

DOI <https://doi.org/10.32782/1994-4691-2025-2-76-5>
УДК 621.22:539.3

АНАЛІЗ КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ СКЛАДНОПРОФІЛЬНИХ ЕЛЕМЕНТІВ РАДІАЛЬНО-ПОРШНЕВИХ ГІДРООБ'ЄМНИХ ПЕРЕДАЧ

ANALYSIS OF CONTACT INTERACTION OF COMPOUND-PROFILE ELEMENTS OF RADIAL-PISTON HYDRAULIC TRANSMISSIONS

М. М. Ткачук ¹ , д-р техн. наук, старший дослідник	ORCID: 0000-0002-4753-4267
І. П. Гречка ^{1*} , канд. техн. наук, доцент	ORCID: 0000-0003-4907-9170
О. С. Льозний ¹ , аспірант	ORCID: 0009-0001-1122-9068
А. В. Грабовський ¹ , д-р техн. наук, професор	ORCID: 0000-0002-6116-0572
М. А. Ткачук ¹ , д-р техн. наук, професор	ORCID: 0000-0002-4174-8213

¹ Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»
*e-mail: girinap7@gmail.com.

Анотація. Мета роботи – створення математичної моделі контактної взаємодії складнопрофільних елементів радіально-поршневих гідрооб'ємних передач та дослідження впливу форми їхніх контактуючих поверхонь на міцність цих елементів. Така модель будується на основі теорії розвитку та адаптації варіаційних нерівностей. Дискретизація задачі здійснюється із залученням методу скінченних елементів. За допомогою створеного засобу досліджень проаналізовано вплив форми поперечного перерізу бігової доріжки статорного кільця на розподіл контактного тиску у взаємодії із кульковим поршнем. На цій основі рекомендовані раціональні профілі поперечного перерізу бігової доріжки статорного кільця.

Ключові слова: кульковий поршень, бігова доріжка статорного кільця, контактна взаємодія, складнопрофільне тіло, теорія варіаційних нерівностей, метод скінченних елементів.

Постановка проблеми.

Сучасні транспортні засоби спеціального призначення підлягають різним тенденціям, які реалізуються у ході проектних розробок та модернізації. Одна із провідних тенденцій, яка продиктована усе зростаючими вимогами до їх тактико-технічних характеристик, полягає у різкому підвищенні їх рухливості. Тобто, мова йде про підвищення ефективності роботи складових ланцюга «двигун – трансмісія – рушій». При цьому з боку двигуна вимагається рівень енергонасиченості машини до 30 к.с/тонна та вище. З боку рушія – це здатність забезпечувати підвищену прохідність та маневреність (наприклад, застосування модернізованого гусеничного рушія). Разом із тим такі технічні рішення не можуть дати бажаного ефекту, якщо не буде синтезована відповідна їм за властивостями середня ланка – трансмісія. У цьому сенсі трансмісія стає не просто середньою, а – центральною ланкою у зазначеному ланцюгу «двигун – трансмісія – рушій». Тобто, якщо у розпорядженні є вдалі технічні рішення двигуна та рушія, то тактико-технічні характеристики транспортного засобу спеціального призначення напряму залежать від рівня технічного рішення саме трансмісії.

Маючи на увазі відмічену особливість, одним із перспективних технічних рішень є радіально-поршнева гідрооб'ємна передача, яка працює у паралельному потоці потужності разом із механічною коробкою переміни передач.

Зокрема, одним із таких варіантів є радіальна гідропередача ГОП-900 [1]. Ця передача має у своєму складі насос та гідромотор. Кожна із цих складових має схожу структуру: у роторі (блок циліндрів) здійснює зворотньо-поступальний рух кульковий

поршень; одночасно цей поршень перекочується під високим притискним навантаженням уздовж бігової доріжки статорного кільця.

Таким чином, значною мірою технічні характеристики досліджуваної гідрооб'ємної передачі лімітує міцність контактуючих елементів, зокрема, кулькового поршня та статорного кільця. При цьому якщо форма поршня (куля) та його діаметр визначаються обраним типом гідрооб'ємної передачі та її характеристиками (потужність, робоча частота обертання, робочий об'єм тощо), то форма поперечного перерізу торовидної бігової доріжки статорного кільця є варійованою та шуканою із умов міцності цих контактуючих складнопрофільних тіл.

У підсумку виникає задача аналізу контактної взаємодії складнопрофільних тіл, яка має певну специфіку порівняно із традиційними задачами контактної механіки. Відповідно, потрібно здійснити попередній аналіз існуючих моделей та методів аналізу контактної взаємодії елементів конструкцій складної форми, визначити напрямки, розробити удосконалені моделі та методи та здійснити відповідні дослідження контактної взаємодії контактуючих складнопрофільних елементів гідрооб'ємної передачі.

Аналіз останніх досліджень.

Дослідженням контактної взаємодії пружних тіл різної форми присвячено багато публікацій. Розроблені та застосовані різні моделі та методи аналізу напружено-деформованого стану контактуючих тіл.

Так, у роботі [2] розглядається задача одностороннього контакту через нелінійний поверхневий Вінклеровий шар масивного пружного тіла та композитного тіла, що складається з тонкого покриття у вигляді оболонки типу Тимошенко та масивної пружної основи, з'єднаної з покриттям через інший нелінійний шар Вінклера. Представлене слабке формулювання цієї задачі у вигляді нелінійного варіаційного рівняння. За допомогою апроксимації методом скінченних елементів розроблений метод використовується для дослідження контакту між двома масивними пружними тілами з поверхневою канавкою за наявності тонкого покриття та нелінійних поверхневих шарів типу Вінклера. Аналізується залежність контактних та міжфазних напружень від висоти покриття та параметра шару Вінклера.

У роботі [3] досліджено задачу контакту між двома пружними тілами, одне з яких має розривне тонке пружне покриття у вигляді оболонки типу Тимошенко. Проаналізовано залежності поверхневих та еквівалентних напружень від висоти та жорсткості покриття.

Аналогічно, у роботі [4] розглядається задача контактної взаємодії двох пружних тіл, одне з яких має покриття у вигляді тонкої оболонки типу Тимошенка, з'єднаної з тілом через нелінійний шар Вінклера. Сформоване слабке формулювання цієї задачі у вигляді нелінійного варіаційного рівняння.

Термопружна поведінка гетерогенного біматеріалу з міжфазною тріщиною, береги якої контактують кінцями під дією сил стиску та однорідного теплового потоку, досліджується у роботі [5].

Задача контактної взаємодії кількох пружних тіл з нелійними поверхневими шарами Вінклера розглядається у роботі [6]. Для розв'язання нелінійного варіаційного рівняння з недиференційовним оператором, що відповідає цій контактній задачі, пропонується використовувати неявні двоточкові комбіновані диференціально-різницеві паралельні ітераційні алгоритми розкладання області типу Робіна.

Формулювання методу граничних елементів (МГЕ) для моделювання тангенціального контакту із пружним напівпростором, покритим пружним шаром із різними пружними властивостями, представлено у роботі [7].

У роботі [8] зазначено, що «загальновідомо, що загальні варіаційні нерівності надають нам єдину, природну, нову та просту основу для вивчення широкого класу

непов'язаних проблем, які виникають у чистих та прикладних науках. У цій статті вводяться та аналізуються деякі нові класи загальних варіаційних нерівностей, які пов'язані з критеріями оптимальності диференційованої неопуклої функції. Низка нових та відомих чисельних методів для розв'язання загальних варіаційних нерівностей та задач рівноваги з використанням різних методів включають проєкцію, рівняння Вінера-Хопфа, динамічні системи, допоміжний принцип та штрафну функцію. Аналіз збіжності цих методів досліджується за відповідних умов. Наведено деякі чисельні приклади для ілюстрації та реалізації запропонованих методів: функції добротності, аналіз чутливості, коректні критерії, межі похибки та інші аспекти цих загальних варіаційних нерівностей» [8].

Чисельний алгоритм розв'язування фрикційної контактної задачі про взаємодію шару зі штампами складної форми побудовано у роботі [9]. Алгоритм ґрунтується на методі інтегральних рівнянь і зведено до задачі квадратичного програмування. Контактну задачу, в якій область взаємодії невідома, сформульовано у вигляді інтегральних рівнянь-нерівностей Сінборіні. Із використанням кубатурних формул задачу трансформовано до системи лінійних алгебричних рівнянь-нерівностей. Розв'язування цієї системи зведено до задачі квадратичного програмування. За допомогою розробленого алгоритму досліджено фрикційні контактні задачі про взаємодію шару зі штампами різних форм.

У роботі [10] зазначено, що «контакт колеса та рейки відіграє життєво важливу роль у залізничному транспорті... Варіаційна теорія Калькера може бути використана на кожній окремій плямі для локальної оцінки контакту».

У роботі [11] розглядаються «досягнення в розумінні та моделюванні сил повзучості між колесом та рейкою. Основна увага приділяється трибологічним аспектам, у яких за останні два десятиліття досягнуто значного прогресу. Ми підкреслюємо роль, яку відіграють стани поверхні, тобто наявність рідких та твердих шарів, шорсткість поверхні та приповерхнева пластична деформація. Оскільки ці стани поверхні можуть змінюватися з часом, у характеристиці сили повзучості можуть виникати часові зміни» [11].

Таким чином, роботи [2–11] охоплюють тематику контактної взаємодії на макромасштабі. Одним із основних методів дослідження контактної взаємодії – варіаційний підхід. Проте у цих та інших роботах відсутнє повне вирішення задач контактної взаємодії для складнопрофільних тіл. Окрім того, важливими є питання моделювання властивостей різного роду покриттів та шорсткості.

Цим питанням присвячені інші публікації. Так, у роботі [12] зазначено, що «контакт між пружними шорсткими поверхнями є однією з фундаментальних проблем у трибології. За допомогою методу граничних елементів ми вивчаємо вплив анізотропії шорсткості на реальну площу контакту та на розділення навантаження як для класичного гауссового розподілу висоти, так і для розподілу Вейбулла, у загальному випадку степеневому закону PSD. Ми виявляємо, що анізотропія впливає на площу контакту та розділення навантаження однаково для гауссових та негауссових поверхонь, і тому ефект може бути врахований одним параметром, який ми витягуємо з теорії Перссона. Далі ми використовуємо результати для розширення теорії адгезії на великі відстані за допомогою ВАР на гауссові та негауссові (Вейбуллівські) поверхні, як ізотропні, так і анізотропні. Для реальної площі контакту результати для поверхонь Вейбулла відомі в літературі» [11].

З іншого боку, у роботі [13] зазначено, що «вплив шорсткості на адгезію вивчається з часів Фуллера та Табора, але останнім часом точаться дебати щодо того, як саме шорсткість, здається, знищує (а іноді посилює!) адгезію, особливо стосовно прийнятої моделі фрактальної шорсткості. Ми показуємо, що критерій Перссона-Тосатті не залежить від анізотропії поверхні для типової степеневі PSD, якщо його записати через середньоквадратичне відхилення шорсткості та збільшення. Натомість, дуже

просте розширення моделі опорної площі (ВАМ) Чаварелли на анізотропну фрактальну поверхню показує слабку, але чітку залежність від анізотропії, з вищою адгезією в 1D випадку, що демонструє кращу відповідність, ніж критерій Персона-Тосатті, фактичним числовим результатам Афферанте Віолано та Діні. Однак жодна з двох моделей не дозволяє вловити сильний гістерезис, виявлений в експериментах між навантаженням і розвантаженням, що, ймовірно, більше посилює адгезію, коли ми переходимо від ізотропного до повного 1D випадку. Це свідчить про те, що механізм посилення навантаження вздовж контактних ліній та пов'язані з ним пружні нестійкості не враховуються ні моделлю Персона-Тосатті, ні моделлю ВАМ, застосованою до анізотропних поверхонь» [13].

У роботі [14] розглянуто адгезію (макроскопічно) жорстких інденторів із плоскими кінцями, на лицьову поверхню яких накладено короткохвильову хвилястість, як просту модель шорсткості в контакті, та пружного тіла, покритого м'яким пружним шаром. М'який шар має амбівалентний вплив на міцність адгезії: (а) завдяки м'якості він сприяє утворенню повного контакту, тим самим суттєво збільшуючи адгезійну міцність; (б) з іншого боку, теоретична міцність у повному контакті зменшується через малу пружність. «Ми досліджуємо критичну товщину поверхневого м'якого шару для досягнення максимальної адгезійної міцності контакту. Ми виявляємо, що властивості адгезійного контакту змінюються не безперервно з товщиною шару, та знаходимо відповідні критичні значення, що розділяють різні режими адгезійної поведінки» [13].

У роботі [15] «досліджується адгезійний контакт між шорсткістю волоконної структури та пружним напівпростором із використанням методу граничних елементів. Волокна моделюються як м'які циліндри з постійною жорсткістю та гаусовим розподілом висот. Адгезійна міцність визначається як функція попереднього навантаження, шорсткості та жорсткості фібрил. Адгезійна міцність після достатньо великого попереднього навантаження зростає зі зменшенням жорсткості фібрил, прагнучи до граничного значення, яке не залежить від шорсткості. Ця модель спрямована на подолання граничних випадків дуже жорстких та надзвичайно м'яких волокон» [15].

Також становлять інтерес властивості покриттів на поверхнях деталей, які виготовлені із різних матеріалів. У статті [16] представлені результати досліджень формування однофазного боридного шару та твердогазового силіцювання вуглецевої конструкційної сталі. Показано вплив розміру зерен порошку та складу насичувальної суміші на структуру та властивості дифузійних покриттів.

Алюмінієві сплави, поряд з позитивними властивостями – низька щільність, висока питома міцність, електропровідність, пластичність, в'язкість та інші, мають недоліки: низькі твердість, модуль пружності, зносостійкість і висока хімічна активність у багатьох неорганічних кислотах. Усунути ці недоліки може метод МДО [17].

Таким чином, маємо вихідні дані для подальших досліджень складнопрофільних тіл із покриттями. Далі постає проблема пошуку методів розв'язання таких задач.

Так, у роботі [18] міститься низка точних рішень контактних задач. Проте повного розв'язання задачі про контактну взаємодію складнопрофільних 3D тіл із урахуванням властивостей поверхневих шарів у загальному випадку немає. Тому постає задача створення нового підходу до розв'язання задач подібного типу.

Зокрема, такі дослідження становлять інтерес для взаємодії кулькових поршнів радіальних гідрооб'ємних передач [1, 19].

Дослідження виконані на розвиток робіт [20–22].

Методологія дослідження.

Математична модель контактної взаємодії складнопрофільних елементів радіально-поршневих гідрооб'ємних передач

Розглянемо, як і у роботах [20–22], загальний випадок контактної взаємодії складнопрофільних тіл Ω_1, Ω_2 , які покриті тонкими поверхневими шарами матеріалів Ω'_1 та Ω'_2 . Смісл цих та інших величин та параметрів видно із рис. 1.

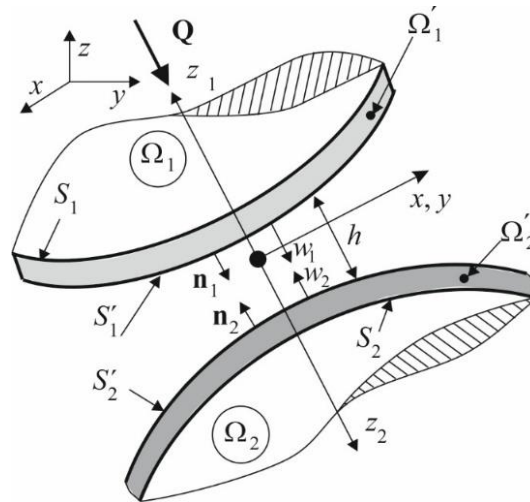


Рис. 1. Контакт складнопрофільних тіл Ω_1, Ω_2 за наявності проміжних шарів (покриттів) відповідно

Якщо звернутися до постановки задачі аналізу напружено-деформованого стану контактуючих тіл у пружних переміщеннях точок цих тіл u , то згідно із теорією варіаційних нерівностей дійсний їх розподіл u^* визначається із умови мінімуму функціоналу

$$J(u) \rightarrow \min, u \in K, \quad (1)$$

де K – множина розподілів переміщень, які задовольняють умовам непроникнення тіл одне в одного

$$\Delta(u) \leq \Delta^*, \quad (2)$$

де $\Delta(u)$ – зміна зазору між поверхнями контактуючих тіл у навантаженому (деформованому) актуальному стані; Δ^* – початковий зазор між цими поверхнями.

Функціонал $J(u)$ має такий вигляд

$$J = \frac{1}{2} \int_{(\Omega)} \sigma_{ij}(u) \cdot \varepsilon_{ij}(u) d\Omega - \int_{(S)} f \cdot u dS, \quad (3)$$

де $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ – компоненти тензорів напружень та деформацій, які визначаються за відповідними співвідношеннями за компонентами переміщень u [20–22]; f – масив зовнішніх навантажень (у цьому випадку ілюструється притискною силою Q , рис. 1).

У (3) об'єм Ω та поверхня S складаються із частин

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega'_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega'_2, \quad (4)$$

$$S = S'_1 \cup S'_2. \quad (5)$$

Якщо дискретизувати розподіл шуканих переміщень u у вигляді скінченно-елементної апроксимації [23], то

$$u = \sum \alpha_j \cdot \varphi_j. \quad (6)$$

де α_j – компоненти масиву вузлових параметрів альфа; φ_j – базисні функції.

Тут підсумовування здійснюється на множині вузлів j .

У результаті задача (1) зводиться до проблеми квадратичного програмування

$$J = \frac{1}{2} \sum_{s,t} R_{st} \cdot \alpha_s \cdot \alpha_t - \sum_s \mu_s \cdot \alpha_s \rightarrow \min, \quad (7)$$

$$D \cdot \alpha \leq B, \quad (8)$$

де R_{st} – компоненти матриці жорсткості R [23]; μ_s – компоненти масиву вузлових навантажень μ ; D – матриця, яка формує міжвузлові зазори; B – масив міжвузлових початкових зазорів.

Мінімізація (7) на множині обмежень (8) дає розв’язок дискретної задачі, який при підстановці у (6) призводить до наближеного розв’язку за (6), а відтак – і компоненти напружено-деформованого стану σ_{ij} , ε_{ij} та розподіл контактного тиску q на S .

Якщо варіювати S , то буде установлена залежність $q(S)$, $\sigma_{ij}(S)$, $\varepsilon_{ij}(S)$, $u(S)$. Відповідно, на цій основі можна організувати задачу синтезу

$$S^* : \rho(S) \rightarrow \text{extr}, \quad (9)$$

де $\rho(S)$ – деяка характеристика (рівень контактної тиску, напружень тощо), яка визначає ту чи іншу умову міцності, що залежить від умов у конкретному випадку. Аналогічна ситуація – і щодо впливу на контактну взаємодію складнопрофільних тіл властивостей матеріалів їхніх поверхневих шарів Ω_1 та Ω_2 .

Таким чином, розроблена математична модель дає можливість як установлювати закономірності контактної взаємодії складнопрофільних елементів радіально-поршневих гідрооб’ємних передач, так і обґрунтовувати їх прогресивні технічні рішення із підвищеними характеристиками міцності.

Результати дослідження.

Як приклад застосування розробленого підходу – аналіз контактної взаємодії кулькового поршня гідравлічної радіально-об’ємної передачі ГОП-900 (рис. 2) із біговою доріжкою її статорного кільця (рис. 3) [1, 20–22], здійснений за допомогою методів скінченних та граничних елементів.

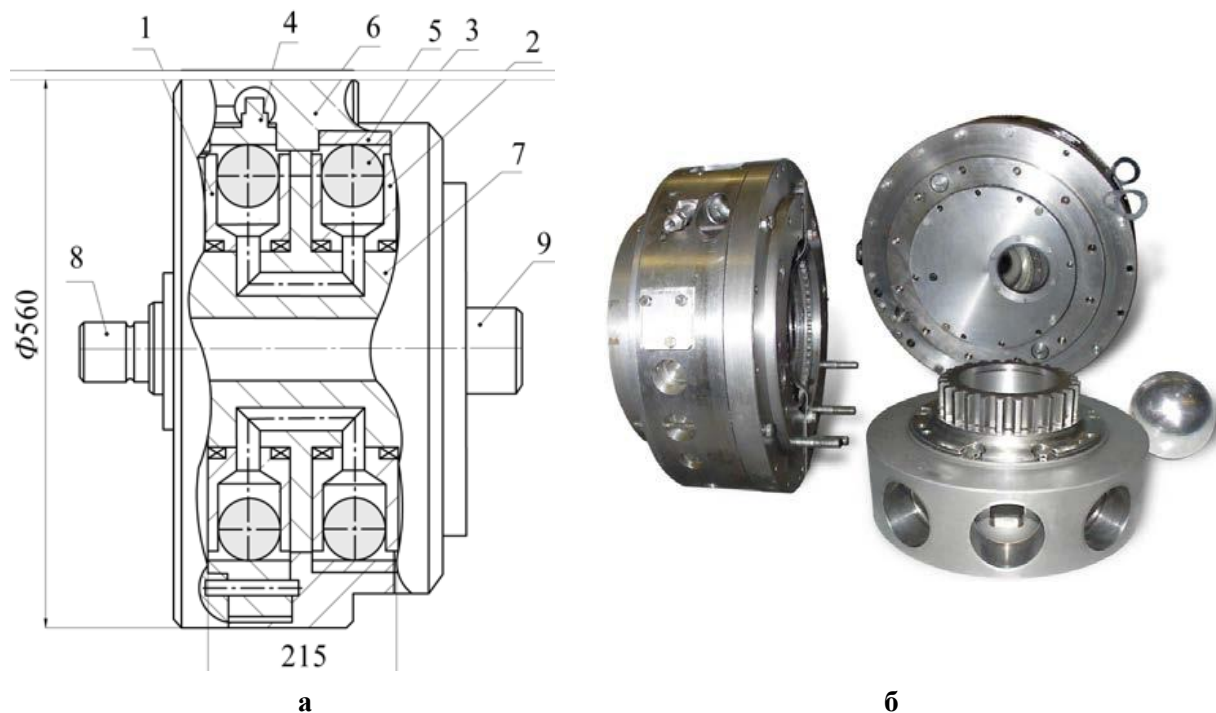


Рис. 2. Гідравлічна передача ГОП-900 (а) та її окремі частини (б):

1 та 2 – блоки циліндрів (ротори) насоса та гідромотора відповідно; 3 – кульково-поршнева частина; 4 та 5 – статорні кільця насоса та гідромотора відповідно; 6 – корпус; 7 – блок розподільних валів; 8 та 9 – вхідний та вихідний вали

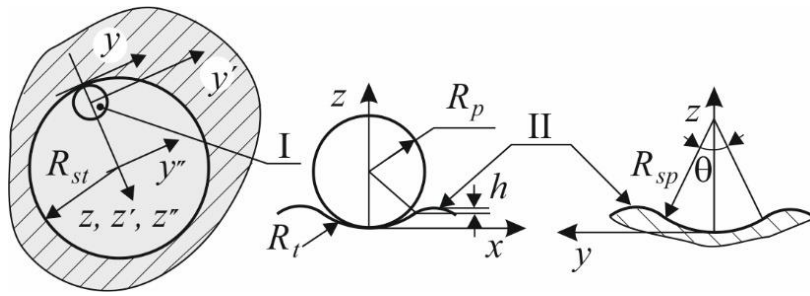


Рис. 3. Схема взаємодії кулькових поршнів I із біговою доріжкою II статорного кільця гідропередачі

Тут поршень I – куля (поршень) радіусом R_p , поверхня II (бігова доріжка статорного кільця) – тор із поперечним профілем Г.

Профіль Г – поєднання дуг із радіусом R_{sp} . Кут розхилу центральної дуги – θ (див. рис. 3).

Для визначеності прийнято: радіус бігової доріжки статорного кільця $R_{st} = 0,128$ м; радіус поршня $R_p = 0,03175$ м; поперечний профіль бігової доріжки статорного кільця у площині zy утворений дугами кіл із радіусами R_{sp} із кутом спряження $\theta = \pi/12$. Модулі пружності матеріалів сталевого поршня та статорного кільця E прийняті рівними $2 \cdot 10^{11}$ Па, коефіцієнти Пуассона – 0,3. Притискна сила – від 20 до 200 кН (із дискретною 20 кН).

Досліджувалися варіанти:

- радіус R_{sp} ; $k = 1, 2, 3$; $R_{sp} = R_1 = 1,05 \cdot R_p$; $R_{sp} = R_2 = 1,01 \cdot R_p$; $R_{sp} = R_3 = 0,99 \cdot R_p$;
- жорсткісні властивості матеріалів поверхневих шарів (тобто залежність величини обтискання w^L цих шарів від діючого на них тиску q) – функції f_i ; $l = A, B, C$; залежності – на рис. 4.

Тут початкова ділянка наведених на рис. 4 характеристик відповідає контактній жорсткості 10^{13} Н/м³.

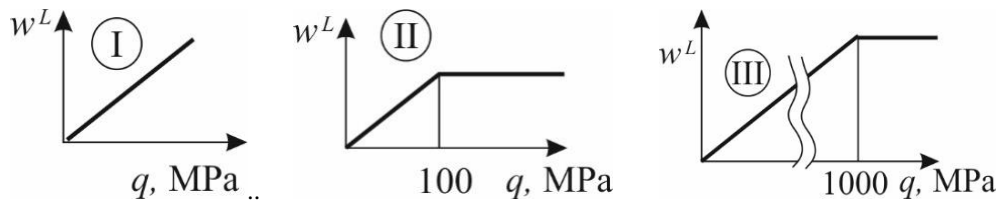


Рис. 4. Характеристики матеріалів поверхневих шарів у досліджуваному сполученні

На рис. 5–13 наведені ілюстрації результати здійснених чисельних досліджень у вигляді розподілів контактної тиску (МПа) уздовж довгої осі плями контакту (x , мм) для притискної сили – від 20 до 200 кН із кроком 20 кН для деяких варіантів радіусу поперечного перерізу R_{sp} ($k = 1, 2, 3$) та жорсткісних характеристик ($l = A, B, C$).

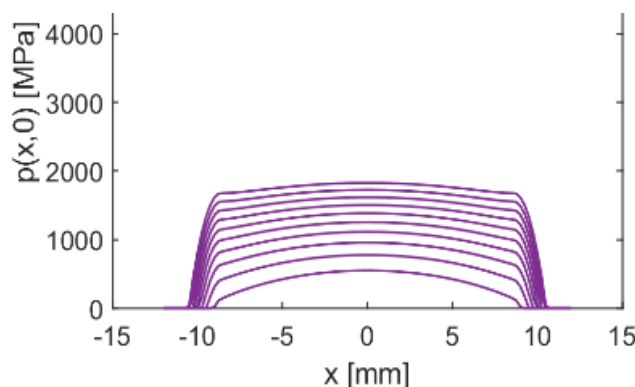


Рис. 5. Розподіл контактної тиску (МПа) між кулею і тором для варіанту $k = 1$ та $l = A$

Як видно із рис. 5–13, за наявності лінійно-пружного шару (*A*) між контактуючими тілами область контакту є більшою, ніж для варіантів пружно-жорсткого (*B*, *C*). Причому чим більш жорстка характеристика, тим менша область контакту.

З іншого боку, чим менший радіус центральної частини профіля тора Γ , тим більше видозмінюється форма області контакту. Так, для варіанту 1 форма більше схожа до овалу або до криволінійного чотирикутника. Для варіанта 3 – це двозв'язна (або гантелевидна – за підвищених навантажень) область. Для варіанта 2 – перехідний характер між варіантами 1 і 3.

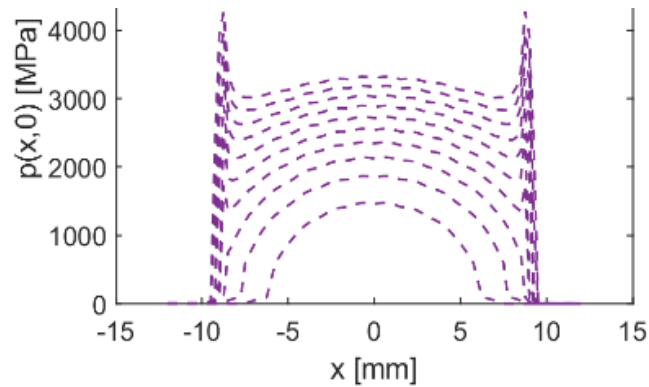


Рис. 6. Розподіл контактної тиску (МПа) між кулею і тором для варіанту $k = 1$ та $l = B$

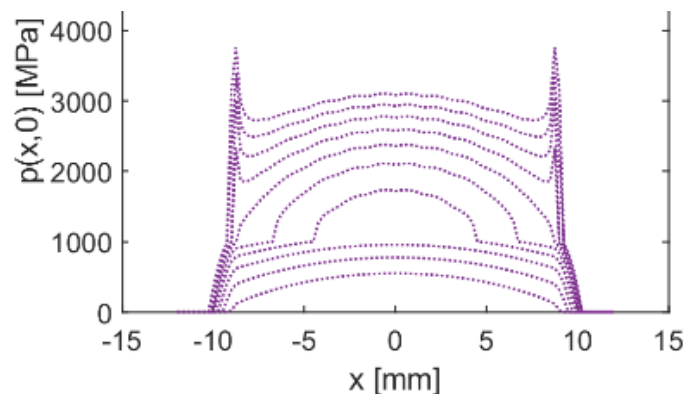


Рис. 7. Розподіл контактної тиску (МПа) між кулею і тором для варіанту $k = 1$ та $l = C$

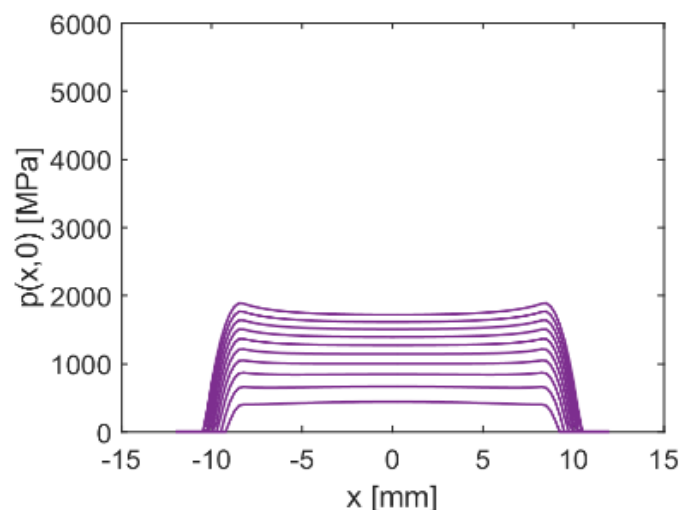


Рис. 8. Розподіл контактної тиску (МПа) між кулею і тором для варіанту $k = 2$ та $l = A$

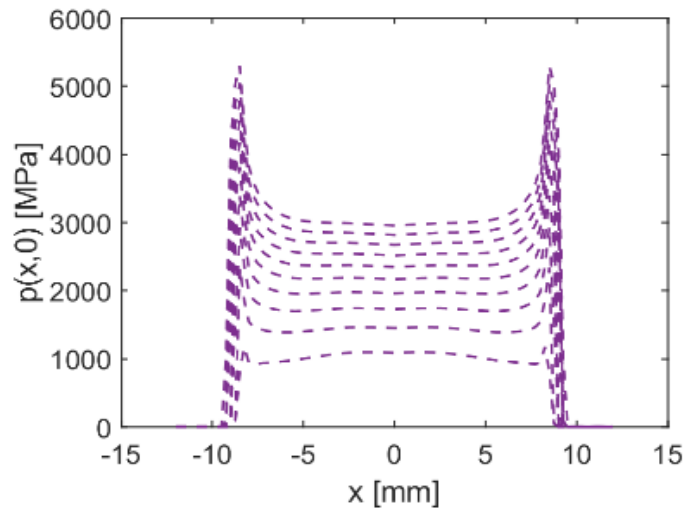


Рис. 9. Розподіл контактної тиску (МПа) між кулею і тором для варіанту $k = 2$ та $l = B$

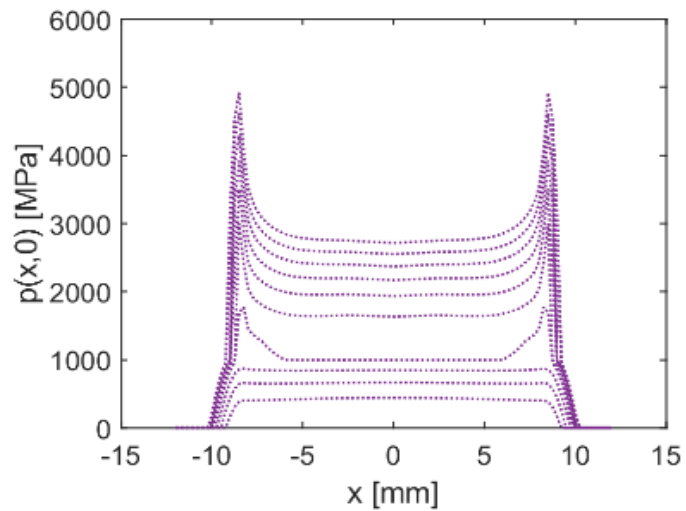


Рис. 10. Розподіл контактної тиску (МПа) між кулею і тором для варіанту $k = 2$ та $l = C$

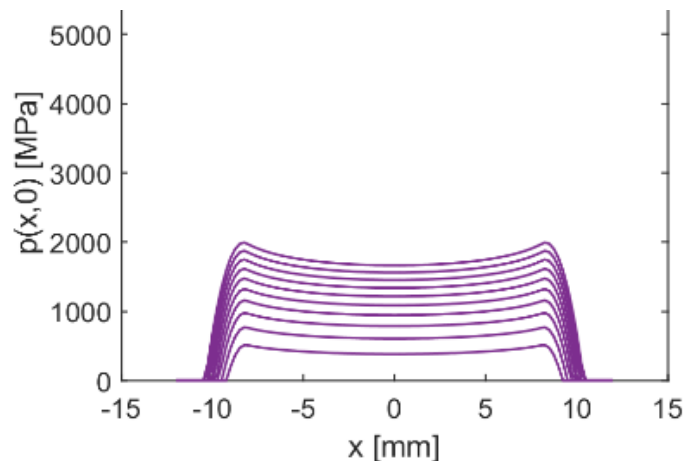


Рис. 11. Розподіл контактної тиску (МПа) між кулею і тором для варіанту $k = 3$ та $l = A$

Що стосується рівня контактної тиску, то він має тенденцію до набуття деякого більш-менш зниженого рівня у зоні перевищення радіуса дуги профіля тора над радіусом кулі на $\approx 5\%$. З іншого боку, чим більш жорсткий проміжний шар між цими тілами, тим вищий рівень контактної тиску.

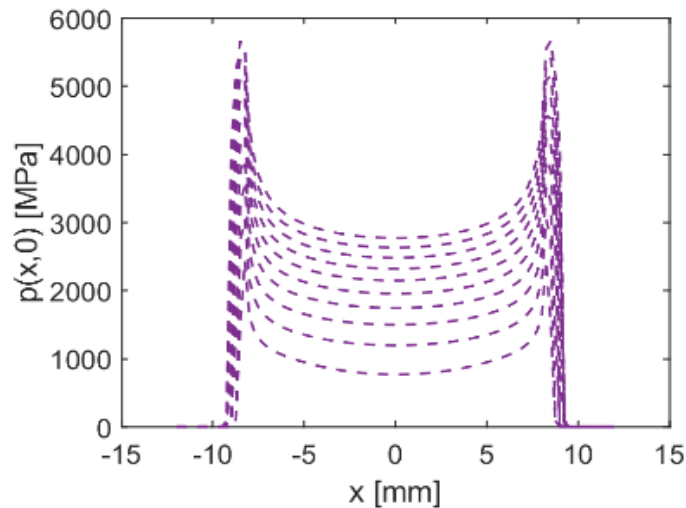


Рис. 12. Розподіл контактної тиску (МПа) між кулею і тором для варіанту $k = 3$ та $l = B$

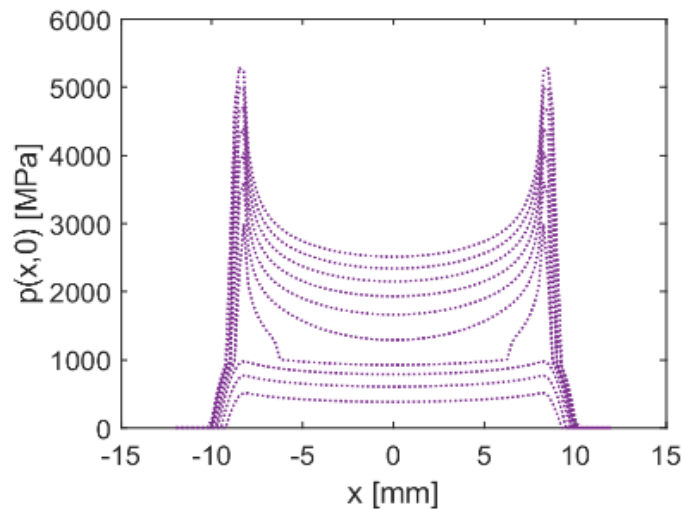


Рис. 13. Розподіл контактної тиску (МПа) між кулею і тором для варіанту $k = 3$ та $l = C$

Таким чином, отримані дослідження дають можливість установити закономірності контактної взаємодії складнопрофільних елементів радіально-поршневих гідروб'ємних передач. Крім того, на цій основі можливо обґрунтовувати прогресивні технічні рішення гідروпередач із високими технічними характеристиками.

Висновки.

Для аналізу контактної взаємодії складнопрофільних елементів радіально-поршневих гідрооб'ємних передач розроблена удосконалена математична модель. Вона базується на розвитку та адаптації теорії варіаційних нерівностей. Задача аналізу контактної взаємодії та напружено-деформованого стану складнопрофільних тіл зведена до проблеми мінімізації функціоналу повної внутрішньої енергії системи контактуючих тіл на множині приміщень, які задовольняють умовам непроникнення цих тіл одне в одного. При цьому, на відміну від традиційних підходів, геометрична форма контактуючих тіл позбавлена низки суттєвих обмежень. Окрім того, ця форма є варійованою та шуканою. У сукупності це дає можливість здійснювати поглиблений та більш адекватний аналіз контактної взаємодії та напружено-деформованого стану складнопрофільних тіл. Окрім того, створена основа для синтезу прогресивних технічних рішень, зокрема, гідропередач для перспективних трансмісій транспортних засобів спеціального призначення, за критеріями міцності.

У розроблену модель інтегровано, окрім опису геометричної форми, ще й властивості поверхневих шарів матеріалів контактуючих тіл. Таким чином, разом із конструктивними, шуканими та оптимізовуваними стають ще й технологічні рішення стосовно обробки поверхонь досліджуваних тіл.

У ході досліджень встановлено суттєвий вплив конструктивних та технологічних параметрів на розподіл контактного тиску між кульковим поршнем та торовидною біговою доріжкою статорного кільця радіальної гідропередачі. Шляхом варіювання цих параметрів стає можливим забезпечити міцність цих складнопрофільних тіл. Відповідно, вдасться підвищити технічні характеристики створюваної гідропередачі.

Список використаних джерел.

1. Samorodov V., Avrunin G. Solution of the problem of calculating the leakage working fluid in eccentric gap of the ball piston pair hydraulic fluid power machine. *Bulletin of the National Technical University «KhPI». Series: Hydraulic machines and hydraulic units*, 2021. № 1, 81–87. <https://doi.org/10.20998/2411-3441.2021.1.10>
2. Dyyak I. I., Prokopyshyn I. I., Prokopyshyn I. A., Styahar A. O. Numerical analysis of contact between elastic bodies in the presence of thin coating and nonlinear winkler surface layers. In: Altenbach H., Bogdanov V., Grigorenko A. Y., Kushnir R. M., Nazarenko V. M., Eremeyev V. A. (eds) Selected problems of solid mechanics and solving methods. *Advanced Structured Materials*, 2024. 204. https://doi.org/10.1007/978-3-031-54063-9_9
3. Prokopyshyn I. I., Styahar A. O. Numerical analysis of contact of the elastic bodies one of which has a discontinuous thin coating. *Materials Science*, 2022. 57. 734–744. <https://doi.org/10.1007/s11003-022-00602-0>
4. Prokopyshyn I. I., Styahar A. O. Investigation of contact between elastic bodies one of which has a thin coating connected with the body through a nonlinear winkler layer by the domain decomposition methods. *Journal of Mathematical Sciences*, 2021. 258. 477–506. <https://doi.org/10.1007/s10958-021-05562-5>
5. Serednytska K. I., Martynyak R. M. Contact of the faces of an interface thermally insulated crack under thermomechanical loading. *Materials Science*, 2021. 57. 173–179. <https://doi.org/10.1007/s11003-021-00528-z>
6. Prokopyshyn I. I., Shakhno S. M. Differential-difference iterative domain decomposition methods for the problems of contact of elastic bodies with nonlinear winkler surface layers. *Journal of Mathematical Sciences*, 2022. 261, 41–58. <https://doi.org/10.1007/s10958-022-05736-9>
7. Burger Henning, Fabian Forsbach, Valentin L. Popov. Boundary element method for tangential contact of a coated elastic half-space. *Machines*, 2023. 11. 7. 694. <https://doi.org/10.3390/machines11070694>
8. Noor M. A., Noor K. I., Rassias M. T. (). General variational inequalities and optimization. In: Pardalos P.M., Rassias T.M. (eds) *Geometry and Non-Convex Optimization. Springer Optimization and Its Applications*, 2025. 223. https://doi.org/10.1007/978-3-031-87057-6_14
9. Соляр Т. Я., Соляр О. І. Осесиметрична контактна задача для півпростору з незаданими ділянками взаємодії. *Математичні методи та фізико-механічні поля*, 2025. Т. 65, № 3–4, С. 178–187 (2022), <https://doi.org/10.15407/mmpmf2022.65.3-4.178-187>. Translation: T. Y. Solyar, O. I. Soliar. Axisymmetric contact problem for a half space with nonspecified zones of interaction. *Journal of Mathematical Sciences*, 2025. 287 (2). 321–333, <https://doi.org/10.1007/s10958-025-07593-8>
10. Yao J., Ren G. Embedding Kalker’s variational theory into railway vehicle system dynamics and its efficiency improvement. *Vehicle system dynamics*, 2023. 62 (4). 932–954. <https://doi.org/10.1080/00423114.2023.2235034>
11. Vollebregt E., Six K., Polach O. Challenges and progress in the understanding and modelling of the wheel–rail creep forces. *Vehicle system dynamics*, 2021. 59 (7), 1026–1068. <https://doi.org/10.1080/00423114.2021.1912367>
12. Pérez-Ráfols F., Ciavarella M. Towards a universal scaling for the elastic contact between anisotropic and non-gaussian surfaces. *Tribology Letters*, 2025. 73, 62. <https://doi.org/10.1007/s11249-025-01976-3>
13. Ciavarella M., Pérez-Ráfols F. Strongly different adhesion reduction for 1D or 2D random fractal roughness, and an extension of the bam model to anisotropic surfaces. *Tribology Letters*, 2024. 72. 119. <https://doi.org/10.1007/s11249-024-01916-7>.

14. Li Q., Lyashenko I. A., Pohrt R., Popov V. L. Influence of a soft elastic layer on adhesion of rough surfaces. In: Borodich F.M., Jin X. (eds) *Contact problems for soft, biological and bioinspired materials. Biologically-Inspired Systems*, Springer, Cham, 2022. 15. https://doi.org/10.1007/978-3-030-85175-0_5
15. He X., Li Q., Popov V. L. Strength of adhesive contact between a rough fibrillar structure and an elastic body: influence of fibrillar stiffness. *The Journal of Adhesion*, 2021. 98(12). 1820–1833. <https://doi.org/10.1080/00218464.2021.1939017>
16. Kniaziev S., Kniazieva H., Subbotina V., Volkov O., Riaboshtan V. Improving the technology of producing boron and siliconized layers and comparing their properties. *Physics and Chemistry of Solid State*, 2025. 26(2). 436–441. <https://doi.org/10.15330/pcss.26.2.436-441>
17. Subbotina V., Bilozerov V., Subbotin O., Barmin O., Hryhorieva S., Pysarska N. Investigation of the influence of electrolyte composition on the structure and properties of coatings obtained by microarc oxidation. *Physics and Chemistry of Solid State*, 2022. 23(2). 380–386. <https://doi.org/10.15330/pcss.23.2.380-386>
18. Valentin L. Popov, Markus Heß, Emanuel Willert. Handbook of plane contact mechanics. *Exact solutions of plane contact problems*. Springer Berlin, Heidelberg, 2025, XII, 260 p. <https://doi.org/doi.org/10.1007/978-3-662-70173-7>
19. Marchenko D.D., Matvyeyeva K.S. Study of the Stress-Strain State of the Surface Layer During the Strengthening Treatment of Parts. *Problems of Tribology*, 2022. 27. 3/105. 82–88. <https://doi.org/10.31891/2079-1372-2022-105-3-82-88>
20. Tkachuk M. M., Skripchenko N., Tkachuk M. A., Grabovskiy A. Numerical methods for contact analysis of complex-shaped bodies with account for non-linear interface layers. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2018. 5(7 (95)). 22–31. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2018.143193>
21. Tkachuk M., Grabovskiy A., Tkachuk M., Hrechka I., Sierykov V. Contact interaction of a ball piston and a running track in a hydrovolumetric transmission. In: Ivanov V., Pavlenko I., Liaposhchenko O., Machado J., Edl M. (eds) *Advances in Design, Simulation and Manufacturing IV. DSMIE 2021. Lecture Notes in Mechanical Engineering*, 2021. 195–203. https://doi.org/10.1007/978-3-030-77823-1_20
22. Tkachuk M., Grabovskiy A., Tkachuk M., Hrechka I., Tkachuk H. Contact interaction of a ball with a toroidal running track with a closely shaped power law profile. In: Tonkonogyi V., Ivanov V., Trojanowska J., Oborskyi G. (eds) *Interpartner 2024: Advanced Manufacturing Processes VI. Lecture Notes in Mechanical Engineering*, 2025. 628–638. https://doi.org/10.1007/978-3-031-82746-4_56
23. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., Zhu J. Z. *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. 7th ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2013. 756 p.

Стаття надійшла до редакції 22.10.2025

Стаття прийнята 29.10.2025

Статтю опубліковано 15.12.2025



ANALYSIS OF CONTACT INTERACTION OF COMPOUND-PROFILE ELEMENTS OF RADIAL-PISTON HYDRAULIC TRANSMISSIONS

M. M. Tkachuk, I. Hrechka, O. Loznyi, A. Grabovskiy, M. A. Tkachuk
National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute»

Summary

Radial-piston hydrodynamic transmissions with ball pistons are widely used in the transmissions of special-purpose vehicles. Such pistons move in contact with two bodies: the walls of the rotor cylinders and the raceway of the stator ring. The greatest loads act in the coupling of the ball piston with the stator ring raceway. The raceway surface is a torus, the cross-section of which in the zone of interaction with the ball piston is a complex curve. The task is to determine the rational form of this curve (i.e., the transverse profile of the torus) according to strength criteria.

The aim of the work is to create a mathematical model of the contact interaction of complex-profile elements of radial-piston hydrodynamic transmissions and to study the influence of the shape of their contacting surfaces on the strength of these elements. Such a model is built on the basis of the theory of development and adaptation of variational inequalities. In addition to the description of the geometric shape, the developed model also integrates the properties of the surface layers of the materials of the contacting bodies. Thus, along with the constructive ones, technological solutions for the surface treatment of the studied bodies are also sought and optimized. The discretization of the problem is carried out using the finite element method. Using the created research tool, the influence of the shape of the cross-section of the stator ring raceway on the distribution of contact pressure in interaction with the ball piston was analyzed. On this basis, rational cross-sectional profiles of the stator ring raceway are recommended. The research has established a significant influence of design and technological parameters on the distribution of contact pressure between the ball piston and the toroidal raceway of the stator ring of the radial hydraulic transmission. By varying these parameters, it becomes possible to ensure the strength of these complex-profile bodies. Accordingly, it is possible to improve the technical characteristics of the created hydraulic transmission. In particular, the developed models and methods were applied to the study of the GOP-900 hydraulic transmission.

Keywords: ball piston, stator ring raceway, contact interaction, composite-profile body, theory of variational inequalities, finite element method.