

УДК 517.958:517.956.4

Андрій Громик, кандидат технічних наук, доцент,
доцент кафедри інформаційних технологій,
фізико-математичних та безпекових дисциплін,
Заклад вищої освіти «Подільський державний університет»,
м. Кам'янець-Подільський, Україна
Іван Конет, доктор фізико-математичних наук, професор,
професор кафедри теорії функцій та методики навчання математики,
Волинський національний університет
імені Лесі Українки, м. Луцьк, Україна
Тетяна Пилипюк, кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри комп'ютерних наук,
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка,
м. Кам'янець-Подільський, Україна

ГІПЕРБОЛІЧНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ В НАПІВОБМЕЖЕНОМУ КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ КЛИНОВИДНОМУ ПОРОЖНИСТОМУ ЦИЛІНДРІ

Анотація. Методом класичних інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (матриць впливу та матриць Гріна) вперше побудовано єдині точні аналітичні розв'язки гіперболічних крайових задач математичної фізики в напівобмеженому кусково-однорідному клиновидному порожнистому циліндрі.

Ключові слова: гіперболічне рівняння, початкові та крайові умови, умови спряження, інтегральні перетворення, гібридні інтегральні перетворення, головні розв'язки.

Abstract. By the method of classical integral and hybrid integral transforms combined with the method of main solutions (influence matrices and Green's matrices), unique exact analytical solutions of hyperbolic boundary value problems of mathematical physics in a semi-bounded piecewise-homogeneous wedge-shaped hollow cylinder are constructed for the first time.

Keywords: hyperbolic equation, initial and boundary conditions, conjugation conditions, integral transforms, hybrid integral transforms, main solutions.

У доповіді розглядаються задачі побудови обмежених на множині

$$D = \{(t, r, \varphi, z) | t > 0; r \in I_n^+ = \bigcup_{j=1}^{n+1} I_j = \bigcup_{j=1}^{n+1} (R_{j-1}; R_j); \\ R_0 > 0; R_{n+1} \equiv R < +\infty; \varphi \in (0; \varphi_0); 0 < \varphi_0 < 2\pi; z \in (0; +\infty)\}$$

класичних розв'язків лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними гіперболічного типу 2-го порядку зі змінними коефіцієнтами [3]

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - \left[a_{rj}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{a_{\varphi j}^2}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_j + \chi_j^2 u_j = f_j(t, r, \varphi, z); \quad (1) \\ r \in I_j; j = \overline{1, n+1}$$

з початковими умовами

$$u_j|_{t=0} = g_j^1(r, \varphi, z); \frac{\partial u_j}{\partial z}|_{t=0} = g_j^2(r, \varphi, z); r \in I_j; j = \overline{1, n+1}, \quad (2)$$

крайовими умовами

$$\left(-\frac{\partial}{\partial z} + h \right) u_j \Big|_{z=0} = w_j(t, r, \varphi); \quad \frac{\partial^s u_j}{\partial z^s} \Big|_{z=+\infty} = 0; s = 0, 1; j = \overline{1, n+1}, \quad (3)$$

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{11}^0 \right) u_1 \Big|_{r=R_0} = g_0(t, \varphi, z); \quad \left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{22}^{n+1} \right) u_{n+1} \Big|_{r=R} = g(t, \varphi, z), \quad (4)$$

одними з крайових умов на гранях клина [1]

$$u_j|_{\varphi=0} = g_{1j}(t, r, z); \quad u_j|_{\varphi=\varphi_0} = w_{1j}(t, r, z); \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (5)$$

$$u_j|_{\varphi=0} = g_{2j}(t, r, z); \quad \frac{\partial u_j}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_0} = -w_{2j}(t, r, z); \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} = g_{3j}(t, r, z); \quad u_j|_{\varphi=\varphi_0} = w_{3j}(t, r, z); \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} = g_{4j}(t, r, z); \quad \frac{\partial u_j}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_0} = -w_{4j}(t, r, z); \quad j = \overline{1, n+1} \quad (8)$$

та умовами спряження [2]

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^k \right) u_k - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^k \right) u_{k+1} \right] \Big|_{r=R_k} = 0; \quad j = 1, 2; \quad k = \overline{1, n}, \quad (9)$$

де

$a_{rj}, a_{\varphi j}, a_{zj}, \chi_j, h, \alpha_{js}^k, \beta_{js}^k$ – деякі сталі;

$\alpha_{11}^0 \leq 0, \beta_{11}^0 \geq 0; |\alpha_{11}^0| + \beta_{11}^0 \neq 0; \alpha_{22}^{n+1} \geq 0, \beta_{22}^{n+1} \geq 0; \alpha_{22}^{n+1} + \beta_{22}^{n+1} \neq 0;$

$c_{jk} \equiv \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k \neq 0; c_{1k} \cdot c_{2k} > 0;$

$f_j(t, r, \varphi, z); g_j^s(r, \varphi, z); w_j(t, r, \varphi), g_0(t, \varphi, z), g(t, \varphi, z), g_{pj}(t, r, z); w_{pj}(t, r, z);$

$(p = \overline{1, 4}; j = \overline{1, n+1})$ – задані дійсні обмежені неперервні функції;

$u_j(t, r, \varphi, z)$ – шукані дійсні двічі неперервно диференційовні функції.

Одержані інтегральні зображення розв’язків гіперболічних початково-крайових задач спряження (1)-(4), (5), (9); (1)-(4), (6), (9); (1)-(4), (7), (9); (1)-(4), (8), (9) носять алгоритмічний характер, неперервно залежать від параметрів і вихідних даних задач й можуть бути використані як у подальших теоретичних дослідженнях, так і в практиці інженерних розрахунків математичних моделей коливних процесів у кусково-однорідних середовищах, які описуються циліндричною системою координат.

Список використаних джерел

1. Громик А. П., Конет І. М. Гіперболічні крайові задачі математичної фізики в кусково-однорідних циліндричних середовищах. Кам’янець-Подільський : ПП «Видавництво Абетка світ», 2020. 200 с.
2. Конет І. М., Пилипюк Т. М. Крайові задачі в кусково-однорідних циліндрично-кругових середовищах. Чернівці : Технодрук, 2019. 200 с.
3. Самойленко В. Г., Конет І. М. Рівняння математичної фізики. Київ : ВПЦ «Київський університет», 2014. 283 с.