

УДК 517.9

Олександр Правдивий, здобувач третього (освітньо-наукового)
рівня вищої освіти кафедри загальної математики
механіко-математичного факультету

Світлана Кушніренко, кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри загальної математики механіко-математичного факультету,
Київський національний університет
імені Тараса Шевченка, м. Київ, Україна

АПРОКСИМАЦІЯ СТОХАСТИЧНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПУ З ЗАПІЗНЕННЯМ СИСТЕМАМИ РІВНЯНЬ БЕЗ ЗАПІЗНЕННЯ

Анотація. В даній роботі доведено лему про модуль неперервності для стохастичного диференціального рівняння нейтрального типу з запізненням та з допомогою неї наведено апроксимаційну схему рівнянь без запізнення для стохастичного диференціального рівняння нейтрального типу за допомогою систем рівнянь без запізнення та доведено, що дана схема дійсно є апроксимуючою в середньому квадратичному для вихідного рівняння.

Ключові слова: диференціальне рівняння, нейтральний тип, апроксимаційна система, м'який розв'язок, запізнення, задача Коші.

Annotation. In this work we prove continuity module lemma for stochastic neutral type differential equation with delay and, using this we provide approximation system without delay for stochastic neutral type differential equation. Next, we prove that provided system, in fact, is approximation system in mean square.

Keywords: differential equation, neutral type, approximation system, weak solution, delay, limit problem.

В цій роботі ми досліджуємо апроксимаційні схеми для стохастичного диференціального рівняння нейтрального типу із запізненням в гільбертових просторах вигляду

$$\begin{aligned}d(u(t) - g(u(t), u(t-h))) &= (Au(t) + f(u(t-h), u(t))) dt + \\ &+ \sigma(u(t-h), u(t)) dW(t), t \in [0, T], \\ u(t) &= \phi(t), t \in [-h, 0]\end{aligned}$$

Тут A – необмежений оператор, що є генератором сильно неперервної напівгрупи $[S(t), t \geq 0]$ обмежених лінійних операторів у сепарабельному

гільбертовому просторі H . Випадковий шум $W(t)$ є Q -вінерівським процесом у сепарабельному гільбертовому просторі K . Для деякого $h > 0$ позначимо $C_h := C([-h, 0], H)$ простір неперервних H -значних функцій $\phi[-h, 0] \rightarrow H$ з нормою

$$\|\phi\|_{C_H} := \sup_{\theta \in [-h, 0]} \|\phi(\theta)\|_H$$

Норму $\|\cdot\|_H$ будемо позначати як $\|\cdot\|$. Розв'язок $u(t)$ вихідного рівняння розглядається у м'якому сенсі. Функції f, g відображають $H \times H$ в H , а $\sigma: H \rightarrow L_2^0$, де $L_2^0 = L(Q^{\frac{1}{2}} K, H)$ - простір операторів Гільберта-Шмідта з $Q^{\frac{1}{2}} K$ в H . Нарешті, $\phi: [-h, 0] \times \Omega \rightarrow H$ - початкова функція, де (Ω, F, P) повний ймовірнісний простір.

A - необмежений лінійний оператор з $D(A)$ в H , що є інфінітезимальним генератором аналітичної напівгрупи операторів $S(t) = e^{At}$ - обмежених в H . З [1] це еквівалентно тому, що $(-A)$ секторіальний оператор.

Ми припускаємо, що $S(t)$ є напівгрупою компактних операторів при $t > 0$, тому з [2] випливає, що напівгрупа є неперервною у рівномірній операторній топології при $t > 0$.

З [2] також отримуємо, що для всіх $\alpha \in (0, 1)$ дробова степінь оператора $(-A)^\alpha$ є замкненим лінійним оператором в області визначення $D((-A)^\alpha)$.

Позначимо H^α гільбертів простір $D((-A)^\alpha)$ оснащений нормою

$$\|u\|_\alpha := \|(-A)^\alpha u\|$$

Розв'язок вихідного рівняння буде мо розглядати м'якому сенсі:

Означення 1: Неперервний F_t узгоджений стохастичний процес $u: [-h, T] \times \Omega \rightarrow H$ називається м'яким розв'язком для початкового рівняння на $t \in [0, T]$, якщо він задовольняє наступне інтегральне рівняння

$$u(t) = S(t) \left(\phi(0) - g(\phi(0)) \right) + g(u(t-h)) - \int AS(t-s)g(u(s-h))ds + \\ + \int S(t-s)f(u(s), u(s-h))ds + \int S(t-s)\sigma(u(s), u(t-s))dW(s),$$

і $u(t) = \phi(t)$ майже напевно для $t \in [-h, 0]$.

Для доведення існування і єдиності розв'язку накладемо наступні умови на оператор A та відображення f, σ, g .

1) Якщо $\sigma(-A)$ це спектр оператора $(-A)$, тоді маємо, що $Re \sigma(-A) > \delta > 0$, і A утворює напівгрупу компактних операторів $S(t)$ в H при $t > 0$.

2) Для всіх $u, v, u_1, v_1 \in H$ маємо

$$\|f(u, v) - f(u_1, v_1)\| \leq L(\|u - u_1\| + \|v - v_1\|),$$

і

$$\|\sigma(u, v) - \sigma(u_1, v_1)\|_{L_0^2} \leq L(\|u - u_1\| + \|v - v_1\|).$$

3) Для всіх $u, v, u_1, v_1 \in H$ і для кожного $\alpha \in (1/2, 1)$ функція g задовольняє нерівність

$$\|g(u, v) - g(u_1, v_1)\|_\alpha \leq M_g(\|u - u_1\| + \|v - v_1\|),$$

для деякого $M_g \in (0, 1/2\sqrt{2})$.

Нескладно помітити, що з умови 2 випливає лінійний ріст для f, σ в H а з умови 3 випливає лінійний ріст g в H^α .

З джерел [3] і [4] випливає, що якщо умови 1-3 справджуються, то вихідне рівняння має єдиний на $[0, T]$ м'який розв'язок в сенсі означення 1, з обмеженим p -тим моментом ($p \geq 1$).

Ключовим моментом для подальшого розгляду є наступна лема.

Лема 1 (Лема про модуль неперервності): якщо умови 1-3 виконуються, тоді для розв'язку вихідного рівняння $u(t)$ справджується наступна оцінка

$$\sup_{t_1 \in [-h, T]} E \sup_{t_2 \in [t_1, t_1+h]} \|u(t_2) - u(t_1)\|^2 \leq C(T, \|\phi\|_{C_h}, 1) \rightarrow 0, 1 \rightarrow 0.$$

Введемо наступну систему рівнянь без запізень

$$\begin{cases} d(z_0(t) - g(z_0(t), z_m(t))) = (Az_0 + f(z_0(t), z_m(t))) dt + \sigma(z_0(t), z_m(t)) dW(t), \\ dz_j(t) = m/h(z_{j-1}(t) - z_j(t)), t \in [0, T], \\ z_j(0) = \phi(-h/m * j), j = 0 \dots m. \end{cases}$$

Означення 2: Наведена вище система називається апроксимуючою для вихідного рівняння в середньому квадратичному якщо

$$\sup_{t \in [0, T]} E \|u(t - h/m * j) - z_j(t)\|^2 \rightarrow 0, m \rightarrow \infty, j = 0 \dots m.$$

Використовуючи лему 1 можемо довести наступну теорему, що і є головним результатом роботи:

Теорема 1 (Про апроксимуючу систему): якщо умови 1-3 виконуються, наведена вище система є апроксимуючою для вихідного рівняння в сенсі означення 2.

Список використаних джерел

1. Henry D. Geometric theory of Semilinear Parabolic Equations, volume 840 of Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag. Berlin-New York. 1981.
2. Pazy A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. Springer-Verlag. New York. 1983.
3. Misiats O., Stanzhytskyi O., Yip N.K. Asymptotic analysis and homogenization of invariant measure. *Stochastics and Dynamics*. 2019. Vol. 19, No. 2. P. 1-28. DOI: <http://dx.doi.org/10.1142/S0219493719500151>