

УДК 517.9

Дмитро Штефан, здобувач третього (освітньо-наукового) рівня вищої освіти механіко-математичного факультету,
Олександр Станжицький, доктор фізико-математичних наук,
 професор, завідувач кафедри загальної математики,
 Київський національний університет
 імені Тараса Шевченка, м. Київ, Україна

ЗБЕРЕЖЕННЯ ПОКАЗНИКІВ ГЕНЕРАЛЬНОГО РОСТУ ПРИ МАЛИХ НЕЛІНІЙНИХ ЗБУРЕНЬ СТОХАСТИЧНИХ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ

Анотація. Розглянута система $dx = Axdt$ у сепарабельному гільбертовому просторі H з лінійною частиною, що породжується обмеженим оператором A на піввісі $t \geq 0$. Випадкове збурення задається Q -вінерівським процесом, а нелінійні доданки задовольняють умови глобальної ліпшицевості та асимптотичної малості. Встановлено, що за виконання цих умов, верхні середньоквадратичні показники Ляпунова розв'язків збуреної системи належать спектру лінійного оператора $Re(\sigma(A))$. Таким чином встановлено, що спектр Ляпунова не розширюється: нові асимптотичні значення поза межами лінійної динаміки не виникають.

Ключові слова: експоненційна дихотомія, Q -вінерівський процес, показник Ляпунова, спектр Ляпунова, стохастичне еволюційне рівняння, гільбертовий простір.

Abstract. We consider the stochastic evolution equation $dx = Ax dt$ in a separable Hilbert space H , whose linear part is generated by a bounded operator A on the half-line $t \geq 0$. The stochastic perturbation is driven by a Q -Wiener process, while the nonlinear terms satisfy the assumptions of global Lipschitz continuity and asymptotic smallness. It is established that, under these assumptions, the upper mean-square Lyapunov exponents of solutions to the perturbed system belong to the spectrum $Re(\sigma(A))$ of the linear operator. Consequently, the Lyapunov spectrum does not expand: no new asymptotic values beyond those generated by the underlying linear dynamics arise.

Keywords: exponential dichotomy, Q -Wiener process, Lyapunov exponent, Lyapunov spectrum, stochastic evolution equation, Hilbert space.

Розглянемо збурене рівняння

$$dy(t) = [A y(t) + F(t, y(t))]dt + G(t, y(t))dW(t). \quad (1)$$

На нелінійні доданки F і G накладаємо дві умови.

Умова 1 (H1). Глобальна ліпшицевість. Існує стала $L > 0$ така, що для всіх $t \geq 0$ та всіх $y_1, y_2 \in H$

$$\|F(t, y_1) - F(t, y_2)\| + \|G(t, y_1) - G(t, y_2)\|_{HS} \leq L\|y_1 - y_2\|. \quad (2)$$

Умова 2 (H2). Асимптотична малість. Існує функція $\varepsilon : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, для якої $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, і

$$\|F(t, y)\| + \|G(t, y)\|_{HS} \leq \varepsilon(t)\|y\|, \quad t \geq 0, y \in H. \quad (3)$$

Верхній показник Ляпунова і спектр Ляпунова

Нехай $y(t; y_0)$ — mild-розв'язок рівняння (1) з детермінованими початковими даними $y_0 \in H$. Верхній середньоквадратичний показник Ляпунова визначається формулою

$$\lambda(y_0) = \frac{1}{2} \limsup_{t \rightarrow \infty} (1/t) \ln E\|y(t; y_0)\|^2. \quad (4)$$

Зазначимо, що для лінійної системи $y'(t) = Ay(t)$ це означення збігається зі звичайним показником Ляпунова траєкторії.

Під спектром Ляпунова $\Sigma = \{\lambda(y_0) \mid y_0 \in H\}$ розуміємо множину всіх можливих асимптотичних показників росту розв'язків системи.

Теорема. Нехай виконуються умови (H1)–(H2). Тоді для довільного mild-розв'язку $y(t; y_0)$ рівняння (1) відповідний верхній середньоквадратичний показник Ляпунова належить спектру оператора A , тобто

$$\bar{\lambda}(y_0) \in \text{Re}(\sigma(A)).$$

Зазначимо, що протилежна умова не є гарантованою. При певних стохастичних збуреннях $\Sigma \neq \text{Re}(\sigma(A))$, результат гарантує лише $\Sigma \subset \text{Re}(\sigma(A))$.

Список використаних джерел

1. Daleckiĭ J. L., Krein M. G. Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Space. Providence: American Mathematical Society, 1974.
2. Da Prato G., Zabczyk J. Stochastic Equations in Infinite Dimensions. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2014.
3. Shtefan D., Stanzhytskyi O., Kushnirenko S. Preservation of Mean-Square Lyapunov Exponents for Nonautonomous Stochastic Evolution Equations. *Axioms*. 2026. Vol. 15, No. 5. Art. 307. <https://doi.org/10.3390/axioms15050307>