміжок часу T , що називається періодом, цикл коливань повторюється:

$$x(t) = x(t + T).$$

Періоду часу T відповідає фазовий кут 2π . Тривалість періоду прийнято вимірювати в секундах. Величину, обернену періоду, називають частотою і позначають буквою f ($f = 1/T$).

У техніці найчастіше використовують частоти 50 Гц (Європа) та 60 Гц (США). Для спеціальних застосувань застосовують вищі частоти (400 Гц в авіації, високочастотний нагрів тощо).

Аналітичний вираз миттєвого значення струму визначається тригонометричною функцією

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_0),$$

де I_m – амплітуда струму (його максимальне значення), $(\omega t + \varphi_0)$ – фаза визначає фазовий кут синусоїдальної функції в будь-який момент часу t , φ_0 – початкова фаза (фаза в момент початку відліку часу $t = 0$).

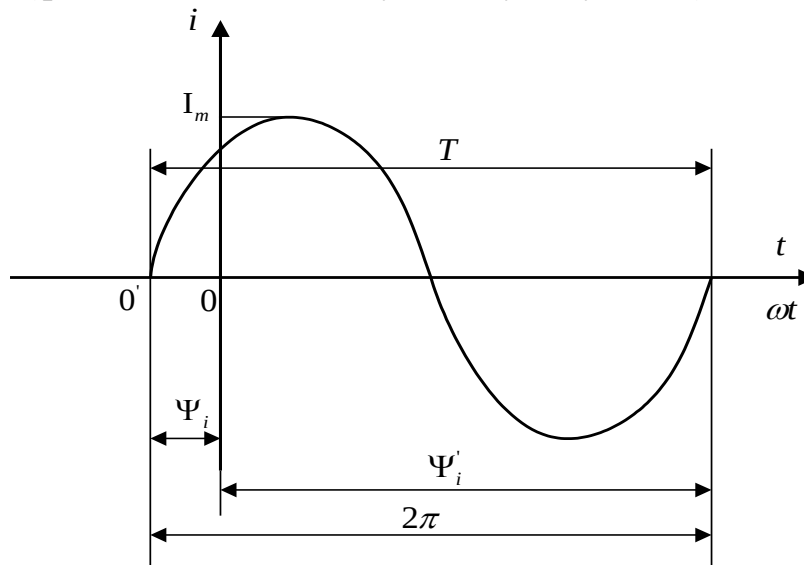


Рис. 2.20. Графік миттєвих значень струму

В електротехніці зазвичай вибирають початкову фазу з умови φ_0 . Її значення залежить від вибору початку відліку часу. Наприклад, якщо на графіку (рис. 2.20) за початок відліку прийняти точку $0'$, то початкова фаза струму дорівнюватиме нулю.

Кутова частота ω визначає, на скільки радіан змінюється фаза коливань за одну секунду. Вимірюється вона в радіанах за секунду. Для промислової частоти 50 Гц кутова частота становить $\omega = 2\pi \cdot 50$ рад/с.

Усе сказане щодо струму справедливе і для синусоїдальних напруг $u(t)$ та ЕРС $e(t)$ (рис. 2.21). Фази цих синусоїд різні: початкова фаза напруги дорівнює нулю $\varphi_u = 0$, початкова фаза струму є від'ємною $\varphi_i < 0$, а початкова фаза ЕРС – додатною $\varphi_e > 0$.

При спільному розгляді кількох синусоїдальних електричних величин однієї частоти зазвичай цікавляться їх фазовими співвідношеннями, тобто різницею фазових кутів, яку називають кутом зсуву фаз. Кут зсуву фаз двох синусоїдальних функцій визначають як різницю їх початкових фаз. Синусоїду з більшою початковою фазою називають такою, що випереджає, а з меншою – такою, що відстає.

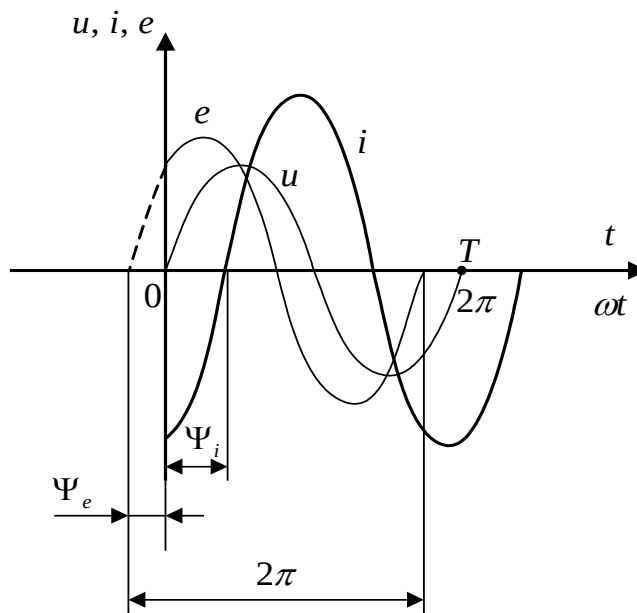


Рис. 2.21. Графіки миттєвих значень ЕРС, напруги і струму

У практиці змінних струмів широко використовують поняття дійсного (середньоквадратичного) значення електричної величини – це середньоквадратичне значення за період. Для струму:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T [i(t)]^2 dt}.$$

Тоді зв'язок між амплітудою та діючим значенням синусоїдальної величини:

$$I = I_m / \sqrt{2}.$$

$$U = U_m / \sqrt{2},$$

$$E = E_m / \sqrt{2}.$$

Коли говорять про числові значення змінних електричних величин, зазвичай мають на увазі саме їх дійсні значення. Більшість електровимірювальних приладів також градууються у діючих значеннях.

Застосування комплексних чисел для розрахунку електричних кіл. Електричний стан кіл синусоїдального струму, так само як і кіл постійного струму, описується рівняннями Кірхгофа, однак обчислення стають значно більш громіздкими. Для спрощення розв'язання рівнянь в електротехніці широко застосовують *математичний апарат комплексних чисел*.

Розглянемо принцип розрахунку кіл синусоїдального струму за допомогою комплексних чисел. На **рис. 2.22, а** показано вузол електричного кола, до якого під'єднані три гілки.

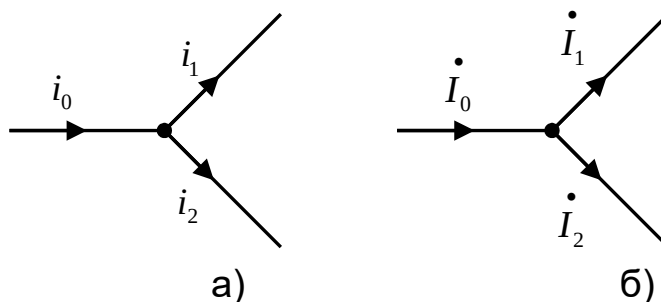


Рис. 2.22. Вузол електричного кола

Нехай струми задано виразами

$$i_1 = I_{1m} \cdot \sin(\omega t + \Psi_1) \text{ и } i_2 = I_{2m} \cdot \sin(\omega t + \Psi_2),$$

визначимо струм $i_0(t)$, використовуючи перший закон Кірхгофа:

$$i_0 = I_{1m} \cdot \sin(\omega t + \Psi_1) + I_{2m} \cdot \sin(\omega t + \Psi_2). \quad (2.6)$$

З (2.6) шуканий струм буде також синусоїдальною функцією часу з кутовою частотою, що дорівнює відомій частоті ω :

$$i_0 = I_{0m} \sin(\omega t + \Psi_0).$$

Для визначення синусоїдальної величини необхідно знати дві характеристики – **амплітуду** I_{0m} та **початкову фазу** φ_0 Ψ_0 . Формально їх можна знайти за тригонометричними співвідношеннями, однак для довільних значень фаз такі обчислення швидко стають громіздкими, особливо коли рівняння містять багато тригонометричних членів.

Використання **комплексних чисел** суттєво спрощує розв'язання задач аналізу змінних електричних кіл. Комплексна форма дозволяє замінити тригонометричні залежності звичайними алгебраїчними операціями та наочно представляти результати на комплексній площині.

Вираз синусоїдальної функції через комплексні показники

$$\sin \alpha = \frac{(e^{j\alpha} - e^{-j\alpha})}{2j},$$

де α – аргумент синусоїдальної функції; $j = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця; e – основа натурального логарифма.

Виразивши всі доданки рівняння (2.6) через комплексні показники функції та скоротивши загальний множник $2j$, отримаємо

$$\begin{aligned} I_{1m} \cdot e^{j(\omega t + \Psi_1)} + I_{2m} \cdot e^{j(\omega t + \Psi_2)} - I_{0m} \cdot e^{j(\omega t + \Psi_0)} = \\ = I_{1m} \cdot e^{-j(\omega t + \Psi_1)} + I_{2m} \cdot e^{-j(\omega t + \Psi_2)} - I_{0m} \cdot e^{-j(\omega t + \Psi_0)}. \end{aligned}$$

Отримане рівняння є справедливим для будь-якого моменту часу, а показники степені в його лівій і правій частинах має різні знаки, що можливо тільки у випадку, якщо обидві частини рівняння дорівнюють нулю. Звідси:

$$I_{1m} \cdot e^{j(\omega t + \Psi_1)} + I_{2m} \cdot e^{j(\omega t + \Psi_2)} - I_{0m} \cdot e^{j(\omega t + \Psi_0)} = 0. \quad (2.7)$$

Розділимо всі члени рівняння (2.7) на загальний множник $e^{j\omega t}$ і перепишемо у вигляді

$$I_{0m} \cdot e^{j\Psi_0} = I_{1m} \cdot e^{j\Psi_1} + I_{2m} \cdot e^{j\Psi_2}.$$

де I_{1m} та I_{2m} описують синусоїдальні струми. Підсумовуючи ці два комплексні числа, ми отримуємо нове комплексне число, модуль якого визначає амплітуду шуканого струму, а аргумент – його початкову фазу. Такі комплексні величини називають комплексними амплітудами струму:

$$\dot{I}_{0m} = I_{0m} \cdot e^{j\Psi_0}, \quad \dot{I}_{1m} = I_{1m} \cdot e^{j\Psi_1}, \quad \dot{I}_{2m} = I_{2m} \cdot e^{j\Psi_2}$$

або

$$\dot{I}_{0m} = \dot{I}_{1m} + \dot{I}_{2m}.$$

У такому вигляді рівняння набуває компактної форми та фактично є записом першого закону Кірхгофа у комплексній формі для схеми **рис. 2.22, а**. На схемах заміщення також можна використовувати комплексні зображення струмів, напруг та ЕРС.

Аналогічно вводиться також поняття комплексних амплітуд для напруг та ЕРС⁷

$$\dot{I}_m = I_m \cdot e^{j\Psi_i}, \quad \dot{U}_m = U_m \cdot e^{j\Psi_u}, \quad \dot{E}_m = E_m \cdot e^{j\Psi_e}. \quad (2.8)$$

Модуль комплексної амплітуди дорівнює амплітуді синусоїдальної величини, а аргумент визначає її початкову фазу.

Комплексні діючі значення пропорційні комплексним амплітудам:

$$\begin{aligned} \dot{I} &= I \cdot e^{j\Psi_i}; \quad \dot{U} = U \cdot e^{j\Psi_u}; \quad \dot{E} = E \cdot e^{j\Psi_e}; \\ I &= I_m / \sqrt{2}; \quad U = U_m / \sqrt{2}; \quad E = E_m / \sqrt{2}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

У формулах (2.8), (2.9) **Помилка! Джерело посилання не знайдено.** комплексні амплітуди подані в показниковій формі. Для переходу до алгебраїчної форми запису, користуються формулою Ейлера

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha,$$

тоді комплексна амплітуда струму

$$\dot{I}_m = I_m \cdot e^{j\alpha} = I_m (\cos \alpha + j \sin \alpha).$$

Комплексний опір визначається відношенням комплексної амплітуди напруги до комплексної амплітуди струму:

$$\underline{Z} = \dot{U}_m / \dot{I}_m.$$

або

$$\underline{Z} = \dot{U} / \dot{I}.$$

або

$$\underline{Z} = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = \frac{U_m e^{j\Psi_u}}{I_m e^{j\Psi_i}} = \left(\frac{U_m}{I_m} \right) e^{j(\Psi_u - \Psi_i)} = \left(\frac{U_m}{I_m} \right) e^{j\phi} = Z \cdot e^{j\phi},$$

⁷ Комплексні зображення містять інформацію лише про два параметри синусоїди – амплітуду та початкову фазу, але не відображають її кутову частоту. Це пов'язано з тим, що метод комплексних чисел застосовують для аналізу кіл, у яких усі джерела працюють на одній відомій частоті. Якщо частота не зазначена окремо, зазвичай мають на увазі промислову частоту 50 Гц.

де Z – модуль, а φ – аргумент комплексного опору.

Повний опір:

$$Z = |\underline{Z}| = U_m / I_m.$$

Аргумент комплексного опору φ :

$$\varphi = \Psi_u - \Psi_i.$$

Електричне коло з R -елементом. Нехай R -елемент підключено до джерела синусоїдальної напруги $u = U_m \sin(\omega t + \Psi_u)$.

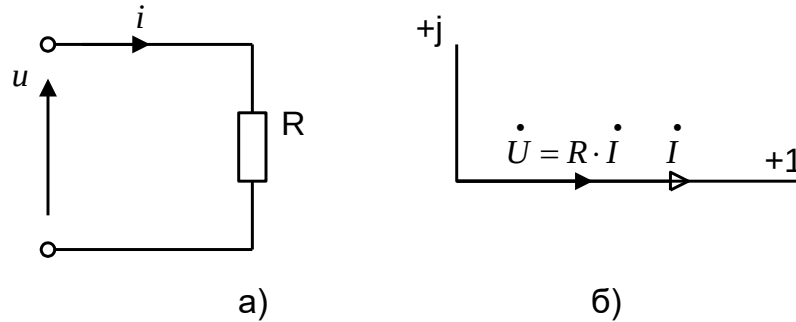


Рис. 2.23. Струм і напруга на резистивному елементі: часовий граф і фазорна⁸ діаграма (U та I співфазні)

При заданій синусоїдальній напрузі джерело струму в резистивному елементі буде також синусоїдальним:

$$i = \frac{u}{R} = \left(\frac{U_m}{R} \right) \sin(\omega t + \Psi_u) = I_m \sin(\omega t + \Psi_i).$$

тоді:

$$U_m = R \cdot I_m;$$

$$\Psi_i = \Psi_u \quad \text{і} \quad \phi = \Psi_u - \Psi_i = 0.$$

Закон Ома для комплексних амплітуд і комплексних діючих значень напруг і струму.

$$\dot{U}_m = R \cdot \dot{I}_m \quad \text{і} \quad \dot{U} = R \cdot \dot{I}.$$

Електричне коло з L -елементом. Нехай L -елемент підключено до джерела синусоїдального струму $i = I_m \sin(\omega t + \Psi_i)$.

Змінне потокозчеплення наводить у котушці ЕРС самоіндукції

$$e_L = - \frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{di}{dt} = -L\omega I_m \cos(\omega t + \Psi_i)$$

або

$$e_L = E_{Lm} \sin(\omega t + \Psi_i - \frac{\pi}{2}),$$

де $E_{Lm} = L\omega I_m$.

⁸ *Фазорна діаграма* – це графічне представлення синусоїдальних електричних величин у комплексній площині. Вона показує не самі часові графіки, а їх амплітуди та фазові зсуви у вигляді векторів (фазорів).

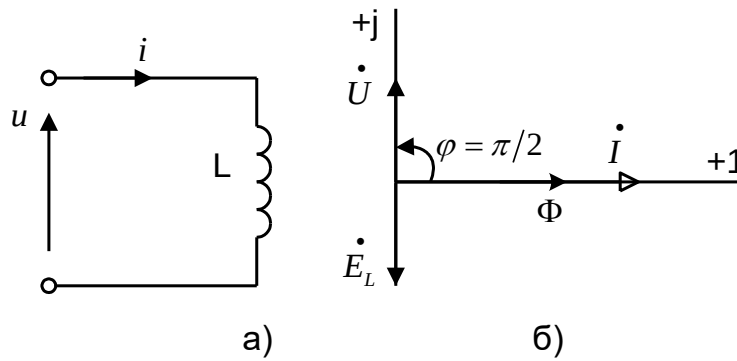


Рис. 2.24. L -елемент: часовий граф і фазорна діаграма (напруга випереджає струм на $\frac{\pi}{2}$)

Тоді для напруги на індуктивному елементі u :

$$u = L \frac{di}{dt} = L\omega I_m \sin\left(\omega t + \Psi_i + \frac{\pi}{2}\right) = U_m \sin(\omega t + \Psi_u),$$

де $U_m = X_L I_m$, $U_m = L\omega I_m$, а X_L – індуктивний опір.

Закон Ома в комплексній формі

$$\dot{U}_m = jX_L \dot{I}_m \quad \text{і} \quad \dot{U}_m = jX_L \dot{I}.$$

Електричне коло з C -елементом. Нехай C -елемент підключено до джерела синусоїдальної напруги $u = U_m \sin(\omega t + \Psi_u)$, тоді

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt} = C\omega U_m \cos(\omega t + \Psi_u)$$

або

$$i = C\omega U_m \sin\left(\omega t + \Psi_u + \frac{\pi}{2}\right) = I_m \sin(\omega t + \Psi_i),$$

де $I_m = C\omega U_m$, $\Psi_i = \Psi_u + \frac{\pi}{2}$, тоді $X_C = \frac{1}{(C\omega)}$ – ємнісний опір,

$$U_m = X_C \cdot I_m. \quad (2.10)$$

Вираз (2.10) – закон Ома для амплітудних значень струму і напруги ємнісного елемента, тоді для діючих значень:

$$U = X_C I.$$

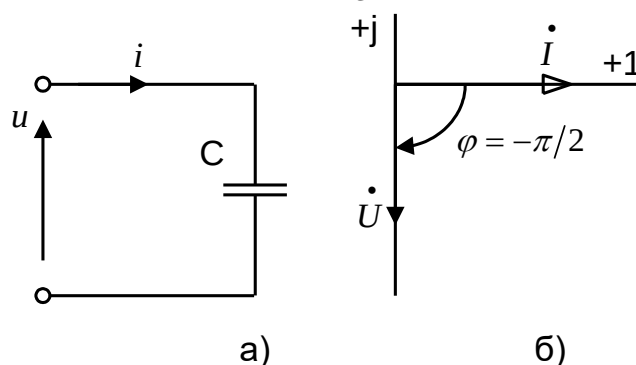


Рис. 2.251. Ємнісна гілка та фазорна діаграма струму й напруги

Закон Ома в комплексній формі

$$\dot{U}_m = -jX_C \dot{I}_m \quad \text{і} \quad \dot{U} = -jX_C \dot{I}.$$

Комплексні рівняння електричного стану кола. Електричний стан кола синусоїдального струму, як і кола постійного струму, описується рівняннями, складеними у відповідності з законами Кірхгофа.

Рівняння першого закону Кірхгофа в комплексній формі

$$\sum_{k=1}^n \dot{I}_k = \sum_{k=1}^n I_k e^{j\psi_{i_k}} = 0. \quad (2.11)$$

Правила знаків при складанні рівняння (2.11) залишаються такими ж, як і в колах постійного струму: струми, додатні напрями яких спрямовані від вузла, потрібно брати зі знаком мінус, а струми, додатні напрями яких спрямовані до вузла – зі знаком плюс.

Комплексне рівняння другого закону Кірхгофа

$$\sum_{k=1}^m \dot{U}_k = \sum_{k=1}^m U_k e^{j\psi_{u_k}} = 0 \quad (2.12)$$

Застосовно до схем заміщення з джерелами ЕРС другий закон Кірхгофа: алгебраїчна сума комплексних напруг на пасивних елементах замкнутого контуру дорівнює алгебраїчній сумі сторонніх ЕРС, що входять в цей контур:

$$\sum \underline{Z} \cdot \dot{I} = \sum \dot{E}. \quad (2.13)$$

Правила знаків при складанні рівнянь (2.12) і (2.13) залишаються такими ж, як і в колах постійного струму: доданки беруть зі знаком плюс у випадку, коли напрям обходу співпадає зі стрілкою додатнього напрямку відповідно напруги, струму або ЕРС.

Приклад 2.4. Коло (рис. 2.26) живиться двома джерелами синусоїдальної ЕРС з діючими значеннями $E_1 = 20$ В та $E_2 = 10$ В, фазові кути джерел вважати нульовими. Частота мережі становить $f = 50$ Гц, $\omega = 2\pi f$. Елементи кола мають такі параметри: $R_1 = 6$ Ом, $R_2 = 8$ Ом, $R_3 = 4$ Ом, $R = 10$ Ом; $C_1 = 100$ мкФ, $C_3 = 47$ мкФ, $C_5 = 220$ мкФ, $L_1 = 40$ мГн, $L_2 = 60$ мГн. Виконати розрахунок струмів кола синусоїдального струму.

Розв'язання. Джерела ЕРС:

$$\begin{aligned} e_1(t) &= E_{1m} \sin(\omega t + \psi_{e1}) \\ e_2(t) &= E_{2m} \sin(\omega t + \psi_{e2}) \end{aligned}$$

де ω – промислова частота.

Струми в схемі рис. 2.26 можна розрахувати будь-яким методом, аналогічним чином як для кола постійного струму.

Виконаємо розрахунок **методом контурних струмів**.

У схемі рис. 2.26 задаємо напрям невідомих струмів. Також обираємо напрям контурних струмів (наприклад, за годинниковою стрілкою). У схемі рис. 2.26 можна виділити три контурних струми. Послідовні з'єднання R – , L – , C – елементів заміняємо на еквівалентні. Результати виконаних дій представлені на рис. 2.27.

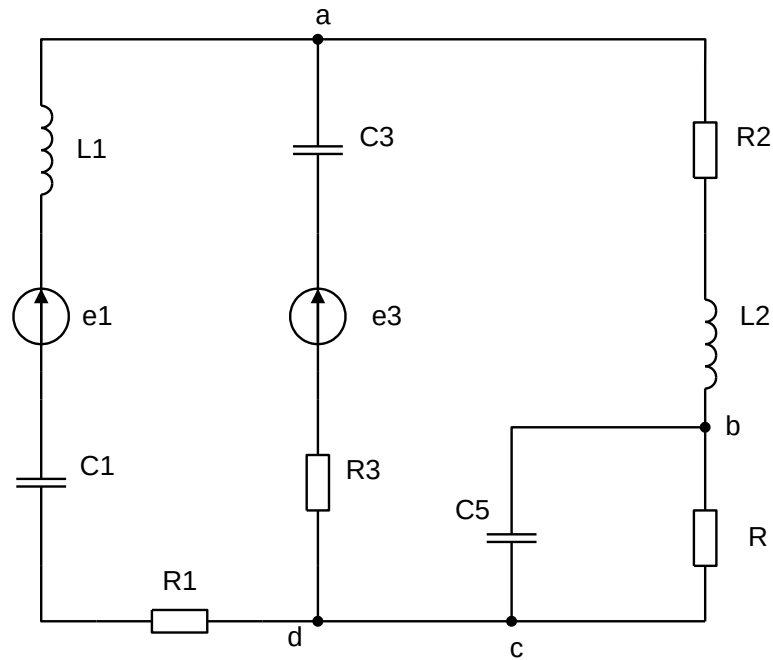


Рис. 2.26. Електрична схема багатогілкового кола

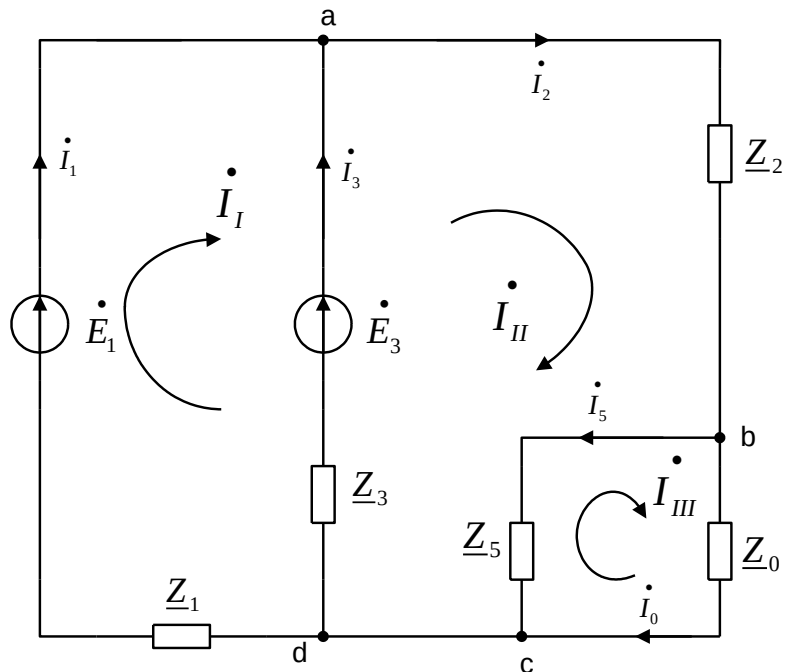


Рис. 2.27. Схема для аналізу методом контурних струмів

Для схеми **рис. 2.27** отримаємо еквівалентні опори

$$\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1 + \left(-\frac{j}{\omega C_1}\right)$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2$$

$$\underline{Z}_3 = R_3 + j\omega L_3 + \left(-\frac{j}{\omega C_3}\right)$$

$$\underline{Z}_0 = R$$

$$\underline{Z}_5 = -\frac{j}{\omega C_5},$$

$$\underline{Z}_1 = 6 + j12,56 - j31,8 = 6 - j19,2;$$

$$\underline{Z}_2 = 8 + j18,84;$$

$$\underline{Z}_3 = 4 - j67,76;$$

$$\underline{Z}_0 = 10;$$

$$\underline{Z}_5 = -j14,48.$$

джерела ЕРС в комплексній формі

$$\dot{E}_1 = \frac{E_{1m}}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\psi_{e1}} = E_1 \cdot e^{j\psi_{e1}}$$

$$\dot{E}_3 = \frac{E_{3m}}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\psi_{e2}} = E_3 \cdot e^{j\psi_{e2}}.$$

Оскільки $E_1 = 20$ В, $E_3 = 10$ В, $\psi_{e1} = \psi_{e3} = 0^\circ$, тому $\dot{E}_1 = 20$ В, $\dot{E}_3 = 10$ В.
Вектор джерел у матричній формі методу контурних струмів:

$$[\dot{E}] = \begin{bmatrix} \dot{E}_1 - \dot{E}_3 \\ \dot{E}_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Для визначення контурних струмів необхідно скласти наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3) \cdot \dot{I}_I - \underline{Z}_3 \cdot \dot{I}_{II} - 0 \cdot \dot{I}_{III} = \dot{E}_1 - \dot{E}_3 \\ -\underline{Z}_3 \cdot \dot{I}_I + (\underline{Z}_3 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_5) \cdot \dot{I}_{II} - \underline{Z}_5 \cdot \dot{I}_{III} = \dot{E}_3 \\ -0 \cdot \dot{I}_I - \underline{Z}_5 \cdot \dot{I}_{II} + (\underline{Z}_0 + \underline{Z}_5) \cdot \dot{I}_{III} = 0 \end{cases}$$

Рівняння для контурних струмів можна записати в матричній формі:

$$\begin{bmatrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 & -\underline{Z}_3 & 0 \\ -\underline{Z}_3 & \underline{Z}_3 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_5 & -\underline{Z}_5 \\ 0 & -\underline{Z}_5 & \underline{Z}_0 + \underline{Z}_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{I}_I \\ \dot{I}_{II} \\ \dot{I}_{III} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{E}_1 - \dot{E}_3 \\ \dot{E}_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

або

$$[\underline{Z}] \cdot [\dot{I}] = [\dot{E}]. \quad (2.141)$$

Розв'язком рівняння (2.14)(2.141) буде

$$[\dot{I}] = [\underline{Z}]^{-1} \cdot [\dot{E}].$$

Тоді контурні струми:

$$\dot{I}_I \approx 0,76 \angle 7^\circ \text{ А}, \dot{I}_{II} \approx 0,95 \angle 2^\circ \text{ А}, \dot{I}_{III} \approx 0,79 \angle -33^\circ \text{ А}.$$

Далі необхідно визначити невідомі струми через контурні струми:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_I, \dot{I}_2 = \dot{I}_{II}, \dot{I}_3 = \dot{I}_{II} - \dot{I}_I,$$

$$\dot{I}_5 = \dot{I}_{II} - \dot{I}_{III}, \dot{I}_0 = \dot{I}_{III}.$$

$$\dot{I}_1 \approx 0,76 \angle 7^\circ \text{ A},$$

$$\dot{I}_2 \approx 0,95 \angle 2^\circ \text{ A},$$

$$\dot{I}_3 \approx 0,21 \angle (-18^\circ) \text{ A},$$

$$\dot{I}_5 \approx 0,54 \angle 57^\circ \text{ A},$$

$$\dot{I}_0 \approx 0,79 \angle (-33^\circ) \text{ A}.$$

Виконаємо розрахунок **методом вузлових потенціалів**.

Аналогічно, як в методі контурних струмів, представляємо вихідну схему у вигляді, представленому на **рис. 2.28**.

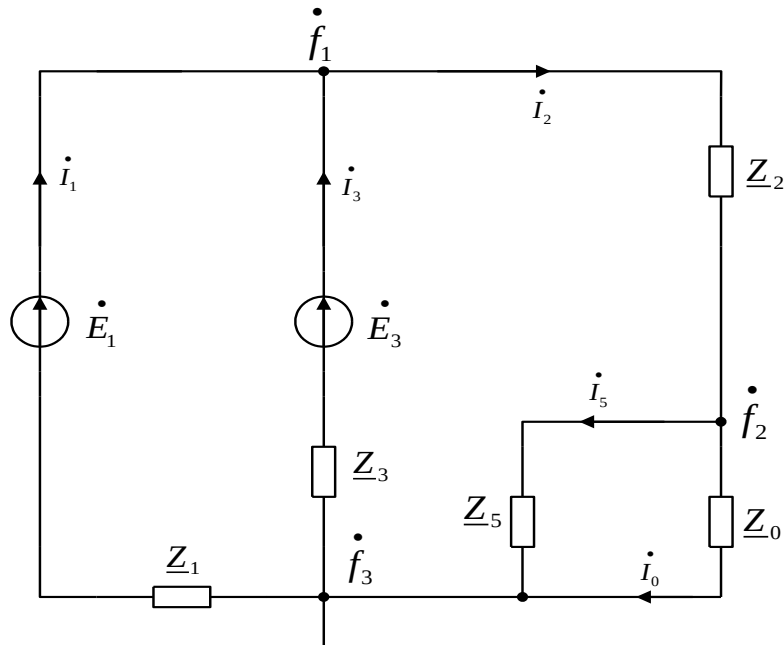


Рис. 2.28. Еквівалентна схема багатогілкового кола у вузловому представленні

У схемі (**рис. 2.28**) потенціал $\dot{f}_3 = 0$. Для визначення струмів необхідно скласти систему рівнянь, невідомими якої є потенціали вузлів. Дана система складається наступним чином:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3} \right) \cdot \dot{f}_1 - \frac{1}{\underline{Z}_2} \cdot \dot{f}_2 = \frac{\dot{E}_1}{\underline{Z}_1} + \frac{\dot{E}_3}{\underline{Z}_3} \\ -\frac{1}{\underline{Z}_2} \cdot \dot{f}_1 + \left(\frac{1}{\underline{Z}_0} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_5} \right) \cdot \dot{f}_2 = 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

Рівняння для вузлових потенціалів **(2.15)** можна записати в матричній формі:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3} & -\frac{1}{\underline{Z}_2} \\ -\frac{1}{\underline{Z}_2} & \frac{1}{\underline{Z}_0} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{f}_1 \\ \dot{f}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\dot{E}_1}{\underline{Z}_1} + \frac{\dot{E}_3}{\underline{Z}_3} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

або

$$[\underline{Y}] \cdot [\underline{F}] = [\underline{J}], \quad (2.16)$$

де $[\underline{Y}]$ – матриця вузлових і взаємних провідностей, $[\underline{J}]$ – матриця вузлових струмів, $[\underline{F}]$ – матриця невідомих потенціалів.

Обчислюємо провідності (обернені імпеданси):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\underline{Z}_1} &\approx 0,01484 + j0,04746, \\ \frac{1}{\underline{Z}_2} &\approx 0,01908 - j0,04493, \\ \frac{1}{\underline{Z}_3} &\approx 0,000868 + j0,01471, \\ \frac{1}{\underline{Z}_0} &= 0,1, \\ \frac{1}{\underline{Z}_5} &\approx j0,06906. \end{aligned}$$

Коефіцієнти:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3} \approx 0,03479 + j0,01724, \\ A_{12} &= A_{21} = -\frac{1}{\underline{Z}_2} \approx -0,01908 + j0,04493, \\ A_{22} &= \frac{1}{\underline{Z}_0} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_5} \approx 0,11908 + j0,02413. \end{aligned}$$

Права частина:

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{\dot{E}_1}{\underline{Z}_1} + \frac{\dot{E}_3}{\underline{Z}_3} = 20 \frac{1}{\underline{Z}_1} + 10 \frac{1}{\underline{Z}_3} \approx (0,2968 + j0,9492) + (0,00868 + j0,1471) \approx \\ &\approx 0,3055 + j1,0963, \\ b_2 &= 0. \end{aligned}$$

Отже, система:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{f}_1 \\ \dot{f}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Розв'язок дає вузлові потенціали:

$$\begin{aligned} \dot{f}_1 &\approx 13,73 + j13,87 \text{ В} \\ |\dot{f}_1| &\approx 19,5 \text{ В}, \arg \dot{f}_1 \approx 45,3^\circ \end{aligned}$$

$$\dot{f}_2 \approx 6,56 - j4,29 \text{ В}$$

$$|\dot{f}_2| \approx 7,84 \text{ В}, \arg \dot{f}_2 \approx -33,3^\circ$$

вузол $\dot{f}_3 = 0$ за умовою.

Розв'язком рівняння (2.16) **Помилка! Джерело посилання не знайдено.** буде

$$[\dot{F}] = [\underline{Y}]^{-1} \cdot [\underline{J}].$$

Далі визначаються струми

$$\dot{I}_1 = \frac{-\dot{f}_1 + \dot{E}_1}{\underline{Z}_1} \approx 0,751 + j0,092 \text{ А}, \dot{I}_1 \approx 0,76 \angle 7^\circ \text{ А},$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{f}_1 - \dot{f}_2}{\underline{Z}_1} \approx 0,953 + j0,024 \text{ А}, \dot{I}_2 \approx 0,95 \angle 2^\circ \text{ А},$$

$$\dot{I}_3 = \frac{-\dot{f}_1 + \dot{E}_3}{\underline{Z}_3} \approx 0,201 - j0,067 \text{ А}, \dot{I}_3 \approx 0,21 \angle (-18^\circ) \text{ А},$$

$$\dot{I}_5 = \frac{\dot{f}_2}{\underline{Z}_5} \approx 0,296 + j0,453 \text{ А}, \dot{I}_5 \approx 0,54 \angle 57^\circ \text{ А},$$

$$\dot{I}_0 = \frac{\dot{f}_2}{\underline{Z}_0} \approx 0,656 - j0,429 \text{ А}, \dot{I}_0 \approx 0,79 \angle (-33^\circ) \text{ А}.$$

Отримані струми повністю узгоджуються з результатами, які ми раніше знайшли методом контурних струмів – тобто обидва методи дають однакову картину, як і має бути.

Баланс потужності. Повна споживана потужність:

$$S_p = P_p + j \cdot Q_p = \left(\dot{I}_1 \right)^2 \cdot \underline{Z}_1 + \left(\dot{I}_2 \right)^2 \cdot \underline{Z}_2 + \left(\dot{I}_3 \right)^2 \cdot \underline{Z}_3 +$$

$$+ \left(\dot{I}_5 \right)^2 \cdot \underline{Z}_5 + \left(\dot{I}_0 \right)^2 \cdot \underline{Z}_0,$$

де P – активна потужність, а Q – реактивна потужність.

Повна потужність джерел:

$$S_i = P_i + j \cdot Q_i = \dot{E}_1 \cdot \overline{\dot{I}_1} + \dot{E}_3 \cdot \overline{\dot{I}_3},$$

де $\overline{\dot{I}_1}$ і $\overline{\dot{I}_3}$ – комплексно спряжені струми.

Потенціальна діаграма. Побудуємо потенціальну діаграму для лівого контуру, представленого на **рис. 2.29**, вихідної схеми (**рис. 2.26**).

На даному прикладі (**рис. 2.29**) отримаємо

$$\begin{aligned}
\dot{f}_1 &= 0, \quad \dot{f}_2 = \dot{f}_1 - \dot{I}_1 \cdot R_1, \quad \dot{f}_3 = \dot{f}_2 - \dot{I}_1 \cdot (-j/\omega C_1), \\
\dot{f}_4 &= \dot{f}_3 + \dot{E}_1, \quad \dot{f}_5 = \dot{f}_4 - \dot{I}_1 \cdot j\omega L_1, \quad \dot{f}_6 = \dot{f}_5 + \dot{I}_3 \cdot (-j/\omega C_3), \\
\dot{f}_7 &= \dot{f}_6 - \dot{E}_3, \quad \dot{f}_8 = \dot{f}_7 + \dot{I}_3 \cdot R_3.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Якщо потенціали (2.17) перенести на комплексну площину, то має вийти замкнута траєкторія. При цьому, потенціал $\dot{f}_8 \rightarrow \dot{f}_1 = 0$.

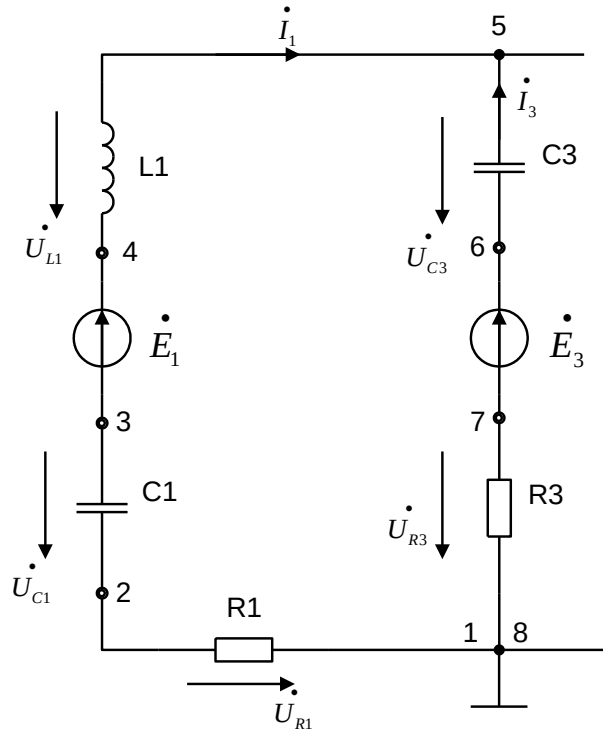


Рис. 2.29. Схема досліджуваного кола змінного струму

Відповідь: $\dot{I}_1 \approx 0,76 \angle 7^\circ \text{ A}$, $\dot{I}_2 \approx 0,95 \angle 2^\circ \text{ A}$, $\dot{I}_3 \approx 0,21 \angle (-18^\circ) \text{ A}$,
 $\dot{I}_5 \approx 0,54 \angle 57^\circ \text{ A}$, $\dot{I}_0 \approx 0,79 \angle (-33^\circ) \text{ A}$.

Запитання для самоконтролю

1. Що таке матриця і які її основні властивості?
2. Як записується система рівнянь у матричній формі?
3. У чому полягає метод Крамера? Які його обмеження?
4. Як використовується метод оберненої матриці для розв'язання систем рівнянь?
5. Як матриці застосовуються для моделювання електричних мереж?
6. Що таке інцидентна та суміжна матриці? Як вони використовуються?
7. Як графи електричних мереж можна представити у матричній формі?
8. Які алгоритми використовуються для аналізу графів електричних мереж?
9. Чим відрізняється орієнтований граф від неорієнтованого в контексті моделювання мереж?

10. За допомогою якої формули визначається кількість незалежних контурів у схемі?
11. У чому полягає метод вузлових потенціалів? Як він застосовується?
12. Які переваги та недоліки кожного з методів розрахунку електричних схем?
13. Які основні переваги дає використання матричних методів для аналізу систем електропостачання?
14. За якою формулою можна скласти матрицю вузлових провідностей, знаючи матрицю з'єднань?
15. Що таке базисний (балансуючий) вузол і навіщо він потрібен при розрахунках?
16. Опишіть алгоритм розрахунку електричного кола методом контурних струмів.
17. Як визначаються власні та загальні опори контурів при формуванні матриці контурних опорів?
18. У чому перевага використання комплексних чисел при розрахунку мереж змінного струму?

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ В ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИЦІ

- 3.1. Основні теоретичні відомості про диференціальні рівняння
 - 3.1.1. Диференціальні рівняння першого порядку
 - 3.1.2. Методи розв'язання диференціальних рівнянь першого порядку
 - 3.1.3. Диференціальні рівняння другого порядку
 - 3.1.4. Диференціальні рівняння з частинними похідними
- 3.2. Застосування диференціальних рівнянь в задачах електроенергетики
 - 3.2.1. Перехідні процеси у лінійних електричних колах
 - 3.2.2. Перехідні процеси в електричних колах з послідовно з'єднаними резисторами і котушками
 - 3.2.3. Перехідні процеси в колі з резисторами і конденсатором
 - 3.2.4. Типові задачі застосування диференціальних рівнянь в електроенергетиці
 - 3.2.5. Перехід від іменованих до відносних одиниць у розв'язанні диференціального рівняння
- 3.3. Чисельні методи розв'язування диференціальних рівнянь
- 3.4. Частотні властивості електричних кіл

3.1. Основні теоретичні відомості про диференціальні рівняння

Рівняння, які пов'язують незалежну змінну, шукану функцію та її похідні, називаються **диференціальними рівняннями (ДР)**.

Загальна форма диференціальних рівнянь має вигляд:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

де x – незалежна змінна, y – невідома функція, а $y', y'', \dots, y^{(n)}$ – її похідні до n -го порядку.

Розв'язок диференціального рівняння – це функція, яка при підстановці в рівняння перетворює його на тотожність. Процес знаходження розв'язку диференціального рівняння називається його **інтегруванням**.

Вищий порядок похідної, що входить в диференціальне рівняння, називається **порядком** цього рівняння.

Графік розв'язку диференціального рівняння n -го порядку будемо називати **інтегральною кривою** цього рівняння.

Диференціальні рівняння поділяють на звичайні, рівняння в частинних похідних та системи диференціальних рівнянь. На **рис. 3.1** подано узагальнену класифікацію диференціальних рівнянь.

Рівняння, що містять похідні лише за однією з незалежних змінних називаються **звичайними диференціальними рівняннями**.

Якщо невідома функція залежить від декількох незалежних змінних, то диференціальне рівняння містить частинні похідні і називається **рівнянням в частинних похідних**.

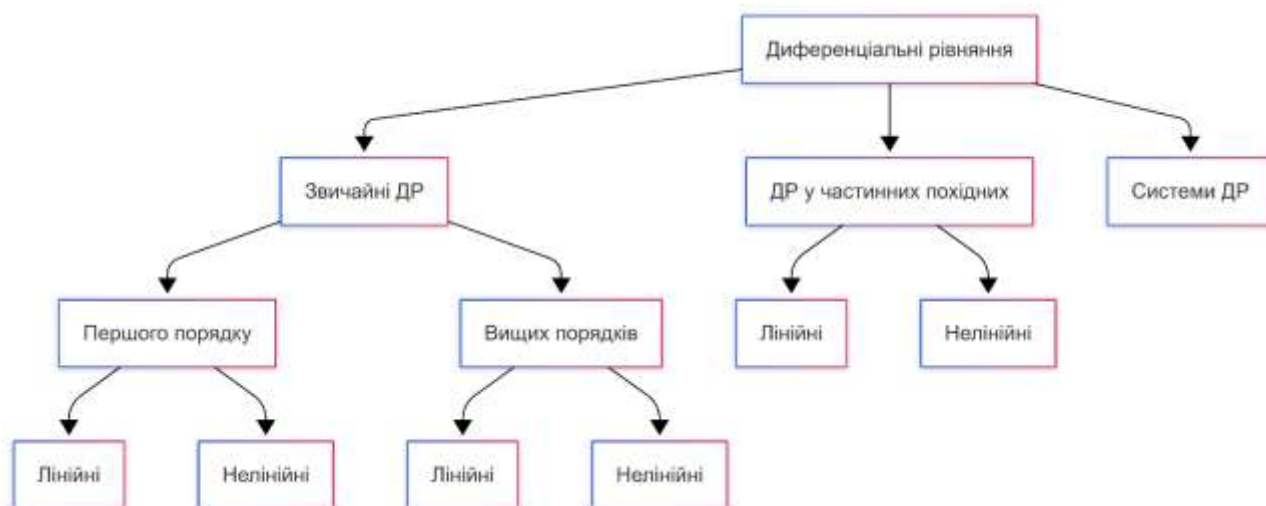


Рис. 3.1. Класифікація диференціальних рівнянь

3.1.1. Диференціальні рівняння першого порядку

Звичайне диференціальне рівняння першого порядку – це рівняння виду

$$F(x, y, y') = 0, \quad (3.1)$$

де F – відома функція трьох змінних, x – незалежна змінна, $y(x)$ – шукана функція, а $y'(x)$ – її похідна. Якщо рівняння $F(x, y, y') = 0$ можна розв'язати відносно y' , то воно записується як $y' = f(x, y)$.

Рівняння $y' = f(x, y)$ встановлює залежність між координатами точки (x, y) і кутовим коефіцієнтом y' , дотичним до інтегральної кривої, що проходить через цю точку.

Розв'язком диференціального рівняння першого порядку називається функція $y = \varphi(x, C)$, що залежить від змінної x і від довільної сталої C , що перетворює рівняння (3.1) в правильну тотожність.

Диференціальне рівняння першого порядку, розв'язане відносно похідної, можна записати в **диференціальній формі**:

$$P(x; y)dx + Q(x; y)dy = 0,$$

де $P(x; y)$ і $Q(x; y)$ – відомі функції. Рівняння $P(x; y)dx + Q(x; y)dy = 0$ зручне тим, що змінні в ньому рівнозначні, тобто будь-яку з них можна розглядати як функцію іншої.

Якщо диференціальне рівняння першого порядку $y' = f(x, y)$ має розв'язок, то воно має нескінченно багато розв'язків, і ці розв'язки можна записати як $y = \varphi(x, C)$, де C – довільна константа.

Функція $y = \varphi(x, C)$ називається **загальним розв'язком** диференціального рівняння першого порядку. Вона містить одну довільну константу і задовольняє умовам:

- функція $y = \varphi(x, C)$ є розв'язком диференціального рівняння для кожного фіксованого значення C ;
- якщо б не була початкова умова $y(x_0) = y_0$, можна знайти значення константи $C = C_0$, що функція $y = \varphi(x, C_0)$ задовольняє цій початковій умові.

Частковим розв'язком диференціального рівняння першого порядку є будь-яка функція $y = \varphi(x, C_0)$, отримана із загального розв'язку $y = \varphi(x, C)$ для конкретного значення сталої $C = C_0$.

Задача на знаходження розв'язку диференціального рівняння першого порядку $P(x; y)dx + Q(x; y)dy = 0$, що задовольняє заданій початковій умові $y(x_0) = y_0$, називається **задачею Коші**.

Теорема (про існування та єдність розв'язку задачі Коші) (без доведення).
Нехай у диференціальному рівнянні

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

функція $f(x, y)$ і її часткова похідна $\partial f / \partial y$ неперервні в деякій області площини (x, y) , що містить точку (x_0, y_0) . Тоді існує єдиний розв'язок $y(x)$ цього рівняння, який задовольняє початкову умову

$$y(x_0) = y_0.$$

Серед звичайних диференціальних рівнянь особливе місце займають рівняння першого порядку, для яких існує низка стандартних методів розв'язання. До основних **типів диференціальних рівнянь першого порядку** належать:

1. Рівняння з відокремлюваними змінними.
2. Рівняння, що зводяться до рівнянь з відокремлюваними змінними.
3. Однорідні рівняння.
4. Лінійні рівняння першого порядку.
5. Рівняння Бернуллі.
6. Рівняння в повних диференціалах.

До **рівнянь з відокремлюваними змінними** відносяться диференціальні рівняння виду

$$P(y)dy = Q(x)dx,$$

де $P(y)$ і $Q(x)$ – неперервні функції. Інтегруючи обидві частини цього рівняння, знаходимо його загальний інтеграл – загальний розв'язок⁹:

$$\int P(y)dy = \int Q(x)dx + C.$$

До **рівнянь, що зводяться до рівнянь з відокремлюваними змінними**, відносяться диференціальні рівняння виду

$$y' = f_1(x)f_2(y) \quad \text{або} \quad \varphi_1(x)\phi_1(y)dy = \varphi_2(x)\phi_2(y)dx,$$

де всі вказані функції неперервні.

Ці диференціальні рівняння зводяться простими перетвореннями до рівнянь з відокремлюваними змінними, які потім інтегруються

⁹ У теорії диференціальних рівнянь використовуються різні терміни для опису результатів інтегрування, які в прикладних інженерних задачах часто вживаються як синоніми. Тут і далі приймаються такі означення:

Загальний розв'язок диференціального рівняння – це функція $y = (x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, яка містить довільні сталі інтегрування та задовольняє диференціальне рівняння.

Загальний інтеграл – це загальний розв'язок, записаний у неявній формі: $F(x, y, C_1, \dots, C_n) = 0$.

Частковий розв'язок – це розв'язок, отриманий із загального розв'язку шляхом визначення сталих інтегрування з початкових умов.

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y) \Rightarrow \frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx \Rightarrow \int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C$$

або

$$\frac{\varphi_1(y)}{\varphi_2(y)} dy = \frac{\phi_2(x)}{\phi_1(x)} dx \Rightarrow \int \frac{\varphi_1(y)}{\varphi_2(y)} dy = \int \frac{\phi_2(x)}{\phi_1(x)} dx + C.$$

До **однорідних рівнянь першого порядку** відносяться диференціальні рівняння виду

$$y' = f(x, y),$$

де неперервна функція $f(x, y)$ задовольняє умові: $f(x, y) = f(tx, ty)$. Такі рівняння з використанням підстановки $y = zx$, де z – нова змінна, а $y' = z'x + z$ зводяться до рівнянь з відокремлюваними змінними z і x .

До **лінійних рівнянь першого порядку** відносяться диференціальні рівняння виду

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

де $P(x)$ і $Q(x)$ – неперервні функції.

Якщо $Q(x) \neq 0$ – рівняння називається **лінійним неоднорідним**, якщо $Q(x) = 0$ – **лінійним однорідним**.

Загальний розв'язок лінійного рівняння можна записати у вигляді:

$$y = y_0 + y_{\text{част}},$$

де y_0 – **загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння**:

$$y' + P(x)y = 0,$$

що є рівнянням з відокремлюваними змінними, загальний розв'язок цього рівняння має вигляд:

$$y_0 = C \cdot e^{-\int P(x)dx},$$

$y_{\text{част}}$ – частковий розв'язок відповідного неоднорідного рівняння, який можна знайти за формулою:

$$y_{\text{част.}} = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx \cdot e^{-\int P(x)dx}.$$

Рівняння Я. Бернуллі – рівняння виду

$$y' + p(x) \cdot y = g(x) \cdot y^n, n \in R, n \neq 0, n \neq 1,$$

яке при підстановці

$$z = y^{1-n}$$

зводиться до лінійного диференціального рівняння першого порядку.

Рівняння в повних диференціалах – рівняння $P(x; y)dx + Q(x; y)dy = 0$, якщо його ліва частина є повним диференціалом деякої функції $u(x; y)$, тобто

$$P(x; y)dx + Q(x; y)dy = du(x; y).$$

У цьому випадку диференціальне рівняння $P(x; y)dx + Q(x; y)dy$ можна записати у вигляді $du(x; y) = 0$, а його загальний розв'язок (у неявній формі) буде:

$$u(x; y) = c.$$

Наведемо умову, за якою можна судити про те, що вираз

$$\Delta = P(x; y)dx + Q(x; y)dy$$

є повним диференціалом.

Теорема. Для того, щоб вираз $\Delta = P(x; y)dx + Q(x; y)dy$, де функції $P(x; y)$ і $Q(x; y)$ та їх часткові похідні $\frac{\partial P}{\partial y}$ і $\frac{\partial Q}{\partial x}$ неперервні в деякій області D площини Оху, був повним диференціалом, необхідно і достатньо виконання умови

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

При розв'язанні диференціального рівняння виду $P(x; y)dx + Q(x; y)dy = 0$ спочатку перевіряємо виконання умови $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Потім, використовуючи рівності $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x; y)$ і $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x; y)$, знаходимо функцію $u(x; y)$. Розв'язання записуємо у вигляді $u(x; y) = c$.

3.1.2. Методи розв'язання диференціальних рівнянь першого порядку

Для розв'язування лінійних диференціальних рівнянь першого порядку використовують метод інтегруючого множника та метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа).

Метод інтегруючого множника. Розв'язок рівняння $y' + p(x)y = g(x)$ шукають як добуток двох інших функцій, тобто шляхом підстановки $y = uv$, де $u = u(x)$ та $v = v(x)$ є невідомими функціями x , і одна з них довільна (але не дорівнює 0), тоді будь-яка функція $y(x)$ може бути записана як

$$y(x) = \frac{y(x)}{v(x)} \cdot v(x) = u(x) \cdot v(x),$$

де $v(x) \neq 0$. Звідси

$$y' = u'v + uv'.$$

Підставляючи вирази y і y' в рівняння $y' + p(x)y = g(x)$, отримаємо:

$$u'v + uv' + p(x)uv = g(x)$$

або

$$u' + u(v' + p(x)v) = g(x).$$

Виберемо функцію $v = v(x)$ так, щоб вираз в дужках дорівнював 0, тобто розв'яжемо диференціальне рівняння $v' + p(x)v = 0$.

Таким чином,

$$\frac{dv}{dx} + p(x)v = 0,$$

тобто

$$\frac{dv}{v} = -p(x)dx.$$

Інтегруючи, отримаємо:

$$\ln |v| = - \int p(x) \cdot dx + c.$$

Завдяки свободі вибору функції $v(x)$, можна прийняти $c = 1$.

Звідси

$$v = e^{-\int p(x) \cdot dx}.$$

Підставляючи знайдену функцію v в рівняння $u' v + u (v' + p(x)v) = g(x)$, отримаємо

$$u' \cdot e^{-\int p(x) \cdot dx} = g(x).$$

Отримано рівняння з відокремлюваними змінними. Розв'язуємо його:

$$\frac{du}{dx} \cdot e^{-\int p(x) \cdot dx} = g(x), du = g(x) \cdot e^{+\int p(x) \cdot dx} dx,$$

$$u = \int g(x) \cdot e^{+\int p(x) \cdot dx} dx + c.$$

Повертаючись до змінної y , отримаємо розв'язок

$$y = u \cdot v = \left(\int g(x) \cdot e^{\int p(x) \cdot dx} dx + c \right) \cdot e^{-\int p(x) \cdot dx}$$

вихідного диференціального рівняння $y' + p(x) y = g(x)$.

Метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа)¹⁰. Рівняння $y' + p(x) \cdot y = g(x)$ інтегрується наступним чином.

Розглянемо відповідне рівняння без правої частини, тобто рівняння $y' + p(x) \cdot y = 0$ – лінійне однорідне диференціальне рівняння першого порядку. У цьому рівнянні змінні відокремлюються:

$$\frac{dy}{y} = -p(x) \cdot dx \quad \text{і} \quad \ln|y| = -\int p(x) dx + c.$$

Таким чином,

$$\left| \frac{y}{c_1} \right| = e^{-\int p(x) dx},$$

тобто

$$y = \pm c_1 e^{-\int p(x) dx}$$

або

$$y = c \cdot e^{-\int p(x) dx},$$

де $c = \pm c_1$.

Метод варіації довільної сталої полягає в заміні константи c в отриманому розв'язку функцією $c(x)$, тобто припускаємо $c = c(x)$.

Шукаємо розв'язок рівняння $y' + p(x) y = g(x)$ у вигляді

$$y = c \cdot e^{-\int p(x) \cdot dx}.$$

3.1.3. Диференціальні рівняння другого порядку

Диференціальне рівняння другого порядку являє собою рівняння виду

$$F(x, y, y', y'') = 0,$$

де x – незалежна змінна, y , y' та y'' – відповідно невідома функція та її перша та друга похідні. Явне позначення диференціального рівняння має вигляд:

$$y'' = f(x, y, y').$$

¹⁰ Саме цей метод є найбільш зручним при виведенні рівнянь стану електроенергетичних систем.

Розв'язком диференціального рівняння другого порядку є подвійно диференційована функція $y = g(x)$ така, що диференціальне рівняння стає тотожним, коли y замінюється на $g(x)$, y' на $g'(x)$ і y'' на $g''(x)$

$$F(x, g(x), g'(x), g''(x)) = 0 \text{ або } g(x) = f(x, g(x), g'(x)).$$

Якщо функція $y = (x, C_1, C_2)$, яка містить дві довільні константи C_1 і C_2 , є розв'язком диференціального рівняння другого порядку, то такий розв'язок називається **загальним розв'язком** (у явному вигляді).

Розв'язок, отриманий із загального при деяких часткових значеннях констант $C_1 = C_1^*$ і $C_2 = C_2^*$, називається **частковим розв'язком**:

$$y = (x, C_1^*, C_2^*).$$

Розв'язати диференціальне рівняння означає знайти його загальний розв'язок.

У процесі пошуку загального розв'язку часто досягається наступна форма:

$$\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0 \text{ – загальний розв'язок у неявній формі.}$$

$$\Phi(x, y, C_1^*, C_2^*) = 0 \text{ – частковий розв'язок.}$$

Завдання Коші полягає в:

➤ знаходженні загального розв'язку $y = (x, C_1, C_2)$ ($\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$) диференціального рівняння першого порядку;

➤ знаходженні часткового розв'язку $y = (x, C_1^*, C_2^*)$ ($\Phi(x, y, C_1^*, C_2^*) = 0$), де значення сталих $C_1 = C_1^*$ і $C_2 = C_2^*$ знаходять з початкових умов:

$$y = y_0 \text{ при } x = x_0 \text{ і } y' = y'_0 \text{ при } x = x_0,$$

тобто значення C_1 і C_2 знаходять з розв'язку системи рівнянь:

$$\{y_0 = \phi(x_0, C_1, C_2); y'_0 = \phi'(x_0, C_1, C_2),$$

або

$$\Phi(x_0, y_0, C_1, C_2) = 0; \Phi'(x_0, y_0, C_1, C_2) = 0.$$

Види диференціальних рівнянь другого порядку

1. Лінійні однорідні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами – диференціальні рівняння виду

$$y'' + py' + qy = 0,$$

де p і q – деякі сталі.

Для розв'язання даного виду рівнянь застосовується спеціальний метод, що ґрунтується на складанні характеристичного рівняння¹¹.

Ідея методу полягає в тому, що розв'язок шукають у вигляді експоненціальної функції $y = e^{kx}$, підстановка якої перетворює диференціальне рівняння на алгебраїчне рівняння відносно параметра k . Це алгебраїчне рівняння і називається **характеристичним**:

$$k^2 + pk + q = 0.$$

При розв'язанні квадратного рівняння можливі наступні три випадки:

¹¹ Для диференціального рівняння n -го порядку

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = 0$$

характеристичне рівняння має вигляд

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0.$$

1) Якщо корені характеристичного рівняння різні, дійсні числа $k_1 \neq k_2$; $k_1, k_2 \in R$, то загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння має вигляд:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x},$$

де C_1 і C_2 – сталі.

2) Якщо корені характеристичного рівняння дійсні і дорівнюють $k_1 = k_2$, то загальний розв'язок диференціального рівняння виглядає наступним чином:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x}.$$

3) Якщо корені характеристичного рівняння комплексні $k_1 = \alpha + \beta i$; $k_2 = \alpha - \beta i$, де

$$i = \sqrt{-1}; i^2 = -1; \quad \alpha, \beta \in R, i - \text{уявна одиниця},$$

тоді загальний розв'язок диференціального рівняння (3.1) має вигляд:

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x),$$

де

$$\alpha = -\frac{p}{2}; \quad \beta = \sqrt{\frac{4q-p^2}{4}}; \quad C_1 \text{ і } C_2 - \text{довільні сталі}.$$

2. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами – рівняння виду

$$y'' + py' + qy = f(x),$$

де p і q – довільні сталі, $f(x)$ – деяка неперервна функція.

Загальний розв'язок неоднорідного лінійного диференціального рівняння слід знайти у вигляді:

$$y = y_0 + y_{\text{част}},$$

де y_0 – загальний розв'язок відповідного лінійного однорідного рівняння:

$$y'' + py' + qy = 0,$$

$y_{\text{част}}$ – частковий розв'язок початкового неоднорідного диференціального рівняння.

Установлено, що якщо функція $f(x)$ має вигляд: $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$, де $P_n(x)$ – многочлен n степені, $\alpha = \text{const}$, $\alpha \in R$, то $y_{\text{част}}$ знаходять в наступному вигляді:

1. Якщо число α є коренем характеристичного рівняння $k^2 + pk + q = 0$, тоді

$$y_{\text{част}} = Q_n(x)e^{\alpha x}.$$

2. Якщо α співпадає з одним з коренів характеристичного рівняння $k^2 + pk + q = 0$: $\alpha = k_1$ або $\alpha = k_2$, тоді

$$y_{\text{част}} = xQ_n(x)e^{\alpha x}.$$

3. Якщо обидва корені характеристичного рівняння $k^2 + pk + q = 0$ дорівнюють α : $k_1 = k_2 = \alpha$, тоді

$$y_{\text{част}} = x^2 Q_n(x)e^{\alpha x},$$

тут $Q_n(x)$ – многочлен степеня n з невизначеними коефіцієнтами, які в подальшому підлягають визначенню.

Звернімо увагу, що характер часткового та загального розв'язку істотно залежить від коренів характеристичного рівняння. Саме ці корені визначають тип перехідного процесу в електричному колі:

- дійсні від'ємні корені (аперіодичне згасання);
- кратні корені (аперіодичний процес з додатковим множником t);
- комплексно-спряжені корені (затухаючі коливання);
- додатні дійсні корені (нестійкий режим).

Кількість коренів характеристичного рівняння дорівнює **порядку диференціального рівняння** і визначається кількістю незалежних накопичувачів енергії (індуктивностей та ємностей) у схемі (**табл. 3.1**).

Таблиця 3.1. Тип коренів характеристичного рівняння та поведінка системи

Корені характеристичного рівняння	Вид розв'язку	Характер процесу	Приклад
$p < 0$	e^{pt}	Аперіодичне згасання	RL, RC
$p_1 \neq p_2 < 0$	$C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t}$	Аперіодичний	RLC
$p = -\alpha \pm j\omega$	$e^{-\alpha t} \sin(\omega t)$	Коливальний	RLC
$p > 0$	e^{pt}	Нестійкий	аварійні режими

Узагальнення для електричних кіл наведено в **табл. 3.2**.

Таблиця 3.2. Тип електричного кола та порядок диференціального рівняння

Тип електричного кола	Реактивні елементи	Основна змінна	Порядок ДР	Тип ДР
RL	1 індуктивність	$i(t)$	1	лінійне
RC	1 ємність	$u_C(t)$	1	лінійне
RLC (послідовне)	$L + C$	$i(t)$ або $u_C(t)$	2	лінійне
RLC (паралельне)	$L + C$	$u(t)$	2	лінійне
Лінія з розподіленими параметрами	L, C, R, G (розподілені)	$u(x, t), i(x, t)$	∞	ПДР

3.1.4. Диференціальні рівняння з частинними похідними

Розвиток будь-якого електричного процесу в енергетичних системах є результатом взаємодії двох протилежних чинників: збуджувального механізму, який забезпечує можливість виникнення та протікання процесу, і механізму опору, що перешкоджає зміні стану електричного кола чи елемента. Наприклад, причиною виникнення струму є різниця потенціалів або зміна магнітного потоку, тоді як силами опору виступають активні втрати, індуктивні та ємнісні реакції елементів мережі. Оскільки на подолання цих сил опору витрачається енергія, їх розглядають як дисипативний механізм, що зумовлює затухання процесу. На

протидію цьому збуджувальний вплив називають дисперсійним механізмом, оскільки його прояви пов'язані з поширенням електромагнітних хвиль різної частоти з різними швидкостями. Дисперсійні процеси, на відміну від дисипативних, не призводять до затухання в просторі та часі.

Для математичного опису сумарної дії дисперсійних і дисипативних механізмів використовують диференціальні рівняння з частинними похідними (ДРЧП), і саме їх фізичний зміст є першою важливою характеристикою з погляду інженера. Другою ключовою характеристикою таких рівнянь є їх лінійність або нелінійність. У більшості випадків диференціальні рівняння, що описують теплофізичні та енергетичні процеси, є нелінійними. Строгому аналітичному розв'язанню піддаються лише лінійні рівняння, оскільки повної теорії нелінійних ДРЧП досі не існує. Нелінійні рівняння розв'язують наближеними аналітичними або чисельними методами, причому вихідною основою для таких методів зазвичай слугують лінеаризовані рівняння, тому вивчення властивостей лінійних ДРЧП має принципове значення.

Рівняння, що пов'язують невідому функцію $\varphi(x, y, z, \tau)$, перемінні x, y, z, τ і частинні похідні від невідомої функції, називається диференціальним рівнянням в частинних похідних. Воно має вигляд

$$F\left(x, y, z, \tau, \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}, \dots, \frac{\partial^k \varphi}{\partial x^{k_x} \dots \partial \tau^{k_\tau}}\right) = 0,$$

де F – задана функція своїх аргументів, а порядок вищої похідної, що входить в рівняння, називається порядком рівняння в частинних похідних.

Загальне рівняння в частинних похідних другого порядку з двома незалежними змінними x і y може бути записано у вигляді

$$F\left(x, y, \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right) = 0.$$

Рівняння в частинних похідних називається лінійним, якщо воно лінійне відносно невідомої функції і її частинних похідних. Так, наприклад, рівняння

$$\begin{aligned} A(x, y) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + B(x, y) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + D(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \\ + E(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial y} + F(x, y) \varphi + G = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

є лінійним рівнянням другого порядку відносно невідомої функції $\varphi(x, y)$, де φ – будь-який параметр стану тіла або системи (температура T , швидкість руху V тощо), x – просторові координати, а під y розуміють або другу просторову координату, або час τ . За сталих коефіцієнтів це рівняння називають лінійним диференціальним рівнянням з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами.

Розв'язком рівняння в частинних похідних (3.2) називають будь-яку функцію $\varphi = \varphi(x, y)$, яка, будучи підставленою в рівняння замість невідомої функції та її похідних, перетворює його на тотожність відносно незалежних змінних.

Аналіз коефіцієнтів при вищих похідних уже дозволяє ввести класифікацію диференціальних рівнянь з частинними похідними, що відрізняються фізичним

змістом і математичними властивостями. У загальному випадку можна виділити три різновиди рівнянь (3.2):

$$\begin{array}{ll} \text{Гіперболічне} & B^2 - 4AC > 0. \\ \text{Параболічне} & B^2 - 4AC = 0. \\ \text{Еліптичне} & B^2 - 4AC < 0. \end{array}$$

Диференціальні рівняння з частинними похідними в загальному випадку мають нескінченну множину розв'язків. Тому, якщо фізичний процес описується за допомогою такого рівняння, для його однозначної характеристики необхідно задати додаткові умови. Такі додаткові дані складаються з крайових, тобто *граничних*, і *початкових* умов.

Граничні умови полягають у тому, що задаються значення невідомої функції u на кінцях інтервалу зміни координати (у задачі про лінійну теплопровідність – це кінці стрижня, у задачах про коливання струни – кінці струни тощо).

Умови, що стосуються початкового моменту часу, називають початковими.

Щоб зрозуміти, у яких випадках задаються ті чи інші крайові умови, слід розглянути поняття стаціонарного та нестаціонарного процесів.

Нестаціонарними називають задачі, розв'язок яких залежить не лише від просторових координат (x, y, z) , а й від часу t . Такі задачі пов'язані з процесами, що розгортаються у часі. До них належать процеси поширення тепла, дифузійні процеси, коливальні (хвильові) процеси, поширення електромагнітних хвиль та багато інших. Основними диференціальними рівняннями математичної фізики, що описують нестаціонарні процеси, є рівняння теплопровідності:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + F(x, y, z, t) \quad (3.3)$$

і хвильове рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + F(x, y, z, t) \quad (3.4)$$

Рівняння (3.3) є рівнянням параболічного типу, а рівняння (3.4) – гіперболічного. Постановка задач для рівнянь цих типів передбачає наявність як граничних, так і початкових умов. Початкові умови полягають у заданні в момент часу $t = 0$ значень шуканої функції u та її похідної (для гіперболічного рівняння) або лише значень самої функції (для параболічного рівняння). Таким чином, для рівняння теплопровідності задається одна початкова умова, тобто умова при $t = 0$:

$$u(0, x, y, z) = \varphi(x, y, z),$$

а для хвильового рівняння – два:

$$\begin{aligned} u(0, x, y, z) &= \varphi(x, y, z), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x, y, z) &= \psi(x, y, z). \end{aligned}$$

Якщо процес відбувається в необмеженій області (область вважається **необмеженою**, якщо хоча б одна з координат її точок може набувати як завгодно великих значень – наприклад, нескінченний стрижень, нескінченна струна тощо), то задаються лише початкові умови – так звана задача Коші.

Якщо ж задача формулюється для скінченного інтервалу, то необхідно задати і початкові, і граничні умови. У цьому випадку говорять про *змішану* задачу.

Для опису стаціонарних процесів зазвичай використовують рівняння еліптичного типу. Час t у такі рівняння не входить. До них належать рівняння стаціонарного температурного поля, електростатичного поля тощо. Для задач цього типу задають лише граничні умови, тобто визначають поведінку невідомої функції на контурі області (**табл. 3.3**).

Таблиця 3.3. Найпоширеніші диференціальні рівняння в частинних похідних

Тип	Багатомірне рівняння	Додаткові (крайові) умови
Гіперболічне (хвилі (струни, мембрани, течія рідини), затухаючі хвилі)	$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 u + F(r, t)^{12}$	Граничні умови; початкові умови для u і $\frac{\partial u}{\partial t}$
Параболічне (рівняння теплопровідності, дифузії)	$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \nabla^2 u + F(r, t)$	Граничні умови; початкові умови для u
Еліптичне (статичний випадок)	$\nabla^2 u = F(r)$	Тільки граничні умови

Виділені типи рівнянь у частинних похідних суттєво відрізняються за своїми аналітичними властивостями, тому універсального способу їх розв'язування не існує. Для кожного класу рівнянь розроблено окремі методи, які враховують специфіку відповідної задачі. У **табл. 3.4** подано стислий огляд найпоширеніших методів розв'язування рівнянь з частинними похідними.

Таблиця 3.4. Основні методи розв'язування рівнянь з частинними похідними

№	Метод	Суть методу	Коли застосовується
1	Метод розділення змінних	Рівняння з n змінними зводиться до системи з n однорідних диференціальних рівнянь (повне розділення) або до рівнянь з меншою кількістю змінних (часткове розділення).	Лінійні задачі з однорідними крайовими умовами.
2	Перетворення координат	Перехід до нової системи координат спрощує рівняння або зводить його до однорідного диференціального рівняння.	Рівняння, що спрощуються поворотом чи заміною координат.

¹² ∇^2 – оператор Лапласа. Наприклад, в декартових координатах:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

№	Метод	Суть методу	Коли застосовується
3	Інтегральні перетворення	Зменшення кількості незалежних змінних (на 1 або на m при m -вимірному перетворенні).	Лінійні рівняння, задачі на нескінченних областях.
4	Перетворення залежної змінної	Заміна невідомої функції на іншу, що спрощує рівняння.	Коли рівняння має спеціальну структуру, що допускає таку заміну.
5	Чисельні методи	Заміна ДРЧП різницевиими схемами або іншими чисельними апроксимаціями.	Найбільш універсальний підхід; складні та нелінійні задачі.
6	Метод теорії збурень	Нелінійна задача замінюється послідовністю лінійних апроксимацій.	Слабко нелінійні процеси, задачі з малим параметром.
7	Варіаційні методи	Розв'язок шукається як мінімум певного функціонала (енергії тощо).	Задачі, для яких існує відповідний функціонал.
8	Метод функцій Гріна	Розв'язок подається як сума реакцій на елементарні джерела.	Лінійні рівняння з відомими функціями Гріна.
9	Розкладання за власними функціями	Розв'язок подається у вигляді ряду за власними функціями відповідної задачі.	Лінійні задачі з добре визначеною спектральною проблемою.
10	Метод інтегральних рівнянь	ДРЧП зводиться до інтегрального рівняння.	Лінійні задачі, задачі з симетріями або спеціальними ядрами.

3.2. Застосування диференціальних рівнянь в задачах електроенергетики

Розглянемо застосування апарату диференціальних рівнянь для математичного опису та аналізу режимів роботи електроенергетичних систем. Основну увагу буде приділено не фізичній природі процесів, які детально вивчаються в курсах електротехніки та теорії електричних кіл, а методиці побудови математичних моделей у вигляді диференціальних рівнянь та їх подальшому розв'язанню.

3.2.1. Перехідні процеси у лінійних електричних колах

При всіх змінах в електричному колі: включені, виключені, короткому замиканні, коливаннях величини якогось параметра тощо – в ньому виникають перехідні процеси, які не можуть протікати миттєво, оскільки неможлива миттєва зміна енергії, що накопичена в електромагнітному полі кола. Таким чином, перехідний процес обумовлено невідповідністю величини накопиченої енергії в магнітному полі котушки й електричному полі конденсатора її значенню для нового стану кола.

При перехідних процесах можуть виникати більші перенапруження, надструми, електромагнітні коливання, які можуть порушити роботу приладів аж до виходу їх з ладу. З іншого боку, перехідні процеси знаходять корисне практичне застосування, наприклад, в різних генераторах електричних сигналів. Все це обумовлює необхідність вивчення методів аналізу нестационарних режимів роботи електричного кола.

Основні методи аналізу перехідних процесів у лінійних колах:

1. **Класичний метод**, що передбачає безпосереднє інтегрування диференціальних рівнянь, які описують електромагнітний стан кола.

2. **Операторний метод**, що передбачає розв'язання системи алгебраїчних рівнянь відносно зображень шуканих змінних з наступним переходом від знайдених зображень до оригіналів.

3. **Частотний метод**, заснований на перетворенні Фур'є, який знаходить широке застосування для аналізу періодичних збуджень або задач синтезу, але є менш поширеним для типових перехідних процесів.

4. Метод розрахунку за допомогою **інтеграла Дюамеля**, що використовується при складній формі кривої збуджуючої дії.

5. **Метод змінних стану**, що являє собою впорядкований спосіб визначення електромагнітного стану кола на основі розв'язування системи диференціальних рівнянь першого порядку, записаних в нормальній формі (формі Коши).

Розглянемо детальніше класичний метод розв'язування лінійних диференціальних рівнянь.

Класичний метод розрахунку. Класичний метод розрахунку перехідних процесів полягає в безпосередньому інтегруванні диференціальних рівнянь, що описують зміни струмів і напруг на ділянках кола в перехідному процесі.

У загальному випадку при використанні класичного методу розрахунку складаються рівняння електромагнітного стану кола за законами Ома і Кірхгофа для миттєвих значень напруг і струмів, пов'язаних між собою на окремих елементах кола (**рис. 3.2**) співвідношеннями, наведеними в **табл. 3.5**.

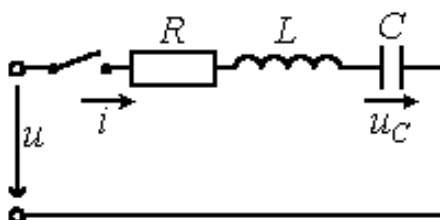


Рис. 3.2. Електрична схема послідовного RLC -кола

Таблиця 3.5. Зв'язок миттєвих значень напруг і струмів на елементах електричного кола

Резистор (ідеальний активний опір)	Котушка індуктивності (ідеальна індуктивність)	Конденсатор (ідеальна ємність)
$u_R = Ri_R$ (рис. 3.2)	$u_L = L \frac{di_L}{dt};$ за наявності магнітного зв'язку з котушкою, яка обтікає струмом i_M , $u_L = L \frac{di_L}{dt} \pm M \frac{di_M}{dt}$	$i_C = C \frac{du_C}{dt};$ $u_C = \frac{1}{C} \int i_C dt$

Для послідовного кола, що містить лінійні резистор R , котушку індуктивності L і конденсатор C , при її підключенні до джерела з напругою u (рис. 3.2) можна записати

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt. \quad (3.5)$$

Підставимо в (3.5) значення струму через конденсатор

$$i = C \frac{du_C}{dt},$$

отримаємо лінійне диференціальне рівняння другого порядку відносно u_C

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = u.$$

У загальному випадку рівняння, що описує перехідний процес в колі з n незалежними накопичувачами енергії, має вигляд:

У загальному випадку диференціальне рівняння має вигляд

$$a_n \frac{d^n x_2}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x_2}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx_2}{dt} + a_0 x_2 = f(t). \quad (3.6)$$

де x – шукана функція часу (напруга, струм, потікозчеплення тощо); $f(t)$ – відома збуджуюча дія (напруга і/або струм джерела електричної енергії); a_n – постійний коефіцієнт, що визначається параметрами кола.

Для розв'язування рівняння (3.6) використовується властивість лінійності, яка дозволяє подати загальний розв'язок у вигляді суми часткового розв'язку неоднорідного рівняння та загального розв'язку відповідного однорідного рівняння.

Порядок даного рівняння дорівнює числу незалежних накопичувачів енергії в колі, під якими розуміють котушки індуктивності і конденсатори в спрощеній схемі, яку отримують з вихідної шляхом об'єднання індуктивностей і відповідно ємностей елементів, з'єднання між якими є послідовними або паралельними.

У загальному випадку порядок диференціального рівняння визначається співвідношенням

$$n = n_L + n_C - k_L - k_C, \quad (3.7)$$

де n_L і n_C – відповідно число котушок індуктивності і конденсаторів після вказаного спрощення вихідної схеми; k_L – число вузлів, в яких сходяться тільки

гілки, що містять котушки індуктивності (у відповідності з першим законом Кірхгофа струм через будь-яку котушку індуктивності у цьому випадку визначається струмами через решту котушок); k_c – число контурів схеми, гілки яких містять тільки конденсатори (у відповідності з другим законом Кірхгофа напруга на будь-якому з конденсаторів у цьому випадку визначається напругами на інших). Формула (3.7) застосовується лише після приведення схеми до еквівалентної без зайвих індуктивних та ємнісних вузлів.

Наявність індуктивних зв'язків на порядок диференціального рівняння не впливає. Загальний розв'язок рівняння (3.6) являє собою суму часткового розв'язку вихідного неоднорідного рівняння і загального розв'язку однорідного рівняння, отриманого з вихідного шляхом прирівнювання його лівої частини до нуля. Оскільки з математичного боку не накладається будь-яких обмежень на вибір часткового розв'язку, застосовно до електротехніки як останній зручно прийняти розв'язок $x_{\text{вим}}$, що відповідає шуканій змінній x в усталеному післякомутаційному режимі (теоретично для $t \rightarrow \infty$).

Частковий розв'язок $x_{\text{вим}}$ рівняння (3.6) визначається видом функції $f(t)$, що стоїть в його правій частині, і тому називається **вимушеною складовою**. Для кіл із заданими постійними або періодичними напругами (струмами) джерел вимушена складова визначається шляхом розрахунку стаціонарного режиму роботи схеми після комутації.

Перехід до відповідного однорідного диференціального рівняння дозволяє дослідити власну динаміку системи, яка визначається лише її параметрами і початковими умовами.

Друга складова $x_{\text{в}}$ загального розв'язку x рівняння (3.6) – розв'язок (3.6) з нульовою правою частиною – відповідає режиму, коли зовнішні (вимушуючі) сили (джерела енергії) на коло безпосередньо не діють. Вплив джерел проявляється тут апосередньо через енергію, яка накопичується в полях котушок індуктивності і конденсаторів. Даний режим роботи схеми називається вільним, а зміна $x_{\text{в}}$ – **вільною складовою**.

У відповідності до вищезазначеного, загальний розв'язок рівняння (3.6) має вигляд

$$x = x_{\text{вим}} + x_{\text{в}} \quad (3.8)$$

Вираз (3.8) показує, що при класичному методі розрахунку післякомутаційний процес розглядається як накладання один на одного двох режимів – вимушеного, який настає начебто одразу після комутації, і вільного, що має місце тільки впродовж перехідного процесу.

Необхідно підкреслити, що, оскільки принцип накладання справедливий тільки для лінійних систем, метод розв'язку, заснований на вказаному розкладанні шуканої змінної x , справедливий тільки для лінійних кіл.

Для сили струму будемо мати вираз:

$$i = i_{\text{вим}} + i_{\text{в}}.$$

Слід зазначити, що фізично існують тільки перехідні струми і напруги, а їх розкладання на вільну і вимушену складові є математичним приладом, що дозволяє спростити розрахунок перехідних процесів в лінійних колах. Нагадаємо, що принцип суперпозиції застосовується тільки до лінійних кіл.

Існують різні методи розв'язання однорідного диференціального рівняння, отриманого з виразу (3.5):

$$\frac{d^2 i_B}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{d i_B}{dt} + \frac{1}{LC} i_B = 0. \quad (3.9)$$

Для лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами доцільно шукати розв'язок у вигляді експоненціальної функції. Такий підхід приводить до алгебраїчного характеристичного рівняння, корені якого визначають вигляд вільної складової перехідного процесу. Класичний метод перехідного аналізу ґрунтується саме на цьому: розв'язок диференціального рівняння подається у вигляді суми експонент, форма яких залежить від типу коренів характеристичного рівняння.

$$i_B = A_1 \cdot e^{p_1 t} + A_2 \cdot e^{p_2 t},$$

де порядком диференціального рівняння є кількість доданків.

Після підстановки показника степеня $A_k \cdot e^{p_k t}$ у вихідне рівняння (3.9) і диференціювання можна отримати характеристичне рівняння, з якого визначаються корені p_1, p_2 . Якщо зустрічається кілька коренів (наприклад, $p_1 = p_2 = P$), то розв'язок має вигляд $A_1 \cdot e^{Pt} + A_2 \cdot e^{Pt}$.

Сталі інтегрування A_1, A_2 визначаються на основі початкових умов, які встановлюються згідно із законами комутації. Початкові умови поділяються на незалежні та залежні (що виникають після комутації). До незалежних належать значення струмів через індуктивності та напруг на конденсаторах, які відомі з передімпульсного режиму схеми.

Значення інших струмів і напруг при $t = 0$, що виникають після вмикання електричного кола, обчислюються на основі незалежних початкових умов із застосуванням законів Кірхгофа до схеми після комутації. Такі значення називаються **залежними початковими умовами**.

Незалежні початкові умови визначаються на основі законів комутації (табл. 3.6).

Таблиця 3.6. Закони комутації

Назва закону	Формулювання закону
Перший закон комутації (закон збереження поточкозчеплення)	Магнітний потік, зчеплений з котушками індуктивності контуру, в момент комутації зберігає те значення, яке мав до комутації, і починає змінюватись саме з того значення: $\psi(0+) = \psi(0-)$.
Другий закон комутації (закон збереження заряду)	Електричний заряд на конденсаторах, приєднаних до будь-якого вузла, в момент комутації зберігає те значення, яке мав до комутації, і починає змінюватись саме з цього значення: $q(0+) = q(0-)$.

Довести закони комутації можна від зворотного: допустити зворотне, то отримуємо нескінченно великі значення $u_L = \frac{d\psi}{dt} = \infty$ і $i_C = \frac{dq}{dt} = \infty$, що призводить до порушень законів Кірхгофа.

Розв'язування однорідного лінійного диференціального рівняння з постійними коефіцієнтами зводиться до знаходження коренів відповідного характеристичного рівняння.

Вираз вільної складової x_B загального розв'язку $x(t)$ диференціального рівняння визначається виглядом коренів характеристичного рівняння (**табл. 3.7**). Оскільки саме корені задають форму експоненціальних складових розв'язку, характер перехідного процесу безпосередньо визначається їх типом.

Таблиця 3.7. Вирази вільних складових загального розв'язку

Вигляд коренів характеристичного рівняння	Вираз вільної складової
Корені $p_1, p_2, \dots, p_n$ дійсні та різні	$x_B = \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t}$
Корені $p_1, p_2, \dots, p_n$ дійсні і $p_1 = p_2 = \dots = p_m = p (m < n)$	$x_B = \sum_{k=1}^n A_k t^{k-1} e^{p t} + \sum_{k=m+1}^n A_k e^{p_k t}$
Пари комплексно-спряжених коренів $p_{k,k+1} = -\delta_k \pm j\omega_k$	$\begin{aligned} x'_B &= e^{-\delta_k t} (A_k \cos \omega_k t + A_{k+1} \sin \omega_k t) \\ &= B_k e^{-\delta_k t} \sin(\omega_k t + \varphi_k) \end{aligned}$

Оскільки у лінійному колі з плином часу вільна складова затухає, дійсні корені характеристичного рівняння не можуть бути додатними.

При дійсних коренях x_B монотонно затухає, і має місце **аперіодичний перехідний процес**. Наявність пари комплексно спряжених коренів обумовлює появу затухаючих синусоїдальних коливань (**коливальний перехідний процес**).

Оскільки фізично коливальний процес пов'язаний з періодичним обміном енергією між магнітним полем котушки індуктивності й електричним полем конденсатора, комплексно-спряжені корені можуть мати місце тільки для електричних кіл, що містять обидва типи накопичувачів. Швидкість затухання коливань прийнято характеризувати відношенням

$$\frac{x(t)}{x(t + T_0)} = e^{\delta T_0},$$

яке називається **декрементом коливань** або натуральним логарифмом цього відношення

$$\Delta = \ln e^{\delta T_0} = \delta T_0,$$

що називається **логарифмічним декрементом коливань**, де $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

Важливою характеристикою при дослідженні перехідних процесів є постійна часу t , яка визначається для кіл першого порядку, як:

$$\tau = \text{mod}(1/p),$$

де p – корінь характеристичного рівняння.

Постійну часу можна інтерпретувати як часовий інтервал, впродовж якого вільна складова зменшується в e разів у порівнянні зі своїм початковим значенням. Теоретично перехідний процес триває нескінченно довго. Однак на практиці вважають, що він закінчується при $t = (3 \dots 4)\tau$.

Алгоритм розрахунку перехідного процесу класичним методом

1. Для ефективного аналізу перехідного процесу на першому етапі слід звести електричну схему до найпростішого вигляду, мінімізуючи кількість елементів, що накопичують енергію. Це досягається шляхом заміни паралельних або послідовних з'єднань однотипних реактивних компонентів (індуктивностей або ємностей) на їх еквіваленти.

2. Після спрощення схеми система інтегро-диференціальних рівнянь, складена відповідно до законів Кірхгофа або за допомогою методу контурних струмів, може бути зведена до одного диференціального рівняння. Це рівняння використовується для побудови характеристичного рівняння, яке визначає динаміку перехідного процесу в колі.

3. Порядок диференціального рівняння, а відповідно й характеристичного рівняння, визначається кількістю реактивних елементів (індуктивностей та ємностей) у схемі. Основна складність при застосуванні класичного методу до рівнянь вищого порядку полягає у знаходженні коренів характеристичного рівняння та відповідних сталих інтегрування.

У загальному випадку порядок диференціального рівняння (3.6) може бути будь-яким. Однак на практиці в більшості випадків робиться спроба поділу автоматичної системи на ланки і складається диференціальне рівняння для кожної ланки окремо, причому порядок кожного диференціального рівняння зазвичай не вище другого, оскільки розв'язок диференціального рівняння на порядок вище другого є складним завданням навіть при використанні сучасних комп'ютерних технологій.

Якщо ж поділ на ланки є неможливим або недоцільним, використовують альтернативні підходи – зокрема, операторний метод, який базується на застосуванні перетворення Лапласа, який дозволяє уникнути трудомісткого процесу визначення констант інтегрування та значно спрощує розв'язання задач.

Таким чином, класичний метод може бути застосований у широкому колі задач, однак потребує чіткої послідовності дій. Нижче наведено узагальнений алгоритм аналізу перехідних процесів у довільній електричній схемі.

1. Розрахунок вимушеного (стаціонарного) режиму при $t \rightarrow \infty$. Визначення вимушених струмів і напруг.

2. Розрахунок режиму перед перемиканням. Визначення струмів в гілках індуктивності і напруг на конденсаторах. Значення цих величин в момент перемикання є незалежними початковими умовами.

3. Побудова диференціального рівняння для вільного процесу ($E = 0$) в колі після перемикання за законами Кірхгофа або за методом контурних струмів. Об'єднання цих рівнянь в алгебраїчні, отримання характеристичного рівняння і знаходження його кореня. Існують методики, що спрощують операцію знаходження коренів характеристичного рівняння, наприклад, прирівнювання опору вхідного оператора кола до нуля, яке виходить шляхом заміни множника « $j\omega$ » на оператор « p » у виразі комплексного опору кола.

4. Запис загальних виразів для потрібних напруг і струмів за типом коренів характеристичного рівняння.
5. Запис отриманих значень в п. 4 та їх похідних при $t = 0$.
6. Визначення необхідних залежних умов, використовуючи незалежні умови.
7. Підстановка початкових умов в рівняння кроку 5, знаходження констант інтегрування.
8. Запис закону зміни потрібних струмів і напруг.

3.2.2. Перехідні процеси в електричних колах з послідовно з'єднаними резисторами і котушками

Коротке замикання в колі резистора і котушки. Розглянемо докладніше електромагнітні процеси в схемі, наведеній на [рис. 3.3](#), які виникають після замикання ключа.

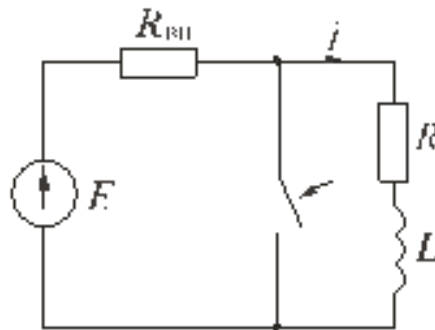


Рис. 3.3. Електрична схема

Обчислимо усталений стан в колі перед включенням (до замикання ключа) і визначимо за ним незалежний початковий стан, тобто силу струму в котушці в момент $t = 0_-$, що безпосередньо передуює перемиканню

$$i(0_-) = i(0_+) = \frac{E}{R_{\text{вн}} + R}.$$

Оскільки в новоутвореному колі немає джерела котушки L і резистора R , то $i_{\text{вим}} = 0$.

Для визначення вільної складової струму запишемо рівняння електричного стану кола після перемикання за другим законом Кірхгофа:

$$L \frac{di_{\text{в}}}{dt} + R i_{\text{в}} = 0.$$

Тоді характеристичне рівняння має вигляд:

$$pL + R = 0.$$

Загальний розв'язок рівняння для вільної компоненти:

$$i_{\text{в}} = A e^{pt},$$

де A – стала інтегрування; $p = -R/L$, с^{-1} – корінь характеристичного рівняння.

Шляхом запису загального вигляду перехідного струму котушки

$$i = i_{\text{вим}} + i_{\text{в}} = A e^{pt},$$

прирівняйте його значення $i(0_+) = A$ в точці $t = 0_+$ до значення $i(0_-)$.

$$A = \frac{E}{R_{\text{вн}} + R} = I_0.$$

Перехідний струм $i = i_{\text{вим}} + i_{\text{в}}$ при цьому дорівнює

$$i = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}},$$

де $\tau = L/R$ – стала часу кола (час, протягом якого вільна складова процесу зменшується в $e = 2,72$ рази в порівнянні з початковим значенням).

Даний результат ілюструє загальну властивість лінійних диференціальних рівнянь першого порядку: перехідний процес має аперіодичний характер і описується експоненційною функцією.

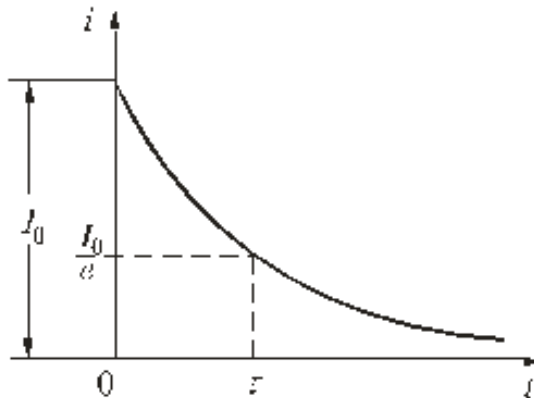


Рис. 3.4. Графік зміни перехідного струму

Графік зміни перехідного струму показаний на **рис. 3.4**.

Визначимо ЕРС самоіндукції котушки

$$e_L = -L \frac{di}{dt} = \frac{R}{R_{\text{вн}} + R} E e^{-\frac{t}{\tau}} = I_0 R e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t \geq 0.$$

У момент комутації ця ЕРС дорівнює напрузі на опорі R , а потім зменшується за експоненціальним законом. Враховуючи вищезазначене, можна зробити наступні висновки.

1. У разі короткого замикання в розглянутому електричному колі сила струму змінюється за експоненціальним законом, поступово зменшуючись від початкового значення до нуля. Темп цього спадання визначається сталою часу кола, яка розраховується як відношення індуктивності котушки до активного опору кола.

2. На практиці можна припустити, що процес переходу закінчується на $t \approx (3 \dots 5) \tau$ при зменшенні початкового значення струму по модулю на порядок.

Напруга на котушці в початковий момент часу дорівнює напрузі на активному опорі:

$$u_L(0_+) = I_0 R.$$

Таким чином, перехідний процес у розглянутому колі полягає в тому, що енергія, накопичена в магнітному полі індуктивності, поступово перетворюється на теплову енергію, яка розсіюється в резисторі у вигляді втрат. Загалом перехідний процес виникає через невідповідність величини накопиченої енергії

в елементах кола (магнітному полі котушок індуктивності та/або електричному полі конденсаторів) її значенню в новому стані кола.

$$W = \int_0^{\infty} i^2 R dt = I_0^2 R \int_0^{\infty} e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = \frac{LI_0^2}{2}.$$

3.2.3. Перехідні процеси в колі з резисторами і конденсатором

Математичний опис перехідних процесів у RC -колі є аналогічним RL -колу і призводить до диференціального рівняння першого порядку з експоненціальним розв'язком.

Розряд конденсатора на резистор. Розглянемо перехідний процес при короткому замиканні в колі з конденсатором і резистором (**рис. 3.5**), якщо конденсатор спочатку був заряджений до напруги

$$u_C(0_+) = U_0 = E.$$

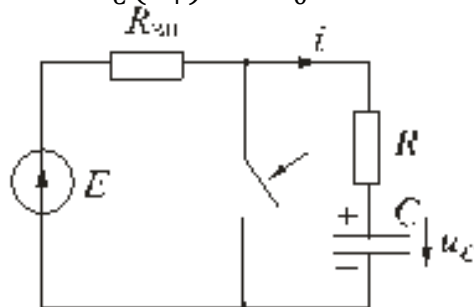


Рис. 3.5. Електрична схема

Стационарний струм через конденсатор і стаціонарна напруга на конденсаторі дорівнюють нулю. Для побудови характеристичного рівняння запишемо рівняння для новоутвореної схеми за другим законом Кірхгофа

$$R i + u_C = 0.$$

При розрахунку перехідних процесів в колах з конденсатором часто зручніше спочатку знайти не струм, а напругу на конденсаторі u_C , а потім, за умови що $i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_C}{dt}$, знайти струм через конденсатор. Отже, рівняння за другим законом Кірхгофа перепишемо у вигляді:

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0.$$

Характеристичне рівняння має вигляд:

$$RCp + 1 = 0.$$

Загальний розв'язок для вільної складової напруги:

$$u_{C_в} = A e^{pt} = A e^{-\frac{t}{\tau}},$$

де $A = U_0$ – стала інтегрування; $p = -1/(RC)$ – корінь характеристичного рівняння; $\tau = RC$ – стала часу мережі.

Зважаючи на те, що нульове значення стаціонарної напруги, отримуємо напругу на конденсаторі:

$$u_C = U_0 e^{-t/\tau}.$$

Перехідний струм в колі

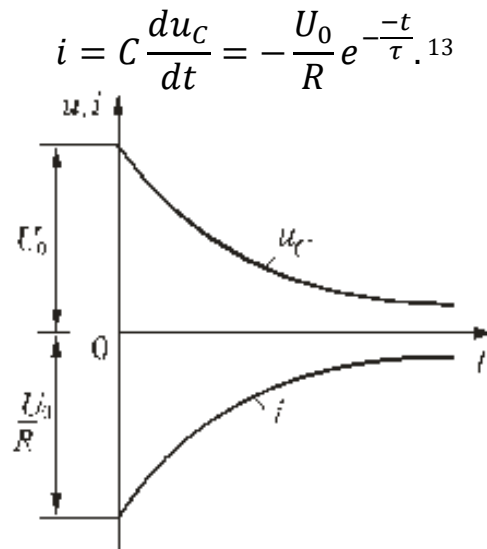


Рис. 3.6. Криві зміни напруги на конденсаторі і струму в колі в часі

Криві зміни напруги на конденсаторі і струму в колі в часі мають вигляд показників степеня (**рис. 3.6**).

З енергетичної точки зору перехідний процес характеризується перетворенням енергії електричного поля конденсатора в теплову енергію в резисторі. Слід зазначити, що опір резистора впливає не на кількість тепла, яке виділяється, а на початкове значення сили струму і тривалість розряду. Насправді

$$W = \int_0^{\infty} i^2 R dt = \frac{U_0^2}{R} \int_0^{\infty} e^{-\frac{2t}{RC}} dt = \frac{CU_0^2}{2}.$$

Перемикання кола з резистором і конденсатором на постійну напругу (заряд конденсатора). Зі схеми, наведеної на **рис. 3.7**, випливає, що стаціонарна складова напруги на конденсаторі $u_{Cy} = U$, а вільна складова явно дорівнює

$$u_{Cв} = A e^{-t/\tau}, \tau = RC.$$

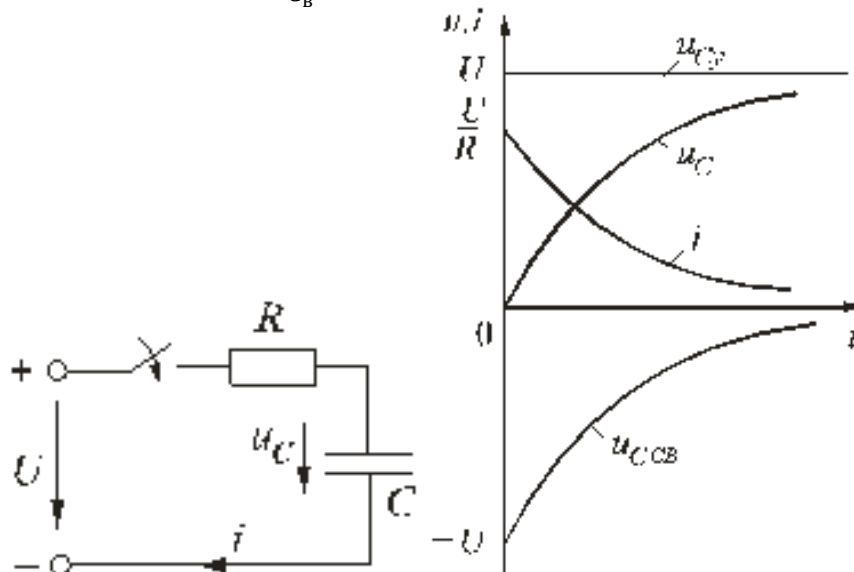


Рис. 3.7. Залежності напруг і струмів від часу для електричної схеми

¹³ Знак «-» з'являється через узгодження напрямків струму та напруги згідно з прийнятою системою знаків..

Припустимо, що до замикаання ключа конденсатор не був заряджений ($u_C(0_-) = 0$). Виходячи із законів перемикання, $u_C(0_-) = u_C(0_+) = 0$, при $t = 0$; тому:

$$u_C(0) = u_{C_y}(0) + u_{C_b}(0) \text{ або } 0 = U + A, \text{ откуда } A = -U.$$

Тоді перехідна напруга на конденсаторі

$$u_C = U (1 - e^{-t/\tau}),$$

і перехідний струм в колі

$$i = C \frac{du_C}{dt} = \frac{U}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Залежності напруг і струмів від часу показані на **рис. 3.7**. З них видно, що напруга на конденсаторі зростає за експоненціальним законом від нуля до напруги джерела, а струм зменшується від початкового значення до нуля також в геометричній прогресії. Тривалість їх зміни визначається постійною часу $\tau = RC$. Тут перехідний час приймається рівним $t \approx (3 \div 5)\tau$.

3.2.4. Типові задачі застосування диференціальних рівнянь в електроенергетиці

Узагальнюючи розглянуте в п.3.1-3.2.3 наведено узагальнений алгоритм побудови диференціального рівняння для електричного кола.

Алгоритм формулювання диференціального рівняння для електричного кола, що містить R, L, C -елементи.

1. *Визначення типу кола.* Встановлюється конфігурація схеми: послідовне або паралельне з'єднання елементів (наприклад, RLC -коло).

2. *Застосування законів Кірхгофа.*

Перший закон Кірхгофа (для вузлів) використовується для паралельних кіл.

Другий закон Кірхгофа (для контурів) – для послідовних кіл, згідно якого алгебраїчна сума напруг у замкненому контурі дорівнює прикладеній ЕРС:

$$u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = E(t).$$

3. *Запис характеристичних рівнянь елементів* (співвідношень між струмом і напругою на окремих елементах електричного ланцюга). Вони визначають динамічні властивості елементів і використовуються для складання диференціальних рівнянь, що описують перехідні процеси. У задачах електроенергетики характеристичне рівняння описує вільну складову перехідного процесу, а його корені залежать тільки від параметрів і топології кола, але не від зовнішніх джерел.

Для основних елементів:

• резистора: $u_R(t) = R \cdot i(t)$;

• індуктивності: $u_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$;

• ємності: $i_C(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt}$, звідки $u_C(t) = \left(\frac{1}{C}\right) \int i_C(t) dt$.

4. *Підстановка в рівняння Кірхгофа.* Для послідовного RLC -кола з джерелом напруги $E(t)$:

$$R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} + \left(\frac{1}{C}\right) \int i(t) dt = E(t)$$

або після диференціювання:

$$L \cdot \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R \cdot \frac{di(t)}{dt} + \left(\frac{1}{C}\right) \cdot i(t) = \frac{dE(t)}{dt}.$$

5. Побудова диференціального рівняння відносно напруги на ємності $u_C(t)$.
У багатьох задачах зручно аналізувати не струм у колі, а напругу на окремому елементі – найчастіше на конденсаторі. У цьому випадку диференціальне рівняння формують відносно $u_C(t)$, виражаючи струм через ємність і підставляючи його в рівняння Кірхгофа:

- записати струм через ємність

$$i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt},$$

- виразити напруги на інших елементах через $u_C(t)$
для резистора:

$$u_R(t) = Ri(t) = RC \frac{du_C(t)}{dt},$$

для індуктивності:

$$u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = LC \frac{d^2 u_C(t)}{dt^2},$$

Підстановка дає вираз:

$$RC \frac{du_C(t)}{dt} + LC \frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + u_C(t) = E(t),$$

або в стандартній формі:

$$\frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{LC} u_C(t) = \frac{1}{L} E(t).$$

Таким чином, диференціальне рівняння формується шляхом послідовного застосування законів Кірхгофа, запису характеристичних рівнянь елементів та приведення отриманого виразу до стандартної форми.

Нижче наведено систему типових задач, які ілюструють застосування диференціальних рівнянь і характеристичних рівнянь при аналізі перехідних процесів в електроенергетичних системах — від найпростіших моделей до реальних аварійних режимів.

Приклад 3.1. Послідовне електричне коло складається з активного опору $R=10$ Ом та індуктивності $L=0,5$ Гн. У момент часу $t=0$ коло під'єднують до джерела постійної напруги $U=100$ В. Визначити закон зміни струму в колі $i(t)$; сталу часу кола; струм у сталому режимі.

Розв'язання. За другим законом Кірхгофа для кола після комутації:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = U.$$

Підставляємо числові значення:

$$0,5 \frac{di}{dt} + 10i = 100.$$

Складаємо характеристичне рівняння для однорідної частини:

$$0,5 \frac{di}{dt} + 10i = 0.$$

Шукаючи розв'язок у вигляді $i = e^{pt}$, отримуємо:

$$\begin{aligned}0,5p + 10 &= 0, \\ p &= -20.\end{aligned}$$

Тоді повний розв'язок представимо у вигляді:

$$i(t) = i_{\text{вим}} + i_{\text{віль}},$$

де вимушена складова:

$$i_{\text{вим}} = \frac{U}{R} = 10 \text{ A},$$

вільна складова:

$$i_{\text{віль}} = Ce^{-20t}.$$

Після підстановки отримаємо:

$$i(t) = 10 + Ce^{-20t}.$$

Враховуючи початкову умову, а саме відсутність струму до комутації $i(0) = 0$, остаточно будемо мати:

$$0 = 10 + C \Rightarrow C = -10.$$

Сталу часу знайдемо як:

$$\tau = \frac{L}{R} = 0,05 \text{ с.}$$

Відповідь: $i(t) = 10(1 - e^{-20t}) \text{ A.}$

Приклад 3.2. Послідовне RLC -коло має параметри: $R = 20 \text{ Ом}$, $L = 0,2 \text{ Гн}$, $C = 50 \text{ мкФ}$. У момент часу $t = 0$ коло під'єднують до джерела постійної напруги. Визначити характер перехідного процесу та записати загальний вигляд струму.

Розв'язання. Запишемо диференціальне рівняння для коливального режиму у RLC -колі:

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0.$$

Підставляючи задані дані, отримуємо:

$$0,2 \frac{d^2 i}{dt^2} + 20 \frac{di}{dt} + 20000 i = 0.$$

Тоді характеристичне рівняння може бути представлено:

$$0,2p^2 + 20p + 20000 = 0.$$

Розв'язуючи дане квадратне рівняння, отримуємо від'ємний дискримінант:

$$D = 20^2 - 4 \cdot 0,2 \cdot 20000 = 400 - 16000 = -15600 < 0.$$

Отже, корені даного рівняння будуть комплексні $p = -\alpha \pm j\omega$, процес коливальний із затуханням.

Враховуючи це, загальний розв'язок:

$$i(t) = e^{-\alpha t} (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t).$$

Відповідь: процес коливальний із затуханням, загальне рівняння струму $i(t) = e^{-\alpha t} (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t).$

Приклад 3.3. В еквівалентній моделі електроенергетичної системи одержано диференціальне рівняння $\frac{d^2 x}{dt^2} - 4 \frac{dx}{dt} + 3x = 0$. Визначити корені

характеристичного рівняння; характер режиму роботи системи; фізичний висновок відносно стійкості системи.

Розв'язання. Зведемо задане рівняння до характеристичного:

$$p^2 - 4p + 3 = 0.$$

Розв'язавши дане квадратне рівняння, отримаємо два додатні корені $p_1 = 1, p_2 = 3$, отже:

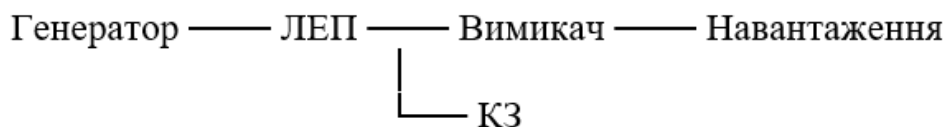
$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{3t}.$$

Такий характер коренів відповідає аварійному або некерованому режиму електроенергетичної системи.

Відповідь: режим нестійкий – відхилення зростають з часом.

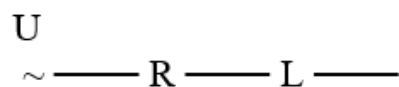
Приклад 3.4. Трифазна симетрична електроенергетична система складається з синхронного генератора, лінії електропередачі та навантаження. Система працює в усталеному режимі. У момент часу $t = 0$ відбувається комутація – вимикач замикає коло; через малий проміжок часу в цій же точці виникає трифазне коротке замикання. Параметри однієї фази системи: напруга джерела $U = 10$ кВ; активний опір системи $R = 1$ Ом; індуктивність системи $L = 0,1$ Гн. Вважати систему симетричною, насичення магнітних кіл не враховувати. Потрібно побудувати однолінійну схему системи; скласти розрахункову схему для однієї фази; побудувати розрахункову схему перехідного процесу з урахуванням вимикача; знайти закон зміни перехідного струму; визначити усталене значення струму короткого замикання.

Розв'язання. Побудуємо однолінійну схему трифазної системи:



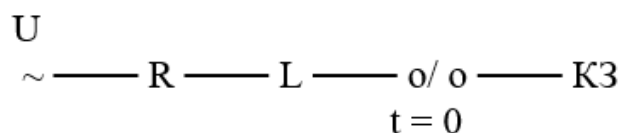
Дана схема відображає топологію електроенергетичної системи без деталізації фаз.

Оскільки система симетрична, розрахункова схема (одна фаза) матиме вигляд:



Трифазна система зведена до еквівалентного однофазного кола.

Побудуємо розрахункову схему перехідного процесу. Для аналізу перехідного струму враховуємо вимикач:



У момент замикання вимикача струм не може змінитися миттєво через наявність індуктивності.

Для знаходження закону зміни перехідного струму складемо диференціальне рівняння процесу. За другим законом Кірхгофа для фази після комутації:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = U.$$

Підставляємо числові значення:

$$0,1 \frac{di}{dt} + 1 i = 10000.$$

Враховуючи отримане рівняння, для однорідної частини будемо мати:

$$0,1 \frac{di}{dt} + i = 0.$$

Розв'язок шукаємо у вигляді характеристичного рівняння $i = e^{pt}$:

$$0,1p + 1 = 0, \Rightarrow p = -10.$$

Тоді повний струм представимо як:

$$i(t) = i_{\text{вим}} + i_{\text{віль}},$$

де вимушена складова:

$$i_{\text{вим}} = \frac{U}{R} = 10000 \text{ A},$$

вільна складова:

$$i_{\text{віль}} = C e^{-10t}.$$

Отже:

$$i(t) = 10000 + C e^{-10t}.$$

З урахуванням початкової умови, а саме відсутність струму до комутації $i(0) = 0$, отримаємо

$$0 = 10000 + C \Rightarrow C = -10000.$$

Остаточний розв'язок набуде вигляду:

$$i(t) = 10000 (1 - e^{-10t}) \text{ A}.$$

Усталене значення струму короткого замикання:

$$i_{\text{кз}} = \frac{U}{R} = 10000 \text{ A}.$$

Відповідь: закон зміни перехідного струму $i(t) = 10000(1 - e^{-10t}) \text{ A}$, усталене значення струму короткого замикання 10000 A.

Приклад 3.5. Електричне коло складається зі з'єднаних котушки індуктивності $L=500 \text{ мГн}$, конденсатора ємності $C=100 \text{ мкФ}$, резистора опору $R = 4 \text{ Ом}$ та джерела гармонічної ЕРС амплітуди $E_m=2 \text{ В}$. Вважаючи, що $e(t) = E \cos 200t$, $j(t) = J \cos 200t$, побудувати математичну модель цього електричного кола у вигляді диференціального рівняння другого порядку: а) відносно струму через індуктивність $i_L(t)$; б) відносно напруги на ємності $u_C(t)$. Електричну схему наведено на **рис. 3.8**.

Розв'язання. Отримаємо диференціальне рівняння другого порядку для кола відносно струму в індуктивності, а далі запишемо характеристичне рівняння кола, знайдемо його корені, постійну часу τ та приведемо рівняння до вигляду з коефіцієнтами у відносних одиницях.

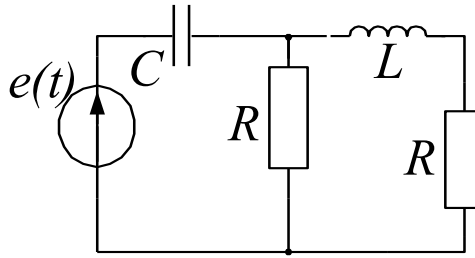


Рис. 3.8. Схема електричного кола

Як змінні стану вибираємо струм в індуктивності i_L і напругу на ємність u_C .

$$C \frac{du_C}{dt} = i_1 + i_L, L \frac{di_L}{dt} + i_L R + u_C = e(t), -i_1 R + i_L R + L \frac{di_L}{dt} = 0.$$

При цьому враховується, що

$$i_C = C \frac{du_C}{dt}, \text{ а } u_L = L \frac{di_L}{dt}.$$

З рівняння за першим законом Кірхгофа виражаємо струм

$$i_1 = C \frac{du_C}{dt} - i_L.$$

З другого рівняння системи:

$$u_C = e(t) - L \frac{di_L}{dt} - i_L R,$$

Тоді

$$i_C = C \frac{du_C}{dt} = C \left[\frac{de(t)}{dt} - LC \frac{d^2 i_L}{dt^2} - R \frac{di_L}{dt} \right].$$

Відкривши дужки та звівши подібні множники, маємо

$$RLC \frac{d^2 i_L}{dt^2} + (L + R^2 C) \frac{di_L}{dt} + 2Ri_L = RC \frac{de(t)}{dt}.$$

Представимо рівняння в канонічному вигляді, коли коефіцієнт на найвищій похідній дорівнює одиниці.

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \left(\frac{R^2 C + L}{RLC} \right) \frac{di_L}{dt} + \left(\frac{2}{CL} \right) i_L = \frac{1}{L} \frac{de(t)}{dt}.$$

Представимо його в загальному вигляді:

$$a_2 \frac{d^2 i_L}{dt^2} + a_1 \frac{di_L}{dt} + a_0 i_L = b_1 \frac{dj}{dt},$$

де $a_2 = 1$, $a_1 = \frac{R^2 C + L}{RLC}$, $a_0 = \frac{2}{CL}$, $b_1 = \frac{1}{L}$.

Далі будемо враховувати, що

$$e(t) = E_m \cos \omega t = 2 \cos 200t.$$

Тоді

$$a_2 \frac{d^2 i_L}{dt^2} + a_1 \frac{di_L}{dt} + a_0 i_L = -b_1 E_m \sin \omega t.$$

Підставляючи відомі параметри схеми, отримаємо

$$1 \frac{d^2 i_L}{dt^2} + 5004 \frac{di_L}{dt} + 40000 i_L = -800 \sin \sin 200t.$$

Далі виведемо диференціальне рівняння другого порядку для схеми відносно напруги на ємності.

Згідно з другим законом Кірхгофа $i_1 = \frac{(-u_c + e)}{R}$. Виразимо з першого рівняння системи силу струму в індуктивності

$$i_L = -\frac{e - u_c}{R} + C \frac{du_c}{dt}.$$

Підставляючи в друге рівняння системи, отримаємо

$$L \left(-\frac{1}{R} \frac{de}{dt} + \frac{1}{R} \frac{du_c}{dt} + C \frac{d^2 u_c}{dt^2} \right) + R \left(-\frac{e}{R} + \frac{u_c}{R} + C \frac{du_c}{dt} \right) + u_c = e.$$

Відкривши дужки, скоротивши такі доданки і розділивши кожен член рівняння на CL (коефіцієнт на найбільшій похідній), маємо

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \left(\frac{1}{CR} + \frac{R}{L} \right) \frac{du_c}{dt} + \left(\frac{2}{CL} \right) \cdot u_c = \frac{L}{R} \frac{de}{dt} + \frac{2}{CL} e.$$

Представимо його у вигляді:

$$a_2 \frac{d^2 u_c}{dt^2} + a_1 \frac{du_c}{dt} + a_0 u_c = b_1 \frac{dj}{dt} + b_0 j.$$

$$\text{де } a_2 = 1, \quad a_1 = \frac{R}{L} + \frac{1}{RC}, \quad a_0 = \frac{2}{CL}, \quad b_1 = \frac{2}{CL}, \quad b_0 = \frac{1}{RC}.$$

Слід зазначити, що коефіцієнти a_2, a_1, a_0 в лівій частині рівнянь струмів індуктивності і ємнісних напруг однакові.

Далі будемо враховувати, що

$$e(t) = E_m \cos \omega t = 2 \cos 200t, \quad \frac{de}{dt} = -\omega E_m \sin \omega t = -400 \sin 200t.$$

Тоді

$$a_2 \frac{d^2 u_c}{dt^2} + a_1 \frac{du_c}{dt} + a_2 u_c = -b_1 \omega E_m \sin \omega t + b_0 E_m \cos \omega t.$$

Підставляючи задані параметри схеми в (16), отримаємо

$$1 \frac{d^2 u_c}{dt^2} + 5004 \frac{du_c}{dt} + 40000 u_c = -100 \sin 200t + 8 \cdot 10^5 \cos 200t.$$

Характеристичне рівняння, що відповідає диференціальному рівнянню складається за допомогою алгебризації відповідного однорідного рівняння. У розглянутому прикладі можна отримати однакові характеристичні рівняння. Права частина диференціальних рівнянь дорівнює нулю, так як вид і тривалість перехідного процесу не залежать від зовнішніх джерел, а залежать тільки від параметрів і топології схеми.

Отже, характеристичне рівняння для кола має вигляд

$$a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0, \\ p^2 + 5040 p + 40000 = 0.$$

Рівняння має два корені, які в загальному випадку можуть бути дійсними або комплексно-спряженими. Для розглянутого прикладу $p_1 = -4995,99 \frac{1}{c}$, $p_2 = -8 \frac{1}{c}$. Максимальний час постійний

$$\tau = \left| \frac{1}{p_{min}} \right| \left| \frac{1}{8} \right| c.$$

Як відомо, тривалість перехідного процесу не перевищує 5τ , тобто в даному випадку 0,624 с.

3.2.5. Перехід від іменованих до відносних одиниць у розв'язанні диференціального рівняння

При математичному моделюванні електроенергетичних систем диференціальні рівняння часто містять коефіцієнти, що істотно відрізняються за порядками величин, що ускладнює як аналітичне, так і чисельне розв'язування. Тому в практиці аналізу електроенергетичних систем широко застосовують нормалізацію рівнянь, яка зменшує розкид коефіцієнтів і полегшує подальше інтегрування. Один із найпоширеніших підходів – перехід до відносних (нормованих) одиниць. Нижче наведено приклад нормалізації рівнянь *RLC*-кола.

У рівняннях коефіцієнти a_2, a_1, a_0, b_1, b_0 для іменованих одиниць (Генрі, Фарад, Ом) істотно відрізняються один від одного за величиною, що призводить до певних труднощів при знаходженні рішення. Бажано переходити до відносних одиниць. Як базові значення візьмемо:

- для опорів – опір ємності $x_B = x_L$;
- для частоти – частота джерела $\omega_B = \omega$, тобто $\omega_* = 1$;
- для струмів – амплітуда джерела напруги $E_B = E_m$, тобто, $E_{m*} = 1$.

У **прикладі 3.5** $x_C = \frac{1}{\omega C} = 50$ Ом, $x_L = \omega L = 100$ Ом.

Відносні опори в цьому випадку дорівнюють

$$x_{C*} = \frac{x_C}{x_B} = 0,5, \quad x_{L*} = \frac{x_L}{x_B} = 1, \quad x_{R*} = \frac{x_{R1}}{x_B} = 0,02.$$

Відносна індуктивність і ємність:

$$L_* = \frac{x_{L*}}{\omega_*} = 1, \quad C_* = \frac{1}{x_{C*}\omega_*} = 0,5.$$

Тоді коефіцієнти дорівнюватимуть $a_2 = 1, a_1 = 100,02, a_0 = 4, b_0 = 1$ (для рівняння індуктивності), $b_0 = 4$ (для рівняння ємності), $b_1 = 50$ і рівняння матимуть такий вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 i_L}{dt^2} + 100,02 \frac{di_L}{dt} + 4i_L &= \sin t, \\ \frac{d^2 u_C}{dt^2} + 100,02 \frac{du_C}{dt} + 4u_C &= -50 \sin t + 4 \cos t. \end{aligned}$$

Як видно, коефіцієнти лівої і правої частин рівнянь відрізняються один від одного в набагато меншій мірі, ніж в рівняннях в іменованих одиницях.

Перехід до відносних одиниць не змінює фізичного змісту задачі, а є виключно математичним прийомом нормалізації рівнянь. Такий підхід дозволяє привести диференціальні рівняння до безрозмірного вигляду з коефіцієнтами одного порядку величини, що істотно спрощує аналіз характеристичного рівняння, підвищує чисельну стійкість обчислень і є стандартною практикою при комп'ютерному моделюванні електроенергетичних систем.

3.3. Чисельні методи розв'язування диференціальних рівнянь

У попередніх пунктах було розглянуто аналітичні методи розв'язування диференціальних рівнянь, які дозволяють отримати точний вираз для перехідних

процесів у найпростіших електричних колах. Проте реальні електроенергетичні системи характеризуються великою кількістю елементів, нелінійностями та складною топологією, що ускладнює або унеможлиблює отримання аналітичного розв'язку.

У таких випадках застосовуються чисельні методи інтегрування диференціальних рівнянь, які дозволяють визначити зміну електричних величин у часі шляхом покрокового обчислення.

Практика моделювання електроенергетичних систем найчастіше використовують чисельні методи розв'язування задачі Коші для систем диференціальних рівнянь, які дають змогу отримати наближений розв'язок у вигляді послідовності значень шуканих величин у дискретні моменти часу:

1) *Однокрокові методи*, в яких для знаходження наступної точки на кривій $y = f(x)$ необхідна інформація лише про один попередній крок. Однокроковими є:

- метод Ейлера;
- методи Рунге-Кутта.

2) *Методи прогнозу і корекції (багатокрокові)*, в яких для знаходження наступної точки кривої $y = f(x)$ необхідна інформація більше ніж про одну з попередніх точок. Щоб отримати достатньо точне числове значення, часто звертаються до ітерації. До таких методів відносяться методи Мілна, Адамса-Башфорта, Хеммінга тощо.

Далі розглянемо тільки однокрокові методи, оскільки вони є базовими, інтуїтивно зрозумілими та найчастіше застосовуються в електротехнічних розрахунках; саме на їх основі будуються більш складні чисельні схеми.

Метод Ейлера є найпростішим методом розв'язування задачі Коші, що дозволяє інтегрувати диференціальні рівняння першого порядку. Його точність невелика, але в деяких випадках, наприклад, в системах управління електроприводів, його застосовують досить часто. На основі цього методу простіше зрозуміти алгоритми інших, більш ефективних методів.

Розглянемо диференціальне рівняння у формі Коші

$$y' = f(t, y), \quad (3.10)$$

що задовольняє початковій умові

$$y(t_0) = y_0. \quad (3.11)$$

Чисельний розв'язок задачі полягає в побудові таблиці наближених значень $y_1, y_2, \dots, y_n$ розв'язку рівняння (3.10) в точках $t_1, t_2, \dots, t_n$, які є *вузлами сітки*. Використаємо систему рівновіддалених вузлів, величина h – крок *сітки* (крок інтегрування).

Геометричний зміст метода Ейлера полягає в апроксимації розв'язку на відрізку $[t_n, t_{n+1}]$ відрізком дотичної, проведеної до графіка розв'язку в точці t_n (рис. 3.9). Як видно з рис. 3.9, на кожному новому кроці наближений розв'язок переходить на іншого члена сімейства розв'язків. У результаті накопичується помилка дискретизації, яка лінійно залежить від h , оскільки члени ряду Тейлора, що містять h в другій і вищих степенях, відкидаються. Тому метод Ейлера має *перший порядок точності*.

Знайдемо найпростішим способом наближене значення розв'язку в деякій точці $x_1 = x_0 + h$, де h – достатньо малий крок. Рівняння (3.10) сумісно з початковою умовою (3.11) задають напрям дотичної шуканої інтегральної кривої в точці M_0 з координатами (x_0, y_0) .

Рівняння дотичної має вигляд

$$y = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0).$$

Рухаючись вздовж цієї дотичної, отримаємо наближене значення розв'язку в точці x_1 :

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0)$$

або

$$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0).$$

Володіючи наближеним розв'язком в точці $M_1(x_1, y_1)$ можна повторити описану раніше процедуру: побудувати пряму, що проходить через цю точку з кутовим коефіцієнтом $f(x_1, y_1)$, і за нею знайти наближене значення розв'язку в точці $x_1 = x_1 + h$.

Відмітимо, що ця пряма не є дотичною до реальної інтегральної кривої, оскільки точка M_1 нам не доступна, однак якщо h достатньо малий, то отримані наближення будуть близькими до точних значень розв'язку.

Продовжуючи цю ідею, побудуємо систему рівновіддалених точок

$$x_i = x_0 + i \cdot h (i = \overline{0, n}).$$

Отримання таблиці значень шуканої функції $y(x)$ за методом Ейлера полягає в циклічному застосуванні формули

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$$

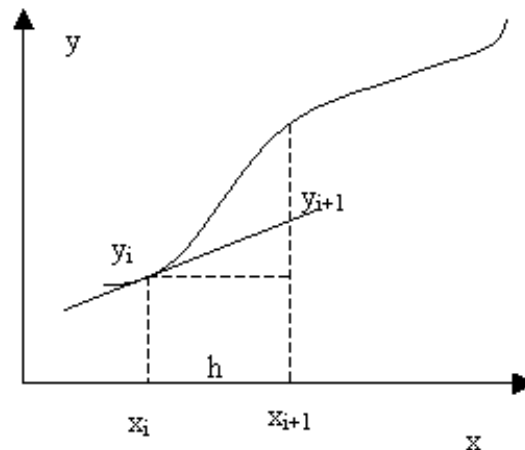


Рис. 3.9. Геометрична ілюстрація методу Ейлера

Розв'язання однорідного диференціального рівняння в деякій точці x_i називається стійким, якщо знайдене в цій точці значення функції y_i мало змінюється при зменшенні кроку інтегрування. Для перевірки стійкості, таким чином, потрібно провести два розрахунки значень (y_i) – з кроком інтегрування $2h$ і при зменшеній (наприклад, двічі) величині кроку. Як критерій стійкості можна використовувати малість відносної зміни отриманого розв'язку при зменшенні кроку інтегрування

$$\varepsilon = \frac{y_{2hi} - y_{hi}}{y_{2hi}},$$

де y_{2hi} – розв’язок, розрахований з кроком $2h$, y_{hi} – розв’язок, розрахований з кроком h .

Практичним наслідком цього факту є очікування того, що при зменшенні h наближений розв’язок буде все точнішим і при прямуванні h до нуля буде збігатися до точного розв’язку з лінійною швидкістю по h ; тобто очікується, що при зменшенні кроку h вдвічі помилка зменшиться в 2 рази. Дуже повільна збіжність при зменшенні h характерна для методів першого порядку і слугує перешкодою для їх широкого використання.

Модифікований метод Ейлера. Хоча тангенс кута нахилу дотичної до шуканої кривої у вихідній точці відомий і дорівнює $f(t_0, y_0)$, він змінюється у відповідності зі зміною незалежної змінної. Тому в точці $t_0 + h$ нахил дотичної уже не такий, яким він був в точці t_0 . Отже, при збереженні початкового нахилу дотичної на всьому інтервалі h в результаті обчислень вноситься похибка. Точність методу Ейлера можна суттєво підвищити, використовуючи, наприклад, середнє значення похідної на початку і вкінці інтервалу.

У модифікованому методі Ейлера спочатку обчислюється значення функції в наступній точці за простим методом Ейлера:

$$y_{n+1}^* = y_n + hf(t_n, y_n),$$

яке використовується для обчислення наближеного значення похідної вкінці інтервалу $f(t_{n+1}, y_{n+1}^*)$. Обчисливши середнє між цим значенням похідної і її значенням на початку інтервалу, знайдемо точніше значення y_{n+1} :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h[f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1}^*)] \quad (3.12)$$

Графічна інтерпретація модифікованого методу Ейлера представлена на **рис. 3.10**. Цей метод є *методом другого порядку*, оскільки в ньому використовується член ряду Тейлора, що містить h^2 .

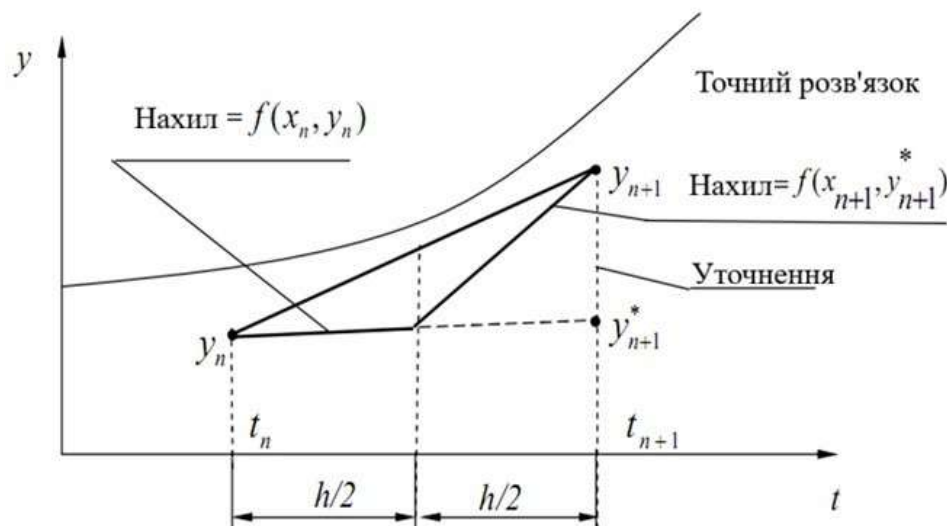


Рис. 3.10. Геометрична інтерпретація модифікованого методу Ейлера

Метод Рунге-Кутта. Нехай необхідно знайти розв’язок диференціального рівняння

$$y' = f(t, y),$$

що задовольняє початковій умові

$$y'(t_0) = y_0.$$

Принцип, на якому засновано метод Рунге-Кутта, можна пояснити, як і принцип, на якому засновано метод Ейлера, за допомогою розкладання функції в ряд Тейлора

$$y(t_0 + h) = y(t_0) + hy'(t_0) + \frac{1}{2}h^2y''(t_0) + \dots$$

Щоб утримати в ряді Тейлора член n -го порядку, необхідно обчислити n -у похідну залежної змінної. При використанні модифікованого методу Ейлера для отримання другої похідної в кінцево-різницевій формі достатньо було знати нахил кривої на кінцях інтервалу, що розглядається. Щоб обчислити третю похідну в кінцево-різницевій формі, необхідно мати значення другої похідної, принаймні, в двох точках. Для цього необхідно додатково визначити нахил кривої в деякій проміжній точці інтервалу h , тобто між t_n та t_{n+1} . Вочевидь, чим вище порядок похідної, що обчислюється, тим більше додаткових точок потрібно обчислити всередині інтервалу. Оскільки існує декілька способів розміщення внутрішніх точок і вибору відносних ваг для знайдених, то метод Рунге-Кутта об'єднує ціле сімейство методів розв'язування диференціальних рівнянь.

Найбільш поширеним з них є *метод четвертого порядку точності*, при якому утримуються всі члени ряду Тейлора, включаючи h^4 . Розрахунки при використанні цього класичного методу проводять за формулами:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

де

$$\begin{cases} k_1 = hf(t_n, y_n); \\ k_2 = hf\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right); \\ k_3 = hf\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2\right); \\ k_4 = hf(t_n + h, y_n + k_3). \end{cases}$$

Метод Ейлера й його модифікація є методами Рунге-Кутта першого і другого порядку відповідно. Вища точність метода Рунге-Кутта дозволяє збільшити крок інтегрування h . Допустима похибка на кроці визначає його максимальну величину.

У прикладних пакетах програм вибір кроку часто здійснюється автоматично. Для цього проводять обчислення спочатку з кроком h , а потім – з кроком $h/2$.

За оцінку похибки обчислень з кроком $h/2$ можна прийняти наближену формулу

$$\varepsilon = \frac{|y_n^* - y_n|}{15},$$

де y_n^* – обчислене значення з кроком $h/2$; y_n – обчислене значення з кроком h .

Метод Рунге-Кутта для систем диференціальних рівнянь. Формули Рунге-Кутта можна використовувати для розв'язування систем диференціальних рівнянь, а отже і для розв'язування диференціальних рівнянь вищих порядків, оскільки будь-яке диференціальне рівняння n -го порядку можна звести до n диференціальних рівнянь першого порядку. Наприклад, в диференціальному рівнянні другого порядку

$$\frac{d^2y}{dt^2} = g(t, y, \frac{dy}{dt})$$

можна прийняти

$$z = \frac{dy}{dt},$$

тоді

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2},$$

і отримаємо два рівняння першого порядку:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = z, \\ \frac{dz}{dt} = g(t, y, z). \end{cases}$$

Задача Коші в цьому випадку містить дві початкові умови

$$y(t_0) = y_0 \text{ і } z(t_0) = z_0.$$

Формули Рунге-Кутта для цього випадку матимуть вигляд:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\ z_{n+1} = z_n + \frac{1}{6}(L_1 + 2L_2 + 2L_3 + L_4), \end{cases}$$

де

$$\begin{cases} k_1 = hf(t_n, y_n, z_n); \\ L_1 = hg(t_n, y_n, z_n); \\ k_2 = hf\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1, z_n + \frac{1}{2}L_1\right); \\ L_2 = hg\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1, z_n + \frac{1}{2}L_1\right); \\ k_3 = hf\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2, z_n + \frac{1}{2}L_2\right); \\ L_3 = hg\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2, z_n + \frac{1}{2}L_2\right); \\ k_4 = hf(t_n + h, y_n + k_3, z_n + L_3); \\ L_4 = hg(t_n + h, y_n + k_3, z_n + L_3). \end{cases}$$

Загальна характеристика однокрокових методів

Таким чином, однокроковим методам притаманні певні загальні риси, а саме:

- 1) щоб отримати інформацію в новій точці, потрібно мати дані лише в одній попередній точці. Тому однокрокові методи називають «самозапускними»;
- 2) в основі всіх однокрокових методів лежить розкладання функції в ряд Тейлора, в якому зберігаються члени, містять h в степені до k включно. Ціле число k називається *порядком методу*;
- 3) всі однокрокові методи не потребують дійсного обчислення похідної, а обчислюється лише сама функція в одній або декількох проміжних точках;
- 4) властивість «самозапуску» дозволяє легко змінювати величину кроку.

3.4. Частотні властивості електричних кіл

Задачі дослідження електричних кіл. При аналізі кіл інколи потрібно провести повний розрахунок – визначити всі струми і напруги на всіх його елементах. У більшості випадків необхідно визначити лише частину струмів і напруг – так званих *вихідних* величин f_2 , або реакцій кіл на прикладену *вхідну* дію f_1 , обумовлені діючими зовнішніми незалежними джерелами ЕРС і струму (рис. 3.11). Така постановка задач називається *аналізом за входом і виходом* та є задачею *основного аналізу* кола.

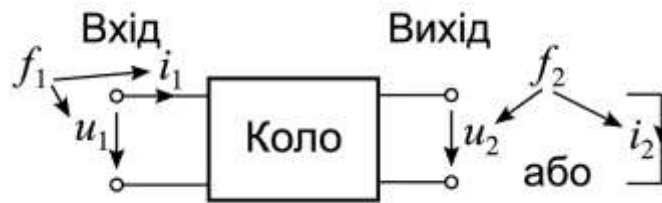


Рис. 3.11. Узагальнена схема електричного кола (чотиріполюсника)

У загальному випадку в колі може діяти кілька вхідних джерел і визначатися кілька вихідних величин. Однак найчастіше при аналізі розглядають одну вихідну величину f_2 , зумовлену дією одного вхідного джерела f_1 (рис. 3.11). У цьому разі інколи саме джерело на схемі кола не зображають, а вказують лише створювані ним напругу U_1 або струм I_1 на вході кола. Вихідна величина також може бути напругою U_2 на вихідних затискачах кола або струмом I_2 у виділеній вихідній гілці.

Оберненою задачею аналізу є *задача синтезу кола* – визначення структури та параметрів елементів кола, які забезпечують заданий характер перетворення вхідного сигналу f_1 у вихідний f_2 . Задача синтезу систем також є основною при проєктуванні систем, що забезпечують ті чи інші робочі функції в енергетиці або інформатиці.

Для цього класу задач характерна можливість відсутності розв’язку – поставлені вимоги до закону перетворення сигналу можуть виявитися нереалізованими. Тому окремим етапом розв’язання задачі синтезу є перевірка умов реалізованості вихідних даних. Наступною особливістю задач синтезу є неоднозначність їх розв’язання – отриманий розв’язок, як правило, не є єдиним, і при остаточному виборі оптимального варіанта доводиться враховувати вимоги до проєктованого пристрою, що виходять за межі теорії кіл (наприклад, технологічні або експлуатаційні).

До цього ж типу належать і **задачі оптимізації кіл** – визначення параметрів елементів, за яких забезпечується найкраще, у певному сенсі, наближення до потрібних властивостей кола або характеристик перетворення сигналів. Такі задачі зазвичай розв’язують на основі порівняння результатів послідовно виконуваних задач аналізу кола зі змінюваними параметрами. Такий шлях перебору варіантів, поряд із загальною трудомісткістю розв’язання, створює особливі труднощі при прагненні отримати уявлення про розв’язність задачі синтезу, однозначність її розв’язання або досягне наближення до ідеального розв’язку. Ефективнішими є спеціальні методи синтезу, розроблені для окремих класів таких задач.

Інший характер має **задача діагностики кола** – визначення його параметрів за результатами вимірювань струмів і напруг на окремих ділянках кола. Вона особливо актуальна при дослідженні складних кіл з високим рівнем інтеграції елементів, коли полюси (затискачі) окремих елементів недоступні для вимірювань. Задача діагностики не завжди має однозначний розв’язок, тому вона потребує побудови розрахункової моделі, яка дозволяє за результатами вимірювань струмів і напруг у часткових режимах роботи кола (наприклад, при подачі напруги лише на окремі його входи) отримати максимально повний і точний опис кола.

Диференціальні рівняння системи. Теорія диференціальних рівнянь дає змогу досліджувати найрізноманітніші еволюційні процеси. Сукупність усіх можливих станів процесу називається **фазовим простором** – простором станів.

Стан будь-якої системи, зокрема електричної, часто зручно розглядати в координатах «вхід – вихід» (рис. 3.11).

Систему можна визначити як сукупність (множину, групу) елементів, пов’язаних між собою певними залежностями.

Елементи системи можуть бути фізичними (електричними, механічними, термодинамічними тощо), хімічними, біологічними або змішаними.

Залежність виходу системи від її входу визначається **законом поведінки системи**, який може бути встановлений і експериментальним шляхом. В ідеальному випадку цей закон може бути виражений у вигляді математичного рівняння, що допускає загальний аналітичний розв’язок. До такого рівняння входить певна кількість сталих величин, або параметрів, які характеризують властивості системи.

У загальному вигляді диференціальне рівняння (рівняння вільного руху) елемента або системи може бути записане так:

$$\begin{aligned} a_0 \frac{d^n X_{\text{вих}}}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} X_{\text{вих}}}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dX_{\text{вих}}}{dt} + a_n X_{\text{вих}} = \\ = b_0 \frac{d^n X_{\text{вх}}}{dt^n} + b_1 \frac{d^{n-1} X_{\text{вх}}}{dt^{n-1}} + \dots + b_{n-1} \frac{dX_{\text{вх}}}{dt} + b_n X_{\text{вх}} \end{aligned} \quad (3.13)$$

де $X_{\text{вих}}$ – вихідна величина елемента або системи (для скорочення запису індекс часу в дужках тут і далі пропущений); $X_{\text{вх}}$ – вхідна величина елемента або системи; a_i , b_i – коефіцієнти, що залежать від конструктивних параметрів елемента або елементів системи.

З метою скорочення запису, ввівши оператор диференціювання прямого перетворення Лапласа:

$$\frac{d}{dt} = p; \quad \frac{d^2}{dt^2} = p^2; \quad \dots \quad \frac{d^{(n-1)}}{dt^{(n-1)}} = p^{(n-1)}; \quad \frac{d^n}{dt^n} = p^n, \quad (3.14)$$

і винісши за дужки вихідну і вхідну величини, диференціальне рівняння (3.13) можна записати в операторній формі:

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) X_{\text{вих}} = (b_0 p^n + b_1 p^{n-1} + \dots + b_{n-1} p + b_n) X_{\text{вх}} \quad (3.15)$$

Подаючи вираз в дужках як багаточлени від оператора p , диференціальне рівняння (3.15) можна скорочено записати у вигляді відношення поліномів:

$$m(p) X_{\text{вих}} = n(p) X_{\text{вх}} \quad (3.16)$$

тут поліном $m(p)$ називається *вихідним оператором* елемента або системи, а поліном $n(p)$ – *вхідним оператором*.

$$m(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n \quad (3.17)$$

$$n(p) = b_0 p^n + b_1 p^{n-1} + \dots + b_{n-1} p + b_n \quad (3.18)$$

Математичні методи отримання системної функції електричних кіл, пов'язані з перетвореннями Фур'є і Лапласа, тобто з переходом з часової в частотну область і область комплексного аргументу (рис. 3.12).

$t \rightarrow \omega$ – пряме перетворення Фур'є (П.п.ф.) – перехід аргументу досліджуваної функції з часової області в частотну область.

$\omega \rightarrow t$ – зворотне перетворення Фур'є (З.п.ф.) – перехід аргументу досліджуваної функції з частотної області в часову область.

$t \rightarrow p$ – перетворення Лапласа (П.п.л.) – перехід аргументу досліджуваної функції з часової в комплексну область).

$p \rightarrow t$ – зворотне перетворення Лапласа (З.п.л.) – з комплексної області в часову.

$\omega \rightarrow p$ – заміна аргументів ω на p (перехід аргументу досліджуваної функції з частотної в комплексну область; p – комплексне число).

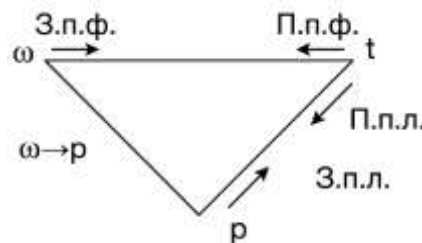


Рис. 3.12. Схема переходів між часовою, частотною та комплексною областями

Передаточні функції. Передаточною функцією елемента або системи називають відношення зображення за Лапласом вихідної величини до зображення за Лапласом вхідної величини за нульових початкових умов.

Якщо диференціальне рівняння елемента або системи записане в операторній формі ((3.15) або (3.16)), то передаточна функція дорівнює відношенню вихідного оператора до вхідного, згідно з виразом:

$$W(p) = \frac{L[X_{\text{вих}}(t)]}{L[X_{\text{вх}}(t)]} = \frac{n(p)}{m(p)} = \frac{b_0 p^n + b_1 p^{n-1} + \dots + b_{n-1} p + b_n}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n} \quad (3.19)$$

де $p = \alpha + i\beta$ – комплексна змінна в перетвореннях Лапласа.

Звідси випливає, що за відомою передаточною функцією легко можна знайти диференціальне рівняння елемента або системи. Для цього необхідно подати передаточну функцію у вигляді дробово-раціональної функції аргументу p і відповідно чисельник цієї функції прийняти за вихідний, а знаменник – за вхідний оператор диференціального рівняння.

Передаточну функцію (3.19) можна також подати у вигляді:

$$W(p) = \frac{n(p)}{m(p)} = \frac{b_0(p - q_1)(p - q_2) \dots (p - q_m)}{a_0(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)} \quad (3.20)$$

$q_1, q_2, \dots, q_m$ – корені рівняння $n(p) = 0$ і називаються нулями передаточної функції; $p_1, p_2, \dots, p_n$ – корені рівнянь $m(p) = 0$ і називаються полюсами передаточної функції.

Частотні функції та характеристики. Якщо у виразі передаточної функції (3.19) кола або системи замінити оператор p на комплексний множник $j\omega$, то отримана таким чином комплексна функція $W(j\omega)$ називається **частотною функцією** або **комплексним коефіцієнтом підсилення**:

$$W(j\omega) = \frac{n(j\omega)}{m(j\omega)} = \frac{b_0(j\omega)^n + b_1(j\omega)^{n-1} + \dots + b_{n-1}(j\omega) + b_n}{a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(j\omega) + a_n}, \quad (3.21)$$

де $j = \sqrt{-1}$, ω – кругова частота [рад/сек].

Частотна функція, представлена на комплексній площині при зміні $-\infty < \omega < \infty$, називається **амплітудно-фазовою частотною характеристикою**.

Частотна функція (3.21), як будь-яка комплексна функція, може бути представлена в наступному вигляді:

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}, \quad (3.22)$$

де $P(\omega)$ – дійсна частина частотної функції і називається дійсною частотною характеристикою; $Q(\omega)$ – уявна частина частотної функції і називається уявною частотною характеристикою; $A(\omega)$ – модуль частотної функції і називається амплітудною частотною характеристикою; $\varphi(\omega)$ – аргумент частотної функції і називається **фазовою частотною характеристикою**.

Частотні характеристики пов'язані між собою наступними формулами:

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}, \\ \varphi(\omega) &= \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}, \\ P(\omega) &= A(\omega) \cos \varphi(\omega), \\ Q(\omega) &= A(\omega) \sin \varphi(\omega). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Диференціальні рівняння, передаточні та частотні функції, частотні характеристики виражають різні форми подання динамічних властивостей елементів і кіл. Вони пов'язані між собою, і знання однієї форми подання динамічних характеристик (властивостей) дає змогу визначити інші розрахунковим шляхом.

Амплітудна та фазова частотні характеристики мають певний фізичний зміст і можуть бути отримані експериментально для елемента або системи.

Вхідні та передаточні функції кіл синусоїдального струму. Застосування комплексного методу зводить співвідношення між миттєвими струмами $i(t)$ та напругами $u(t)$, що подаються диференціальними рівняннями, до алгебраїчних співвідношень між їх комплексними зображеннями $\underline{I}(j\omega)$ та $\underline{U}(j\omega)$. Тому складені для кола рівняння в комплексній формі дають змогу алгебраїчно виразити вихідну величину F_2 (комплексний струм або напругу) через вхідну величину F_1 (також напругу або струм), що подається на вхідні затискачі:

$$F_2 = K(j\omega)F_1,$$

де $W(j\omega) = K(j\omega)$ – коефіцієнт передавання, або передаточна функція кола, що є раціональним дробом комплексного аргументу $j\omega$. Коефіцієнт $K(j\omega)$ виражається через параметри поліномів чисельника та знаменника кола.

За заданого значення частоти ω коефіцієнт передавання є комплексним числом:

$$K(j\omega) = \frac{F_2}{F_1} = K(\omega)e^{j\theta(\omega)}. \quad (3.24)$$

Його модуль $K(\omega)$ виражає відношення діючих значень (або амплітуд) вихідного та вхідного сигналів, а аргумент $\theta(\omega)$ визначає фазовий зсув між ними:

$$K(\omega) = \frac{F_2}{F_1}; \theta(\omega) = \psi_2 - \psi_1,$$

де ψ_2 і ψ_1 — початкові фази вихідного та вхідного сигналів.

Розмірність передаточної функції $W(j\omega)$ визначається розмірностями величин, які вона пов'язує.

Якщо вхідна та вихідна величини – напруги або струми (рис. 3.13, а і б), то коефіцієнт передавання $K(j\omega)$ є **безрозмірною величиною**.

Якщо вихідна величина – напруга, а вхідна – струм (рис. 3.13, в), то говорять про **передаточний опір** $Z_{12}(j\omega)$.

Якщо ж зв'язок між вхідною напругою та вихідним струмом визначається відповідним співвідношенням, то використовують **передаточну провідність** $Y_{12}(j\omega)$ (рис. 3.13, г).

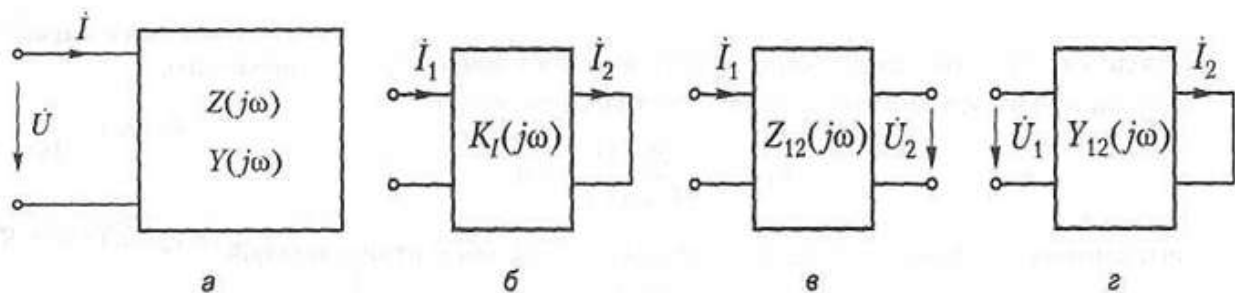


Рис. 3.13. Вхідні та передаточні величини двополусника

Вхідні величини двополусника (рис. 3.13):
комплексний опір

$$Z(j\omega) = \frac{U}{I} = Z(\omega)e^{j\phi(\omega)} = R(\omega) + jX(\omega)$$

і комплексна провідність

$$Y(j\omega) = \frac{I}{U} = \frac{1}{Z(j\omega)}$$

також виражаються раціональними дробами аргументу $j\omega$.

Модулем комплексного вхідного опору є повний опір кола $Z(\omega)$, його аргументом $\varphi(\omega)$ – фазовий зсув між напругою і струмом. Дійсна $R(\omega)$ частина комплексного опору представляє активний, а уявна частина $X(\omega)$ – реактивний опір.

Для комплексної провідності аналогічно маємо:

$$Y(j\omega) = y(\omega)e^{-j\varphi(\omega)} = G(\omega) + jB(\omega),$$

де $y(\omega)$, $G(\omega)$ і $B(\omega)$ – повна, активна і реактивна провідності кола.

Логарифмічні частотні характеристики. Частотні характеристики часто зображають не в лінійному, а в логарифмічному масштабі, коли по осі абсцис відкладають не саму частоту, а її десятковий логарифм.

На осі ординат логарифмічних частотних характеристик прийнято відкладати значення $20 \lg K$. При цьому значенню модуля коефіцієнта передавання передаточної функції $K = 10$ відповідає значення цієї функції 20 дБ. У **табл. 3.8** наведено кілька співвідношень, що часто зустрічаються на практиці.

Таблиця 3.8. Відповідність між значеннями коефіцієнта передавання K та його логарифмічним виразом $20 \lg K$ у децибелах

K	10	100	1000	10^n	2	$\sqrt{2}$	$\approx 1,12$
$20 \lg K$, дБ	20	40	60	$20n$	≈ 6	≈ 3	≈ 1

Додатні значення $20 \lg K$ відповідають підсиленню сигналу даним колом, а від’ємні – його послабленню.

Фазовий зсув θ° на фазо-частотних характеристиках відкладають у лінійному масштабі.

Логарифмічний масштаб зображення частотних характеристик дає змогу відобразити значно ширший діапазон значень частоти, ніж лінійний масштаб. Хоча при цьому на характеристиці відсутнє значення, що відповідає нульовій частоті, визначення її асимптотики при $\omega \rightarrow 0$ не викликає труднощів.

Ще однією перевагою логарифмічного масштабу по осі ординат є те, що при аналізі кіл, які складаються з каскадно з’єднаних ланок, множенню модулів передаточних функцій окремих каскадів відповідає додавання логарифмів модулів – операція значно наочніша й простіша для графічних побудов.

І нарешті, залежності $20 \lg K = f(\lg \omega)$ мають значно простіший асимптотичний характер, ніж залежності $K(\omega)$.

Останнє пов’язане з тим, що передаточна функція будь-якого кола виражається раціональним дробом, а її асимптотами при $\omega \rightarrow 0$ і $\omega \rightarrow \infty$ є степеневі функції виду ω^n .

При переході до логарифмів степенева функція стає лінійною, тому асимптоти логарифмічних амплітудних характеристик при $\omega \rightarrow 0$ та $\omega \rightarrow \infty$ є прямими.

Запитання для самоконтролю

1. Що називають диференціальним рівнянням та як визначається його порядок?
2. Яка різниця між звичайними ДР та рівняннями в частинних похідних?
3. У чому полягає суть задачі Коші для рівняння першого порядку?
4. Які умови необхідні для існування та єдності розв'язку задачі Коші?
5. Опишіть метод відокремлювання змінних для розв'язання ДР.
6. Яку структуру має загальний розв'язок лінійного неоднорідного ДР?
7. У чому полягає відмінність між методом Лагранжа (варіації сталої) та методом інтегруючого множника?
8. Як формується характеристичне рівняння для ДР другого порядку?
9. Опишіть три випадки вигляду розв'язку залежно від коренів характеристичного рівняння.
10. Як фізично проявляються комплексно-спряжені корені в електричному колі?
11. За якою формулою визначається кількість незалежних накопичувачів енергії (порядок ДР) у схемі?
12. Сформулюйте закони комутації для індуктивності та ємності.
13. Поясніть фізичний зміст вільної та вимушеної складових перехідного процесу.
14. Опишіть основні типи ДР у частинних похідних (гіперболічне, параболічне, еліптичне).
15. Для моделювання яких процесів використовується хвильове рівняння, а для яких – рівняння теплопровідності?
16. Яка перевага використання відносних (нормованих) одиниць при розв'язанні ДР?
17. Наведіть класифікацію чисельних методів розв'язання ДР.
18. Чому метод Рунге-Кутта 4-го порядку вважається стандартом точності в інженерних розрахунках?
19. Дайте визначення передаточної функції системи або елемента.
20. Як здійснити перехід від передаточної функції до частотної характеристики?

Тема 4

ЙМОВІРНІСНІ МОДЕЛІ В ЗАДАЧАХ ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИКИ

- 4.1. Основні поняття теорії ймовірностей
- 4.2. Ймовірнісні моделі складних подій у роботі енергосистем
- 4.3. Випадкові величини. Закони розподілу випадкових величин
- 4.4. Оцінка ризиків в електроенергетиці, метод Монте-Карло
 - 4.4.1. Оцінка надійності електроенергетичної системи при невідомих ймовірностях безвідмовної роботи її елементів
 - 4.4.2. Оцінка надійності системи при відомому законі розподілу безвідмовної роботи її елементів
- 4.5. Інтегральні характеристики режимів складних електричних мереж
 - 4.5.1. Розрахунок інтегральних характеристик режимів із використанням комплексних випадкових величин
 - 4.5.2. Розрахунок інтегральних характеристик дійсних і уявних складових параметрів режимів
 - 4.5.3. Ймовірнісні характеристики модуля комплексної випадкової величини параметра режиму

Теорія ймовірності – математична наука, що вивчає закономірності у випадкових явищах [13]. Одним з основних понять теорії ймовірності є поняття випадкової події (або просто події).

4.1. Основні поняття теорії ймовірностей

Усі явища в технології з точки зору кількісних характеристик їх проявів поділяються на *одиничні* та *масові*.

Одиничне явище – це явище, яке виникло один раз і не повторюється при повторному відтворенні одного й того ж досліду (експерименту).

Масові явища – це явища, які повторюються під час повторного відтворення випробувань (експериментів).

При проведенні великої кількості дослідів, тобто коли один і той самий набір умов повторюється, виявляють певні закони розмірності у виникненні випадкових подій.

Під час проведення будь-якого досліду чи спостереження не можна заздалегідь сказати, яке саме значення набуде випадкова величина. Іншими словами, її значення при повторному відтворенні одного й того ж експерименту змінюється щоразу.

З огляду на це, для кількісної оцінки випадкової події використовується ймовірність того, що випадкова величина буде в межах заданого діапазону її можливих значень.

Ймовірність – це об'єктивна математична оцінка можливості виникнення випадкової події або випадкової величини.

У теорії ймовірностей та математичній статистиці, заснованій на ній, використовується низка конкретних понять, основними з яких є: дослід (експеримент), подія, випадкова величина, частота та ймовірність.

Експеримент або **дослід** – це реалізація набору умов, які можна відтворити на практиці або подумки довільно велику кількість разів. Приклади експериментів: підкидання монети, витягування однієї карти з перетасованої колоди. Явища, що виникають під час реалізації цього набору умов, тобто в результаті експерименту, називаються *елементарними подіями*. Множина всіх елементарних подій в експерименті називається *простором елементарних результатів* (W).

Випадкова величина – це величина, яка внаслідок дослідів може набувати різних значень у певних межах. Випадкові величини зазвичай позначаються великою літерою латинського алфавіту, наприклад, X . Значення випадкової величини, які вона отримує в результаті тесту, записуються малими літерами: x_n . Усі випадкові величини можна поділити на дві групи: неперервні та дискретні.

Неперервні випадкові величини – це ті, що можуть набувати будь-якого значення за певний інтервал (час відмови об'єкта, значення певного технічного параметра тощо).

Дискретні випадкові величини – це ті, що можуть набувати лише певні значення (кількість відмов, що трапляються протягом певного часового інтервалу, кількість несправних об'єктів у партії тощо).

Кількість дефектних деталей у партії зношених деталей є дискретною випадковою величиною, а величина зносу цих деталей – неперервною випадковою величиною.

Подією називається будь-який факт, який у результаті дослідів може відбутися або не відбутися. Приклади подій: випадіння шістки при підкиданні грального кубика, відмова технічного приладу, спотворення повідомлення при передачі через канал зв'язку.

Подія називається *достовірною*, якщо вона неминуче відбувається за певних умов. Якщо за певних умов подія ніколи не відбувається, її називають *неможливою* ($\emptyset$).

Випадкова подія ($A, B, C, \dots$) – це подія, яка може статися або не статися внаслідок дослідів.

Якщо поява однієї події виключає появу іншої, то їх називають *несумісними*, інакше ці дві події називають *сумісними*.

Дві події, що утворюють повну групу несумісних подій, називаються *протилежними*.

Події вважаються *рівноможливими* (рівноймовірними), якщо жодна з них не є більш можливою за іншу.

Кожна подія (з повної групи несумісних і однаково можливих подій), яка може статися у випробуванні, називається **елементарним результатом випробування** або **елементарною подією**.

Теорія ймовірностей вивчає масові випадкові відмови або величини, які також мають стабільну частоту виникнення. Якщо були проведені N -випробування машин і отримано частоту (кількість) відмов m , то відносна частота, або частота, відмов:

$$W = \frac{m}{N} \text{ або } W = \frac{m}{N} 100\%.$$

Частота – це кількість ідентичних або близьких (спостережуваних) випадків події або абсолютних значень випадкових величин, об'єднаних в одну групу (інтервал) або розряд.

Відносна частота – це частота, виражена у частках одиниці або відсотках від загальної кількості тестів або об'єктів у досліджуваній популяції.

Ймовірність події A – це відношення кількості випадків, що сприяють виникненню цієї події, до загальної кількості несумісних, унікальних і однаково можливих подій.

З огляду на характер вихідних даних та специфіку енергетичних процесів, вирізняють три типи визначень ймовірності: **класичне**, **статистичне** та **геометричне**. Кожне з них дозволяє оцінити надійність системи залежно від того, що нам відомо: теоретична кількість варіантів, досвід минулої експлуатації чи фізичні параметри об'єкта.

Ймовірність події A – це відношення кількості результатів, що складають подію A (сприятливі результати), до кількості всіх можливих елементарних результатів. Можна сказати, що при необмеженому збільшенні N статистичне значення W наближається або збігається до певного числа P , яке називається ймовірністю заданої події:

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} W = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{m}{N},$$

тобто

$$P(A) \approx \frac{m}{N},$$

де $P(A)$ – ймовірність подій A ; m – число випадків, сприятливих для події; N – це кількість несумісних, єдино можливих і рівноможливих подій.

Зауваження:

1) Нехай є a об'єктів. Вибрати b об'єктів з a , не враховуючи порядок, можна $C_a^b = \frac{a!}{b!(a-b)!}$ способами.

2) Вибрати b об'єктів з a , враховуючи порядок, можна $A_a^b = \frac{a!}{(a-b)!}$ способами.

3) Всього існує $a!$ способів організувати a об'єктів.

Приклад 4.1. Знайти ймовірність того, що при одному киданні грального кубика випаде парна цифра більша 3.

Розв'язання. Розглянемо наступні елементарні події:

A_1 – на кубики випала цифра “1”;

A_2 – на кубики випала цифра “2”;

...

...

A_6 – на кубики випала цифра “6”.

Події $A_1, \dots, A_6$ утворюють повну групу несумісних і рівномірних подій (рівномірність – наслідок симетрії кубика). Події A , описані в задачі, сприяє дві події: A_4 і A_6 . Таким чином, $n = 6$, $m = 2$, а тому:

$$p(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Відповідь: ймовірність того, що при одному киданні грального кубика випаде парна цифра більша трійки становить $1/3$.

Примітка. Припустимо, що в **прикладі 4.1** ми маємо справу з кубом неправильної форми (наприклад, схожого на сірникову коробку). У такому випадку умова рівної ймовірності результатів була б явно порушена, що призвело б до неможливості використання класичного визначення ймовірності (тоді як, як зазначалося раніше, ймовірність $p(A)$ можна знайти лише статистично).

Отже, поняття класичного визначення ймовірності може бути недоречним для застосування, оскільки зазвичай практично загальної кількості випадків, і навіть число «сприятливих» випадків, коли ця подія відбувається, може бути підраховано. Крім того, припущення про рівну можливість тих чи інших подій даної групи не завжди вдається довести. Тому в енергетиці, наприклад, доводиться використовувати **статистичне визначення ймовірності**.

Для цієї мети спочатку введемо поняття відносної частоти $W(A)$ події A , як відношення кількості експериментів, в яких спостерігалася подія A , до загальної кількості проведених тестів:

$$W(A) = \frac{n_A}{n},$$

де n – загальна кількість експериментів, n_A – кількість випадків події A у заданому тесті.

Численні експерименти показали, що, як правило, якщо експерименти проводяться за однакових умов, то для великої кількості тестів відносна частота змінюється мало, коливаючись навколо певного сталого числа. Це число можна взяти як ймовірність відповідної події.

Приклад 4.2. Під час транспортування коробки з 21 стандартною та 10 нестандартними деталями була втрачена одна деталь, і невідомо, яка саме. Деталь, яку випадково вийняли з коробки (після транспортування), виявилася стандартною. Знайдіть ймовірність того, що деталь, яку було втрачено, була: 1) стандартною, 2) нестандартною.

Розв’язання. 1) Стандартна деталь, витягнута з коробки, очевидно, не могла бути втрачена. Могла бути втрачена одна з тих, що залишилися $21+10-1=30$,

причому серед них було 20 стандартних $21-1=20$. Ймовірність того, що була втрачена стандартна деталь

$$p = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}.$$

2) Серед 30 деталей, кожна з яких могла бути втрачена, було 10 нестандартних. Ймовірність втрати нестандартної деталі

$$p = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}.$$

Відповідь: ймовірність того, що деталь, яку було втрачено, була стандартною дорівнює $2/3$, а нестандартною – $1/3$.

Розглянемо третій тип визначення ймовірності – *геометричне визначення*. Геометричне визначення ймовірності використовується у випадках, коли результати експерименту однаково можливі, а простори елементарних подій є нескінченною незліченною множиною. Розглянемо на площині деяку область Ω , яка має площу S_Ω , а в межах області Ω – підобласть D із площею S_D (рис. 4.1).

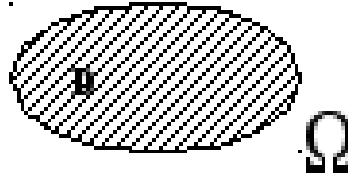


Рис. 4.1. Трактуювання геометричного визначення ймовірності

Цей вибір можна інтерпретувати як викидання точки X в області Ω , при цьому потрапляння точки в область Ω є достовірною подією, а в підобласті D – випадковою подією. Вважається, що всі точки області Ω рівноправні (всі елементарні події однаково можливі), і точка кидання може влучити в будь-яку точку з цієї області Ω , а ймовірність влучити в область D пропорційна площі цієї області, незалежно від її розташування та форми. Нехай подія $A = X \in D$, тобто точка кидання, потрапляє в область D . Геометрична ймовірність події A – це відношення площі області D до площі цієї області Ω , тобто:

$$P(A) = \frac{S_D}{S_\Omega}.$$

Геометричне визначення ймовірності події також застосовне у випадках, коли площі є лінійними або об'ємні. Тоді відповідні ймовірності визначаються рівняннями:

$$P(A) = \frac{l_D}{L_\Omega}, \quad P(A) = \frac{V_D}{V_\Omega},$$

де l – довжина, V – об'єм області. Об'єднуючи всі три формули можна сформулювати наступне загальне визначення.

Геометрична ймовірність події A називається відношення міри області D , що сприяють появі події A до міри всієї області Ω .

Приклад 4.3. На площині накреслено два концентричні кола, радіуси яких відповідно 5 і 10 см. Знайти ймовірність того, що точка, підкинута навдачу у велике коло, потрапляє в кільце, утворене побудованими колами. Ймовірність потрапляння точки в плоску фігуру пропорційна площі цієї фігури і не залежить від її розташування відносно великого кола.

Розв'язання. Площа кільця (фігури g):

$$S_g = \pi(10^2 - 5^2) = 75\pi.$$

Площа великого кола (фігури G):

$$S_G = \pi 10^2 = 100\pi.$$

Шукана ймовірність дорівнює

$$p = \frac{75\pi}{100\pi} = 0,75.$$

Відповідь: ймовірність того, що точка, підкинута навдачу у велике коло, потрапляє в кільце, утворене побудованими колами, становить 0,75.

Пригадаймо основні правила операцій над подіями з використанням для наочності їх графічного зображення у вигляді діаграм Венна¹⁴.

Об'єднанням або **сумою** подій A_k називається подія A , яка означає появу хоча б однієї з подій A_k .

$$A \cup B \text{ або } A + B.$$

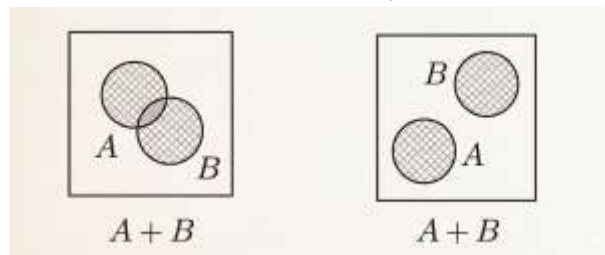


Рис. 4.2. Сума подій

Перетином або **добутком** подій A_k називається подія A , яка полягає в здійсненні **всіх** подій A_k .

$$A \cap B \text{ або } A \cdot B.$$

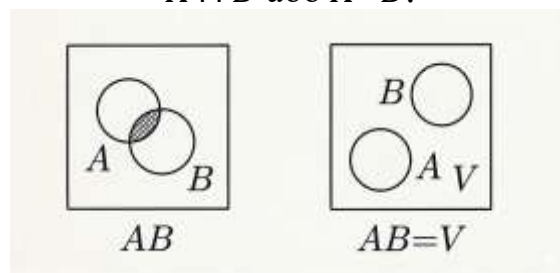


Рис. 4.3. Добуток подій

¹⁴ Англійський логік і математик Джон Венн (1834-1923) запропонував наглядно відобразити події у вигляді рисунків, які отримали назву «діаграми Венна».

Діаграма Венна являє собою квадрат зі сторонами, рівними одиниці. Подіям у цьому квадраті відповідають деякі замкнуті області. Якщо «кинута» довільним чином у площину квадрата точка (результат досліду) потрапляє у замкнуту область, то вважається, що подія відбулася, якщо не потрапить – подія не відбулася. Під терміном «кинута» розуміють, що для точки задаються довільні координати в межах від нуля до одиниці, що рівнозначно встановленню бортів сторонам квадрата, а кинута всередину кулька після багаторазових ударів об ці борти зайняла довільне місце, що заздалегідь не прогнозується, в площі квадрата.

Різницею подій A та B називається подія C , яка означає, що відбувається подія A , але не відбувається подія B .

$$C = A \setminus B.$$

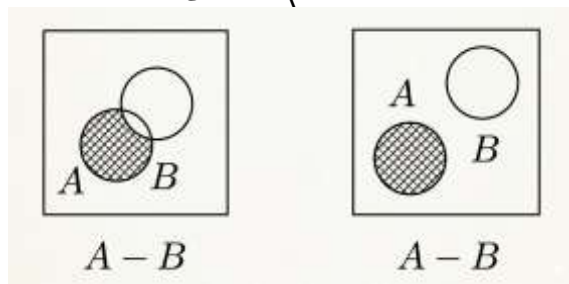


Рис. 4.4. Різниця подій

Ймовірність події є числом, навколо якого згруповано частоти цієї події, що спостерігаються в досліді. Тому аксіоми теорії ймовірностей вводяться так, щоб ймовірність події володіла основними властивостями частоти.

Аксіома 1. Кожній події відповідає певне число, що задовольняє умові $0 \leq P|A| \leq 1$ і називається його ймовірністю.

Аксіома 2. Ймовірність достовірної події дорівнює одиниці.

Аксіома 3. Ймовірність неможливої події дорівнює нулю.

Зазвичай в енергетиці доводиться вивчати ймовірності не простих випадкових подій, а складних випадкових подій, що є комбінаціями ряду простих (елементарних). Визначення ймовірності складної події через відомі значення ймовірності простих подій проводиться виходячи з так званих **законів ймовірності складних подій**. Для незалежних випадкових подій отримаємо наступні формулювання:

1) ймовірність виникнення хоча б однієї з двох випадкових незалежних і несумісних подій A і B дорівнює сумі ймовірностей цих подій (виникнення однієї з двох випадкових подій A і B символічно позначається їх сумою $A + B$):

$$P(A + B) = P(A) + P(B); \quad (4.1)$$

2) ймовірність виникнення хоча б однієї з двох незалежних і **сумісних** випадкових подій A і B може бути записана як

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB); \quad (4.2)$$

3) ймовірність одночасного виникнення двох несумісних подій A і B дорівнює нулю (одночасне виникнення двох подій A і B символічно позначається їх добутком AB):

$$P(AB) = 0. \quad (4.3)$$

4) ймовірність одночасного виникнення двох незалежних та сумісних подій дорівнює добутку їх ймовірностей:

$$P(AB) = P(A)P(B); \quad (4.4)$$

5) сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці. Подія $\bar{A}$, протилежна даній події A , і завжди не відбувається, якщо відбувається подія A , і завжди не відбувається, якщо подія A відбувається, тобто:

$$P(\bar{A}) + P(A) = 1. \quad (4.5)$$

Ймовірність протилежної події

$$P(A) = 1 - P(A) \quad (4.6)$$

4.2. Ймовірнісні моделі складних подій у роботі енергосистем

Розглянемо застосування вище зазначених законів у енергетиці. Аварійні пошкодження обладнання є випадковими подіями. У разі великої кількості агрегатів електростанцій та елементів мережі пошкодження одних пристроїв може поєднуватися з пошкодженням інших пристроїв. Виникає завдання визначення ймовірності одночасного пошкодження двох, трьох і більше пристроїв (агрегатів) або елементів мережі. У ряді випадків необхідно також визначати ймовірність того, що жодних пошкоджень в енергосистемі немає, оскільки ця величина характеризує надійність роботи всього обладнання. Ці завдання виникають зазвичай за необхідності вибору оптимального розв'язку задля забезпечення чи надійності роботи енергосистеми (вибір оптимального резерву потужності), або надійності живлення окремих споживачів (вибір оптимальної схеми електропостачання споживача), чи стійкості енергосистеми (вибір оптимального рівня стійкості).

У всіх цих випадках окремі ушкодження розглядаються як незалежні та сумісні випадкові події. Ймовірність кожної з них може бути визначена як статистична ймовірність на основі тривалого спостереження за аварійністю даного або однотипного обладнання. Для ілюстрації визначення можливості складних подій розглянемо приклади.

Приклад 4.4. Визначити ймовірність пошкодження енергетичного блоку, що представляє собою послідовне з'єднання парового котла з паровою турбіною та електричним генератором. Парова турбіна отримує всю пару від парового котла. Генератор розташований на одному валу з турбіною, тобто використовує всю її потужність. Ймовірності пошкодження окремих елементів блоку відомі: для $q_k = 0,02$; $q_t = 0,01$; $q_g = 0,001$ для котла, турбіни та генератора відповідно.

Розв'язання. Очевидно, що аварійний вихід із роботи всього блоку може мати місце при пошкодженні хоча б одного із трьох зазначених елементів блоку. Оскільки непошкодження є випадковою подією, протилежною до пошкодження, то ймовірності непошкодження елементів блоку:

$$p_k = 1 - 0,02 = 0,98; \quad p_t = 1 - 0,01 = 0,99; \quad p_g = 1 - 0,001 = 0,999.$$

Знайдемо ймовірність того, що всі елементи блоку не пошкоджені, тобто блок працює коректно. Оскільки аварійність кожного елемента вважатиметься незалежною від інших елементів, то ймовірність того, що всі три елементи не пошкоджені, тобто ймовірність роботи блоку

$$p_{\text{бл}} = p_k p_t p_g = 0,98 \cdot 0,99 \cdot 0,999 = 0,9692298.$$

Пошкодження блоку з будь-якої причини є подією, протилежною до непошкодження блоку, тому ймовірність пошкодження блоку

$$q_{\text{бл}} = 1 - 0,9692298 = 0,0307702.$$

Можна визначити цю величину, якщо розглянути всі окремі випадки (їх може бути лише сім) пошкодження елементів блоку: а) котла; б) турбіни;

в) генератора; г) котла та турбіни; д) котла та генератора; с) турбіни та генератора; ж) котла, турбіни та генератора.

Знайдемо ймовірність кожного з цих окремих випадків пошкодження блоку, виходячи з формул (4.4) і (4.6):

а) ймовірність пошкодження котла,

$$0,02 \cdot 0,99 \cdot 0,999 = 0,0197802.$$

Було б неправильним вважати, що ймовірність пошкодження тільки котла дорівнює 0,02, оскільки до числа подій «пошкодження котла» увійшли б події одночасного пошкодження котла та інших елементів.

У випадку а) інтерес представляє пошкодження тільки котла при справному стані інших елементів. Саме тому 0,02 множиться на 0,99 та 0,999;

б) ймовірність пошкодження турбіни

$$0,98 \cdot 0,01 \cdot 0,999 = 0,0097902.$$

Аналогічно отримаємо ймовірність для решти випадків:

$$\text{в) } 0,98 \cdot 0,99 \cdot 0,001 = 0,0009702;$$

$$\text{г) } 0,02 \cdot 0,01 \cdot 0,999 = 0,0001998;$$

$$\text{д) } 0,02 \cdot 0,99 \cdot 0,001 = 0,0000198;$$

$$\text{е) } 0,98 \cdot 0,01 \cdot 0,001 = 0,0000098;$$

$$\text{ж) } 0,02 \cdot 0,01 \cdot 0,001 = 0,0000002.$$

Якщо додати ймовірності для всіх семи випадків, то вийде ймовірність пошкодження блоку 0,0307702. Як видно, для визначення ймовірності пошкодження блоку перший шлях набагато простіше і потребує менше розрахунків. Проте другий спосіб дозволяє не тільки отримати величину загальної ймовірності пошкодження блоку, але й проаналізувати ймовірність різних причин пошкодження блоку.

Відповідь: найбільше значення має ймовірність пошкодження котла, а потім – турбіни. Ймовірність цих двох випадків становить 0,0295704 із загальної ймовірності 0,0307702.

Практичне значення отриманих результатів полягає у можливості кількісно оцінити вплив кожного вузла на загальну аварійність. Це є підґрунтям для оптимізації графіків планово-запобіжних ремонтів та формування резерву запасних частин.

Приклад 4.5. Споживач живиться через двопровідну лінію електропередачі. Ймовірність пошкодження та виходу з ладу кожного проводу становить $q = 0,001$. За допомогою будь-якого з проводів споживач може отримати всю необхідну йому потужність. Якою є ймовірність збереження електропостачання даного споживача?

Розв'язання. Споживач втрачає електропостачання лише у разі аварійного виходу обох живильних кіл. Ймовірність цього становить $0,001 \cdot 0,001 = 0,000001$. Ймовірність збереження живлення, тобто надійність енергопостачання, за (4.6) дорівнює

$$1 - 0,000001 = 0,999999.$$

Якщо одним ланцюгом може бути передано тільки 50% потужності, то ймовірність передачі тільки 50% потужності можна визначити так.

Імовірність виходу з ладу першого ланцюга за працездатності другого дорівнює

$$0,001 \cdot 0,999 = 0,000999,$$

де другий множник відповідає ймовірності працездатності другого ланцюга.

Імовірність виходу з ладу другого ланцюга за працездатності першого становить

$$0,999 \cdot 0,001 = 0,000999.$$

Сумарна ймовірність виходу з ладу лише одного ланцюга визначиться як сума обох ймовірностей, тобто 0,001998.

Імовірність збереження повного навантаження, очевидно, дорівнює

$$0,999 \cdot 0,999 = 0,998001,$$

а ймовірність повної втрати живлення дорівнює

$$0,001 \cdot 0,001 = 0,000001.$$

Зауважимо, що сума ймовірностей збереження повного навантаження, збереження 50% навантаження та повної втрати живлення дорівнює одиниці, оскільки ці події становлять повну групу несумісних подій:

$$0,998001 + 0,001998 + 0,000001 = 1.$$

Відповідь: імовірність збереження повного навантаження становить 0,998001.

Розглянемо ймовірність залежних випадкових подій. Нехай події A і B є залежними, тобто, ймовірність однієї з цих подій змінюється, якщо відбувається інша подія [18]. Для оцінки цього вводиться поняття умовної ймовірності.

Умовною ймовірністю події A за B називається ймовірність події A , якщо відбувається подія B . Вона позначається через $P\{A/B\}$.

Основні закони для взаємозалежних випадкових подій формулюються таким чином:

1) *умовна ймовірність події A по B при їх сумісності та взаємозалежності дорівнює відношенню ймовірності одночасного настання подій A і B до ймовірності події B :*

$$P\{A/B\} = P(AB)/P(B), \quad (4.7)$$

причому $P(AB)$ у цьому випадку не дорівнює $P(A) \cdot P(B)$;

2) *ймовірність одночасного настання двох взаємозалежних і сумісних подій, як це впливає з (4.7), дорівнює добутку умовної ймовірності першої події по другій на ймовірність другої події:*

$$P(AB) = P(A/B) P(B) \quad (4.8)$$

Взаємозалежними подіями в енергетиці є, наприклад, пошкодження окремих фаз передачі лінії. При пошкодженні однієї фази лінії передачі в мережі з незаземленою нейтраллю напруги інших фаз зростають у $\sqrt{3}$ разів, що збільшує ймовірність пошкодження інших фаз. Але навіть у мережі із заземленою нейтраллю, де підвищення напруги на інших фазах не відбувається, іонізація повітря, обумовлена коротким замиканням однією фази, сприяє перекриттю інших фаз. Якщо вихідне ушкодження однієї фази є незалежною випадковою подією, то одночасне ушкодження фаз у тому місці є залежною випадковою подією.

Приклад 4.6. Статистична ймовірність пошкодження будь-якої фази лінії становить 0,001. Умовна ймовірність пошкодження другої фази при пошкодженні першої дорівнює 0,2. Аналогічні ймовірності пошкодження третьої фази при пошкодженні двох інших становлять 0,5. Визначити співвідношення ймовірностей одно-, дво- та трифазних коротких замикань за умови, що аварія почалася з пошкодження однієї фази.

Розв'язання. Ймовірність аварійного ушкодження двох фаз згідно (4.8)
 $p' = 0,2 \cdot 0,001 = 0,0002$.

Ймовірність аварійного пошкодження трьох фаз

$$p'' = 0,5 \cdot 0,0002 = 0,0001.$$

Визначимо умовні ймовірності розвитку аварії, тобто умовні ймовірності пошкодження інших фаз. Нехай статистичні спостереження встановили, що однофазних коротких замикань у цій мережі за деякий період часу було 100, а в 20 випадках їх пошкодилася й інша фаза. Тоді на підставі формули (4.7) можна отримати умовну ймовірність пошкодження й іншої фази:

$$P(A/B) = P(AB)/P(B) = 20/100 = 0,2,$$

оскільки число аварій вважатимуться пропорційним ймовірності.

Співвідношення ймовірностей одно-, дво- та трифазних коротких замикань за умови, що аварія почалася з пошкодження однієї фази (0,001), розподіляється так:

1. Залишилося однофазним: $0,001 - 0,0002 = 0,0008$ (або 80%, якщо рахувати від початкових коротких замикань).
2. Переросло у двофазне (але не в трифазне): $0,0002 - 0,0001 = 0,0001$ (або 10%).
3. Переросло у трифазне: 0,0001 (або 10%).

Відповідь: співвідношення ймовірностей одно-, дво- та трифазних ушкоджень становлять 0,001; 0,0002; 0,0001 або приблизно 80% однофазних, 10% двофазних і 10% трифазних.

При великій кількості однотипних агрегатів в електричній системі ймовірності пошкодження різного числа агрегатів можуть бути визначені за **біноміальною формулою ймовірності для схеми незалежних випробувань (схема Бернуллі)**.

У багатьох практичних випадках при багаторазових незалежних випробуваннях може бути лише два результати: випадкова подія A відбудеться чи не відбудеться. Нехай ймовірність того, що у кожному з цих незалежних випробувань подія A відбудеться, дорівнює p , де p -статистична ймовірність. Тоді ймовірність протилежної події (подія A не відбувається):

$$q = 1 - p.$$

Знаючи p або q , можна визначити ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях подія A , наприклад, пошкодження агрегату, трапиться m разів. Позначимо цю можливість через P_n^m . Вона дорівнює, добутку числа комбінацій з n по m на ймовірність події ступенем m і протилежну ймовірність степеня $(n - m)$:

$$P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m} \quad (4.9)$$

Вираз (4.9) називається *формулою біноміального розподілу*. Вочевидь, що

$$\sum_{m=0}^n P_n^m = 1, \quad (4.10)$$

оскільки ця сума охоплює всі можливі події (m варіюється від 0 до n).

Формулу (4.9) можна отримати також, міркуючи наступним чином. Розглянемо вираз $(q + p)^n$. Він, очевидно, дорівнює одиниці, оскільки $(q + p) = 1$. Розкладаючи n -у степінь бінома $(q + p)$ в ряд за відомим законом, отримаємо:

$$(q + p)^n = q^n + nq^{n-1}p + C_n^2 q^{n-2}p^2 + \dots + C_n^m q^{n-m}p^m + \dots + p^n = 1. \quad (4.11)$$

Неважко зрозуміти зміст членів розкладання. Перший член q^n відповідає ймовірності того, що в n випробуваннях подія А не відбудеться жодного разу, тобто дорівнює P^0 ; другий член – ймовірності того, що в n випробуваннях подія А відбудеться тільки один раз; тобто дорівнює P_n^1 . Справді, ймовірність того, що подія відбудеться при якомусь одному певному випробуванні, буде pq^{n-1} , а ймовірність того, що подія відбудеться при якомусь одному випробуванні, в n разів більше тощо. Член розкладання $(m + 1)$ -й, що відповідає ймовірності того, що подія відбувається m разів, дорівнює $C_n^m q^{n-m}p^m$, тобто, P_n^m в (4.9).

Замість різних випробувань розглянемо різні однотипні агрегати, припускаючи, що ймовірність аварійного стану кожного з агрегатів однакова і дорівнює q .

Приклад 4.7. В енергосистемі є група однотипних агрегатів (наприклад, котлів або турбін), що знаходяться в абсолютно однакових умовах; ймовірність справного стану агрегату дорівнює p , а ймовірність протилежної події, тобто несправного стану агрегату (аварійного ремонту), дорівнює q . Знайдемо ймовірність робочого стану m агрегатів у складі n , причому m змінюється від 0 до n . Розв'язати приклад у загальному вигляді та розглянути випадок, коли в кожній групі знаходиться по 5 агрегатів із ймовірністю відмови $q = 0,02$.

Розв'язання. Неважко переконатися у тому, що розкладання за (4.11) визначає потрібний ряд ймовірностей. Справді, q^n – це, очевидно, ймовірність того, що всі агрегати пошкоджені і кількість працездатних агрегатів дорівнює нулю; npq^{n-1} – ймовірність того, що тільки один агрегат знаходиться в робочому стані:

$$C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}$$

– ймовірність робочого стану агрегатів; p^n – ймовірність того, що всі агрегати знаходяться в справному стані¹⁵.

Якщо визначати ймовірність не робочого стану, а аварійного ушкодження різного числа агрегатів, то доцільно записати той самий ряд у порядку:

$$(p + q)^n = p^n + np^{n-1}q + C_n^2 p^{n-2}q^2 + \dots + C_n^m p^{n-m}q^m + \dots + q^n = 1,$$

¹⁵ Коефіцієнти C_n^m (числа 1, 5, 10, 10, 5, 1) беруться з трикутника Паскаля або розраховуються як комбінації.

де $(m + 1)$ -й член визначає ймовірність виходу з роботи m агрегатів, рівну $C_n^m p^{n-m} q^m$.

Якщо $n=5$, $q=0,02$ і $p=1-0,02=0,98$, то ймовірність відсутності аварійних виходів становить $p^n=0,985=0,905$. Ймовірність аварії з одним агрегатом $np^{n-1}q = 5 \cdot 0,98^4 \cdot 0,02 = 0,0923$

тощо.

Кількість працюючих агрегатів	Розрахунок	Ймовірність
5 (всі в роботі)	$1 \cdot 0,98^5 \cdot 0,02^0$	0,903900000
4 (один в ремонті)	$5 \cdot 0,98^4 \cdot 0,02^1$	0,092236816
3 (два в ремонті)	$10 \cdot 0,98^3 \cdot 0,02^2$	0,003764768
2 (три в ремонті)	$10 \cdot 0,98^2 \cdot 0,02^3$	0,000076832
1 (чотири в ремонті)	$5 \cdot 0,98^1 \cdot 0,02^4$	0,000000784
0 (всі в ремонті)	$1 \cdot 0,98^0 \cdot 0,02^5$	0,000000003

Визначимо ймовірність виходу з ладу будь-якої кількості агрегатів в енергосистемі. Якщо в системі є п'ять груп однотипних агрегатів з числом агрегатів $n_1 - n_5$ і ймовірностями пошкодження агрегатів $q_1 - q_5$, то ймовірність будь-яких комбінацій одночасних пошкодження агрегатів можна знайти з розкладання виразу

$$(p_1 + q_1)^{n_1} (p_2 + q_2)^{n_2} (p_3 + q_3)^{n_3} (p_4 + q_4)^{n_4} (p_5 + q_5)^{n_5} = 1.$$

Так, наприклад, ймовірність аварійного виходу двох агрегатів 1-ї групи, одного агрегату 3-ї групи та одного агрегату 5-ї групи дорівнює

$$\left[\frac{n_1(n_1 - 1)}{1 \cdot 2} p_1^{n_1-2} q_1^2 \right] p_2^{n_2} [n_3 p_3^{n_3-1} q_3] p_4^{n_4} [n_5 p_5^{n_5-1} q_5].$$

У випадку, коли в кожній групі по 5 агрегатів із ймовірністю відмови $q = 0,02$, ймовірність такого складного пошкодження (одночасно 4 агрегати в різних вузлах системи) становитиме:

$$P \approx 2,6 \cdot 10^{-5}.$$

Тобто, подібна аварійна ситуація може виникнути в середньому один раз на 38000 днів (понад 100 років) постійної експлуатації. Це математично підтверджує, що при розрахунках надійності енергосистем події з одночасною відмовою великої кількості обладнання в різних вузлах можна вважати практично неможливими та не враховувати при формуванні резерву потужності.

Це дозволяє при проектуванні енергосистем не враховувати одночасні відмови великої кількості обладнання в різних групах, обмежуючись лише критерієм одиночної відмови $(N - 1)$.

Відповідь: ймовірність аварійного виходу двох агрегатів 1-ї групи, одного агрегату 3-ї групи та одного агрегату 5-ї групи при справній роботі 2-ї та 4-ї груп становитиме близько 0,00002621 (0,00262%).

Алгоритм розрахунок складних подій в енергосистемах (паралельне та послідовне резервування).

1. Аналіз логічного зв'язку:

- якщо для відмови системи достатньо відмови хоча б одного елемента (послідовна схема) – це операція суми подій;
- якщо для відмови системи потрібна одночасна відмова всіх елементів (паралельна схема) – це операція добутку подій.

2. Визначення сумісності та залежності:

- перевірити, чи можуть події відбутися одночасно (сумісність);
- визначити, чи впливає відмова одного агрегату на ймовірність відмови іншого (залежність).

3. Вибір математичної моделі:

для незалежних подій (добуток):

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B);$$

для сумісних подій (сума): використати формулу (4.2):

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB);$$

через протилежні події (найчастіший випадок): якщо подій багато, ймовірність появи хоча б однієї обчислюється як:

$$P(A) = 1 - (q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n),$$

де q – ймовірність безвідмовної роботи.

4. *Прийняття рішення:* на основі отриманого P зробити висновок про необхідність додаткового резервування в мережі.

Якщо відбувається велике число дослідів, то обчислення ймовірності за формулою Бернуллі стає технічно складним, оскільки формула вимагає дій над великими числами. Тому існують простіші наближені формули для обчислення ймовірностей при великих n . Ці формули називаються асимптотичними і визначаються теоремою Пуассона, локальною та інтегральною теоремою Лапласа.

Локальна теорема Муавра-Лапласа. Якщо ймовірність настання події A в кожному досліді постійна і відмінна від 0 та 1, то ймовірність того, що подія A відбудеться m разів в n дослідах при достатньо великому числі n ($n \rightarrow \infty$), наближено дорівнює:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot f(x),$$

де функція $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2}$, а аргумент $x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$.

Чим більше n , тим точніше обчислення ймовірностей. Тому локальну теорему Муавра-Лапласа доцільно застосовувати при $npq \geq 20$.

Для знаходження значень функції $f(x)$ складені спеціальні таблиці (табл. 4.1) та існують властивості функції $f(x)$:

- 1) функція $f(x)$ є парною $f(-x) = f(x)$;
- 2) при $x \rightarrow \infty$ функція $f(x) \rightarrow 0$. Практично можна вважати, що уже при $x > 4$ функція $f(x) \approx 0$.

Таблиця 4.1. Таблиця значень функції $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1513
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0043
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Приклад 4.8. Знайти ймовірність того, що подія A відбудеться 80 разів в 400 дослідах, якщо ймовірність появи події A в кожному досліді дорівнює $p = 0,2$.

Розв'язання. За умовою $n = 400, m = 80, p = 0,2, q = 0,8$. Отже:

$$P_{400}(80) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} \cdot f(x) = \frac{1}{8} \cdot 0,3989 = 0,04986;$$

$$x = \frac{80 - 400 \cdot 0,2}{8} = 0.$$

За **табл. 4.1** визначаємо значення функції $f(0) = 0,3989$.

Відповідь: ймовірність того, що подія A відбудеться 80 разів в 400 дослідах становить 0,3989.

Інтегральна теорема Муавра-Лапласа. Якщо ймовірність настання події A в кожному досліді постійна та відмінна від 0 і 1, то ймовірність того, що подія A відбудеться від m_1 до m_2 разів в n дослідах при достатньо великому числі n ($n \rightarrow \infty$), наближено дорівнює:

$$P_n(m_1, m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-x^2/2} dx$ – інтеграл або функція Лапласа, $x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Для знаходження значень функції $\Phi(x)$ складено спеціальні таблиці (**табл. 4.2**). При використанні таблиці слід пам'ятати властивості функції Лапласа $\Phi(x)$:

- 1) функція $\Phi(x)$ є непарною $\Phi(-x) = -\Phi(x)$;
- 2) при $x \rightarrow \infty$ функція $\Phi(x) \rightarrow 0,5$. Практично можна вважати, що уже при $x > 5$ функція $\Phi(x) \approx 0,5$;
- 3) $\Phi(0) = 0$.

Таблиця 4.2. Таблиця значень функції Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-x^2/2} dx$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,42	0,1628	0,84	0,2995	1,26	0,3969
0,01	0,0040	0,43	0,1664	0,85	0,3023	1,27	0,3980
0,02	0,0080	0,44	0,1700	0,86	0,3051	1,28	0,3997
0,03	0,0120	0,45	0,1736	0,87	0,3078	1,29	0,4015
0,04	0,0160	0,46	0,1772	0,88	0,3106	1,30	0,4032
0,05	0,0199	0,47	0,1808	0,89	0,3133	1,31	0,4049
0,06	0,0239	0,48	0,1844	0,90	0,3159	1,32	0,4066
0,07	0,0279	0,49	0,1879	0,91	0,3186	1,33	0,4082
0,08	0,0319	0,50	0,1915	0,92	0,3212	1,34	0,4099
0,09	0,0359	0,51	0,1950	0,93	0,3238	1,35	0,4115
0,10	0,0398	0,52	0,1985	0,94	0,3264	1,36	0,4131
0,11	0,0438	0,53	0,2019	0,95	0,3289	1,37	0,4147
0,12	0,0478	0,54	0,2054	0,96	0,3315	1,38	0,4162
0,13	0,0517	0,55	0,2088	0,97	0,3340	1,39	0,4177
0,14	0,0557	0,56	0,2123	0,98	0,3365	1,40	0,4192
0,15	0,0596	0,57	0,2157	0,99	0,3389	1,41	0,4207
0,16	0,0636	0,58	0,2190	1,00	0,3413	1,42	0,4222
0,17	0,0675	0,59	0,2224	1,01	0,3438	1,43	0,4236
0,18	0,0714	0,60	0,2257	1,02	0,3461	1,44	0,4251
0,19	0,0753	0,61	0,2291	1,03	0,3485	1,45	0,4265
0,20	0,0793	0,62	0,2324	1,04	0,3508	1,46	0,4279
0,21	0,0832	0,63	0,2357	1,05	0,3531	1,47	0,4292
0,22	0,0871	0,64	0,2389	1,06	0,3554	1,48	0,4306

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,23	0,0910	0,65	0,2422	1,07	0,3577	1,49	0,4319
0,24	0,0948	0,66	0,2454	1,08	0,3599	1,50	0,4332
0,25	0,0987	0,67	0,2486	1,09	0,3621	1,51	0,4345
0,26	0,1026	0,68	0,2517	1,10	0,3643	1,52	0,4357
0,27	0,1064	0,69	0,2549	1,11	0,3665	1,53	0,4370
0,28	0,1103	0,70	0,2580	1,12	0,3686	1,54	0,4382
0,29	0,1141	0,71	0,2611	1,13	0,3708	1,55	0,4394
0,30	0,1179	0,72	0,2642	1,14	0,3729	1,56	0,4406
0,31	0,1217	0,73	0,2673	1,15	0,3749	1,57	0,4418
0,32	0,1255	0,74	0,2703	1,16	0,3770	1,58	0,4429
0,33	0,1293	0,75	0,2734	1,17	0,3790	1,59	0,4441
0,34	0,1331	0,76	0,2764	1,18	0,3810	1,60	0,4452
0,35	0,1368	0,77	0,2794	1,19	0,3830	1,61	0,4463
0,36	0,1406	0,78	0,2823	1,20	0,3849	1,62	0,4474
0,37	0,1443	0,79	0,2852	1,21	0,3869	1,63	0,4484
0,38	0,1480	0,80	0,2881	1,22	0,3883	1,64	0,4495
0,39	0,1517	0,81	0,2910	1,23	0,3907	1,65	0,4505
0,40	0,1554	0,82	0,2939	1,24	0,3925	1,66	0,4515
0,41	0,1591	0,83	0,2967	1,25	0,3944	1,67	0,4525
1,68	0,4535	1,91	0,4719	2,28	0,4887	2,74	0,4969
1,69	0,4545	1,92	0,4726	2,30	0,4893	2,76	0,4971
1,70	0,4554	1,93	0,4732	2,32	0,4898	2,78	0,4973
1,71	0,4564	1,94	0,4738	2,34	0,4904	2,80	0,4974
1,72	0,4573	1,95	0,4744	2,36	0,4909	2,82	0,4976
1,73	0,4582	1,96	0,4750	2,38	0,4913	2,84	0,4977
1,74	0,4591	1,97	0,4756	2,40	0,4918	2,86	0,4979
1,75	0,4599	1,98	0,4761	2,42	0,4922	2,88	0,4980
1,76	0,4608	1,99	0,4767	2,44	0,4927	2,90	0,4981
1,77	0,4616	2,00	0,4772	2,46	0,4931	2,92	0,4982
1,78	0,4625	2,02	0,4783	2,48	0,4934	2,94	0,4984
1,79	0,4633	2,04	0,4793	2,50	0,4938	2,96	0,4985
1,80	0,4641	2,06	0,4803	2,52	0,4941	2,98	0,4986
1,81	0,4649	2,08	0,4812	2,54	0,4945	3,00	0,49865
1,82	0,4656	2,10	0,4821	2,56	0,4948	3,20	0,49931
1,83	0,4664	2,12	0,4830	2,58	0,4951	3,40	0,49966
1,84	0,4671	2,14	0,4838	2,60	0,4953	3,60	0,499841
1,85	0,4678	2,16	0,4846	2,62	0,4956	3,80	0,499928
1,86	0,4686	2,18	0,4854	2,64	0,4959	4,00	0,499968
1,87	0,4693	2,20	0,4861	2,66	0,4961	4,50	0,499997
1,88	0,4699	2,22	0,4868	2,68	0,4963	5,00	0,499997
1,89	0,4706	2,24	0,4875	2,70	0,4965		
1,90	0,4713	2,26	0,4881	2,72	0,4967		

Приклад 4.9. Ймовірність того, що деталь не пройшла перевірку, дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що серед 400 деталей виявиться неперевіраних від 70 до 100 деталей.

Розв'язання. За умовою $n = 400, m_1 = 70, m_2 = 100, p = 0,2, q = 0,8$.
Отже:

$$x_1 = \frac{70 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = -1,25, x_2 = \frac{100 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = 2,5.$$

За **табл. 4.2**, в якій наведено значення функції Лапласа, визначаємо:

$$\Phi(x_1) = \Phi(-1,25) = -\Phi(1,25) = -0,3944;$$

$$\Phi(x_2) = \Phi(2,5) = 0,4938.$$

Тоді:

$$P_{400}(70,100) \approx \Phi(2,5) - \Phi(-1,25) = 0,4938 - (-0,3944) = 0,8882.$$

Відповідь: ймовірність того, що серед 400 деталей виявиться неперевірених від 70 до 100 деталей становить 0,8882.

Теорема Пуассона. Якщо ймовірність p події A в кожному досліді прямує до нуля при $n \rightarrow \infty$, то ймовірність того, що подія A відбудеться m разів в n дослідях, може бути розрахована за формулою Пуассона:

$$P_n(m) \approx P(\lambda) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!},$$

де $P(\lambda)$ – функція Пуассона; $m = 0, 1, 2, \dots, m, \dots n$; $\lambda = np$.

Значення $P(\lambda)$ можна визначити за таблицями значень функції Пуассона в залежності від λ і m (**табл. 4.3**).

Приклад 4.10. Завод відправив на базу 5000 деталей. Ймовірність пошкодження деталі в дорозі дорівнює 0,0002. Знайти ймовірність того, що на базу прибудуть: а) три пошкоджені деталі; б) 4997 непошкоджених деталей.

Розв'язання. а) За умовою $n = 5000, m = 3, p = 0,0002$, $\lambda = 5000 \cdot 0,0002 = 1 < 10$. Отже:

$$P_{5000}(3) \approx P(1) = \frac{1^3 \cdot e^{-1}}{3!} \approx 0,06.$$

б) У даному випадку $n = 5000, m = 4997, p = 1 - 0,0002 = 0,9998$. Для обчислення ймовірності $P_{5000}(4997)$ неможна застосовувати ні формулу Пуассона (p велике, $\lambda = 5000 \cdot 0,9998 = 4999 > 10$), ні локальну теорему Муавра-Лапласа ($npq = 10 < 20$). Однак подія «не пошкоджено 4997 з 5000» рівнозначна «пошкоджено 3 з 5000». Ймовірність останньої події обчислена в а).

Таблиця 4.3. Таблиця значень функції Пуассона $P(\lambda) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$

m	λ								
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066
1	0905	1638	2222	2681	3033	3293	3476	3595	3659
2	0045	0164	0333	0536	0758	0988	1217	1438	1647
3	0002	0019	0033	0072	0126	0198	0284	0383	0494
4		0001	0002	0007	0016	0030	0050	0077	0111
5				0001	0002	0004	0007	0012	0020
6							0001	0002	0003

Продовження **табл. 4.3**

m	λ									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0,3679	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001	0,0000
1	3679	2707	1494	0733	0337	0149	0064	0027	0011	0005
2	1839	2707	2240	1465	0842	0446	0223	0107	0050	0023
3	0613	1804	2240	1954	1404	0892	0521	0286	0150	0076

m	λ									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	0153	0902	1680	1954	1766	1339	0912	0572	0337	0189
5	0031	0361	1008	1563	1755	1606	1377	0916	0607	0378
6	0005	0120	0504	1042	1462	1606	1490	1221	0911	0631
7	0001	0037	0216	0595	1044	1377	1490	1396	1171	0901
8		0009	0081	0298	0653	1033	1304	1396	1318	1126
9		0002	0027	0132	0363	0688	1014	1241	1318	1251
10			0008	0053	0181	0413	0710	0993	1186	1251
11			0002	0019	0082	0225	0452	0722	0970	1137
12			0001	0006	0034	0126	0263	0481	0728	0948
13				0002	0013	0052	0142	0296	0504	0729
14				0001	0005	0022	0071	0169	0324	0521
15					0002	0009	0033	0090	0194	0347
16						0003	0014	0045	0109	0217
17						0001	0006	0021	0058	0128
18							0002	0009	0029	0071
19							0001	0004	0014	0037
20								0002	0006	0019
21								0001	0003	0009
22									0001	0004
23										0002
24										0001

Відповідь: ймовірність того, що на базу прибудуть три пошкоджені деталі становить 0,06; б) 4997 непошкоджених деталей – 0,06.

4.3. Випадкові величини. Закони розподілу випадкових величин

До випадкових величин в енергетиці відносяться такі важливі параметри режиму, як попит електричної потужності та енергії, відхилення частоти і напруги в електричних мережах від номінальних значень, потужність електростанцій, потужність агрегатів в аварійному ремонті, тривалості безаварійної роботи та аварійного ремонту окремих агрегатів, натиск на гідроелектричних тощо. Знання закономірностей зміни цих випадкових величин необхідно як при проєктуванні, так і при експлуатації енергетичних систем. Основою для вивчення є статистичний матеріал і методи теорії ймовірності.

Перш ніж розглядати випадкові величини в енергетиці, зупинимося на методах опису їх закономірностей.

Випадкові величини можна розділити на два класи: дискретні та безперервні.

Дискретна випадкова величина може набувати лише дискретних значень, наприклад, число агрегатів, що вийшли аварійно з роботи. Це в обмеженому інтервалі є кінцевим. Значення безперервних випадкових величин можуть змінюватися безперервно, тобто навіть у обмежених інтервалах такі величини можуть мати нескінченно велике число значень, наприклад – помилка прогнозування сумарного попиту потужності. Для дискретних випадкових величин розподіл ймовірностей різних їх значень може бути найпростіше задано

за допомогою таблиць розподілу, в яких у верхньому рядку вказуються всі значення, яких набуває дана дискретна випадкова величина, а в нижній – ймовірності відповідних їй значень. Очевидно, що сума ймовірностей повинна дорівнювати одиниці, якщо дана випадкова величина завжди набуває одного з можливих значень.

Безперервна випадкова величина може набувати будь-якого значення з деякого інтервалу. Навіть у межах обмеженого інтервалу вона має нескінченно багато можливих значень. Прикладом є помилка прогнозування сумарного попиту потужності або миттєве значення напруги. Для безперервних випадкових величин розподіл задається не таблицею, а функцією густини ймовірності, інтеграл якої на всій області визначення дорівнює одиниці.

Приклад 4.11. Енергетична система включає чотири однотипні генератори. Ймовірність аварійного виходу кожного з них дорівнює $q=0,02$. Знайти ймовірності одночасного виходу з ладу декількох генераторів.

Розв’язання. Оскільки ймовірність аварійного виходу кожного з генераторів дорівнює $q=0,02$, то ймовірність робочого стану $p=1-0,02=0,98$. Випадковою величиною вважатимемо число агрегатів m , що вийшли в аварію. Ця величина є дискретною і може набувати значення 0, 1, 2, 3, 4.

Користуючись формулою біноміального розподілу, можна знайти ймовірність виходу з роботи агрегатів

$$P_n^m = C_n^m p^n - m q^m.$$

Виконавши підрахунок за цією формулою, отримаємо таблицю розподілу ймовірностей випадкової величини – числа аварійних агрегатів:

Число аварійних агрегатів m	0	1	2	3	4
Ймовірність	0,92237	0,07530	0,00230	0,00003	0,00000

Відповідь: сума ймовірностей дорівнює 1 ($0,92237+0,07530+0,00230+0,00003+0,00000=1$), що підтверджує правильність розрахунку повної групи подій. Найімовірнішим станом системи є відсутність аварій ($P = 0,922$), а ймовірність виходу з ладу більше ніж двох генераторів одночасно є практично рівною нулю, що дозволяє енергосистемі працювати стабільно за наявності невеликого резерву.

Випадкова величина може набувати різні значення, тому важливо знати її середнє значення. Однак, якщо відома сукупність значень випадкової величини, то просто середнє значення, яке визначається як сума можливих значень, розділена на їх число, ще не характеризує дійсні умови. Усі різні значення випадкової величини можуть мати різні значення, і тому вірогідні значення будуть частіше зустрічатися на практиці та в більшій мірі визначити більш справжнє середнє значення випадкової величини. Тому для оцінки середнього (у ймовірному сенсі) значення випадкової величини вводиться поняття математичного сподівання, що представляє собою дійсно середнє значення

випадкової величини, що визначається з урахуванням різних ймовірностей окремих значень.

Якщо випадкова величина η набуває значень $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ з відповідними ймовірностями $p_1, p_2, \dots, p_k, \dots$, де $p_k = P(\eta = x_k)$, $p_k \geq 0$, $\sum_k x_k p_k = 1$, тоді **математичним сподіванням випадкової величини η** називається число

$$M(\eta) = \sum_k x_k p_k,$$

якщо цей ряд абсолютно збігається¹⁶.

Якщо випадкова величина η має щільність розподілу $f(x)$, тобто:

$$P(a \leq \eta \leq b) = \int_a^b f(x) dx, f(x) \geq 0, \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1,$$

тоді **математичним сподіванням η** називається число

$$M(\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx,$$

якщо цей інтеграл абсолютно збігається¹⁷.

Тобто, математичне сподівання – це середнє значення, яке отримали б при нескінченній кількості повторень експерименту (центр мас розподілу ймовірностей).

Основні властивості математичного сподівання:

- $M(c) = c$ для будь-якої сталої c .
- $M(c\eta) = cM(\eta)$.
- $M(\eta + \xi) = M(\eta) + M(\xi)$.
- Якщо η і ξ незалежні, то $M(\eta\xi) = M(\eta)M(\xi)$.

Визначимо математичне сподівання для випадкової дискретної величини. Нехай задані ймовірності різних значень випадкової дискретної величини:

Значення η	x_1	x_2	x_3
Ймовірність	p_1	p_2	p_3

Приймемо, що загальна кількість випробувань становить n , причому m_1 разів виходила величина x_1 , m_2 разів і так далі. Тоді математичне сподівання, що являє собою дійсне середнє значення випадкової величини,

$$M(\eta) = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots}{n} = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots,$$

оскільки ймовірності $p_1 = m_1/n$, $p_2 = m_2/n$ тощо.

Таким чином, для дискретної випадкової величини:

$$M(\eta) = \sum_k x_k p_k,$$

¹⁶ Ряд називається *абсолютно збіжним*, якщо збігається ряд із модулів його членів:

$$\sum_k |x_k p_k| < \infty.$$

¹⁷ Інтеграл називається *абсолютно збіжним*, якщо збігається інтеграл від абсолютного значення підінтегральної функції:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x) dx < \infty.$$

причому підсумовування відбувається за всіма значеннями дискретної величини x_k мають ймовірність p_k . Аналогічно для безперервної випадкової величини

$$M(\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)dx,$$

де $\varphi(x)$ – щільність ймовірності.

Тобто, для неперервних випадкових величин (таких як величина навантаження в мережі, рівень напруги або час роботи обладнання до відмови) неможливо визначити ймовірність для кожного окремого точкового значення, оскільки вона прямує до нуля. Тому використовують поняття **щільності ймовірності**.

Щільність ймовірності $\varphi(x)$ – це функція, яка характеризує концентрацію значень випадкової величини поблизу точки x . Математично вона визначається як похідна від функції розподілу $F(x)$:

$$\varphi(x) = F'(x) = \frac{dF(x)}{dx}.$$

Геометричний зміст щільності ймовірності. Ймовірність того, що випадкова величина X потрапить в інтервал від a до b , чисельно дорівнює **площі фігури** під кривою щільності на цьому проміжку:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \varphi(x)dx$$

Умова нормування: повна площа під всією кривою щільності завжди дорівнює 1 (оскільки це ймовірність достовірної події):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = 1.$$

В електроенергетиці щільність ймовірності використовується для:

- моделювання графіків навантаження (нормальний закон розподілу);
- опису часу між відмовами обладнання (експоненціальний закон);
- аналізу швидкості вітру для ВЕС (розподіл Вейбулла).

Нормальний розподіл використовується при виявленні ймовірності помилок прогнозування навантаження споживачів енергосистеми, відхилення навантаження енергосистеми та окремих її вузлів від середніх значень тощо. Біномінальний розподіл і розподіл за законом Пуассона застосовують при визначенні ймовірності різних значень аварійного зниження потужності в енергосистемі та аварійного виходу різного числа агрегатів у групі однотипних тощо. Рівномірний розподіл служить основним методом статистичних випробувань (метод Монте-Карло), що застосовується при визначенні резерву потужності, відмови в обробці автоматики тощо.

Через відсутність відповідних статистичних матеріалів не завжди можна задати таблиці розподілу ймовірностей для дискретних випадкових величин або функції розподілу та щільність розподілу ймовірностей для неперервних випадкових величин. Однак і для всіх практичних завдань не потрібно знати повні ймовірні характеристики випадкової величини. У багатьох достатньо знати

основні чисельні характеристики випадкової величини, до числа яких відносяться математичне сподівання, дисперсія, стандартне відхилення та моменти випадкової величини.

Нормальний розподіл. Неперервна випадкова величина X має нормальний розподіл, якщо її щільність розподілу ймовірності задається виразом:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

де a і σ – параметри розподілу, причому $a = M(X)$, $\sigma = \sigma(X)$.

Графік цієї функції називають **нормальною кривою** або **кривою Гаусса** (рис. 4.4). Вона має характерну дзвоноподібну форму та є симетричною відносно вертикальної прямої ($x = m$).

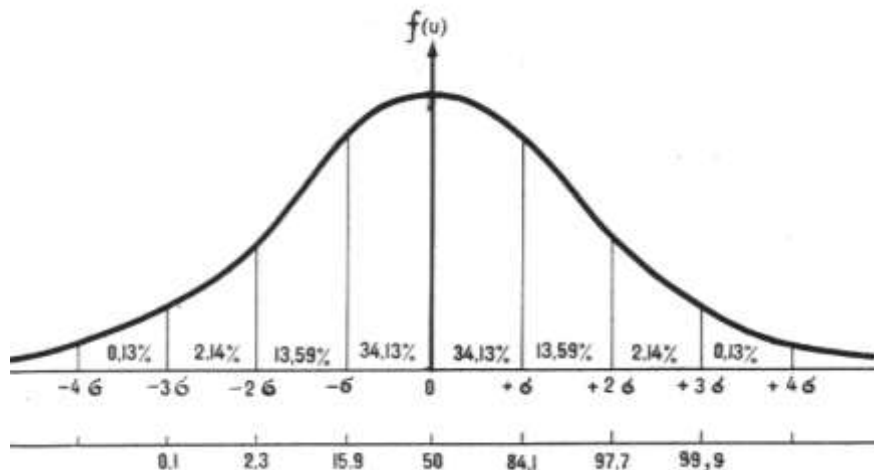


Рис. 4.4. Крива нормального розподілу

Нормально розподілена випадкова величина зі значеннями $m = 0$ та $\sigma = 1$ називається **нормованою**, а її щільність $\varphi(t)$ та функція Лапласа $\Phi(t)$ табульовані.

Ймовірність того, що нормально розподілена випадкова величина потрапить в інтервал (a, b) , визначається інтегралом:

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

який виражається через функцію Лапласа:

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Враховуючи властивості функції Лапласа:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

На основі числових характеристик нормального розподілу можна оцінити, чи є експериментальні дані репрезентативними, тобто чи відповідають вони тим результатам, які спостерігалися б за дуже великої кількості вимірювань (теоретичній генеральній сукупності).

Теоретичний розподіл більшості результатів вимірювань у техніці та енергетиці добре описується нормальною кривою:

$$f(x) = \frac{1}{S_x \sqrt{2\pi}} \times e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2S_x^2}},$$

де $\bar{x}$ — вибіркове середнє, S_x — вибіркове середньоквадратичне відхилення.

Для практики розв'язання статистичних задач важливо враховувати наступні **особливості нормального розподілу (рис. 4.4)**:

1. У діапазоні $\bar{x} \pm S_x$ знаходиться 68,28% результатів вимірювань.
2. У діапазоні $\bar{x} \pm 2S_x$ знаходиться 95,45% результатів вимірювань.
3. У діапазоні $\bar{x} \pm 3S_x$ знаходиться 99,73% результатів вимірювань.
4. У діапазоні $\bar{x} \pm 1,96S_x$ знаходиться 95% результатів вимірювань.
5. У діапазоні $\bar{x} \pm 2,58S_x$ знаходиться 99% результатів вимірювань.
6. У діапазоні $\bar{x} \pm 3,29S_x$ знаходиться 99,9% результатів вимірювань.

Ці властивості широко застосовуються під час аналізу точності вимірювань, контролю якості, оцінювання похибок та статистичного моделювання.

Логарифмічно нормальний розподіл. Взагалі кажучи, практично досить часто зустрічається така ситуація, коли випадкова величина X сама перестає бути нормально розподіленою, проте шляхом нескладного її функціонального перетворення можна отримати випадкову величину $Y = \varphi(X)$, розподілену за нормальним законом. У цьому найбільшого поширення набуло логарифмічне перетворення виду $Y = \log_a X$, яке припустимо лише за $X > 0$.

Випадкова величина X вважається розподіленою логарифмічно нормально, якщо нормальний закон розподілу підпорядковується її логарифм $Y = \log_a X$. Відповідно до цього щільність ймовірності виражається формулою:

$$f(y) \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(y - m_y)^2}{2\sigma_y^2}\right], \quad (4.12)$$

де $m_y = M[\log_a X]$ — математичне сподівання, $\sigma_y^2 = D[\log_a X]$ — дисперсія, a — основа логарифма, причому найчастіше приймається $a = e$, тобто $Y = \ln X$.

Виконавши нескладні перетворення, можна від формули (4.12) перейти до щільності розподілу вихідної випадкової величини, яка матиме такий вигляд:

$$f(x) = f(y) \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sigma_y \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(y - m_y)^2}{2\sigma_y^2}\right], \quad (4.13)$$

де $m_y = M[\ln X]$, $\sigma_y^2 = D[\ln X]$.

Як впливає з формули (4.13), логарифмічно нормальний розподіл характеризується додатною асиметрією, що зростає зі збільшенням σ_y . Природно, що менше σ_y , то ближче один до одного значення моди, медіани та математичного сподівання і тим ближче крива розподілу до нормального закону. Воно властиве таким випадковим величинам, формування яких відбувається в результаті множення великої кількості незалежних рівнозначних факторів, що впливають на них.

Між параметрами нормального і логарифмічно нормального розподілу існують наступні співвідношення:

$$m_x = \exp(m_y + 0,5\sigma_y^2),$$

$$\sigma_x = m_x[\exp(\sigma_y^2 - 1)]^{1/2},$$

або

$$m_y = \ln[m_x / (1 + C_x^2)^{1/2}],$$

$$\sigma_y = [\ln(1 + C_x^2)]^{1/2},$$

де C_x – коефіцієнт варіації величини X .

Мода логарифмічно нормального розподілу функціонально пов'язана з математичним сподіванням і коефіцієнтом варіації

$$Mo = m_x / (1 + C_x^2)^{3/2}.$$

Зі збільшенням коефіцієнта варіації відмінності між Mo і m_x зростають.

Рівномірний розподіл (рис. 4.5). Неперервна випадкова величина X рівномірно розподілена, якщо щільність ймовірності постійна у всьому діапазоні її можливих значень і дорівнює нулю за її межами. Відповідно до цього щільність ймовірності в інтервалі $[a, b]$ можна представити як:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq a, \\ \frac{1}{b-a}, & \text{при } a < x < b, \\ 0, & \text{при } x \geq b, \end{cases}$$

а функція розподілу записана як

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x < b, \\ 1, & x \geq b \end{cases}$$

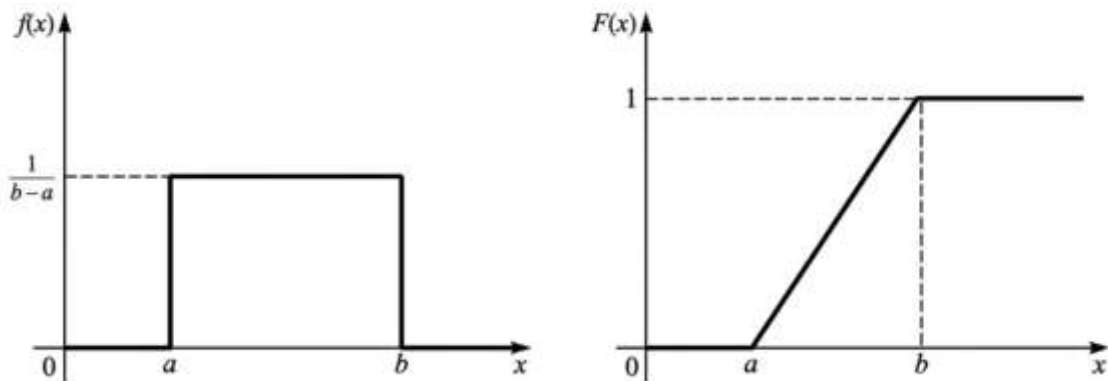


Рис. 4.5. Графічне зображення рівномірного розподілу випадкової величини

Таким чином, рівномірний розподіл визначається двома параметрами: a і b . При цьому основні чисельні характеристики єдиного закону можуть бути виражені наступним чином

$$m_x = \frac{a+b}{2}, \quad D_x = (b-a)^2/12, \quad As = 0, \quad Ex = -1,2.$$

Експоненційний (показниковий) розподіл (рис. 4.6). Неперервна випадкова величина X має експоненційний розподіл, якщо її щільність ймовірності задається так:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{при } x \geq 0; \end{cases}$$

а функція розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Даний закон застосовується як одна з можливих математичних моделей у теорії надійності, теорії масового обслуговування та інших галузях.

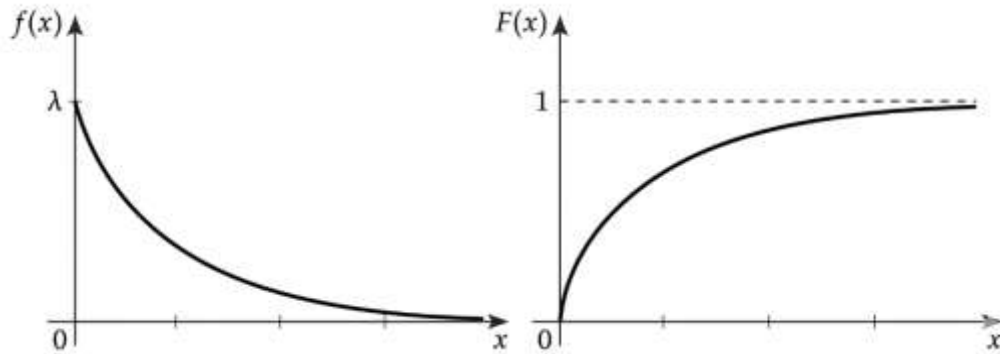


Рис. 4.6. Графічне зображення експоненційного (показникового) розподілу

Для експоненційного розподілу числові характеристики обчислюються за формулами:

$$M(x) = \frac{1}{\lambda}; \quad D(x) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Біноміальний розподіл. Дискретна випадкова величина X з можливими результатами $x = t = 0, 1, 2, \dots, n$ має біноміальний розподіл, якщо ймовірність того, що $X = t$, задається формулою:

$$p(X = t) = P_{t,n} = C_n^t p^t q^{n-t}.$$

При цьому функція біноміального розподілу матиме вигляд:

$$F(t) = p(X < t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < 0, \\ \sum_{m_i < t} P_{m_i,n} & \text{при } 0 < t < n, \\ 1, & \text{при } t > n. \end{cases}$$

Біноміальний розподіл визначається двома параметрами: p і n , і основні числові характеристики пов'язані з цими параметрами як

$$m_x = np, \quad D_x = npq, \quad As = \frac{q-p}{\sqrt{npq}}, \quad E_x = (1 - 6pq)/npq.$$

Звідси випливає, що при збільшенні n коефіцієнти асиметрії і кюртоза прагнуть до нуля. При $n \rightarrow \infty$ і $np \rightarrow \infty$ біноміальний розподіл стає асимптотично нормальним. На практиці біноміальний розподіл вважається асимптотично нормальним вже при $npq \geq 9$.

Для розрахунків надійності електроенергетичного обладнання (трансформаторів, ліній електропередавання) ключовим параметром є **інтенсивність відмов** $\lambda(t)$. Вона визначає ймовірність того, що об'єкт, який справно працював до моменту t , вийде з ладу в наступну одиницю часу. Для більшості задач енергетики в період нормальної експлуатації приймають $\lambda = \text{const}$, що відповідає експоненціальному закону надійності:

$$P(t) = e^{-\lambda t},$$

де $P(t)$ – ймовірність безвідмовної роботи протягом часу t .

Приклад 4.12. В енергосистемі можливі дефіцити потужності 50, 100 і 150 МВт, причому ймовірності цих дефіцитів відповідно дорівнюють 0,001; 0,0004; 0,0002. Визначити математичне сподівання недовідпуску енергії за рік.

Розв'язання. При постійному дефіциті, 50 МВт недовідпуска

$$M(\eta) = 50 \cdot 8760 \cdot 0,001 + 100 \cdot 8760 \cdot 0,0004 + 150 \cdot 8760 \cdot 0,0002 = 1051 \text{ МВт}.$$

Це середнє значення дефіциту, яке постійно «тисне» на систему протягом усього часу.

Визначимо математичне сподівання річного недовідпуску енергії E (EENS – Expected Energy Not Served). Оскільки в році 8760 годин, то:

$$E = M(\Delta P) \cdot T_{\text{рік}} = 0,12 \cdot 8760 = 1051,2 \text{ МВт} \cdot \text{год} / \text{рік}.$$

Відповідь: математичне сподівання недовідпуску енергії за рік становить 1051,2 МВт·год.

У теорії ймовірностей доводиться ряд теорем, пов'язаних з математичним сподіванням, які тут наводяться без доказів:

1) математичне сподівання постійної величини дорівнює цій величині, тобто $M(C) = C$, оскільки ймовірність постійної величини дорівнює одиниці;

2) математичне сподівання добутку випадкової величини на постійну C дорівнює добутку постійної величини на математичне сподівання випадкової величини:

$$M(C\alpha) = CM(\alpha);$$

3) математичне сподівання суми випадкових величин дорівнює сумі математичних сподівань кожної з величин окремо:

$$M(\alpha + \beta) = M(\alpha) + M(\beta);$$

4) математичне сподівання добутку незалежних випадкових величин дорівнює добутку математичного сподівання кожної з величин:

$$M(\alpha\beta) = M(\alpha)M(\beta).$$

Статистичне середнє, тобто математичне сподівання випадкової величини, характеризує дійсне середнє значення випадкової величини, проте цього замало її повної характеристики. Необхідно знати, наскільки відхиляється випадкова величина свого математичного сподівання. Якщо ці відхилення невеликі, математичне сподівання досить добре представляє випадкову величину; якщо ж відхилення великі, тобто розкид значень випадкової величини або їхнє розсіювання велике, то одне математичне сподівання не характеризує цю величину. Не можна визначати ступінь відхилення випадкової величини від

математичного сподівання за середнім значенням відхилення випадкової величини від її математичного сподівання, оскільки ця величина завжди дорівнює нулю. Справді,

$$M[\alpha - M(\alpha)] = M(\alpha) - M(\alpha) = 0,$$

оскільки функція $M(\alpha)$ стала. Це тим, що математичне сподівання є центром всіх значень випадкової величини, і відхилення одного знаку компенсують відхилення іншого знаку. Тому як міра відхилень випадкової величини від її математичного сподівання приймають величину, рівну математичному сподіванню квадрата відхилення випадкової величини від її математичного сподівання, яку називають **дисперсією випадкової величини** і позначають через $D(\alpha)$:

$$D(\alpha) = M[\alpha - M(\alpha)]^2.$$

Квадратний корінь з величини дисперсії називається **середньоквадратичним** або **стандартним відхиленням випадкової величини** [17]:

$$\delta(\alpha) = \sqrt{D(\alpha)}.$$

Для дискретних випадкових величин

$$D(\alpha) = \sum [x_k - M(x)]^2,$$

де сума поширюється попри всі значення випадкової величини x_k , мають відповідні ймовірності p_k .

Для безперервної випадкової величини

$$D(\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(x)]^2 \varphi(x) dx.$$

В теорії ймовірностей доводиться ряд теорем про дисперсію випадкових величин, які тут наводяться без доказів.

1. Дисперсія постійної величини C дорівнює нулю:

$$D(C) = 0.$$

2. Дисперсія добутку постійної величини C на випадкову величину α дорівнює добутку квадрата постійної ви C на дисперсію випадкової величини:

$$D(C\alpha) = C^2 D(\alpha).$$

3. Дисперсія суми постійної C і випадкової α величин дорівнює дисперсії випадкової величини:

$$D(C + \alpha) = D(\alpha).$$

4. Дисперсія суми незалежних випадкових величин α і β дорівнює сумі дисперсій цих величин:

$$D(\alpha + \beta) = D(\alpha) + D(\beta).$$

5. Дисперсія середньоарифметичного від ряду n випадкових величин з однаковою дисперсією в n разів менша від дисперсії кожної з цих величин окремо:

$$D\left[\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}{n}\right] = \frac{1}{n^2} [D(\alpha_1) + D(\alpha_2) + \dots] = \frac{D(\alpha_i)}{n}.$$

Приклад 4.13. Знайти ймовірність помилки прогнозування попиту потужності в енергосистемі, з урахуванням, що помилка прогнозування

розподілена по загальному нормальному розподілу з величиною математичного сподівання, що дорівнює нулю. Визначити ймовірність помилки прогнозування в межах $\pm 0,5\%$, $\pm 1\%$, $\pm 2\%$ і більше.

Розв'язання. Нехай на підставі статистичних спостережень стандартне відхилення $\delta(\%)$ становить 0,5; 1 чи 2.

Для обчислень використовуємо формули:

$$P(-0,5\% \leq \eta < +0,5\%) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\frac{\sigma}{\delta}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \Phi\left(\frac{0,5}{\delta}\right);$$

$$P(\eta \geq 2\%) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{2}{\sigma}}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \int_0^{\frac{2}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right) = 0,5 - 0,5\Phi\left(\frac{2}{\delta}\right).$$

Отримані результати наведені нижче

, %	0,5	1	2
$P(-0,5\% \leq \eta < +0,5\%)$	0,6827	0,3829	0,1974
$P(-1\% \leq \eta < +1\%)$	0,9545	0,6827	0,3829
$P(-2\% \leq \eta < +2\%)$	0,99994	0,9546	0,6827
$P(\eta \geq +2\%)$	0,00003	0,0227	0,1586

З прикладу видно, що більше стандартне відхилення, тим більше розкид значень помилки прогнозування; при малих значеннях середньоквадратичного відхилення ($\delta = 0,5\%$) ймовірність того, що помилка не вийде за межі $\pm 1\%$, дуже велика і становить 0,9545, а при $\delta = 2\%$, та ж ймовірність знижується до 0,3829.

В енергетиці іноді цікавлять не лише дисперсія $D(\eta)$, а й момент другого порядку відносно деякої величини C , тобто математичне сподівання квадрата $(\eta - C)^2$, тоді

$$D_C(\eta) = M[(\eta - C)^2],$$

де η – випадкова величина; M – математичне сподівання.

Вираз моменту через дисперсію має вигляд:

$$D_C(\eta) = D(\eta) + [M(\eta) - C]^2.$$

З отриманого співвідношення випливає, що, знаючи дисперсію $D(\eta)$ та середнє відхилення випадкової величини від деякої постійної C , можна знайти момент другого порядку щодо C , $D_C(\eta)$, тобто математичне сподівання квадрата середньоквадратичного відхилення випадкової величини від постійної C .

Збитки споживачів через відхилення споживача, що подається напруги U від оптимального значення U_0 пропорційний величині квадрата середньоквадратичного відхилення U від U_0 :

$$D_{U_0}(U) = D(U) + [M(U) - U_0]^2. \quad (4.11)$$

Цю величину можна виміряти спеціальним приладом (інтегральним вольтметром). Якщо виміряти середнє відхилення U до U_0 , можна визначити і

дисперсію, тобто квадрат середньоквадратичного відхилення від середнього значення (4.11):

$$D(U) = \delta^2(U) = D_{U_0} - [M(U - U_0)].$$

Нехай

$$D_{U_0} = (0,0025)^2, M(U - U_0) = 0,01,$$

тоді

$$\delta^2(U) = 0,0025 - 0,0001 = 0,0024; \delta(U) = 0,049.$$

Отже, середньоквадратичне відхилення напруги від оптимального значення дорівнює 5% і зумовлено, головним чином, занадто великою дисперсією напруги, а відхилення середнього значення від оптимального несуттєве і становить 1%. Щоб зменшити збиток, що залежить від квадрата середньоквадратичного відхилення, потрібно знизити «відхилення» напруги від середнього значення, тобто дисперсію, а не величину різниці середньої та оптимальної напруги

Якщо, навпаки,

$$D_{U_0}(U) = 0,0025, M(U - U_0) = 0,049,$$

то

$$\delta^2(U) = 0,0025 - 0,0024 = (0,01); \delta(U) = 1\%.$$

У цьому випадку основною причиною втрат є не дисперсія, а надто велика величина середнього відхилення напруги від оптимального. Зменшити її можна зміною коефіцієнта трансформації трансформаторів.

Закон розподілу ймовірностей безперервних випадкових величин не можна представити у вигляді таблиці, оскільки кількість значень таких випадкових величин нескінченна навіть в обмеженому інтервалі. Крім того, ймовірність отримати якесь певне значення дорівнює нулю. На перший погляд, це парадоксально. Якщо задана безперервна випадкова величина в деякому обмеженому інтервалі, а ймовірність будь-якого значення її в цьому інтервалі дорівнює нулю, то взагалі така величина начебто не може мати жодного значення у всьому даному інтервалі. Адже ймовірність, що дорівнює нулю, є ймовірністю неможливої події.

Однак парадоксу тут немає, і якщо говорити точніше, то ймовірність того, що будь-яка безперервна випадкова величина має певне значення, нескінченно мала. Пригадаємо класичне визначення ймовірності як відношення числа випадків, у яких відбувається подія M , до загального числа випадків N . Подією вважатимемо прийняття випадковою величиною певного значення. Тоді $M = 1$, але загальне число таких випадків навіть в обмеженому інтервалі дорівнює нескінченності, оскільки нескінченно велике число можливих значень. Тому $N = -\infty$. Ймовірність прийняття випадковою величиною певного значення за формулою класичної ймовірності $1/\infty = 0$, тобто, нескінченно мала. У даному випадку нульове значення ймовірності попадання у певну точку пов'язане не з неможливістю самої події (відсутність випадків, коли вона може статися), а з нескінченно великим числом можливих випадків. Тому для безперервних випадкових величин визначають ймовірності потрапляння не в точку, а в деякий інтервал. Цей інтервал, однак, можна прийняти як завгодно малим.

Для кількісної оцінки ймовірностей як безперервних, так і дискретних випадкових величин вводять **функцію розподілу** $F(x)$, яка, за визначенням, дорівнює ймовірності того, що дана випадкова величина η (безперервна або дискретна) потрапляє в інтервал значень від $-\infty$ до деякого значення x , тобто вона менша, ніж x :

$$F(x) = P(-\infty \leq \eta < x).$$

З визначення випливає, що $F(-\infty) = 0$ та $F(+\infty) = 1$. Щоб знайти функції розподілу дискретної випадкової величини, можна використовувати таблиці розподілу, виконуючи додавання ймовірностей зліва направо.

Для безперервних випадкових величин функція розподілу визначається аналітично, якщо це можливо, або графічно. За заданою функцією розподілу можна обчислити ймовірності попадання випадкової величини у певний інтервал значень (x_1, x_2) .

$$P(x_1 \leq \eta < x_2) = F(x_2) - F(x_1),$$

тобто для того, щоб визначити ймовірність попадання безперервної випадкової величини в інтервал (x_1, x_2) , де $x_1 < x_2$ достатньо взяти різницю функцій розподілу при значеннях x_1 і x_2 .

Закон розподілу ймовірностей безперервних випадкових величин може бути визначений завданням не функції розподілу, а **щільності розподілу ймовірностей** $\varphi(x)$, яка є похідною від функції розподілу за значенням випадкової величини x :

$$\varphi(x) = dF(x)/dx.$$

Отже,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(x) dx.$$

Щільність розподілу ймовірностей, очевидно, є межа, якої прагне відношення ймовірності попадання в інтервал до величини інтервалу при необмеженому наближенні верхньої межі інтервалу до нижньої.

Якщо щільність розподілу ймовірностей задана аналітично, то ймовірність попадання безперервної випадкової величини будь-який інтервал (x_1, x_2) , де $x_1 < x_2$,

$$P(x_1 \leq \eta < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{-\infty}^{x_2} \varphi(x) dx - \int_{-\infty}^{x_1} \varphi(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x) dx,$$

тобто рівна інтегралу від густини розподілу ймовірностей, узятому в межах шуканого інтервалу.

В енергетиці широко застосовуються випадкові величини з такими розподілами ймовірностей: рівномірним, нормальним, логнормальним, експоненціальним, біноміальним та розподілом Пуассона.

4.4. Оцінка ризиків в електроенергетиці (метод Монте-Карло)

Розглянуті вище характеристики випадкових величин – математичне сподівання, дисперсія та моменти – дозволяють аналітично описувати

стохастичні процеси. Однак у багатьох практичних задачах отримати ці величини в замкненому вигляді неможливо. У таких випадках застосовують чисельні методи оцінювання ймовірнісних характеристик. Одним із найпотужніших підходів є метод Монте-Карло.

Метод Монте-Карло – це техніка імітаційного моделювання випадкових величин, який застосовується для обчислення параметрів їх ймовірнісного розподілу. Сам метод складається з трьох складових частин:

1. Моделювання випадкових величин із заданим законом розподілу.
2. Побудова ймовірнісних моделей реальних процесів (систем).
3. Задачі статистичної теорії оцінювання.

Його застосування виправдано в тих задачах, які допускають теоретико-ймовірнісний опис. До розділів науки, де в більшості випадків використовується метод Монте-Карло, відносять задачі масового обслуговування, задачі теорії ігор і математичної економіки, задачі теорії передачі повідомлень при наявності перешкод тощо [33]. Серед інших методів метод Монте-Карло виділяється своєю простотою і загальністю. Повільна збіжність є суттєвим недоліком методу.

Принциповою основою використання методу Монте-Карло є теорема Колмогорова або підсилений закон великих чисел: *для того, щоб середнє арифметичне незалежних (випробувань) реалізацій випадкової величини збігались із ймовірністю одиниця до її математичного сподівання необхідно і достатньо, щоб математичне сподівання існувало* [14].

Центральна гранична теорема (в найпростішому формулюванні) стверджує, що, якщо $X_1, \dots, X_n$ – незалежні однаково розподілені випадкові величини з середнім α і дисперсією σ^2 , при $n \rightarrow \infty$ функція розподілу центрованої і нормованої суми $\frac{S - n\alpha}{\sqrt{n}\sigma}$, де $S = X_1 + \dots + X_n$, прямує до функції розподілу стандартної гаусівської величини.

Використання центральної граничної теореми дає можливість оцінювати похибку методу. З цією метою потрібно вміти оцінювати дисперсію. Вважаючи N достатньо великим і оцінку для дисперсії достатньо точною, можна з заданою ймовірністю отримати нерівність:

$$\left| M\xi - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i \right| \leq \frac{\gamma \sqrt{D\xi}}{\sqrt{N}},$$

якщо p – задане значення ймовірності, то γ знайдемо із співвідношення

$$p = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

У практичних розрахунках найбільш зручно отримати реалізацію α за допомогою алгоритму, побудованого на основі рекурентних співвідношень. Числа, отримані таким чином називаються **псевдовипадковими**.

Маючи в розпорядженні реалізацію випадкової величини α , можна отримати реалізацію випадкової величини з заданим законом розподілу.

Аналогічним чином можуть бути реалізовані дискретні і багатовимірні випадкові величини. Особливість методу Монте-Карло полягає в тому, що його застосування не вимагає, взагалі кажучи, формулювання інтегро-

диференціального рівняння, що описує потоки частинок, або системи диференціальних рівнянь, що описують систему масового обслуговування. На практиці формулювання таких рівнянь та їх реалізація представляють значні труднощі.

4.4.1. Оцінка надійності електроенергетичної системи при невідомих ймовірностях безвідмовної роботи її елементів

Метод Монте-Карло є надзвичайно потужним інструментом саме для електроенергетики, оскільки дозволяє аналізувати надійність систем, де аналітичні розрахунки стають занадто складними через велику кількість елементів (ліній, трансформаторів, генераторів).

Метод Монте-Карло – це будь-яка статистична процедура, що включає методи статистичної вибірки. Щоб застосувати метод Монте-Карло, потрібно вміти відтворювати випадкову величину. Для відтворення випадкових величин зазвичай використовуються ПК, оснащені датчиками випадкових чисел.

Алгоритм методу Монте-Карло для оцінки надійності енергосистеми

Метод базується на багаторазовому моделюванні випадкового стану системи.

1. *Формування вхідних даних.* Для кожного елемента системи (наприклад, i -ї лінії електропередачі) задається ймовірність відмови q_i або інтенсивність відмов λ_i . Також задається кількість ітерацій моделювання N (зазвичай від 10^4 до 10^6).

2. *Генерація випадкових станів (імітація).* На кожній ітерації j (від 1 до N) для кожного елемента системи:

1. Генерується випадкове число r , рівномірно розподілене в інтервалі $[0;1]$.
2. Виконується перевірка стану елемента:
 - якщо $r < q_i$, то елемент вважається таким, що **відмовив** (аварійний стан);
 - якщо $r \geq q_i$, то елемент вважається **працездатним**.

3. *Перевірка працездатності всієї системи.* Після того, як визначено стани всіх елементів, виконується аналіз режиму системи (наприклад, перевірка зв'язності графів мережі або розрахунок потокорозподілу):

- визначається, чи виникає дефіцит потужності або знеструмлення споживачів;
- якщо система не справляється з навантаженням, ітерація позначається як «неуспішна» ($m = m + 1$).

4. *Статистична обробка результатів.* Після завершення всіх N ітерацій обчислюються шукані показники надійності:

1. Ймовірність дефіциту потужності:

$$\hat{P} = \frac{m}{N},$$

де m – кількість ітерацій, у яких система була в стані дефіциту.

2. Очікуваний недовідпуск енергії E (EENS):

$$E = \sum \frac{\Delta P_j T}{N},$$

де ΔP_j – дефіцит потужності на j -й ітерації, T – розрахунковий період (рік).

Покажемо застосування методу Монте-Карло на прикладі.

Приклад 4.14. Система складається з двох блоків, з'єднаних послідовно. Система виходить з ладу, коли з ладу виходить хоча б один блок. Перший блок містить два елементи: A , B , вони з'єднані паралельно, і виходить з ладу при виході з ладу обох елементів одночасно. Другий блок містить один елемент C і зазнає збою, коли цей елемент виходить з ладу. Надійності кожного з її елементів становлять $P(A) = 0,8$, $P(B) = 0,85$, $P(C) = 0,6$. За методом Монте-Карло необхідно знайти: а) надійність системи P^* (ймовірності безвідмовної роботи); б) абсолютну похибку $|P - P^*|$, де P – надійність системи, обчислена аналітично.

Вважати, що було проведено 50 випробувань.

Розв'язання. Для вирішення поставленого завдання складемо допоміжну таблицю (табл. 4.4).

Таблиця 4.4. Результати моделювання безвідмовної роботи системи методом Монте-Карло

Номер	Блок	Випадкові числа, що моделюють елементи			Висновок про роботу				
		A	B	C	елементів			блоків	системи
					A	B	C		
1	Перший Другий	0,1	0,09	0,73	+	+	-	+	-
2	Перший Другий	0,25	0,33	0,76	+	+	-	+	-
3	Перший Другий	0,52	0,01	0,35	+	+	+	+	+
4	Перший Другий	0,86	0,34	0,67	-	+	-	+	-

Покажемо правила заповнення табл. 4.4. Для номера випробувань 1 виберемо за допомогою датчика випадкових чисел три випадкових числа: 0,1, 0,09, 0,73. За правилом: якщо випадкове число менше ймовірності події, то подія відбулася; якщо випадкове число більше чи дорівнює ймовірності події, то подія не відбулася, розіграємо події A , B , C . Результати випробувань будемо записувати в розрахункову табл. 4.4.

Оскільки $P(A) = 0,8$ і $0,1 < 0,8$, то подія A відбудеться, тобто елемент A в цьому випробуванні працює безвідмовно. Оскільки $P(B) = 0,85$ і $0,09 < 0,85$, то подія B відбулася, тобто елемент B працює безвідмовно. Таким чином, обидва елементи першого блоку працюють; отже, працює і сам перший блок. У відповідних клітинках табл. 4.4 ставимо знаки плюс.

Оскільки $P(C) = 0,6$ і $0,73 > 0,6$, то подія C не відбулася, тобто елемент C отримує відмову; іншими словами, другий блок, а отже і вся система, отримують відмову. У відповідних клітинках **табл. 4.4** ставимо знак мінус.

Аналогічно розігруємо й решту випробувань. У **табл. 4.4** приводяться результати чотирьох випробувань.

Провівши 50 випробувань, отримаємо, що в 28 з них система працювала безвідмовно. Як оцінку шуканої надійності P приймемо відносну частоту $P^* = 28/50 = 0,56$.

Знайдемо надійність системи P аналітично. За правилами додавання та множення ймовірностей, ймовірність безвідмовної роботи першого і другого блоків відповідно дорівнюють:

$$P_1 = 1 - P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = 1 - 0,2 \cdot 0,15 = 0,97,$$

$$P_2 = P(C) = 0,6.$$

Ймовірність безвідмовної роботи системи

$$P = P_1 \cdot P_2 = 0,97 \cdot 0,6 = 0,582.$$

Шукана абсолютна похибка $|P - P^*| = |0,582 - 0,6| = 0,022$. Варто звернути увагу, що з ростом числа випробувань абсолютна похибка буде лише зменшуватися.

Відповідь: надійність системи P^* (ймовірності безвідмовної роботи) становить 0,6; абсолютна похибка $|P - P^*| = 0,22$.

Отримані за допомогою методу Монте-Карло показники дозволяють оцінити ризики роботи системи. Зокрема, ймовірність дефіциту потужності P^* та очікуваний недовідпуск енергії споживачам. Головною перевагою методу є те, що він дозволяє моделювати складні системи, де прямий аналітичний розрахунок за формулами (4.1-4.4) стає практично неможливим через величезну кількість комбінацій станів елементів.

4.4.2. Оцінка надійності системи при відомому законі розподілу безвідмовної роботи її елементів

Таким чином, метод Монте-Карло є ефективним інструментом для аналізу складних енергетичних систем, у яких кількість можливих станів елементів робить прямий аналітичний розрахунок практично недосяжним. Проте навіть у випадках, коли закон розподілу часу безвідмовної роботи елементів відомий і аналітичні формули можуть бути застосовані, імітаційне моделювання залишається корисним засобом перевірки, уточнення та порівняння результатів.

Щоб продемонструвати це, розглянемо простішу систему з відомими показниковими законами розподілу безвідмовної роботи її елементів та оцінимо її надійність як аналітичним методом, так і методом Монте-Карло.

Приклад 4.15. Пристрій складається з двох вузлів, з'єднаних послідовно. Пристрій виходить з ладу при виході з ладу хоча б одного з вузлів. Перший вузол містить два елементи: A , B , вони з'єднані паралельно, і виходить з ладу, коли обидва елементи виходять з ладу одночасно. Другий вузол містить один елемент C і виходить з ладу при виході з ладу цього елемента. Час безвідмовної роботи

елементів розподілено за показниковим законом з параметрами 0,04, 0,05, 0,1, відповідно.

З використанням методу Монте-Карло визначити: а) оцінку P^* ймовірності того, що пристрій працюватиме безвідмовно протягом 10 годин; б) середнє значення часу безвідмовної роботи пристрою. Для отримання цих характеристик слід провести 50 експериментальних випробувань.

Розв'язання. Час безвідмовної роботи елементів (у годинах) генерується відповідно до формул:

$$t_A = -(1/0,04) \ln r_1 = 25(-\ln r_1),$$

$$t_B = -(1/0,05) \ln r_2 = 20(-\ln r_2),$$

$$t_C = -(1/0,1) \ln r_3 = 10(-\ln r_3),$$

де r_1, r_2, r_3 – випадкові числа. Візьмемо для першого випробування також три випадкові числа: 0,1, 0,09, 0,73 і за ними розіграємо час безвідмовної роботи елементів:

$$t_A = -\left(\frac{1}{0,04}\right) \ln 0,1 = 25 \cdot 2,3 = 57,5,$$

$$t_B = -\left(\frac{1}{0,05}\right) \ln 0,09 = 20 \cdot 2,41 = 48,2,$$

$$t_C = -\left(\frac{1}{0,1}\right) \ln 0,73 = 10 \cdot 0,32 = 3,2.$$

Оскільки елементи A, B першого вузла з'єднані паралельно, його функціонування можливе за умови, що хоча б один з елементів залишається справним. Таким чином, у першому експерименті перший вузол буде працювати протягом часу, що дорівнює максимальному часу безвідмовної роботи серед усіх його елементів $\max(57,5; 48,2) = 57,5$ ч.

Перший і другий вузол з'єднані послідовно, тому пристрій працює, якщо обидва вузли працюють одночасно. Отже, в першому випробуванні пристрій буде працювати $\min(57,5; 3,2) = 3,2$ год. Складемо розрахункову таблицю (табл. 4.5).

Таблиця 4.5. Розрахунок часу безвідмовної роботи системи в імітаційних випробуваннях

Номер випробування	Випадкові числа, що моделюють елемент			Час безвідмовної роботи					
				елементів			вузлів		пристрою
	A	B	C	A	B	C	першого	другого	
1	0,1	0,09	0,73	57,5	48,2	3,2	57,5	3,2	3,2
2	0,25	0,33	0,76	34,75	22,2	2,7	34,75	2,7	2,7
3	0,52	0,01	0,35	16,25	92,0	10,5	92,0	10,5	10,5
4	0,86	0,34	0,67	3,75	21,6	4,0	21,6	4,0	4,0

У табл. 4.5 наведено результати чотирьох випробувань. Якщо провести 50 випробувань, то виявиться, що в 18 випробуваннях пристрій працював 10 годин

і більше. Шукана оцінка надійності пристрою (ймовірність його безвідмовної роботи за час 10 годин) $P^* = 18/50 = 0,36$.

Для порівняння наведемо аналітичний розв'язок задачі. Ймовірність безвідмовної роботи елементів:

$$R_A(10) = e^{-0,04 \cdot 10} = 0,67,$$

$$R_B(10) = e^{-0,05 \cdot 10} = 0,61,$$

$$R_C(10) = e^{-0,1 \cdot 10} = 0,37.$$

Ймовірність безвідмовної роботи першого вузла за час 10 год:

$$P_1 = 1 - (1 - 0,67)(1 - 0,61) = 0,87.$$

Ймовірність безвідмовної роботи всього пристрою за 10 год:

$$P = P_1 \cdot R_C(10) = 0,87 \cdot 0,37 = 0,32.$$

Судячи з отриманих результатів, абсолютна похибка

$$|P - P^*| = |0,32 - 0,36| = 0,04.$$

Середній час безвідмовної роботи пристрою, враховуючи, що в 50 випробуваннях він працював безвідмовно всього 450 годин, становить:

$$\bar{t}^* = 450/50 = 9 \text{ год.}$$

Відповідь: а) ймовірність його безвідмовної роботи пристрою за час 10 годин становитиме $P^* = 0,36$; б) середній час безвідмовної роботи пристрою становить $\bar{t}^* = 9$ год.

Слід враховувати, що інтенсивність відмов λ змінюється протягом життєвого циклу обладнання: вона висока в період приробітку, стабільна під час експлуатації та стрімко зростає в період фізичного зносу ізоляції та конструкцій.

4.5. Інтегральні характеристики режимів складних електричних мереж

У загальному випадку конфігурація схеми електричних з'єднань та параметри її елементів на достатньо тривалих інтервалах часу є випадковими величинами внаслідок впливу великої кількості випадкових факторів на характеристики системи (відмови та навмисні відключення обладнання, вплив зовнішніх температурних і погодних умов тощо). Навантаження споживачів систем електропостачання також характеризуються значною мінливістю.

З імовірісно-статистичної точки зору найповнішу інформацію про параметри режимів дають функції розподілу, які в загальному випадку є багатовимірними (диференціальними або інтегральними). Однак на практиці інформація про функції розподілу вузлових навантажень, як правило, відсутня. Тому для розв'язання більшості прикладних задач достатньо обмежитися визначенням числових імовірнісних характеристик у межах кореляційної теорії, тобто математичних сподівань, дисперсій, середніх квадратичних відхилень і кореляційних моментів, припускаючи відомим вид закону розподілу, який можна встановити на основі якісного аналізу мережі та законів розподілу навантажень споживачів.

Для визначення імовірнісних характеристик параметрів режимів (струмів гілок I та напруг вузлів U) відносно базового стану доцільно використовувати узагальнені параметри схеми: матрицю вузлових опорів Z , матрицю коефіцієнтів

розподілу C , власні та взаємні провідності Y , а також матрицю розподілу напруг гілок D .

Навантаження гілок I та напруги вузлів U визначаються з рівнянь:

$$I = CJ + YE;$$

$$U = ZJ + DE,$$

де J і E – миттєві випадкові величини вузлових навантажень та ЕРС гілок відповідно.

У загальному випадку випадкові вектори та узагальнені параметри мережі є комплексними величинами.

4.5.1. Розрахунок інтегральних характеристик режимів із використанням комплексних випадкових величин

Для визначення інтегральних характеристик режимів у неоднорідних мережах із низьким рівнем компенсації реактивної потужності доцільно використовувати модель системи комплексних випадкових величин.

Під час розрахунків режимів електричних мереж виникає необхідність визначення числових характеристик суми (якщо мережа розімкнена) або **лінійної комбінації** випадкових величин (якщо мережа замкнена).

Нехай

$$z_k = \sum_{i=1}^n z_{ki} = \sum_{i=1}^n (x_{ki} + jy_{ki}),$$

$$z_l = \sum_{i=1}^n z_{li} = \sum_{i=1}^n (x_{li} + jy_{li}).$$

Математичне сподівання величини z_k :

$$M(z_k) = M\left(\sum_{i=1}^n z_{ki}\right) = M\left[\sum_{i=1}^n (x_{ki} + jy_{ki})\right] = \sum_{i=1}^n m_{x_{ki}} + j \sum_{i=1}^n m_{y_{ki}} = \sum_{i=1}^n m_{z_{ki}}.$$

Тоді кореляційний момент між z_k і z_l запишеться у вигляді:

$$K_{zkzl} = \sum_{i=1}^n (K_{x_{ki}x_{li}} + K_{y_{ki}y_{li}}) + \sum_{p,l} (K_{x_{ki}x_{lp}} + K_{y_{ki}y_{lp}}) +$$

$$+ j \left[\sum_{i=1}^n K_{x_{li}y_{ki}} - K_{x_{ki}y_{li}} + \sum_{i,p} K_{y_{ki}x_{lp}} - K_{x_{kp}y_{li}} \right],$$

де $p = 1, \dots, n, p \neq i$.

При $l = k$ уявна частина кореляційного моменту дорівнює нулю, і він збігається з дисперсією комплексної випадкової величини:

$$D_{zk} = \sum_{i=1}^n (D_{x_{ki}} + D_{y_{ki}}) + \sum_{i,p} K_{x_{ki}x_{kp}} + K_{y_{ki}y_{kp}} = \sum_{i=1}^n D_{z_{ki}} + \sum_{i,p} \text{Re}[K_{zkizkp}]$$

Висуваючи припущення щодо виду законів розподілу зазначених параметрів режимів, можна визначити всі необхідні ймовірнісні характеристики.

Найчастіше вихідні вузлові навантаження та ЕРС гілок апроксимують нормальним законом розподілу.

4.5.2. Розрахунок інтегральних характеристик дійсних і уявних складових параметрів режимів

Метою розрахунку інтегральних характеристик режимів є визначення числових ймовірнісних характеристик модуля та аргументу струму, потужності й напруги. Оскільки ці характеристики є функціями відповідних активної та реактивної складових, виникає необхідність отримання їх для електричних мереж довільної конфігурації.

Для скорочення громіздких математичних перетворень будемо вважати, що вільні ЕРС у гілках відсутні. У цьому випадку рівняння зв'язку між струмами навантажень вузлів і струмами гілок набуває вигляду:

$$I = CJ.$$

Модулі та аргументи комплексних значень струмів у гілках, а також напруг у вузлах слід визначати як функції випадкових величин їхніх дійсних та уявних складових. Отже, метою розрахунку інтегральних характеристик режимів у межах кореляційної теорії є визначення математичних сподівань і дисперсій дійсних та уявних складових струмів у гілках і напруг у вузлах, а також кореляційних моментів між ними за відомих числових характеристик вихідних навантажень.

Тоді матриці математичних сподівань дійсних I' та уявних I'' складових повного струму гілок дорівнюють:

$$I' = \text{Re}(CJ); \quad I'' = \text{Im}(CJ).$$

Обчислення ймовірнісних характеристик у гілках істотно спрощується, якщо мережа має високу ступінь однорідності параметрів. У цьому разі уявна частина матриці коефіцієнтів розподілу порівняно з дійсною є дуже малою. Тоді розрахунки можуть виконуватися за наближеними формулами.

$$\begin{aligned} D(I') &\approx \|(C'_{ik})^2\| \times \|D(J'_k)\| + 2 \left\| \sum_{k < p} C'_{ik} C'_{ip} K_{J'_k J'_p} \right\|; \\ D(I'') &\approx \|(C'_{ik})^2\| \times \|D(J''_k)\| + 2 \left\| \sum_{k < p} C'_{ik} C'_{ip} K_{J''_k J''_p} \right\|; \\ K_{J' J''} &\approx \|(C'_{ik})^2\| \times \|K_{J'_k J''_k}\| + \left\| \sum_{k, p} C'_{ik} C'_{ip} K_{J'_k J'_p} \right\|. \end{aligned}$$

Приклад 4.16. Розрахувати математичні сподівання, дисперсії та кореляційні моменти струмів навантажень у гілках (**рис. 4.7**), якщо відомі ймовірнісні характеристики вихідних вузових навантажень. Опори дротів наведено в **табл. 4.6**.

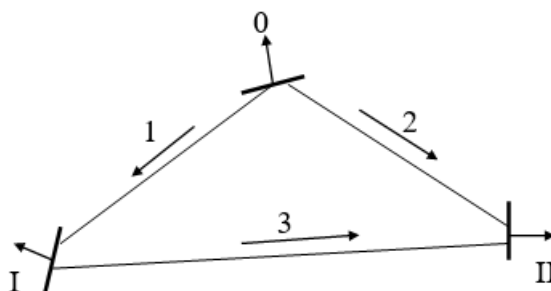


Рис. 4.7. Схема електричної мережі 10 кВ

Таблиця 4.6. Опори дротів

№ ділянки	1	2	3
Активний опір, Ом	0.573	0.325	0.673
Реактивний опір, Ом	0.248	0.159	0.296

$$\bar{J}' = 49.4 + j23.7, A;$$

$$\bar{J}'' = 37.7 + j18.6, A;$$

$$D(J') = 50.0 + j33.5, A^2;$$

$$D(J'') = 36.0 + j27.5, A^2.$$

$$K_{J'_k J'_p} = \begin{vmatrix} 50 & 24.5 \\ & 36 \end{vmatrix}, A^2;$$

$$K_{J'_k J''_k} = \begin{vmatrix} 27.1 \\ 31.3 \end{vmatrix}, A^2; K_{J'_k J''_p} = \begin{vmatrix} 27.1 & 14.24 \\ 0 & 31.3 \end{vmatrix}, A^2; K_{J''_k J'_p} = \begin{vmatrix} 36.3 & 21.2 \\ 0 & 27.5 \end{vmatrix}, A^2.$$

Коефіцієнти розподілу схеми

$$C = \begin{vmatrix} 0.446 + j0.015 & 0.217 - j0.015 \\ 0.027 - j0.003 & -0.195 + j0.003 \\ 0.243 - j0.015 & 0.213 - j0.005 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Запишемо значення миттєвих випадкових величин дійсних та уявних складових навантажень вузлів у вигляді таких матриць:

$$\bar{J}' = \begin{vmatrix} 49.4 \\ 37.7 \end{vmatrix}, A; \bar{J}'' = \begin{vmatrix} 23.7 \\ 18.6 \end{vmatrix}, A; D(J') = \begin{vmatrix} 50.0 \\ 36.0 \end{vmatrix}, A^2; D(J'') = \begin{vmatrix} 33.5 \\ 27.5 \end{vmatrix}, A^2.$$

Тоді, вилучивши діагональні елементи, кореляційні матриці між дійсними та уявними складовими струмів навантажень можна подати у вигляді стовпчикових матриць:

$$K_{J'_k J'_p} = |24.5|, A^2; K_{J'_k J''_p} = |14.24|, A^2; K_{J''_k J'_p} = |21.2|, A^2.$$

Математичні сподівання струмів навантажень гілок:

$$|I'| = \begin{vmatrix} 49.4 \cdot 0.446 + 37.7 \cdot 0.217 \\ 49.4 \cdot 0.027 - 37.7 \cdot 0.195 \\ 49.4 \cdot 0.243 + 37.7 \cdot 0.213 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 30.213 \\ -6.018 \\ 20.034 \end{vmatrix}, A,$$

$$\text{де } I'_1 = \bar{J}'_1 C_{11} + \bar{J}'_2 C_{12};$$

$$|I''| = \begin{vmatrix} 14.606 \\ -2.99 \\ 9.72 \end{vmatrix}, A; \quad I''_1 = \bar{J}''_1 C_{11} + \bar{J}''_2 C_{12}.$$

Дисперсії та кореляційні моменти струмів навантажень у гілках дорівнюють:

$$D(I') = \begin{vmatrix} 16.431 \\ 1.159 \\ 7.147 \end{vmatrix}, A^2,$$

де $D(I'_1) = C_{11}^2 D(J'_1) + C_{12}^2 D(J'_2) + 2C_{11}C_{12}K_{J'_k J'_p 1}$;

$$D(I'') = \begin{vmatrix} 11.64 \\ 0.508 \\ 5.016 \end{vmatrix}, A^2;$$

$$D(I''_1) = C_{11}^2 D(J''_1) + C_{12}^2 D(J''_2) + 2C_{11}C_{12}K_{J''_k J''_p 1};$$

$$K_{I'I''} = \begin{vmatrix} 8.242 \\ 1.135 \\ 3.755 \end{vmatrix}, A^2;$$

$$K_{I'_1 I''_1} = C_{11}^2 K_{J'_k J''_k 1} + C_{12}^2 K_{J'_k J''_k 2} + C_{11}C_{12}K_{J'_k J''_p 2}.$$

Відповідь: на основі відомих ймовірнісних характеристик вузлових навантажень та матриці коефіцієнтів розподілу схеми визначено математичні сподівання, дисперсії та кореляційні моменти струмів у гілках електричної мережі. Отримані результати дозволяють повністю охарактеризувати статистичні властивості струмів у кожній гілці та можуть бути використані для подальшого аналізу режимів і надійності мережі.

4.5.3. Ймовірнісні характеристики модуля комплексної випадкової величини параметра режиму

Одним із завдань оцінювання інтегральних характеристик режимів є визначення модуля та аргументу повного струму в кожній гілці схеми заміщення.

Введемо позначення:

$$I = \sqrt{(I')^2 + (I'')^2} = M_0(I);$$

$$(I')^2 D(I'') + (I'')^2 D(I') - 2I'I''K_{I'I''} = A.$$

З урахуванням цього математичне сподівання модуля комплексної випадкової величини визначається як

$$\bar{I} = M_0(I) + \frac{A}{2[M_0(I)]^3}.$$

Другий доданок у цій формулі є поправкою на нелінійність функції модуля. Він залежить від математичних сподівань і дисперсій дійсної та уявної складових, а також від кореляційного моменту між ними.

Дисперсія модуля комплексної випадкової величини:

$$D(I) = D(I') + D(I'') - \frac{A}{[M_0(I)]^2} - \frac{A^2}{4[M_0(I)]^6}.$$

Максимальне значення модуля струму:

$$I_{max} = \bar{I} + \beta \sqrt{D(I)}.$$

де коефіцієнт надійності зазвичай вибирають у межах $\beta = 2 \dots 3$.

Без урахування поправок на нелінійність функції модуля струму формули математичного сподівання і дисперсії значно спрощуються:

$$\bar{I} \approx M_0(I) = \sqrt{(I')^2 + (I'')^2};$$

$$D(I) \approx D(I') + D(I'').$$

Тоді

$$I_{max} = \sqrt{(I')^2 + (I'')^2} + \beta \sqrt{D(I') + D(I'')}.$$

Приклад 4.17. Розрахувати математичні сподівання та дисперсії повних струмів у гілках електричної мережі (рис. 4.7). Вихідні дані для розрахунку наведено в прикладі 4.16.

Розв'язання. Для першої гілки мережі математичне сподівання модуля повного струму з урахуванням поправок на нелінійність функції модуля дорівнює

$$\begin{aligned} \bar{I}_1 &= \sqrt{(I'_1)^2 + (I''_1)^2} + \frac{(I''_1)^2 D(I'_1) + (I'_1)^2 D(I''_1) - 2I''_1 I'_1 K_{J'J''1}}{2[(I'_1)^2 + (I''_1)^2]^{3/2}} = \\ &= \sqrt{30.213^2 + 14.606^2} + \frac{14.606^2 \cdot 16.431 + 30.213^2 \cdot 11.64 -}{2(30.213^2 + 14.606^2)^{3/2}} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{-2 \cdot 30.213 \cdot 14.606 \cdot 8.242}{2(30.213^2 + 14.606^2)^{3/2}} = 33.558 + 0.234 = 33.792 \text{ A.} \end{aligned}$$

Дисперсія модуля повного струму навантаження для першої гілки

$$\begin{aligned} D(I_1) &= (I'_1)^2 + (I''_1)^2 + D(I'_1) + D(I''_1) - (\bar{I}_1)^2; \\ D(I_1) &= 30.213^2 + 14.606^2 + 16.431 + 11.64 - 33.792^2 = 43.99 \text{ A}^2. \end{aligned}$$

Тоді максимальне значення модуля струму навантаження при $\beta = 2.5$ для першої гілки можна знайти з виразів:

$$\begin{aligned} I_{1max} &= \bar{I}_1 + \beta \sqrt{D(I_1)}; \\ I_{1max} &= 33.792 + 2.5 \sqrt{43.99} = 50.37 \text{ A.} \end{aligned}$$

Результати розрахунків для інших гілок наведено в табл. 4.7.

Таблиця 4.7. Ймовірнісні характеристики повних струмів у гілках

№ гілки	1	2	3
$\bar{I}, \text{ A}$	33.792	6.865	22.456
$D(I), \text{ A}^2$	43.99	0.302	3.785
$I_{max}, \text{ A}$	50.37	8.238	27.32

Відповідь: у результаті проведених розрахунків визначено математичні сподівання та дисперсії модулів повних струмів у гілках електричної мережі з урахуванням нелінійності функції модуля та кореляцій між дійсними й уявними складовими струмів (табл. 4.7). Отримані значення дозволяють оцінити статистичні характеристики повних струмів у гілках та визначити їх можливі максимальні рівні при заданому коефіцієнті надійності. Це забезпечує можливість подальшого аналізу режимів роботи мережі та перевірки відповідності струмів допустимим значенням для вибору апаратури та оцінювання надійності електричної мережі.

Для повної характеристики комплексного значення струму навантаження в будь-якій гілці електричної мережі в ряді випадків недостатньо знати лише

модуль – необхідно хоча б наближено оцінити й аргумент. Якщо вважати модуль основною характеристикою комплексної випадкової величини (струму навантаження), то числові характеристики аргументу повного струму слід визначати як умовне математичне сподівання та умовну дисперсію.

Тоді математичне сподівання випадкової величини φ (аргументу) за умови, що значення струму дорівнює I , визначається як:

$$M(\varphi/I) = \arccos \frac{I'}{M_0(I)} + \left\{ \frac{[1 - \frac{I}{M_0(I)}](\vartheta - \gamma)}{\xi} \right\}.$$

Дисперсія аргументу:

$$D(\varphi/I) = \frac{D(I')D(I'') - K_{I'I''}^2}{\xi},$$

де $\xi = D(I'')(I'')^2 + 2K_{I'I''}I'I'' + D(I')(I')^2$,

$\vartheta = I'I''[D(I') - D(I'')]$;

$\gamma = K_{I'I''}[(I'')^2 - (I')^2]$.

Діапазон практично можливих значень аргументу за умови, що струм дорівнює максимальному, визначається з нерівності:

$$M(\varphi/I_{max}) - \beta \sqrt{D(\varphi/I_{max})} \leq \varphi \leq M\left(\frac{\varphi}{I_{max}}\right) + \beta \sqrt{D(\varphi/I_{max})}.$$

Чим ближчі значення розрахункового струму та його математичного сподівання, тим точніше можна користуватися наближеною формулою для визначення математичного сподівання аргументу:

$$M(\varphi/I) \approx M(\varphi) = \arccos \frac{I'}{M_0(I)}.$$

Запитання для самоконтролю

1. Що таке випадкова подія?
2. У чому полягає відмінність між достовірною, неможливою та випадковою подією?
3. Наведіть приклади достовірних та неможливих подій в енергосистемах.
4. Як визначається ймовірність події за класичним та статистичним підходами?
5. Що таке випадкова величина? Які її основні характеристики?
6. Як визначається математичне сподівання випадкової величини?
7. Що таке дисперсія та стандартне відхилення? Як вони інтерпретуються?
8. Як визначити ймовірність складної події через ймовірності простих подій?
9. Як інтегральна теорема Муавра-Лапласа дозволяє спростити розрахунки для схеми Бернуллі, коли кількість випробувань n дуже велика?
10. Чим відрізняється випадкова величина від випадкового процесу $X(t)$?
11. Які параметри енергосистем найчастіше моделюються як неперервні випадкові величини, а які – як дискретні?
12. У чому полягає суть біноміального розподілу? Де він застосовується в енергетиці?

13. Доведіть, що якщо випадкова величина є добутком великої кількості незалежних позитивних величин, то вона прямує до логнормального розподілу.
14. Як застосовується метод Монте-Карло для оцінки надійності енергетичних систем?
15. Які етапи реалізації методу Монте-Карло?
16. Що таке центральна гранична теорема? Як вона використовується в методі Монте-Карло?
17. Як оцінюється похибка методу Монте-Карло?
18. Як визначається математичне сподівання та дисперсія комплексної випадкової величини $Z = X + iY$?

Тема 5

СТАТИСТИЧНІ МЕТОДИ В ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИЦІ

- 5.1. Основні поняття математичної статистики
- 5.2. Числові характеристики вибірки. Розрахунок основних числових характеристик
- 5.3. Поняття та класифікація статистичних гіпотез
 - 5.3.1. Поняття про статистичні гіпотези
 - 5.3.2. Параметричні гіпотези
 - 5.3.3. Непараметричні гіпотези
- 5.4. Зв'язок числових характеристик з теоретичними розподілами
- 5.5. Поняття взаємозв'язку. Лінійна кореляція і регресія
- 5.6. Застосування методів математичної статистики в енергетичних дослідженнях

5.1. Основні поняття математичної статистики

Слово «*статистика*» перекладається з латинської як ситуація, стан речей.

Математична статистика – розділ математики, присвячений математичним методам систематизації, обробки та використання статистичних даних для наукових і практичних висновків [40].

Завдання математичної статистики полягають у вказівці методів збору статистичної інформації, її обробки, встановленні наявності та сили взаємозв'язків між ознаками, формулюванні висновків і прогнозуванні.

Математична статистика дає можливість виявляти і вимірювати закономірності розвитку явищ і процесів, взаємозв'язки між ними. Пізнання закономірностей можливо тільки в тому випадку, якщо вивчаються не окремі явища, а сукупність явищ, оскільки закономірності в повній мірі проявляються тільки в масиві явищ.

Генеральна сукупність – це повний набір об'єктів, що мають досліджувану ознаку.

Вибіркова сукупність або **вибірка** є частиною випадково вибраних об'єктів із загальної генеральної сукупності.

Обсяг генеральної сукупності – це кількість об'єктів відповідної сукупності. Обсяг генеральної сукупності позначається літерою N , а обсяг вибірка – літерою n .

Суцільне дослідження – це вивчення всіх об'єктів загальної популяції.

Провести суцільне дослідження вкрай складно з кількох **причин**:

1. Значна кількість об'єктів загальної чисельності населення.
2. Великі тимчасові та матеріальні витрати.
3. Велика кількість помилок при оформленні результатів.

Метод вибірки – це статистичний метод вивчення властивостей генеральної сукупності в цілому на основі вивчення її частини, прийнятої у вибірку.

Ідея методу відбору проб полягає в заміні повного вивчення маси однорідних об'єктів їх частковим вивченням, без допущення істотних помилок. Теоретичною основою методу вибірки є закон великих чисел.

Закон великих чисел – це загальний принцип, в силу якого спільна дія великого числа випадкових факторів призводить при деяких дуже загальних умовах до результату, майже незалежного від випадку [44].

Методи відбору даних для вибірки. Для того щоб можна було зробити висновок про властивості генеральної сукупності з вибірки, вибірка повинна бути *репрезентативною*, тобто вона повинна найбільш повно й адекватно представляти властивості генеральної сукупності. Щоб вибірка була репрезентативною, вона має формуватися так, щоб кожен елемент мав однакову ймовірність потрапити до вибірки.

Існує чотири способи відбору даних для вибірки:

1. **Простий випадковий відбір** – це метод відбору, при якому об'єкти витягуються один за одним з усієї сукупності, а вимога випадковості досягається за допомогою лотів, таблиці випадкових чисел тощо.

2. **Типовий відбір** – це метод відбору, при якому загальна сукупність ділиться на типові групи, а потім з кожної випадковим чином витягується однакова кількість об'єктів (або пропорційно чисельності населення кожної групи).

3. **Механічний відбір** – це метод відбору, при якому загальна сукупність умовно ділиться на стільки груп, скільки існує об'єктів, що підлягають включенню у вибірку, тобто відбір об'єктів проводиться з певним інтервалом.

4. **Серійний відбір** – це метод відбору, при якому загальна сукупність ділиться на ряди, деякі з яких вивчаються в цілому, тобто це вибір кожного k -го елемента після випадкового старту.

Первинна обробка статистичного матеріалу. Збір статистичного матеріалу є дуже важливим і відповідальним етапом статистичного дослідження. Однак велике навантаження і відповідальність при вивченні лягає на обробку і представлення даних, так як від цього багато в чому залежать висновки, до яких прийде дослідник по закінченню роботи.

Зібрані дані часто представляються у вигляді випадкового набору значень і важко виявити їх зміни або закономірності. Тому з метою вивчення закономірностей отримані дані піддають *попередній обробці*.

1. **Упорядкування (ранжування)** – це початковий етап первинної обробки, який полягає в систематизації об'єктів вибірки, тобто в розташуванні їх в зручній для подальшого аналізу і розгляду послідовності.

2. **Угрупування** полягає в об'єднанні варіантів (об'єктів) в класи, за групами або інтервалами угруповання, межі яких встановлюються довільно і повинні бути вказані. Угрупування проводиться з метою побудови емпіричного

розподілу і формування припущення про форму розподілу досліджуваної ознаки в загальній генеральній сукупності, з якої була взята вибірка.

Перша задача, яка вирішується при групуванні, полягає у визначенні оптимального числа інтервалів і встановленні довжини (кроку) інтервалу. Це визначається в кожному конкретному випадку окремо з урахуванням конкретних цілей дослідження, розміру вибірки і ступеня варіативності ознаки у вибірці. Однак оптимальна кількість інтервалів повинна бути підібрана таким чином, щоб різноманіття значень атрибутів в достатній мірі відображалось, а картина розподілу не спотворювалася випадковими частотними коливаннями.

Якщо інтервалів мало, то є ймовірність упустити закономірності форми розподілу, а якщо їх багато, то деталей буде занадто багато, що перешкоджає встановленню загальних закономірностей варіації (зміни) характеристики.

Число інтервалів (k) встановлюється за формулою Стерджесса:

$$k \approx 1 + 3.32 \lg n,$$

де n – обсяг вибірки.

Для практики доцільно використовувати **табл. 5.1**.

Таблиця 5.1. Залежність кількості інтервалів від обсягу вибірки

Обсяг вибірки, n	Число інтервалів, k
10-24	4
25-40	5-6
41-60	6-8
61-100	7-10
101-200	8-12
більше 200	10-15

Після вибору кількості інтервалів (класів) обчислюється довжина або крок інтервалу:

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k},$$

де $x_{\max}$ і $x_{\min}$ – максимальне і мінімальне значення у виборці.

Частота інтервалу показує, скільки разів у виборці зустрічаються значення, пов'язані з кожним інтервалом.

Частота (відносна частота) – це відношення частоти до обсягу вибірки.

Накопичена частота – це число, отримане шляхом послідовного підсумовування частоти в напрямку від першого інтервалу до останнього.

Графічне представлення. Представимо отримані дані графічно.

1. **Гістограма (рис. 5.1)** використовується для графічного представлення розподілу і складається з сусідніх прямокутників, в яких основи дорівнюють ширині інтервалів, а висота дорівнює частоті в цьому інтервалі.

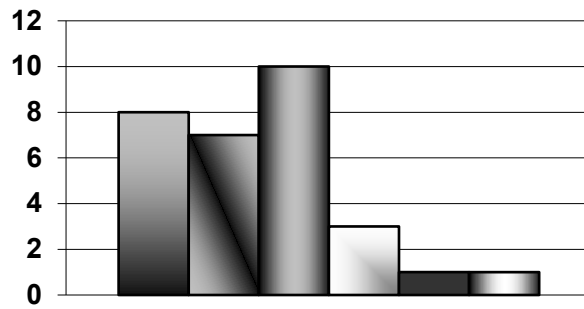


Рис. 5.1. Гістограма

2. **Полігон частот** утворений ламаною лінією, що з'єднує точки, які відповідають середині інтервалу і частотам в цьому інтервалі (**рис. 5.2**).

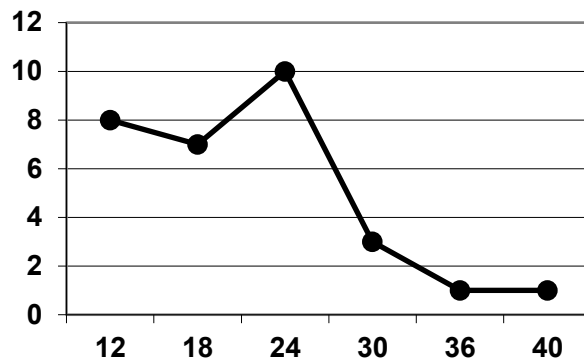


Рис. 5.2. Полігон частот

3. **Кумуляту** (**рис. 5.3**) отримують шляхом з'єднання прямих відрізками, координати яких відповідають верхнім межах інтервалів угруповання і накопиченим частотам.

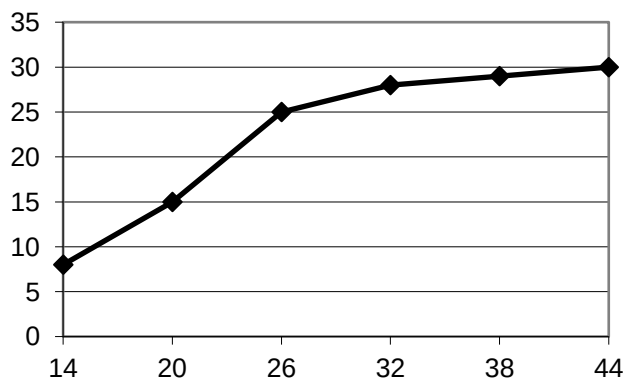


Рис. 5.3. Кумулята

5.2. Числові характеристики вибірки. Розрахунок основних числових характеристик

Виділяють дві групи числових характеристик вибірки: середні і показники розсіювання.

Середні значення дозволяють охарактеризувати ряд чисел одним числом. Середні значення включають середнє арифметичне, моду і медіану.

Середнє арифметичне показує, яке значення ознаки найбільш характерне для загальної сукупності – одна з основних характеристик вибірки. Вона розраховується за формулою:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

де $\sum x_i$ – сума всіх значень x , n – обсяг вибірки.

Мода – найпоширеніше число у варіаційному ряді.

Якщо всі значення у вибірці зустрічаються однаково часто, то прийнято вважати, що моди немає, наприклад, всі значення зустрічаються один раз, два і так далі рази (... 3; 5; 5; 6; 6; 7; 7; 8; 8; 9; 9...).

Якщо два сусідніх значення мають однакову і найвищу частоту, то мода є середнім арифметичним цих значень (наприклад: ... 3; 5; 5; 6; 6; 6; 7; 7; 7; 8; 10..., $M_o = 6,5$).

Якщо два або більше несуміжних значень мають однакові найвищі частоти, то є дві або більше мод і розподіл називається **бімодальним** або **полімодальним** відповідно. Наприклад: ... 3; 5; 5; 6; 6; 6; 7; 8; 8; 8; 10...

Медіана – це середнє значення ранжованого ряду. Наприклад: 3; 5; 5; 6; 6; 6; 7; 7; 7; 8; 10, тоді $M_e = 6$.

Якщо варіаційний ряд містить парне число значень, то медіана є середнім арифметичним двох центральних значень (3; 5; 5; 6; 6; 6; 7; 7; 8; 10; 10; 10, тоді $M_e = 6,5$).

Всі усереднені характеристики дають загальну характеристику ряду вимірювань, не кажучи вже про відхилення результатів від середнього арифметичного, що може привести до значних помилок на практиці. Наприклад, два ряди вимірювань мають однакове середнє арифметичне $\bar{x} = 4$ (3, 4, 4, 5 і 1; 2; 4; 9), але відмінності між ними очевидні. Тому показники розсіювання є такою ж важливою характеристикою розподілу, як і середні значення.

Показники розсіювання показують, наскільки значення згруповані навколо середнього арифметичного.

До мір розсіювання відносять діапазон варіації, дисперсію, стандартне відхилення, коефіцієнт варіації, стандартну похибку середнього арифметичного.

Розмах (діапазон) варіацій вказує на діапазон, в якому змінюються значення:

$$R_x = x_{max} - x_{min}.$$

Розмах фіксує тільки крайні відхилення, але не відображає відхилення всіх результатів.

Дисперсія – це середнє квадрату відхилень від середнього арифметичного:

$$\sigma_x = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}.$$

Стандартне відхилення показує, наскільки в середньому кожен результат відхиляється від середнього арифметичного:

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}},$$

де $\sum (x_i - \bar{x})^2$ – сума квадратичних відхилень від середнього арифметичного; n – обсяг вибірки.

Якщо обсяг вибірки менше або дорівнює 30 ($n \leq 30$), то знаменником двох останніх формул є не n , а $n - 1$.

Коефіцієнт варіації показує відхилення результатів від середнього арифметичного, виражене у відсотках:

$$V_x = \frac{S_x}{\bar{x}} \times 100\%,$$

де S_x – стандартне відхилення результатів вимірювань, $\bar{x}$ – середнє арифметичне.

Коефіцієнт варіації дозволяє:

- а) порівнювати варіативність однієї і тієї ж ознаки в різних групах;
- б) виявляти ступінь відмінності однієї і тієї ж ознаки в одній і тій же групі в різний час;
- в) порівнювати варіації різних ознак в одних і тих же групах.

У сфері енергетики коефіцієнт варіації використовується для оцінки стабільності та надійності процесів, таких як виробництво електроенергії, споживання ресурсів та ефективність обладнання.

Загалом, низький коефіцієнт варіації (менше 10%) свідчить про стабільність процесу, середній (10-30%) вказує на помірну змінність, а високий (понад 30%) може означати значні коливання, що потребують додаткового аналізу. Вибірки, де значення коефіцієнта варіації перевищує 30%, в дослідженні не включаються, тому що ймовірність помилок занадто велика.

Щоб зменшити значення коефіцієнта варіації, необхідно:

- а) збільшити вибірку;
- б) використовувати спеціальні методи відбору результатів для відбору вибірок.

Стандартна похибка середнього арифметичного характеризує коливання середнього арифметичного, тобто вказує на діапазон, в якому буде змінюватися середнє арифметичне при зміні обсягу вибірки:

$$S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{n}}$$

5.3. Поняття та класифікація статистичних гіпотез

5.3.1. Поняття про статистичні гіпотези

Статистичні гіпотези – це припущення щодо виду невідомого розподілу або щодо параметрів відомого розподілу. Поряд із висунутою гіпотезою розглядають і гіпотезу, що їй суперечить. Якщо висунута гіпотеза буде відхилена, то приймається протилежна їй. Тому ці гіпотези необхідно розрізняти.

Нульовою (основною) називають висунуту гіпотезу H_0 .

Альтернативною називають гіпотезу H_1 , що суперечить висунутій.

Висунута гіпотеза може бути правильною або неправильною, тому виникає потреба у її перевірці. Оскільки перевірку здійснюють статистичними методами,

її називають **статистичною перевіркою гіпотез**. У результаті статистичної перевірки може бути прийняте неправильне рішення, тобто можуть бути допущені помилки двох родів.

Помилка першого роду полягає в тому, що правильну гіпотезу буде відхилено.

Помилка другого роду полягає в тому, що неправильну гіпотезу буде прийнято.

Ймовірність допустити помилку першого роду називають **рівнем значущості α** .

Ймовірність допустити помилку другого роду позначають β .

Зменшуючи ймовірність помилки першого роду за фіксованого обсягу вибірки, ми збільшуємо ймовірність допустити помилку другого роду:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \beta = 1.$$

Єдиний спосіб зменшити ймовірності як помилки першого, так і другого роду – збільшити обсяг вибірки:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \beta = 0.$$

Під час перевірки статистичних гіпотез рівень значущості α задають заздалегідь, виходячи з того, що в теорії ймовірностей і математичній статистиці події з імовірністю не більш ніж 5 % (0,05) вважають практично неможливими.

Перевірка відповідних гіпотез дає змогу розв'язувати такі поширені на практиці задачі, як порівняння однотипних виробництв за питомими витратами, порівняння нової та старої технологій виготовлення певного виробу, перевірка точності роботи різних приладів, регуляторів тощо.

Для перевірки нульової гіпотези використовують спеціально підібрану випадкову величину, розподіл якої відомий, – **критерій**. У загальному випадку його позначають K . Кожен критерій має власне позначення:

- Z – критерій нормального розподілу,
- F – критерій Фішера,
- t – критерій Стьюдента тощо.

За вибірковими даними обчислюють спостережуване значення критерію $K_{\text{сп}}$. Далі необхідно перевірити, чи потрапляє отримане значення $K_{\text{сп}}$ до інтервалу (області допустимих значень критерію), який забезпечує підтвердження перевірюваної гіпотези.

Квантилем, що відповідає заданому рівню ймовірності P , називають таке значення $x = x_p$, при якому функція розподілу набуває значення, рівного P , тобто

$$F(x_p) = P.$$

Ймовірність того, що випадкова величина K потрапить у правобічну критичну область, визначається інтегралом:

$$P(K \leq K_{1-\frac{\alpha}{2}}) = \int_{-\infty}^{K_{1-\frac{\alpha}{2}}} f(k) dk = \frac{\alpha}{2};$$

а ймовірність потрапляння у лівобічну критичну область:

$$P\left(K \leq K_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \int_{K_{\frac{\alpha}{2}}}^{\infty} f(k) dk = \frac{\alpha}{2}.$$

Отже, ймовірність того, що випадкова величина K перебуватиме всередині області допустимих значень, дорівнює $(1 - \alpha)$; а ймовірність того, що вона опиниться поза цією областю, дорівнює α .

Якщо критичні області розташовані праворуч і ліворуч від математичного сподівання випадкової величини K , то критерій називають двостороннім (рис. 5.4).

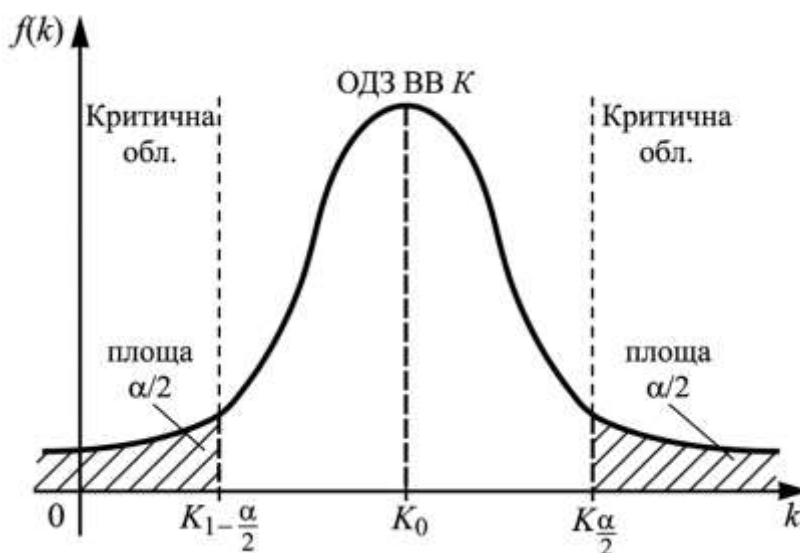


Рис. 5.4. Розподіл щільності ймовірності випадкової величини K ¹⁸

Якщо критична область розташована лише з одного боку від математичного сподівання, то критерій K відповідно є лівостороннім або правостороннім.

5.3.2. Параметричні гіпотези

Параметричні гіпотези – це статистичні гіпотези, у яких сформульовано припущення щодо значень параметрів відомого закону розподілу.

Гіпотеза про рівність двох центрів розподілів. Нехай генеральні сукупності X і Y розподілені нормально. За незалежними вибірками з цих сукупностей обсягами відповідно n і m знайдено вибіркові середні $M(x)$ і $M(y)$ (центри розподілів).

Потрібно перевірити при заданому рівні значущості α нульову гіпотезу про рівність вибірових середніх (центрів розподілу):

$$H_0: M(x) = M(y) \text{ при альтернативній } H_1: M(x) \neq M(y).$$

Така задача виникає тому, що вибіркові середні, як правило, відрізняються. Постає питання про значущість відмінності, чи пояснюється ця відмінність випадковими причинами?

Якщо нульова гіпотеза виявиться справедливою, то різниця вибірових

¹⁸ ОДЗ ВВ K – область допустимих значень випадкової величини K ;
 K_0 – математичне сподівання або центр розподілу.

середніх незначуща і зумовлена випадковими коливаннями.

I варіант перевірки гіпотези

Застосовується у двох випадках:

- генеральні сукупності не розподілені нормально,
- їх дисперсії невідомі,
- вибірки мають великий обсяг (тобто $n \geq 30$) і є незалежними.

У цьому випадку спостережуване значення критерію:

$$z_{\text{сп}} = \frac{M(x) - M(y)}{\sqrt{\frac{D(x)}{n} + \frac{D(y)}{m}}}$$

Далі визначають критичне значення $z_{\text{кр}}$ (за таблицею функції Лапласа) з умови:

$$\Phi_0(z_{\text{кр}}) = \frac{1 - \alpha}{2}.$$

Якщо $|z_{\text{сп}}| < z_{\text{кр}}$, нульова гіпотеза приймається; якщо $|z_{\text{сп}}| > z_{\text{кр}}$, нульова гіпотеза відхиляється.

II варіант перевірки гіпотези

Застосовується, коли:

- генеральні сукупності X і Y не розподілені нормально,
- їх дисперсії невідомі, але однакові,
- вибірки мають малий обсяг ($n < 30$) і є незалежними (наприклад, порівнюються результати вимірювань, виконаних одним і тим самим приладом – тоді природно припустити рівність дисперсій).

Якщо немає підстав вважати дисперсії однаковими, то перед порівнянням середніх слід перевірити гіпотезу про рівність дисперсій двох розподілів.

Спостережуване значення критерію:

$$t_{\text{сп}} = \frac{M(x) - M(y)}{\sqrt{(n-1)S^2(x) + (m-1)S^2(y)}} \sqrt{\frac{n \cdot m(n+m-2)}{n+m}},$$

де $S^2(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - M(x))^2$, $S^2(y) = \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^m (y_j - M(y))^2$ – незміщенні оцінки дисперсій $D(x)$ і $D(y)$.

Ця величина має **t -розподіл Стюдента** з числом ступенів свободи:

$$k = n + m - 2.$$

Критичне значення $t_{\text{кр}}(\alpha; k)$ визначають за таблицею розподілу Стюдента.

Якщо $|t_{\text{сп}}| < t_{\text{кр}}(\alpha; k)$, то нульова гіпотеза приймається;

якщо $|t_{\text{сп}}| > t_{\text{кр}}(\alpha; k)$, то нульова гіпотеза відхиляється.

t -критерій Стюдента (Student's t-test) використовують задля перевірки гіпотез відносно середнього значення, коли вибірка мала, а стандартне відхилення невідоме. Наприклад, необхідно порівняти ефективність двох типів фотоелементів: тип А – традиційний кристалічний кремній, тип В – нові гнучкі гетероструктурні елементи. У лабораторних умовах виміряно середню добову генерацію енергії (Вт·год/см²) за 10 днів для кожного типу:

Тип А	Тип В
2,3	2,6
2,4	2,5
2,2	2,7
2,5	2,8
2,1	2,9
2,4	2,5
2,3	2,6
2,2	2,7
2,4	2,8
2,3	2,9

Формулюємо гіпотези:

нульова гіпотеза H_0 : середня генерація однакова;

альтернативна гіпотеза H_1 : генерація різна.

Під час розв'язування використаємо метод двовибірковий t-критерій, оскільки маємо незалежні вибірки та приблизно нормальний розподіл (відсутні значення, які сильно відрізняються).

Гіпотеза про рівність двох дисперсій розподілів. На практиці задача порівняння дисперсій виникає тоді, коли необхідно порівняти точність приладів, інструментів, методів вимірювань тощо.

Очевидно, що кращим є той прилад, інструмент або метод, який забезпечує найменше розсіювання результатів вимірювань, тобто найменшу дисперсію.

Нехай генеральні сукупності X і Y розподілені нормально. З них отримано вибірки обсягами відповідно n і m , за якими обчислено незміщені оцінки дисперсій $S^2(x)$ і $S^2(y)$.

Потрібно при заданому рівні значущості перевірити нульову гіпотезу про рівність дисперсій генеральних сукупностей:

$H_0: D(x) = D(y)$ при альтернативній $H_1: D(x) \neq D(y)$.

Така задача виникає тому, що найчастіше незміщені оцінки дисперсій відрізняються, і необхідно з'ясувати, чи є ця відмінність значущою.

Якщо нульова гіпотеза виявиться справедливою, тобто дисперсії генеральних сукупностей рівні, то різниця між незміщеними оцінками дисперсій є незначущою і пояснюється випадковими факторами. Наприклад, якщо різниця результатів вимірювань, виконаних двома приладами, виявиться незначущою, то прилади мають однакову точність, і навпаки.

Для перевірки нульової гіпотези про рівність дисперсій двох генеральних сукупностей використовують **критерій Фішера**:

$$F_{\text{сп}} = \frac{S_{\text{більша}}^2}{S_{\text{менша}}^2}.$$

F-критерій обчислюється як відношення дисперсії між групами до дисперсії

всередині груп.

За таблицями визначають критичне значення:

$$F_{кр}(\alpha; k_1; k_2),$$

де $k_1 = n - 1, k_2 = m - 1$ – числа ступенів свободи кожної вибірки.

Рішення приймають за правилом:

якщо $F_{сп} < F_{кр}$, то нульова гіпотеза приймається;

якщо $F_{сп} > F_{кр}$, то нульова гіпотеза відхиляється.

F-критерій Фішера (Fisher's F-test) використовують задля перевірки гіпотез відносно рівності дисперсій або для аналізу варіацій (ANOVA), коли порівнюється більше двох середніх. Наприклад, необхідно визначити, чи впливає тип покриття фотоелемента на його продуктивність. За умовою задано три варіанти матеріалів: 1) без покриття; 2) антиблікове покриття; 3) з наноструктурованим шаром, а також задана середня генерація енергії на 1 см² протягом 7 днів (в кожній групі по 7 спостережень).

У цьому випадку застосовується однофакторний дисперсійний аналіз¹⁹:

нульова гіпотеза H_0 : середні продуктивності не відрізняються;

альтернатива H_1 : хоча б одна група має інше середнє значення.

У **табл.5.2** наведено коротке порівняння t – і F –критеріїв:

Таблиця 5.2. Межі застосовності критеріїв

Критерій	Що перевіряє	Коли застосовується
t- Стьюдента	Різницю між середніми	Дві вибірки, малий обсяг, невідоме σ
F-Фішера	Різницю дисперсій / ANOVA	Порівняння 2+ груп, або перевірка дисперсій

5.3.3. Непараметричні гіпотези

Статистична гіпотеза називається **непараметричною**, якщо в ній сформульовано припущення щодо виду закону розподілу.

Під час опрацювання результатів експерименту за виглядом гістограми або з інших міркувань зазвичай висувають гіпотезу про закон розподілу випадкової величини, оцінюють параметри цього розподілу. Подальше завдання полягає у перевірці висунутої гіпотези про закон розподілу – наскільки добре підібрана ймовірнісна модель ряду спостережень.

Перевірка гіпотези про передбачуваний розподіл здійснюється за допомогою **непараметричних критеріїв згоди**. Найпоширенішими серед них є:

- критерій Пірсона χ^2 ,
- λ -критерій Колмогорова.

Критерій згоди Пірсона χ^2 . Припустімо, що виконано n незалежних

¹⁹ У даному завданні виконується порівняння середніх значень однієї кількісної змінної у кількох (трьох) незалежних групах, що відрізняються лише одним фактором – типом покриття.

дослідів, у кожному з яких випадкова величина X прийняла певне значення. Розіб'ємо отримані значення на розряди та складемо згрупований статистичний ряд:

$x_1 - x_2$	$x_2 - x_3$	...	$x_{n-1} - x_n$
p_1^*	p_2^*	...	p_{n-1}^*

Далі висуваємо гіпотезу про те, що випадкова величина X має розподіл у вигляді таблиці:

x'_1	x'_2	...	x'_{n-1}
p_1	p_2	...	p_{n-1}

де x'_i – значення випадкової величини, що відповідають серединам інтервалів.

Зазвичай емпіричні частоти p_i^* та відповідні їм теоретичні ймовірності p_i відрізняються. Це розходження може бути випадковим (незначущим) і пояснюватися малим числом спостережень, способом групування або іншими причинами.

Можливо також, що розходження є значущим і зумовлене тим, що ймовірності обчислені на основі неправильної гіпотези про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Критерій Пірсона дає відповідь на це питання. Як і будь-який критерій, він не доводить справедливості гіпотези, а лише встановлює на заданому рівні значущості її узгодженість або неузгодженість з даними спостережень.

Розподіл χ^2 залежить від одного параметра – числа ступенів свободи k .

У практиці часто використовують квантілі $\chi_{\alpha,k}^2$, при цьому:

$$P(\chi^2 > \chi_{\alpha,k}^2) = \int_{\chi_{\alpha,k}^2}^{\infty} f(\chi^2) d(\chi^2) = \alpha.$$

Геометрично квантілі $\chi_{\alpha,k}^2$ – це таке значення, при якому площа під кривою розподілу праворуч від нього дорівнює рівню значущості α .

Умови застосування критерію Пірсона:

1. Обсяг вибірки має бути достатньо великим (не менше 50 значень).
2. Кожен розряд повинен містити не менше 5-8 спостережень.

Порядок перевірки нульової гіпотези про закон розподілу за критерієм Пірсона

1. Визначають імовірності потрапляння випадкової величини X у відповідні розряди (x_{i-1}, x_i) .

2. Обчислюють спостережуване значення критерію $\chi_{\text{сп}}^2$:

$$\chi_{\text{сп}}^2 = n \sum_{i=1}^s \frac{(p_i - p_i^*)^2}{p_i},$$

де s – число розрядів.

3. За таблицею Пірсона визначають критичне значення $\chi_{\text{кр}}^2(\alpha; k)$, де α – рівень значущості, $k = s - r - 1$ – число ступенів свободи, а r – число параметрів розподілу, оцінених за вибіркою.

4. Порівнюють:

- якщо $\chi_{\text{сп}}^2 < \chi_{\text{кр}}^2$, гіпотеза про передбачуваний закон розподілу приймається;
- якщо $\chi_{\text{сп}}^2 > \chi_{\text{кр}}^2$, гіпотеза відхиляється.

Як показано на **рис. 5.5**, форма кривої щільності ймовірності суттєво залежить від кількості ступенів свободи k . При малих значеннях k розподіл має виражену асиметрію, а з ростом k він поступово наближається до нормального закону. Заштрихована область на графіку відповідає критичній області (рівню значущості α): якщо розраховане значення критерію потрапляє в цю зону, нульова гіпотеза про обраний закон розподілу відхиляється.

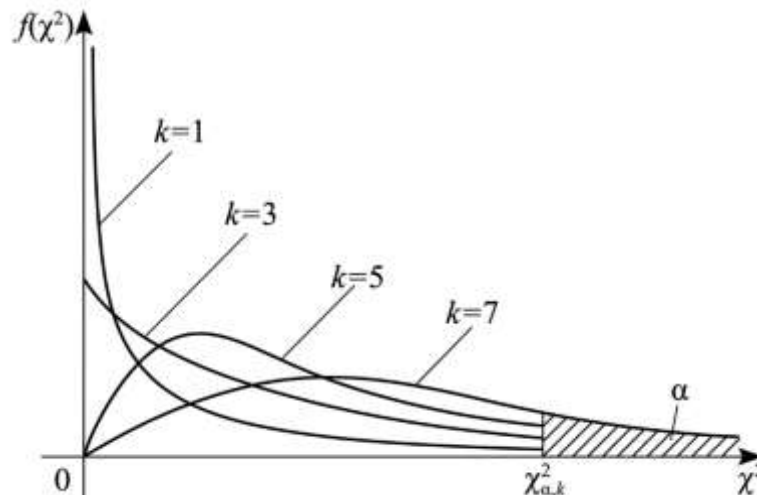


Рис. 5.5. Графіки щільності ймовірності χ^2 -розподілу для різних значень ступенів свободи k . Заштрихована область показує рівень значущості α

5.4. Зв'язок числових характеристик з теоретичними розподілами

Числові характеристики вибірки (середнє, дисперсія, коефіцієнт варіації тощо) дозволяють описати емпіричні дані. Однак для глибшого аналізу, перевірки гіпотез, побудови довірчих інтервалів та прогнозування важливо знати, за яким теоретичним законом розподілені досліджувані випадкові величини. В електроенергетиці найчастіше використовується нормальний розподіл, а також його похідні форми.

Як вже говорилося вище, при розв'язанні багатьох завдань (статистична оцінка, перевірка гіпотез, дисперсійний аналіз, регресійний аналіз тощо) в якості деяких еталонів використовується ряд теоретичних законів розподілу. Перш за все, до них відносяться розподіли Пірсона χ^2 , Стюдента і Фішера.

Розподіл Пірсона χ^2 . Нехай існує n незалежних випадкових величин $X_1, X_2, \dots, X_n$, кожна з яких розподілена за нормальним законом з нульовим середнім значенням і одиничною дисперсією. Тоді розподіл χ^2 (хі-квадрат) з v ступенями свободи – це розподіл суми квадратів незалежних випадкових величин $\chi^2 = X_{21}^2 + X_{22}^2 + \dots + X_{2n}^2$, розподілених за стандартним нормальним законом.

У той же час **число ступенів свободи** – це число значень, які функціонально не пов'язані один з одним, або, іншими словами, число незалежних параметрів.

Якщо, наприклад, ми маємо ряд спостережень з чотирьох доданків $(4+6+8+3)$, то останній член є залежною величиною. Фактично сума перших трьох доданків дорівнює 18. Сума всього ряду дорівнює 21. Отже, значення 3 залишається для четвертого доданка, тому що жодна інша величина не дасть нам необхідної суми. Таким чином, для статистичного ряду число ступенів свободи завжди дорівнює $\nu = n - 1$.

Щільність ймовірності розподілу χ^2 має вигляд:

$$f(x) = \left\{ 2^{\nu/2} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \right\}^{-1} x^{(\nu/2-1)} \exp(-0,5x^2),$$

де $\Gamma(\nu/2)$ – гамма-функція Ейлера, що визначається як

$$\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) = \int_0^{\infty} t^{(\frac{\nu}{2}-1)} \exp(-t) dt.$$

Таким чином, розподіл χ^2 залежить тільки від одного параметра – числа ступенів свободи, який визначається як $\nu = k - 1 - l$, де l – число параметрів розподілу [16]. Оскільки $l = 1, \nu = k - 2$.

Значення розподілу χ^2 зведені в таблицю для різних ступенів свободи і рівнів значущості.

На графіку густини ймовірності розподілу χ^2 для різних ступенів свободи (рис. 5.5) видно, що він різко асиметричний при малому числі ν . Однак зі збільшенням ν щільність ймовірності $f(x)$ стає все більш симетричною і схожою на криву нормального розподілу, що впливає з центральної граничної теореми. На практиці при $\nu = 13 - 15$ випадкова величина χ^2 вже підкоряється звичайному закону.

Розподіл Стюдента. Нехай Z і V – незалежні випадкові величини, а значення Z зазвичай розподіляється з параметрами $M(Z) = 0, D(Z) = 1$, а V розподіляється за законом χ^2 з ν ступенями свободи. Тоді випадкова величина має розподіл, який називається розподілом Стюдента з ν ступенями свободи. Щільність ймовірності величини t виражається наступною формулою:

$$t = \frac{Z}{\sqrt{V/\nu}},$$

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma(\nu/2)} [1 + x/\nu]^{-(\nu+1)/2}.$$

З графіка густини ймовірності $f(x)$ видно, що вона симетрична відносно початку координат (рис. 5.5). Зі збільшенням числа ступенів свободи t -розподіл наближається до нормального закону, причому швидкість цього наближення вище, ніж швидкість розподілу χ^2 .

Значення t -розподілу зведені в таблицю для різних ступенів свободи і рівнів значущості. У таблиці наведені значення t -статистики для двостороннього і одностороннього тесту значущості.

Розподіл Фішера. Припустимо, у нас є дві випадкові величини, дисперсії яких відомі: $D_1 > D_2$. Тоді дисперсійне співвідношення $F = D_1/D_2$ має розподіл, який називається розподілом Фішера, або іноді розподілом Фішера-Снедекора. Щільність ймовірності цього розподілу виражається наступною формулою:

$$f(x) = \frac{v_1^{\frac{1}{2}v_1} v_2^{\frac{1}{2}v_2} \Gamma\left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}v_1\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}v_2\right)} x^{\frac{1}{2}v_1-1} (v_1x + v_2)^{-\frac{v_1+v_2}{2}}, \quad (5.1)$$

де v_1 і v_2 – числа ступенів свободи першої і другої вибірок, причому $v_1 = n_1 - 1$, $v_2 = n_2 - 2$.

Як впливає з формули (5.1), розподіл Фішера (F-розподіл) залежить не від дисперсій вхідних вибірок, а тільки від числа ступенів свободи.

Для F-розподілу були складені таблиці значень для різних ступенів свободи і рівня значущості $\alpha = 0,05$.

Зауважимо, що ці таблиці наведені для двостороннього критерію значущості, тобто коли перевіряється умова $D_1 = D_2$, наприклад. У тому випадку, якщо необхідно перевірити, наприклад, нерівність дисперсій у двох вибірках, тобто $D_1 > D_2$ або $D_1 < D_2$, тоді використовується односторонній критерій.

Схема на рис. 5.6 відображає послідовний процес прийняття рішення відносно вибору відповідного статистичного тесту залежно від типу дослідницького завдання. Вона починається з визначення мети аналізу – що саме потрібно дослідити: порівняння середніх, порівняння дисперсій чи аналіз зв'язку між змінними.

Якщо завдання полягає у порівнянні середніх значень, наступним кроком є уточнення кількості груп. Для двох груп застосовується t-критерій Стюдента, а для трьох і більше – дисперсійний аналіз (ANOVA), який реалізується через F-критерій.

Якщо метою є порівняння дисперсій, то перевіряється кількість вибірок. Для двох вибірок використовується F-критерій Фішера, а для більшої кількості – розширена версія ANOVA, яка дозволяє оцінити відмінності між кількома дисперсіями одночасно.

У випадку, коли дослідник хоче оцінити зв'язок між змінними, схема пропонує перевірити, чи мають ці змінні нормальний розподіл. Якщо так, то застосовується кореляція Пірсона, яка оцінює силу лінійного зв'язку між кількісними змінними. Якщо розподіл не є нормальним, то рекомендовано використовувати кореляцію Спірмена, яка базується на рангах і є менш чутливою до форми розподілу.

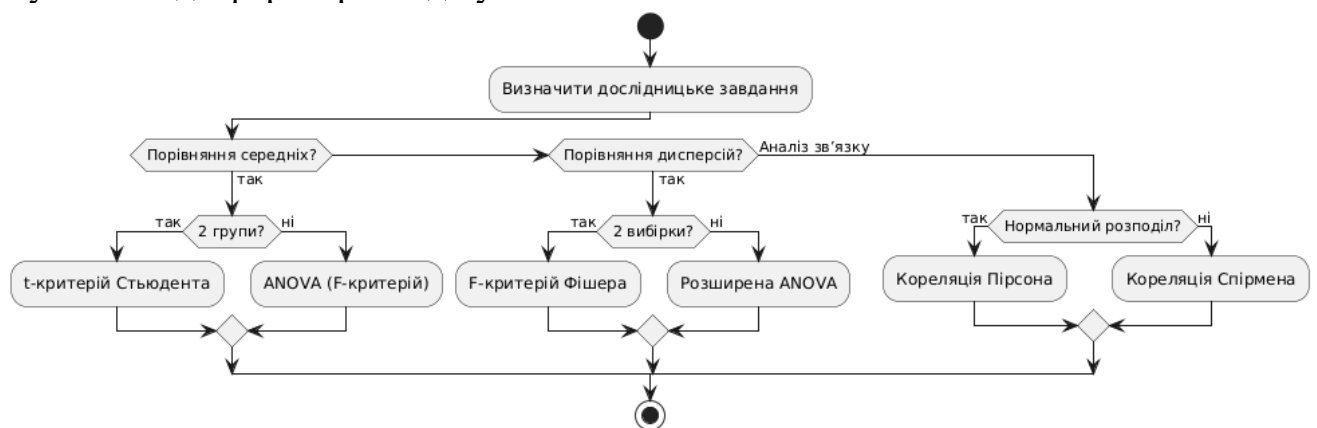


Рис. 5.6. Загальна схема вибору статистичного критерію

Оцінка асиметрії й ексцеси. Для оцінки відповідності емпіричного розподілу теоретичному можна порівняти відсоткову заповнюваність кожного діапазону кривої нормального розподілу, але зазвичай використовують показники асиметрії й ексцеси.

Асиметрія – це міра перекошеної емпіричної кривої відносно теоретичної кривої.

Коефіцієнт перекосу є мірою асиметрії розподілу. Якщо цей коефіцієнт явно відрізняється від 0, то розподіл асиметричний. Щільність нормального розподілу симетрична щодо середнього. Якщо коефіцієнт перекосу має від’ємне значення, то перекик правосторонній, додатне – лівосторонній.

$$A_x = \frac{n \sum (x_i - \bar{x})^3}{(n-1)(n-2)S_x^3}.$$

Ексцес – це міра пікоподібності емпіричної кривої по відношенню до теоретичної.

Коефіцієнт ексцесу вимірює «піковість» розподілу. Якщо ексцес значно відрізняється від 0, то функція щільності або має більш округлений або більш різкий пік, ніж пік щільності нормального розподілу. Функція щільності нормального розподілу має ексцес, рівний 0. Якщо коефіцієнт ексцесу від’ємний, то ексцес – плосковершинний, а додатний – жорсткий.

$$E_x = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^4}{nS_x^4} - 3.$$

5.5. Поняття взаємозв’язку. Лінійна кореляція і регресія

У технічних дослідженнях часто виявляється взаємозв’язок між досліджуваними показниками. Існують *функціональні* залежності, при яких кожне значення одного показника відповідає строго певному значенню іншого (наприклад, закони фізики). До іншого типу відносяться такі залежності, при яких одне значення першого показника може відповідати декільком значенням іншого – це *статистична* (або *стохастична*) залежність (наприклад, залежність маси тіла від росту).

Серед статистичних залежностей важливого значення набуває **кореляція** (від лат. *correlatio* – кореляція, відповідність) – зміна середнього значення одного показника в залежності від значення іншого. Для дослідження подібних взаємозв’язків застосовують спеціальний статистичний підхід – кореляційний аналіз, основне завдання якого полягає у визначенні форми, структурності та спрямованості досліджуваних показників. Оскільки для різних типів шкал вимірювання використовуються різні методи кореляційного аналізу, першим кроком є правильне визначення шкали, за якою проводиться вимірювання.

Оцінка форми, близькості і спрямованості взаємозв’язку. Аналіз взаємозв’язків починається з графічного представлення результатів вимірювань в прямокутній системі координат [24]. Припустимо, що шість електричних підстанцій мають показник ефективності перетворення енергії до впровадження модернізації (x) та після її завершення (y). Запишемо результати вимірювань.

Для цих даних побудуємо графік, де значення одного результату X відкладаються по осі абсцис, а іншого Y – по осі ординат, так що кожна пара значень відображатиметься у вигляді окремої точки на координатній площині.

Такий графік називають **діаграмою розсіювання** або **кореляційним полем**. Візуальне спостереження за ним дозволяє оцінити характер взаємозв'язку між змінними. У даному випадку точки розташовані приблизно у формі еліпса. Подібну впорядковану конфігурацію можна розглядати як прояв **лінійної залежності** або лінійної форми взаємозв'язку.

Однак на практиці можна зустріти й іншу форму взаємозв'язку.

Візуальний аналіз кореляційного поля дає можливість виявити форму статистичної залежності – лінійну або нелінійну. Це має важливе значення для наступного кроку аналізу, який полягає у виборі та розрахунку відповідного коефіцієнта кореляції.

Для оцінки сили взаємозв'язку в кореляційному аналізі використовується значення (абсолютне значення) спеціального показника – **коефіцієнта кореляції**. Абсолютне значення будь-якого коефіцієнта кореляції лежить в діапазоні від 0 до 1. Значення цього коефіцієнта пояснюється (інтерпретується) наступним чином:

1. Коефіцієнт кореляції $=1,00$ (функціональна залежність, оскільки значення одного показника відповідає тільки одному значенню іншого показника і тому на діаграмі розсіювання не спостерігається варіації).

2. Коефіцієнт кореляції $=0,99-0,7$ (сильна статистична залежність).

3. Коефіцієнт кореляції $=0,69-0,5$ (середня статистична залежність).

4. Коефіцієнт кореляції $=0,49-0,2$ (слабка статистична залежність).

5. Коефіцієнт кореляції $=0,19-0,09$ (дуже слабка статистична залежність).

6. Коефіцієнт кореляції $=0,00$ (кореляція відсутня).

Таким чином, величина (абсолютна величина) коефіцієнта кореляції, що змінюється від 0 до 1, дає можливість оцінити силу взаємозв'язку.

Спрямованість залежності відображається в знаку коефіцієнта кореляції. Знак «+» вказує на пряму пропорційну або додатну залежність (тобто збільшення одного показника призводить до збільшення іншого); знак «-» вказує на зворотну або від'ємну залежність, тобто збільшення одного показника призводить до зниження іншого).

Регресія. У практичних дослідженнях виникає необхідність апроксимації (наближеного опису) діаграми розсіювання за допомогою математичного рівняння.

Для лінійної залежності це зробити просто: можна замінити кореляційний еліпс на пряму. У декартовій системі координат рівняння прямої записується так:

$$y = a + bx.$$

Дане рівняння називається **рівнянням регресії**, де a і b – **параметри рівняння регресії**, і визначають відрізок, відрізаний прямою лінією на осі Y , b зміна Y при зміні X на одиницю, а також називається **коефіцієнтом регресії**.

Чим менш розсіяні точки на діаграмі розсіювання, тим точніше рівняння регресії відображає зв'язок між змінними, що свідчить про сильніший взаємозв'язок. Варто зазначити, що рівняння прямої може бути застосоване лише

для моделювання лінійних залежностей. У разі нелінійних залежностей математичні позначення можуть бути представлені параболою, гіперболою та іншими рівняннями.

Всі коефіцієнти кореляції і регресії дають лише кількісну міру взаємозв'язку, але нічого не говорять про причини взаємозв'язку. Визначити ці причини повинен дослідник.

Розрахунок парного лінійного коефіцієнта кореляції Браве-Пірсона. Обчислення значення коефіцієнта відношення є механічним розрахунком. Однак йому повинні передувати деякі питання, на які потрібно знайти відповіді. Ці питання відносяться до досліджуваних показників і формулюються наступним чином: за якою шкалою вимірюється досліджуваний показник? Скільки вимірів цього показника було зроблено? Чи можна вважати ряд показників показником зразком, який має нормальний закон розподілу? Кожен випадок пов'язаний з розрахунком певного коефіцієнта взаємозв'язку.

Парний лінійний коефіцієнт кореляції Браве-Пірсона використовується тільки в тому випадку, якщо результати вимірюються за шкалою інтервалів або співвідношень, а форма залежності лінійна!

$$r = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{nS_xS_y}.$$

У деяких випадках сила взаємозв'язку визначається на підставі коефіцієнта детермінації, який розраховується за формулою:

$$D = r^2 \times 100\%.$$

Цей коефіцієнт визначає ту частину сумарної варіації одного показника, яка пояснюється варіацією іншого.

Обчислення коефіцієнтів рівняння регресії. У разі лінійної залежності рівняння регресії є рівнянням прямої лінії. І таких рівнянь два: пряме і обернене.

$$y = a_1 + b_{y/x} \times x,$$

$$x = a_2 + b_{x/y} \times y.$$

Значення коефіцієнтів регресії розраховується за формулами

$$b_{y/x} = r \times \frac{S_y}{S_x},$$

$$b_{x/y} = r \times \frac{S_x}{S_y}.$$

Коефіцієнт регресії b має розмірність, що дорівнює відношенню розмірностей досліджуваних показників X і Y , і той же знак, що і коефіцієнт кореляції.

$$a_1 = \bar{y} - b_{y/x} \times \bar{x},$$

$$a_2 = \bar{x} - b_{x/y} \times \bar{y}.$$

Для оцінки якості рівняння регресії обчислюється *залишкове стандартне відхилення*.

$$S_{y/x} = S_y \sqrt{1 - r^2},$$

$$S_{x/y} = S_x \sqrt{1 - r^2}.$$

Ці оцінки є абсолютними і тому не можуть бути порівняні між собою, тому вводяться оцінки відносної похибки рівнянь, виражені у відсотках.

$$\delta_{y/x} = \frac{S_{y/x}}{\bar{y}} \times 100\%,$$

$$\delta_{x/y} = \frac{S_{x/y}}{\bar{x}} \times 100\%.$$

Чим менше похибка рівняння, тим точнішою вона буде, а, значить, прийнятною на практиці.

Схема на **рис. 5.7** описує логіку вибору статистичного критерію кореляції залежно від типу даних та характеру їх розподілу. Процес починається з визначення того, чи потрібно оцінити зв'язок між двома змінними X і Y . Далі перевіряється, чи обидві змінні є метричними, тобто кількісними. Якщо хоча б одна змінна не є кількісною, одразу застосовується кореляція Спірмена, оскільки вона працює з ранговими або порядковими даними. Якщо обидві змінні є метричними, наступним кроком є перевірка нормальності їх розподілу. У випадку, коли розподіл обох змінних близький до нормального, застосовується кореляція Пірсона, яка оцінює силу та напрям лінійного зв'язку. Якщо ж розподіл хоча б однієї змінної відхиляється від нормального, рекомендується використовувати кореляцію Спірмена, оскільки вона не чутлива до форми розподілу та базується на рангах. Таким чином, схема забезпечує простий і послідовний вибір між двома основними методами кореляційного аналізу, орієнтуючись на тип даних і статистичні властивості вибірки.

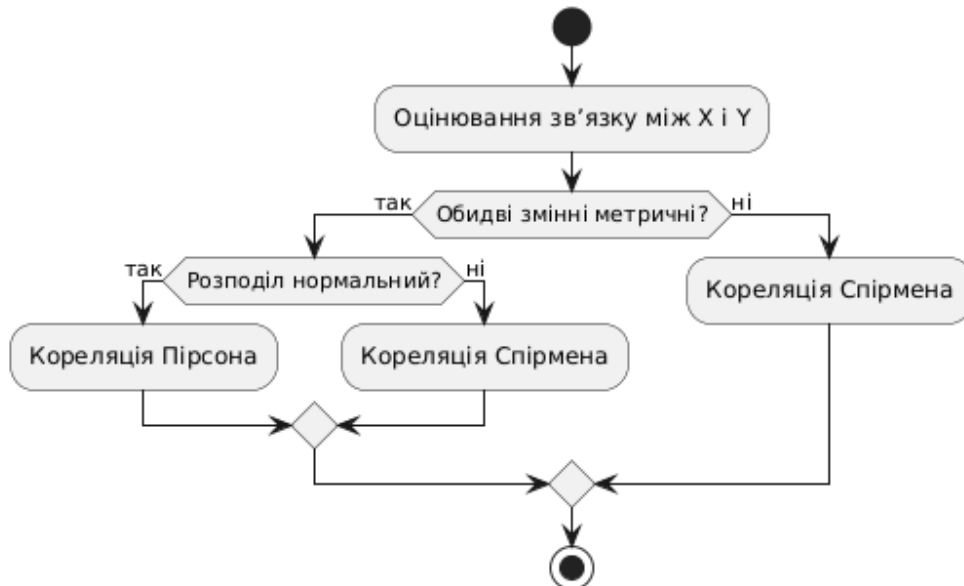


Рис. 5.7. Вибір критерію для оцінювання кореляції

Приклад 5.1. На підстанції протягом доби було виконано 12 послідовних вимірювань напруги в мережі. Отримані значення наведено у вибірці:

220,1	219,8	220,3	220,0	220,2	219,7
220,0	219,8	220,2	219,9	220,1	220,4

Перевірити, чи підпорядковуються дані нормальному розподілу.

Розв'язання. Виконаємо формулювання гіпотез:

нульова гіпотеза H_0 : вибірка має нормальний розподіл;

альтернативна гіпотеза H_1 : вибірка не є нормальною.

Рівень значущості приймаємо $\alpha=0,05$.

Оцінимо наскільки ранжовані значення вибірки відповідають очікуваним значенням нормального розподілу, застосовуючи критерій Шапіро-Уїлка. Статистика тесту позначається:

$$W = \frac{(\sum a_i x_{(i)})^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2},$$

де $x_{(i)}$ – впорядковані значення вибірки, a_i – коефіцієнти, що залежать від розміру вибірки.

Через складність ручних обчислень тест виконується програмно (Python, R, Excel, SPSS тощо).

Обчислення у Python дає наступні результати:

$$W = 0,981, p = 0,95.$$

Виконаємо інтерпретацію результатів, для цього порівнюємо p -значення з рівнем значущості. Оскільки рівень значущості менше p -значення $p = 0,95 > 0,05$, то немає підстав відхиляти нульову гіпотезу.

Отже, вибірка не має статистично значущих відхилень від нормального розподілу.

Відповідь: оскільки дані напруги розподілені нормально, можна застосовувати t -критерій Стюдента та інші параметричні методи для подальшого аналізу. Перевірка нормальності підтверджує коректність використання класичних статистичних підходів у дослідженні стабільності напруги на підстанції.

Приклад 5.2. Під час діагностики роботи інвертора було виконано 10 вимірювань рівня гармонічних спотворень THD (%) у вихідній напрузі. Отримані значення:

4,1	4,3	4,0	4,2	4,5	7,8	4,1	4,4	4,2	8,1
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Перевірити, чи підпорядковуються ці дані нормальному розподілу (визначаємо, чи можна застосовувати параметричні методи (наприклад, t -критерій), або слід використовувати непараметричні аналоги).

Розв'язання. Виконаємо формулювання гіпотез:

нульова гіпотеза H_0 : дані мають нормальний розподіл;

альтернативна гіпотеза H_1 : дані не є нормально розподіленими.

Рівень значущості: $\alpha=0,05$.

Далі застосовуємо критерій Шапіро-Уїлка, однак, скоріш за все, через наявність підозрілих «викидів» (7,8 і 8,1) очікується відхилення від нормальності (асиметрія).

При обчисленнях у Python отримаємо:

$$W = 0,742, p = 0,004.$$

Виконаємо інтерпретацію результатів, для цього порівнюємо p -значення з рівнем значущості. Оскільки рівень значущості більше p -значення $p = 0,004 < 0,05$, то нульова гіпотеза відхиляється.

Отже, дані **не мають нормального розподілу**, що і очікувалось згідно наявної асиметрії.

Оскільки розподіл не є нормальним, t -критерій застосовувати не можна.

Для подальшого аналізу слід використовувати непараметричні методи, наприклад:

- критерій Вілкоксона – для порівняння двох залежних вибірок;
- критерій Манна-Уїтні – для порівняння двох незалежних вибірок;
- критерій Краскела-Уолліса – для трьох і більше груп.

Відповідь: дані THD мають статистично значуще відхилення від нормального розподілу $p = 0,004$, отже параметричні методи аналізу (зокрема t -критерій) не можуть бути використані. Для подальшого дослідження слід застосовувати непараметричні критерії, які не вимагають нормальності розподілу.

Алгоритм розв'язування задач з теми «Статистичні методи в електроенергетиці»

1. Сформулювати дослідницьке завдання. Визначити, що потрібно оцінити: середнє значення, різницю між групами, силу зв'язку або вплив фактора.

2. Підготувати вихідні дані. Перевірити коректність вимірювань, одиниці, повноту вибірки та відсутність очевидних помилок.

3. Обчислити описові статистики. Знайти середнє значення, дисперсію, стандартне відхилення та, за потреби, стандартну похибку.

4. Перевірити нормальність розподілу. Використати критерій Шапіро-Уїлка для кожної вибірки, якщо планується застосування параметричних методів.

5. Перевірити однорідність дисперсій (за потреби). Якщо порівнюються дві або більше вибірок, застосувати критерій Левена або Фішера для оцінки рівності дисперсій.

6. Сформулювати статистичні гіпотези. Визначити нульову та альтернативну гіпотези відповідно до задачі (рівність середніх, відсутність зв'язку тощо).

7. Обрати відповідний статистичний критерій:

- о для двох вибірок – t -критерій Стьюдента (залежні/незалежні);
- о для трьох і більше – однофакторна ANOVA;
- о для оцінки зв'язку – кореляція Пірсона або Спірмена.

8. Обчислити значення критерію. Розрахувати t статистику, F статистику або коефіцієнт кореляції залежно від задачі.

9. Порівняти отримане значення з критичним або оцінити p значення. Визначити, чи є підстави відхиляти нульову гіпотезу.

10. Виконати додатковий аналіз (за потреби). Якщо ANOVA показала різницю між групами, застосувати тест Тьюкі або інший метод для визначення конкретних відмінностей.

11. Інтерпретувати результати. Пояснити статистичні висновки у контексті енергетичної системи, обладнання або процесу.

Сформулювати підсумковий висновок. Чітко зазначити, чи підтверджено гіпотезу, які показники отримано та що вони означають для практики.

5.6. Застосування методів математичної статистики в енергетичних дослідженнях

У сучасних умовах розвитку енергетики особливої актуальності набуває аналіз великих обсягів даних, пов'язаних із виробництвом, споживанням та ефективністю використання енергоресурсів. Методи математичної статистики дають змогу виявляти закономірності, встановлювати кількісні зв'язки між параметрами енергетичних систем, робити обґрунтовані прогнози та приймати оптимальні рішення.

Серед ключових статистичних інструментів, які знаходять широке застосування в енергетиці, слід виділити вибіркового метод (для оцінки загальних характеристик на основі обмежених даних), регресійний аналіз (для моделювання залежностей між змінними) та кореляційний аналіз (для оцінки сила зв'язку між параметрами).

Схема на **рис. 5.8** демонструє приклад адаптації загальної статистичної логіки до специфіки прикладних задач у сфері енергетики. Вона побудована як послідовна система прийняття рішень, що дозволяє досліднику швидко визначити відповідний статистичний метод залежно від типу аналізу, який проводиться.

Першим кроком є визначення типу задачі. Якщо мета – оцінити стабільність технологічного процесу (наприклад, генерації електроенергії або споживання ресурсів), застосовується коефіцієнт варіації, який дозволяє кількісно оцінити рівень коливань відносно середнього значення.

Якщо дослідник хоче порівняти режими роботи обладнання або систем, схема пропонує уточнити, чи йдеться про порівняння середніх значень. У випадку двох груп застосовується t-критерій Стьюдента, а якщо порівнюється більше двох режимів – використовується дисперсійний аналіз (ANOVA).

Якщо мета – порівняння дисперсій (наприклад, стабільності роботи в різних умовах), застосовується F-критерій Фішера, який дозволяє оцінити, чи відрізняється варіативність між групами.

У випадку, коли дослідник перевіряє вплив одного або кількох факторів на енергетичний показник (наприклад, вплив температури та типу обладнання на ККД), схема пропонує застосувати однофакторну або двофакторну ANOVA відповідно до кількості незалежних змінних.

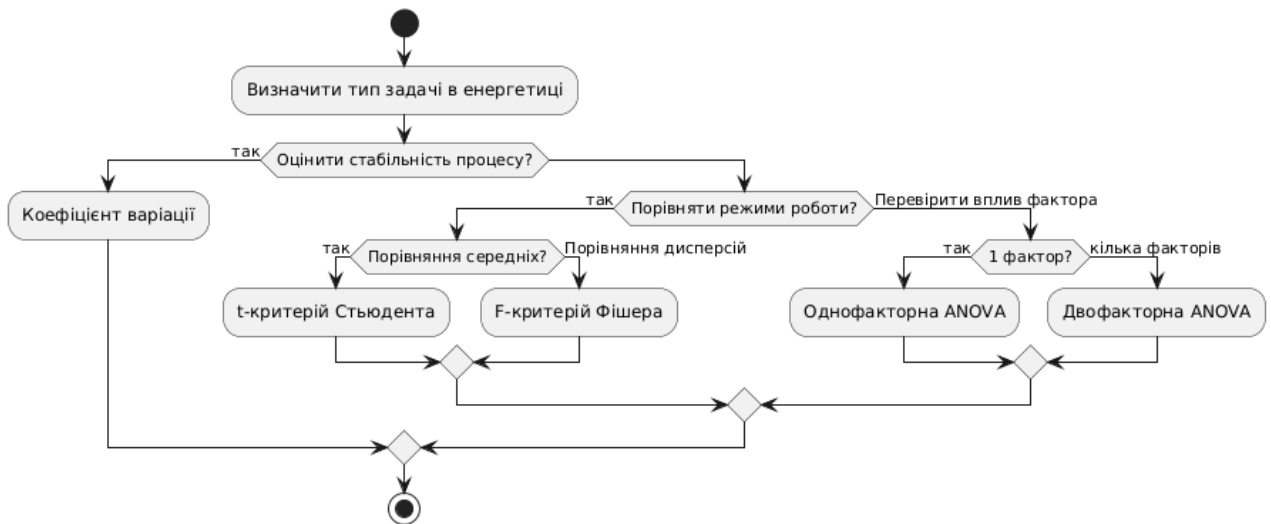


Рис. 5.8. Вибір статистичного критерію в енергетичних дослідженнях

Нижче наведено приклади типових задач, що ілюструють застосування цих методів у практичному контексті енергетичної галузі.

Приклад 5.3. На території області діє 150 малих сонячних електростанцій. Щоб оцінити середню місячну генерацію електроенергії однією станцією, провели вибіркове дослідження 10 станцій, які показали такі значення виробітку за квітень (у МВт·год): 46, 52, 50, 47, 55, 48, 53, 49, 51, 54.

Оцініть середній місячний виробіток електроенергії однією станцією. Знайдіть довірчий інтервал для істинного середнього значення з надійністю 95%.

Розв’язання. Обчислимо вибіркове середнє значень виробітку електроенергії за квітень:

$$x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{46 + 52 + 50 + 47 + 55 + 48 + 53 + 49 + 51 + 54}{10} = \frac{505}{10} = 50,5 \text{ МВт} \cdot \text{год.}$$

Вибіркове середньоквадратичне відхилення (s) будемо розраховувати за формулою:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2},$$

для чого спочатку знайдемо відхилення від середнього та їх квадрати, заповнивши таблицю:

x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
46	-4,5	20,25
52	1,5	2,25
50	-0,5	0,25
47	-3,5	12,25
55	4,5	20,25

x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
48	-2,5	6,25
53	2,5	6,25
49	-1,5	2,25
51	0,5	0,25
54	3,5	12,25

Підставляючи отримані значення в формулу, маємо:

$$\sum (x_i - \bar{x})^2 = 82,5 \Rightarrow s = \sqrt{\frac{82,5}{9}} = \sqrt{9,17} \approx 3,03.$$

Стандартна похибка середнього обчислюється як відношення стандартного відхилення вибірки до кореня квадратного з кількості спостережень:

$$SE = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{3,03}{\sqrt{10}} \approx \frac{3,03}{3,16} \approx 0,96.$$

Знайдемо t -критичне значення для довірчої ймовірності 95% та $n - 1 = 9$ ступенів свободи: за таблицею Стьюдента: $t_{0,025;9} \approx 2,262$.

Розрахуємо довірчий інтервал:

$$\bar{x} \pm t \cdot SE = 50,5 \pm 2,262 \cdot 0,96 = 50,5 \pm 2,17.$$

Отже нижня межа буде становити $50,5 - 2,17 = 48,33$, а верхня межа – $50,5 + 2,17 = 52,67$.

Відповідь: оцінка середнього місячного виробітку становить 50,5 МВт·год; 95% довірчий інтервал знаходиться в межах від 48,33 до 52,67 МВт·год.

Приклад 5.4. Перевірити, чи має гнучкий фотоелемент кращу середню генерацію енергії порівняно з традиційним кремнієвим модулем в умовах хмарної погоди. Середньодобову генерацію енергії (Вт·год/см²) наведено в таблиці:

День	Гнучкий елемент, Вт·год	Кремнієвий елемент, Вт·год
1	2,6	2,3
2	2,7	2,4
3	2,8	2,2
4	2,9	2,5
5	2,8	2,1
6	2,7	2,4
7	2,6	2,3

Розв'язання. Виконаємо формулювання гіпотез:

нульова гіпотеза H_0 : середні значення однакові $\mu_1 = \mu_2$;

альтернативна гіпотеза H_1 : гнучкий елемент має вищу генерацію $\mu_1 > \mu_2$.

Рівень значущості приймаємо $\alpha = 0,05$.

Розрахунок середніх і стандартних відхилень проведемо за відомими формулами:

- ♦ для гнучкого елемента:

$$\bar{x}_1 = \frac{2,6 + 2,7 + 2,8 + 2,9 + 2,8 + 2,7 + 2,6}{7} = 2,7286,$$

$$\sum (x_i - \bar{x}_1)^2 = 0,0742,$$

$$s_1 = \sqrt{\frac{0,0742}{6}} = \sqrt{0,01237} = 0,1112;$$

- ♦ для кремнієвого елемента:

$$\bar{x}_2 = \frac{(2,3 + 2,4 + 2,2 + 2,5 + 2,1 + 2,4 + 2,3)}{7} = 2,3143,$$

$$s_2 = 0,1390.$$

Далі обчислюємо t-критерій (для незалежних вибірок), для чого використаємо формулу для двох вибірок з однаковим обсягом ($n = 7$):

$$t_{\text{емп}} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{2,7286 - 2,3143}{\sqrt{\frac{0,1115^2}{7} + \frac{0,1390^2}{7}}} = \frac{0,4143}{\sqrt{0,0019 + 0,0028}} =$$

$$= \frac{0,4143}{\sqrt{0,0047}} \approx \frac{0,4143}{0,0685} \approx 6,16.$$

Оскільки збір даних проведено впродовж 7 днів, то кількість ступенів свободи становитиме $\nu = n_1 + n_2 - 2 = 12$.

З таблиці t-розподілу для $\nu = 12$ одностороннього тесту з рівнем значущості $\alpha = 0.05$ отримаємо критичне значення: $t_{\text{крит}} \approx 1,782$.

Відповідь: оскільки $t_{\text{емп}} = 6,16 > t_{\text{крит}} = 1,782$, то нульова гіпотеза відхиляється, отже гнучкий фотоелемент має статистично значущо вищу середню генерацію енергії в умовах хмарної погоди порівняно з традиційним кремнієвим модулем ($p < 0,05$).

Приклад 5.5. Провести аналіз надійності електропостачання за допомогою методу дисперсійного аналізу (ANOVA) за даними про середній щомісячний час простою (у хвилинах) через відключення електроенергії на трьох підстанціях за останні 6 місяців:

Місяць	Підстанція А	Підстанція В	Підстанція С
Січень	45	50	42
Лютий	48	52	40
Березень	44	49	43
Квітень	46	51	41
Травень	47	50	44
Червень	45	53	42

Чи є статистично значуща різниця у середньому часі простою між трьома підстанціями?

Розв'язання. Виконаємо формулювання гіпотез:

нульова гіпотеза H_0 : середній час простою однаковий на всіх трьох підстанціях;

альтернативна гіпотеза H_1 : хоча б одна пара підстанцій має різний середній час простою.

Обчислимо середній час простою для кожної підстанції:

Підстанція А:

$$\bar{x}_A = \frac{(45 + 48 + 44 + 46 + 47 + 45)}{6} = \frac{275}{6} \approx 45,83.$$

Підстанція В:

$$\bar{x}_B = \frac{50 + 52 + 49 + 51 + 50 + 53}{6} = \frac{305}{6} \approx 50,83.$$

Підстанція С:

$$\bar{x}_C = \frac{42 + 40 + 43 + 41 + 44 + 42}{6} = \frac{252}{6} = 42,00.$$

Загальна середня:

$$\bar{x}_{\text{заг}} = \frac{275 + 305 + 252}{18} = \frac{832}{18} \approx 46,22.$$

Розрахуємо міжгрупову дисперсію (SSB):

$$\begin{aligned} SSB &= n \sum (\bar{x}_i - \bar{x}_{\text{заг}})^2 = \\ &= 6[(45,83 - 46,22)^2 + (50,83 - 46,22)^2 + (42 - 46,22)^2] = \\ &= 6[(-0,39)^2 + (4,61)^2 + (-4,22)^2] = \\ &= 6[0,1521 + 21,2521 + 17,8084] \approx 6 \times 39,2126 \approx 235,28. \end{aligned}$$

Для кожної підстанції знаходимо суму квадратів відхилень:

$$\text{А: } (45 - 45,83)^2 + (48 - 45,83)^2 + \dots = 0,69 + 4,69 + 3,36 + 0,03 + 1,37 + 0,69 = 10,83;$$

$$\text{В: } (50 - 50,83)^2 + (52 - 50,83)^2 + \dots = 0,69 + 1,36 + 3,36 + 0,03 + 0,69 + 4,69 = 10,83;$$

$$\text{С: } (42 - 42)^2 + (40 - 42)^2 + \dots = 0 + 4 + 1 + 1 + 4 + 0 = 10.$$

За отриманими значеннями розраховуємо внутрішньогрупову дисперсію (SSW):

$$SSW = 10,83 + 10,83 + 10 = 31,66.$$

Оскільки маємо три підстанції (кількість груп дорівнює 3), то ступені вільності між групами становитиме:

$$v_{\text{between}} = 3 - 1 = 2.$$

Загальна кількість спостережень дорівнює 18, отже ступені вільності всередині груп визначаємо як:

$$v_{\text{within}} = 18 - 3 = 15.$$

Тоді середній квадрат між групами (MSB) становить

$$MSB = \frac{SSB}{v_{\text{between}}} = \frac{235,28}{2} \approx 117,64,$$

а середній квадрат всередині груп (MSW):

$$MSW = SSW / v_{within} = \frac{31,66}{15} \approx 2,11.$$

F-критерій знайдемо як відношення середнього квадрату між групами та середнього квадрату всередині груп:

$$F_{розр} = \frac{MSB}{MSW} = \frac{117,64}{2,11} \approx 55,74.$$

Порівнюючи отримане значення з критичним значенням F, яке для $\alpha = 0,05, v_1 = 2, v_2 = 15$ становить $F_{кр} \approx 3,68$.

Оскільки $F_{розр} = 55,74 > F_{кр} = 3,68$, то відкидаємо нульову гіпотезу.

Відповідь: середній час простою статистично значущо відрізняється між трьома підстанціями: підстанція В демонструє найбільші значення простою, що може свідчити про підвищене навантаження, технічні проблеми, недостатню модернізацію. Рекомендується провести технічний аудит підстанції В.

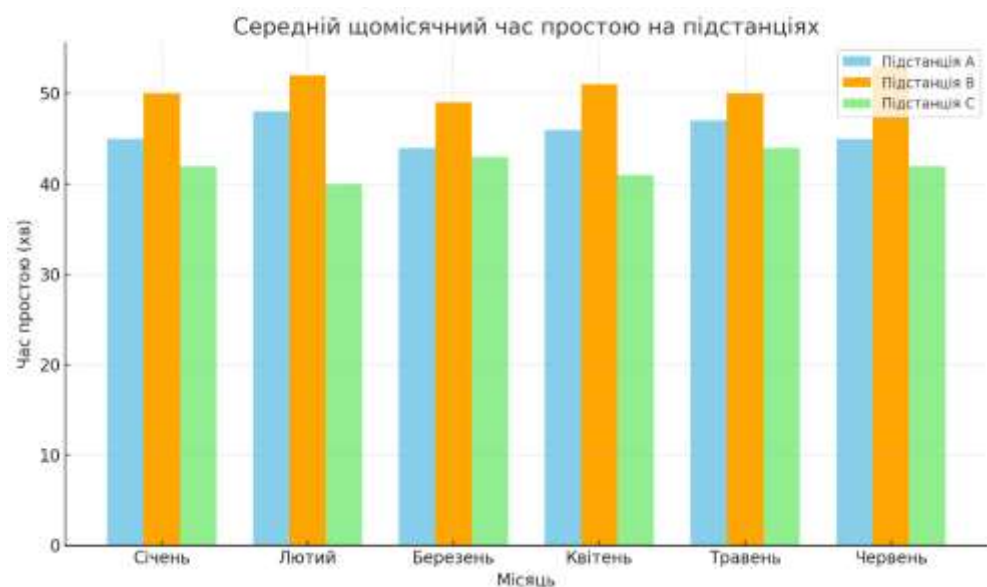


Рис. 5.9. Стовпчаста діаграма простою на підстанціях

Діаграма (рис. 5.9) ілюструє щомісячний час простою на трьох підстанціях. Добре видно, що підстанція В має вищі значення простою в порівнянні з А та С, що й підтверджено статистичним аналізом.

Приклад 5.6. На електростанції вимірюють залежність виробітку електроенергії від кількості сонячних годин. У табл. 5.3 наведено дані, отримані за 7 днів.

Розв'язання. Обчислимо середні значення виробітку електроенергії та кількості сонячних годин:

$$\bar{X} = \frac{5 + 6 + 4 + 7 + 3 + 8 + 6}{7} = \frac{39}{7} \approx 5,57,$$

$$\bar{Y} = \frac{20 + 22 + 18 + 25 + 15 + 27 + 23}{7} = \frac{150}{7} \approx 21,43.$$

Таблиця 5.3. Залежність виробітку електроенергії від кількості сонячних годин

День	Сонячні години, X , год	Вирібіток енергії, Y , МВт·год
1	5	20
2	6	22
3	4	18
4	7	25
5	3	15
6	8	27
7	6	23

Для обчислення коефіцієнта кореляції Пірсона, заповнимо **табл. 5.4.**

Коефіцієнт кореляції розрахуємо за формулою:

$$r = \frac{\sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum (X_i - \bar{X})^2 \sum (Y_i - \bar{Y})^2}}$$

Таблиця 5.4. Розрахункова таблиця

	$X_i - \bar{X}$	$Y_i - \bar{Y}$	$(X_i - \bar{X}) \cdot (Y_i - \bar{Y})$	$(X_i - \bar{X})^2$	$(Y_i - \bar{Y})^2$
	-0,570	-1,430	0,815	0,325	2,045
	0,430	0,570	0,245	0,185	0,325
	-1,570	-3,430	5,385	2,465	11,765
	1,430	3,570	5,105	2,045	12,745
	-2,570	-6,430	16,525	6,605	41,345
	2,430	5,570	13,535	5,905	31,025
	0,430	1,570	0,675	0,185	2,465
Сума	0,010	-0,010	42,286	17,714	101,714

Після обчислень отримуємо $r \approx 0.996$, що свідчить про сильний додатній зв'язок між сонячними годинами та виробітком енергії.

Рівняння лінійної регресії запишемо у вигляді:

$$Y = a + bX,$$

де b – коефіцієнт нахилу (показує, як змінюється Y при зміні X); a – вільний член (значення Y , коли $X = 0$).

Після обчислення коефіцієнтів:

$$b = \frac{\sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum (X_i - \bar{X})^2} \approx 2,39,$$

$$a = \bar{Y} - b \cdot \bar{X} = 21,43 - (2,39 \times 5,57) \approx 8,13,$$

отримаємо рівняння лінійної регресії:

$$Y = 8,13 + 2,39X.$$

Відповідь: отримане рівняння $Y = 8,13 + 2,39X$ дозволяє прогнозувати виробіток електроенергії залежно від кількості сонячних годин, наприклад, якщо

сонячних годин 9, то прогнозований виробіток становитиме $Y = 8,13 + 2,39 \cdot 9 = 29,62$ МВт·год.

Модель демонструє дуже сильний лінійний зв'язок між кількістю сонячних годин і виробітком електроенергії. Рівняння регресії дозволяє точно прогнозувати виробіток. Високе значення r свідчить про високу якість моделі. Модель може бути використана для оперативного планування навантаження електростанції.

Приклад 5.7. На сонячній електростанції встановлено два типи інверторів: інвертор А – стандартний; інвертор В – модернізований, з підвищеним ККД. Протягом 8 днів вимірювали добову генерацію енергії для обох інверторів, а також кількість сонячних годин за день.

День	Сонячні години, X, год	Генерація, А, кВт·год	Генерація, В, кВт·год
1	5	21	23
2	6	24	26
3	4	19	21
4	7	27	30
5	5	22	24
6	8	29	32
7	6	25	27
8	7	26	29

Перевірити, чи є статистично значуща різниця між середньою генерацією інверторів А і В (t-критерій Стьюдента для залежних вибірок). Оцінити силу зв'язку між кількістю сонячних годин і генерацією інвертора В (кореляція Пірсона).

Розв'язання. Для оцінки статистичної значущості різниці між середньою генерацією інверторів А і В виконаємо формулювання гіпотез:

нульова гіпотеза H_0 : середня генерація інверторів А і В однакова;

альтернативна гіпотеза H_1 : інвертор В має вищу середню генерацію.

Проведемо обчислення різниць між парами

$$d_i = B_i - A_i,$$

отримані дані внесемо до **табл. 5.5**.

За даними таблиці розрахуємо середнє різниць та стандартного відхилення різниць:

$$\bar{d} = 2,375, s_d = 0,517.$$

Розрахуємо емпіричне значення t-статистики:

$$t_{\text{емп}} = \frac{\bar{d}}{s_d/\sqrt{n}} = \frac{2,375}{0,517/\sqrt{8}} \approx 12,99.$$

Оскільки розглядаємо значення за 8 днів, то кількість ступені свободи становитиме:

$$n - 1 = 7.$$

Таблиця 5.5. Розрахункова таблиця до **прикладу 5.7**

День	A	B	$d = B - A$
1	21	23	2
2	24	26	2
3	19	21	2
4	27	30	3
5	22	24	2
6	29	32	3
7	25	27	2
8	26	29	3

Критичне значення для одностороннього тесту для рівня значущості $\alpha = 0.05$:

$$t_{кр}(0,05; 7) \approx 1,895.$$

Порівнюючи отримані значення t -критерію $t_{емп} = 12,99 > t_{кр} = 1,895$, нульову гіпотезу відхиляємо, отже інвертор В має статистично значущо вищу середню генерацію, ніж інвертор А.

Для оцінки зв'язку між сонячними годинами та генерацією інвертора В (кореляція Пірсона), сформулюємо гіпотези:

нульова гіпотеза H_0 : лінійного зв'язку між X і генерацією В немає,

альтернативна гіпотеза H_1 : лінійний зв'язок існує.

Обчислення коефіцієнта кореляції проведемо за формулою Пірсона:

$$r = 0,987.$$

Отримане значення близьке до 1, що свідчить про дуже сильний додатний зв'язок.

Для перевірки значущості кореляції знайдемо

$$t_{емп}^* = r \sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}} \approx 15,4.$$

Критичне значення в цьому випадку становитиме:

$$t_{кр}^*(0,05; 6) \approx 2,447$$

Оскільки $15,4 > 2,447$, то кореляція **статистично значуща**.

Відповідь: за результатами t -критерію Стюдента інвертор В демонструє вищу середню генерацію, ніж інвертор А, кількість сонячних годин має майже ідеальний лінійний зв'язок з генерацією інвертора В (кореляція Пірсона $r \approx 0,99$).

Приклад 5.8. Фактичне споживання електроенергії промисловим районом за минулий рік становить $W_0 = 450$ млн кВт·год. Згідно з планами розвитку, очікується щорічний приріст споживання на рівні 3%. Необхідно визначити

прогнозний обсяг споживання через 5 років (W_5). Розрахувати необхідну додаткову потужність, якщо середнє число годин використання максимуму навантаження $T_{max} = 5500$ год.

Розв'язання. Для прогнозування скористаємося формулою складних відсотків (геометрична екстраполяція):

$$W_n = W_0 (1 + \alpha)^n,$$

де $\alpha=0,03$ – коефіцієнт щорічного приросту; $n = 5$ – розрахунковий період.

$$W_5 = 450 \cdot (1 + 0,03)^5 = 521,67 \text{ млн кВт} \cdot \text{год.}$$

Далі знайдемо приріст споживання за 5 років:

$$\Delta W = W_5 - W_0 = 521,67 - 450 = 71,67 \text{ млн кВт} \cdot \text{год.}$$

Додаткова потужність ΔP , яку необхідно ввести або зарезервувати в системі для покриття цього приросту:

$$\Delta P = \frac{\Delta W}{T_{max}} = \frac{71,67 \cdot 10^6}{5500} \approx 13,03 \text{ МВт.}$$

Відповідь: прогнозне споживання електроенергії через 5 років становитиме 521,67 млн кВт·год. Для забезпечення цього обсягу необхідно збільшити потужність джерел живлення району на 13,03 МВт.

Запитання для самоконтролю

1. Що таке математична статистика і які її основні завдання?
2. Що таке генеральна та вибірка сукупність?
3. Які основні числові характеристики вибірки?
4. Що таке мода і медіана? Як їх визначити?
5. Дайте визначення вибіркового середнього. Чи є воно незміщеною оцінкою математичного сподівання?
6. Які показники розсіювання використовуються у статистиці?
7. Як обчислюється дисперсія та стандартне відхилення?
8. Що таке коефіцієнт варіації і як він використовується?
9. Що таке кореляція і які її види?
10. Які значення коефіцієнта кореляції свідчать про сильний або слабкий зв'язок?
11. Що таке регресія і як вона використовується для прогнозування?
12. Як будується рівняння лінійної регресії?
13. Сформулюйте поняття нульової H_0 та альтернативної H_1 гіпотез.
14. Як математична статистика допомагає аналізувати енергетичні процеси?
15. Які статистичні методи використовуються для прогнозування споживання електроенергії?
16. Як кореляційний аналіз застосовується в енергетиці?
17. Як вибіркового метод допомагає оцінити параметри енергетичних об'єктів?
18. Опишіть алгоритм перевірки гіпотези про рівність середніх двох вибірок (t-критерій Стюдента).
19. Опишіть роль кореляційного аналізу при дослідженні впливу метеорологічних факторів на генерацію відновлюваних джерел енергії (ВЕЕ).

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Ахметов Р. Ф. Спортивна метрологія : навч. посіб. Житомир : Вид-во ФОП Євенок О. О., 2017. 176 с.
2. Барабаш О. В., Свинчук О. В., Мусієнко А. П. Математичне моделювання та оптимізація процесів і систем. Частина 1 : навч. посіб. / КПІ ім. Ігоря Сікорського. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. 160 с.
3. Білоус О. А., Кравченко Ю. А. Прикладні задачі з вищої математики : навч. посіб. Суми : Сумський державний університет, 2023. 248 с.
4. Булаєнко М. В. Теорія ймовірностей : конспект лекцій з дисципліни “Теорія ймовірностей і математична статистика” (для студентів 2 курсу денної і заочної форм навчання освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавр, напряму підготовки 6.070101 “Транспортні технології (за видами транспорту)”). Харків : ХНАМГ, 2011. 174 с.
5. Булашенко А. В. Теорія електричних та магнітних кіл : конспект лекцій. У п’яти частинах. Частина 1: Лінійні електричні кола постійного струму. Суми : Вид-во СумДУ, 2010. 180 с.
6. Васильченко І. П. Вища математика для економістів (спеціальні розділи). Київ : Кондор, 2007. 352 с.
7. Диференціальне та інтегральне числення функцій кількох змінних. Диференціальні рівняння : конспект лекцій (І курс, II семестр) / В. О. Гайдей та ін. Київ : НТУУ «КПІ», 2013. 144 с.
8. Гончаренко Я. В. Математичне програмування. Київ : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2010. 184 с.
9. Гончаров В. В., Гончарова С. Я., Філімоніхіна І. І. Конспект лекцій з курсу лінійної алгебри та аналітичної геометрії. Кредитно-модульна система : метод. вказівки для студентів технічних спеціальностей. Кіровоград : КНТУ, 2011. 147 с.
10. Гуменюк Т. Б. Моделювання в педагогічній діяльності. *Науковий часопис НПУ імені МП Драгоманова. Серія 13: Проблеми трудової та професійної підготовки*. 2010. №. 7. С. 66-72.
11. Диференціальні рівняння та системи : Методичні вказівки та варіанти завдань для типового розрахунку з вищої математики для студентів напрямів підготовки «Теплоенергетика», «Електротехніка та електротехнології», «Електромеханіка» і «Гірництво» / Уклад.: Т. В. Карнаухова, В. Ф. Зражевська, В. В. Могильова. Київ : НТУУ «КПІ», 2014. 80 с.
12. Дривецький С. І., Данильченко Д. О., Шевченко С. Ю. Індуктовані блискавками перенапруги в повітряних лініях з захищеними проводами середніх класів напруги : монографія. Нац. техн. ун-т «Харків. політехн. ін-т». Дніпро : ФОП Середняк Т. К., 2023. 165 с.
13. Дуднік С. І. Елементи комбінаторики та теорії ймовірностей : навч. посіб. для спец. 5.05020203 «Монтаж, обслуговування та ремонт автоматизованих систем керування рухом на залізничному транспорті», 5.05020204 «Обслуговування електрозв’язку на транспорті», 5.05070103

«Електропостачання», 5.07010501 «Технічне обслуговування, ремонт та експлуатація тягового рухомого складу». Київ : Київ. електромех. технікум залізн. трансп. ім. М. Островського, 2012. 55 с.

14. Економіко-математичне моделювання : навчальний посібник / за ред. О. Т. Івашука. Тернопіль : ТНЕУ «Економічна думка», 2008. 704 с.

15. Єгоров О. Б., Глебова М. Л. Прикладне програмне забезпечення для дослідження процесів в електротехнічних і енергетичних системах : конспект лекцій для здобувачів усіх форм навчання першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальності 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка, освітня програма «Нетрадиційні та відновлювальні джерела енергії» / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2021. 87 с.

16. Єгоршин О. О., Малярець Л. М., Сінкевич Б. В. Довідник з математичної статистики з прикладами обчислень у MatLab : навч.-практ. посіб. Ч. 2. Харків : Вид. ХНЕУ, 2009. 508 с.

17. Єфіменко С. В. Конспект лекцій з курсу «Теорія ймовірностей» : метод. посіб. для студ. факультету радіофізики, електроніки і комп'ютерних систем. Київ : Вид. лаб. факультету радіофізики, електроніки і комп'ютерних систем КНУ імені Тараса Шевченка, 2019. 53 с.

18. Жильцов О. Б. Теорія ймовірностей та математична статистика у прикладах і задачах : навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / за ред. Г. О. Михаліна. Київ : Київ. ун-т ім. Б. Грінченка, 2015. 336 с.

19. Жукова В. М., Переяславська С. О. Комп'ютерні системи математичного моделювання : навч. посіб. до вивчення дисципліни для студентів спец. 6.050103 „Програмна інженерія” / Держ. закл. „Луган. нац. ун-т імені Тараса Шевченка”. Луганськ : ДЗ „ЛНУ імені Тараса Шевченка”, 2017. 120 с.

20. Килимник І. М., Яримбаш Д. С. Диференціальні рівняння : навч. посіб. Вид. 2-е, виправл. і допов. Запоріжжя : НУ «Запорізька політехніка», 2024. 212 с.

21. Коваленко Л. Б., Станішевський С. О. Дискретна математика для менеджерів : навч. посіб. / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2015. 280 с.

22. Загорулько А. В., Кайота Д. О. Комп'ютерні методи оптимізації в механіці: конспект лекцій. Суми : Сумський державний університет, 2019. 48 с.

23. Кравець В. Г., Темченко О. А., Вапнічна В. В., Шиповський Г. В. Дослідження надійності функціонування гірничотранспортного устаткування на глибоких залізничних кар'єрах. *Вісник Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут»*. Серія: Гірництво. 2016. № 30. С. 48-60.

24. Кувалдіна О. В. Спортивна метрологія : навч. посіб. / уклад. О. В. Кувалдіна. Миколаїв : НУК, 2025. 198 с.

25. Литвинов А. Л. Чисельні методи: теорія і практика : навч. посіб. / А. Л. Литвинов ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2022. 166 с.

26. Литвинова О. Б. Методи імітаційного моделювання в оцінці надійності найпростіших систем. *Вісник Приазовського державного технічного університету. Серія: Економічні науки*. 2016. № 31. С. 168-175.
27. Лінійне програмування. Одновимірні методи оптимізації. Методичні вказівки до лабораторних робіт з дисципліни «Математичні методи оптимізації та дослідження операцій» для студентів напряму 6.050103 “Програмна інженерія” денної форми навчання / Укладачі: В. І. Дубровін, Л. Ю. Дейнега. Запоріжжя : ЗНТУ, 2014. 85 с.
28. Малярець Л. М. Економіко-математичні методи та моделі : навчальний посібник. Харків : Вид. ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2014. 412 с.
29. Малярець Л. М., Афанасьєва Л. М., Ігначкова А. В. Вища математика для економістів. Харків : ВД «ІНЖЕК», 2011. 425 с.
30. Методичні вказівки до самостійної роботи, проведення практичних занять і виконання контрольної роботи з дисципліни «Економіко-математичне моделювання» (для студентів 3 курсу заочної форми навчання напряму підготовки 6.030504 «Економіка підприємства») / Самойленко М. І. та ін. Харків : ХНАМГ, 2011. 126 с.
31. Молода академія – 2017 : збірник тез доповідей Всеукраїнської науково-технічної конференції студентів і молодих учених, м. Дніпро, 2017 р. / НМетАУ. Дніпро: НМетАУ, 2017. 279 с.
32. Математичне моделювання та оптимізація систем безпеки : конспект лекцій / М. М. Мурін та ін. Харків : Нац. ун-т цивіл. захисту України, 2019. URL: https://pb.nuczu.edu.ua/images/asbit/Literatyra/Mat_model.pdf (дата звернення 18.05.2025)
33. Математичне моделювання інформаційних систем : навч. посіб. І. І. Обод та ін. Харків : Друкарня Мадрид, 2019. 270 с.
34. Огорокова В. В. Образ нової соціальної реальності Постмодерну та форми його моделювання : монографія. Одеса: БМВ, 2018. 288 с.
35. Побудова математичної моделі задачі [Електронний ресурс]. URL: <http://um.co.ua/10/10-13/10-130896.html> (дата звернення: 01.07.2025).
36. Подчашинський Ю. О. Проектування комп'ютеризованих систем управління технологічними процесами : навч. посіб. Житомир : ЖДТУ, 2018. 200 с.
37. Прокопович С. В., Сергієнко О. А., Чуйко І. М. Методичні рекомендації до виконання контрольної роботи з навчальної дисципліни «Оптимізаційні методи і моделі» для студентів галузі знань 0305 «Економіка та підприємництво» заочної форми навчання. Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2015. 63 с.
38. Рибалко А. П., Широкоград Л. Д. Методичні рекомендації та завдання до виконання контрольних робіт з навчальної дисципліни «Прикладна математика» для студентів напряму підготовки 6.051501 «Комп'ютерні технології та системи видавничо-поліграфічних виробництв» заочної форми навчання. Харків : Вид. ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2014. 76 с.
39. Салогуб М. В. Електронний підручник з дисципліни «Надійність, діагностика та експлуатація комп'ютерних систем та мереж» [Електронний

ресурс] : підручник. ДКПІ, 2016. 1 електрон. опт. диск (PDF). URL: <http://files.znu.edu.ua/files/Bibliobooks/Inshi73/0054374.pdf> (дата звернення: 24.08.2023).

40. Основи хімії і фізики горючих копалин / В. І. Саранчук та ін. Донецьк : Східний видавничий дім, 2008. 640 с.

41. Симплекс-метод розв'язування задач лінійного програмування [Електронний ресурс] // Лекція 3. Вінницький національний технічний університет. URL: https://jetiq.vntu.edu.ua/fdb/669/%D0%9B%D0%B5%D0%BA%D1%86%D1%96%D1%8F_3_20.pptx (дата звернення: 01.07.2025).

42. Теорія електричних кіл: Курсова робота. Тема «Перехідні процеси в електричних ланцюгах» [електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 171 «Електроніка», спеціалізацій «Електронні системи і компоненти», «Електронні прилади та пристрої» / КПІ імені Ігоря Сікорського; уклад.: В.Я. Ромашко, Л.М. Батрак. Електронні текстові дані (1 файл: 1,14 Мбайт). Київ : КПІ імені Ігоря Сікорського, 2019. 41 с.

43. Булашенко А. В. Теорія електричних та магнітних кіл: конспект лекцій у п'яти частинах. Суми: Вид-во СумДУ, 2010. Ч. 5. 157с.

44. Теорія ймовірностей та математична статистика: навчальний посібник для студентів ОНЕУ денної форми навчання усіх спеціальностей. Одеса : ОНЕУ, 2017. 132 с.

45. Удодова О. І., Шувалова Ю. С., Юрчак Н. С. Дискретна математика. Ч. 2. Елементи теорії графів. Елементи комбінаторного аналізу : конспект лекцій. Харків : УкрДУЗТ, 2015. 50 с.

46. Форкун Я. Б., Глебова М. Л. Текст лекцій з дисципліни «Теоретичні основи електротехніки» (ч. 3) : для студентів усіх форм навчання напряму підготовки 6.050701 – «Електротехніка та електротехнології» / Харк. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2013. 115 с.

47. Храбустовський В. І., Осмаєв О. А., Рибачук О. В. Диференціальні рівняння : навч. посібник. Харків : УкрДУЗТ, 2024. Ч. 1. 193 с.

48. Шебаніна О. В., Жорова А. М. Математичне моделювання технічних і технологічних процесів на ПЕОМ : курс лекцій для студентів VI курсу денної форми навчання спец. 8.10010203 «Механізація сільського господарства» та 8.01010401 «Професійна освіта. Технологія виробництва і переробка продуктів сільського господарства». Миколаїв : Микол. нац. аграр. ун-т., 2014. 114 с.

49. Юзькова Ю. В. Аналіз нормального усталеного режиму електричної системи, оцінювання надійності електропостачання окремих підстанцій : курсова робота з дисципліни «Математичні задачі електроенергетики» / Вінниц. нац. техн. ун-т, Ін-т екол., енергетики і електромех., Ф-т електромех. і електр. матеріалознавства, каф. електр. систем та енергет. менеджменту. Вінниця, 2012. 34 с.