

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ТАВРІЙСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ АГРОТЕХНОЛОГІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ДМИТРА МОТОРНОГО

Зінов'єва О.Г., Малкіна В.М.

ТЕОРІЯ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

Методичні вказівки для виконання практичних робіт

для здобувачів ступеня вищої освіти «Бакалавр» зі спеціальності
122 Комп'ютерні науки

Запоріжжя

2026

*Схвалено методичною комісією факультету енергетики і комп'ютерних технологій Таврійського державного агротехнологічного університету імені Дмитра Моторного
від «22» травня 2026 р., протокол № 9*

Рецензенти:

Мацулевич О.Є. – кандидат технічних наук, доцент кафедри технічної механіки та комп'ютерних технологій проектування ім. В.М. Найдиша, Таврійський державний агротехнологічний університет імені Дмитра Моторного;

Сіциліцин Ю.О. – доктор філософії, доцент кафедри інформатики і кібернетики Мелітопольського державного педагогічного університету імені Богдана Хмельницького.

Зінов'єва О.Г., Малкіна В.М.

363 Теорія прийняття рішень: методичні вказівки до виконання практичних робіт. Запоріжжя, 2026. 116 с.

Методичні вказівки підготовлені відповідно до програми навчальної дисципліни «Теорія прийняття рішень», яка включена у навчальний план підготовки бакалаврів спеціальності 122 Комп'ютерні науки. У методичних вказівках розглядаються методи розв'язання задач прийняття рішень за умов визначеності, невизначеності, ризику, конфлікту та нечіткої інформації.

УДК 519.816

© Зінов'єва О.Г., Малкіна В.М.
© Таврійський державний агротехнологічний університет
імені Дмитра Моторного, 2026

ЗМІСТ

ВСТУП	4
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №1	
Метод послідовних уступок для розв’язання багатокритеріальних задач ...	5
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №2	
Методи прийняття рішень в умовах багатокритеріальної оптимізації.....	18
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №3	
Функція корисності.....	37
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №4	
Прийняття рішень в умовах невизначеності	55
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №5	
Прийняття рішень в умовах ризику	65
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №6	
Елементи теорії ігор. Графічний метод.....	75
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №7	
Приведення матричної гри до задачі лінійного програмування	86
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №8	
Прийняття рішень в умовах нечіткої інформації	97
КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ ПРАКТИЧНИХ РОБІТ	115
ЛІТЕРАТУРА	116

ВСТУП

Сучасний етап розвитку інформаційних технологій характеризується стрімким зростанням обсягів даних, ускладненням програмних систем та необхідністю оперативного прийняття обґрунтованих рішень у різних сферах людської діяльності. ІТ-фахівці у своїй професійній діяльності постійно стикаються із задачами вибору оптимальних рішень за умов багатокритеріальності, невизначеності, ризику та неповноти інформації. Саме тому дисципліна «Теорія прийняття рішень» є важливою складовою професійної підготовки бакалаврів спеціальності 122 «Комп'ютерні науки». Вона забезпечує формування у здобувачів вищої освіти системного підходу до аналізу складних проблем, оцінювання альтернатив та вибору найбільш ефективних стратегій дій. Опанування методів прийняття рішень дозволяє майбутнім ІТ-фахівцям розробляти інтелектуальні інформаційні системи, системи підтримки прийняття рішень, програмні засоби аналізу даних та моделі оптимізації процесів.

Методичні вказівки з дисципліни «Теорія прийняття рішень» розроблено відповідно до освітньо-професійної програми підготовки здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальності 122 «Комп'ютерні науки». Метою є закріплення теоретичних знань, отриманих під час лекційних занять, а також формування практичних навичок застосування математичних методів і моделей для аналізу та розв'язання задач прийняття рішень.

Методичні вказівки охоплюють основні розділи дисципліни та складається з восьми практичних занять, присвячених методам і моделям прийняття рішень в умовах багатокритеріальності, побудови та аналізу функцій корисності, методів прийняття рішень в умовах невизначеності та ризику, основ теорії ігор, а також прийняття рішень за нечітких вхідних даних.

Методичні вказівки містять приклади виконання робіт, що надає студентам протягом вивчення дисципліни «Теорія прийняття рішень» самостійно, якісно та швидко виконувати індивідуальні завдання

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №1

Тема: Метод послідовних уступок для розв'язання багатокритеріальних задач

Мета: Навчити розв'язувати багатокритеріальні задачі за методом послідовних уступок.

1.1 Основні теоретичні відомості

Метод послідовних уступок є одним з методів розв'язання задач багатокритеріальної оптимізації. В основу методу покладено вимогу розташування приватних критеріїв за значимістю. Сутність методу полягає у послідовному розв'язанні серії задач оптимізації. Передбачається, що всі приватні критерії, що становлять векторний критерій, упорядковані за зменшенням важливості: $f_1, \dots, f_n$. Будемо вважати також, що кожний з критеріїв необхідно максимізувати.

Алгоритм побудови компромісного рішення:

1) Знаходиться максимальне значення f_1^* . Першого за важливістю критерію в області припустимих рішень шляхом розв'язання задачі однокритеріальної оптимізації

$$\begin{aligned} f_1(\bar{X}) &\rightarrow \max, \\ \bar{X} &\in Q, \end{aligned}$$

де Q – область допустимих рішень.

2) Виходячи з практичних міркувань і точності визначення вихідних даних призначається величина припустимого відхилення $\Delta_1 > 0$ критерію f_1

Знаходиться максимальне значення критерію f_2 за умовою, що значення першого критерію не повинно відхилятися від свого максимального значення більш ніж на величину припустимої поступки, тобто вирішується задача:

$$\begin{aligned} f_2(\bar{X}) &\rightarrow \max, \\ f_1(\bar{X}) &\geq f_1^* - \Delta_1, \\ \bar{X} &\in Q. \end{aligned}$$

3) Знову призначається величина поступки $\Delta_2 > 0$ по другому критерію, яка разом з першою поступкою використовується для знаходження умовного максимуму третього приватного критерію:

$$\begin{aligned} f_3(\bar{X}) &\rightarrow \max, \\ f_1(\bar{X}) &\geq f_1^* - \Delta_1, \\ f_2(\bar{X}) &\geq f_2^* - \Delta_2, \\ \bar{X} &\in Q. \end{aligned}$$

4) Аналогічна процедура повторюється до тих пір, поки не буде виявлене максимальне значення останнього за важливістю критерію f_n при умові, що значення кожного з перших $n - 1$ критеріїв відрізняється від відповідного умовного максимуму не більш ніж на величину припустимої поступки по даному критерію.

Отримане на останньому етапі рішення є оптимальним

Отже, для багатокритеріальної задачі з n частковими критеріями необхідно послідовно виконати n етапів. Рішення, що отримується на кінцевому етапі цього методу, вважається оптимальним для початкової багатокритеріальної оптимізаційної задачі..

Переваги методу:

- простота реалізації;
- можливість урахування пріоритетності критеріїв;
- отримання компромісного рішення;
- наочність процесу оптимізації.

Істотним недоліком методу послідовних поступок є те, що рішення, отримане цим методом, може виявитися неоптимальним за Парето. Тому така задача має закінчуватись перевіркою отриманого розв'язку на оптимальність за Парето.

1.2 Завдання для самопідготовки

У процесі підготовки до заняття студент в обов'язковому порядку повинен виконати наступні завдання:

- а) вивчити конспект лекцій;
- б) опрацювати рекомендовану літературу: [1] с. 163, [4] с. 59;
- в) занести у зошит для практичних робіт такі матеріали:
 - 1) Метод послідовних поступок

1.3 Програма роботи

- 1) Вивчити теоретичні відомості.
- 2) Проробити контрольний приклад
- 3) Виконати індивідуальні завдання:
- 4) Оформити звіт. Вимоги до оформлення звіту наведені у п. 1.5.
- 5) Захистити лабораторну роботу. Питання для самоконтроля наведені у п. 1.6

1.4 Порядок роботи

1.4.1 Контрольний приклад

Задача.

Виробнича компанія визначає стратегію свого розвитку залежно від інвестицій x_1 та впровадження нових технологій x_2 . У результаті попередніх досліджень було відібрано три найважливіших цілей компанії та розставлено у пріоритетності по відношенню до виробленої продукції

Розв'язати задачу оптимізації при трьох критеріях

$$f_{\text{приб}} = 5x_1 + 4x_2 + 3 \rightarrow \max - \text{максимізувати прибуток};$$

$f_{\text{функ}} = 2x_1 + 9x_2 + 1 \rightarrow \max$ – максимізувати функціональність продукції;

$f_{\text{спож.прив.}} = 9x_1 + x_2 + 20 \rightarrow \max$ – максимізувати споживчу привабливість продукції.

при умовах

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \geq 18, \\ -x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 + 3x_2 \leq 27, \\ x_1 - x_2 \leq 4, \\ 3x_1 + x_2 \leq 28, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Також, в силу пріоритетності цілей були накладені додаткові обмеження на допуск максимальних значень для прибутку і функціональності продукції, згідно з якими:

- прибуток не повинна бути менше 78,3% свого оптимального значення;

- функціональності продукції не повинна відрізнятися від свого оптимального значення більш ніж на 32,25 одиниць.

Визначити стратегію компанії

Розв'язання

1) Знаходимо розв'язок задачі максимізації найбільш важливого критерію $f_{\text{пр}}$:

$$f_1 = 5x_1 + 4x_2 + 3 \rightarrow \max$$

при умовах

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \geq 18, \\ -x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 + 3x_2 \leq 27, \\ x_1 - x_2 \leq 4, \\ 3x_1 + x_2 \leq 28, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

Розв'язок цієї задачі знаходимо геометричним методом

2) На основі системи обмежень побудуємо багатокутник допустимих розв'язків. Для цього будемо напівплощини відповідно кожної нерівності, їх межі визначені відповідними прямими

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 = 18, & (1) \\ -x_1 + x_2 = 4, & (2) \\ x_1 + 3x_2 = 27, & (3) \\ x_1 - x_2 = 4, & (4) \\ 3x_1 + x_2 = 28, & (5) \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3) Графіком отриманих рівнянь є прямі, які проходять відповідно крізь точки.

Координати 1-й точки		Координати 1-й точки	
x_1	x_2	x_1	x_2
0	6	4,5	0
0	4	-4	0
0	27	9	0
0	4	-4	0
0	$9\frac{1}{3}$	28	0

4) Визначаємо напівплощини, які задані кожною нерівністю. Багатокутник розв'язків ABCDE зображено на рисунку 1.1.

5) Будуємо вектор $\vec{c} = \{5; 4\}$ та пряму рівня $5x_1 + 4x_2 + 3 = h$, перпендикулярно до $\vec{c}$.

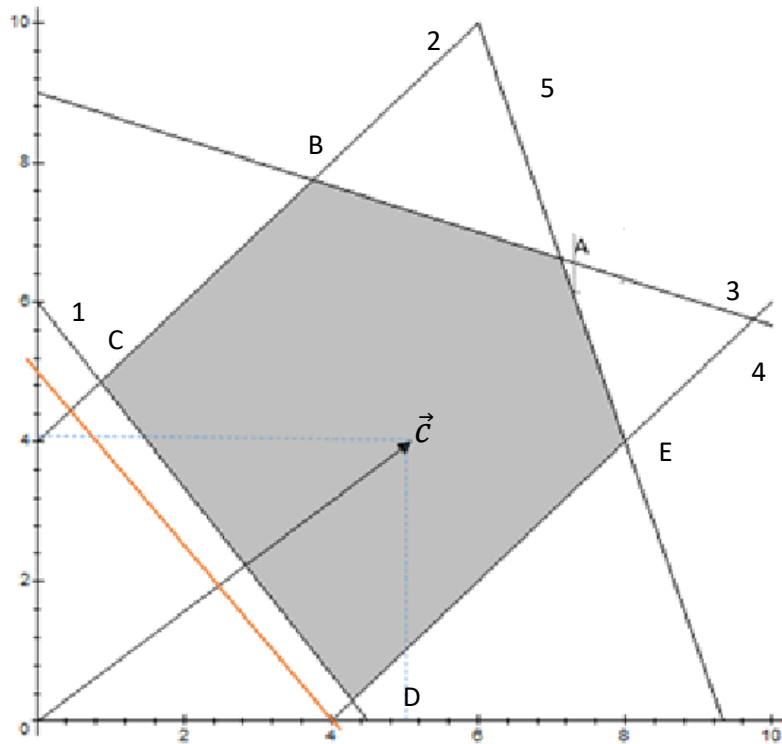


Рисунок 1.1 – Багатокутник розв'язків

Максимуму цільова функція досягає в точці А, яка є перетином прямих

$$x_1 + 3x_2 = 27 \text{ та } 3x_1 + x_2 = 28.$$

б) Знаходимо координати точки А, розв'язуючи систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 27 \\ 3x_1 + x_2 = 28 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = 57/8 \\ x_2 = 53/8 \end{cases}$$

Таким чином, координати точки А(57/8;53/8).

7) Підставляючи значення координат у цільову функцію, одержуємо максимальне значення, яке дорівнює

$$f_1^{max} = 5x_1 + 4x_2 + 3 = 5 * \frac{57}{8} + 4 * \frac{53}{8} + 3 = \frac{521}{8}$$

8) Відповідно до першої поступки значення функції f не повинно бути менше 78,3 % свого оптимального значення, тобто. $f_1 \geq f_1^{max} * 0,783$. Таким чином будемо мати додаткове обмеження:

$$5x_1 + 4x_2 + 3 \geq \frac{521}{8} * 0,783$$

$$5x_1 + 4x_2 \geq 48$$

9) Додаємо нове обмеження до системи обмежень (1) і будуємо новий багатокутник розв'язків (рис. 1.2)

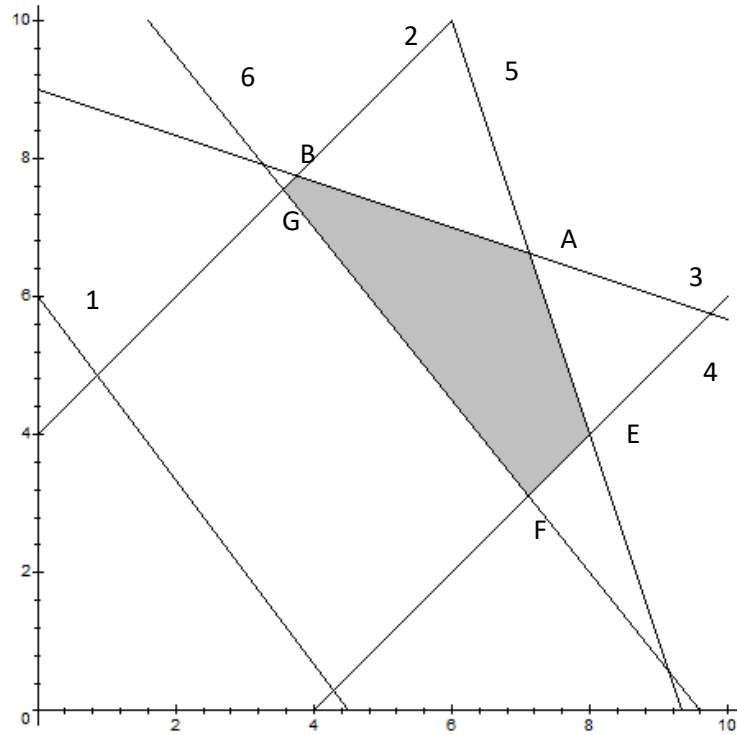


Рисунок 1.2 – Багатокутник розв’язків з урахуванням додаткового обмеження

10) Будуємо вектор градієнт з координатами $\{2;9\}$ для цільової функції $f_2 = 2x_1 + 9x_2 + 1$ та лінії рівня, які перпендикулярні до вектору-градієнту (рис. 1.3)

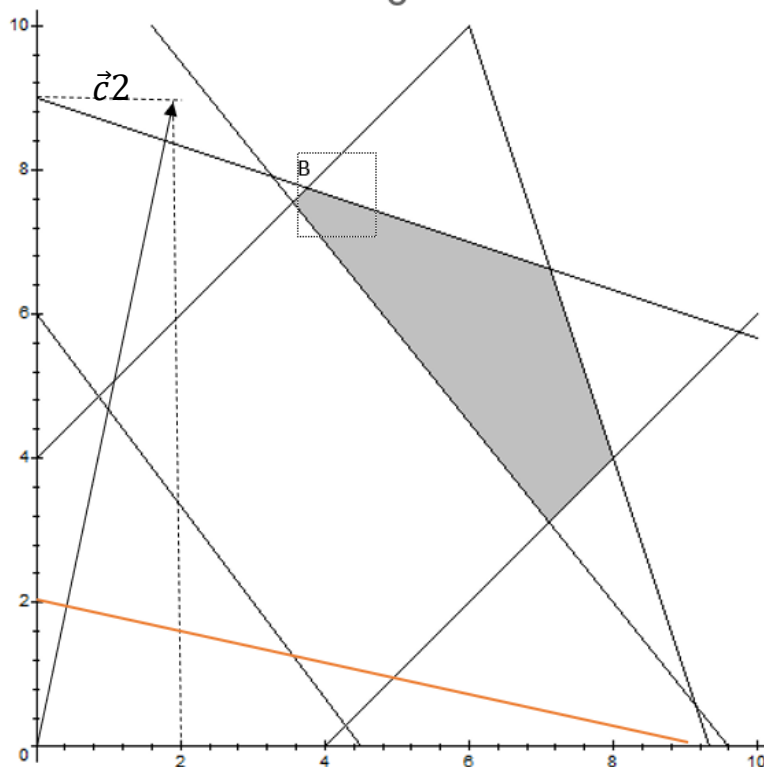


Рисунок 1.3 - Пошук точки оптимуму для функції $f_2 = 2x_1 + 9x_2 + 1$

11) Максимуму цільова функція досягає в точці В, яка є перетином прямих $x_1 + 3x_2 = 27$ та $-x_1 + x_2 = 4$

12) Знаходимо координати точки В, розв'язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 27 \\ -x_1 + x_2 = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 5/4 \\ x_2 = 31/4 \end{cases}$$

Таким чином, координати точки В(15/4;31/4).

Максимальне значення функції f_2 дорівнює:

$$f_2^{max} = 2x_1 + 9x_2 + 1 = 2 * \frac{15}{4} + 9 * \frac{31}{4} + 1 = 78,25$$

13) З урахуванням поступки Δ_2 будуємо нове обмеження:

$$2x_1 + 9x_2 + 1 \geq 78,25 - 32,25$$

$$2x_1 + 9x_2 \geq 45$$

14) Додаємо нове обмеження до системи обмежень (1) і будуємо новий багатокутник розв'язків (рис. 1.4)

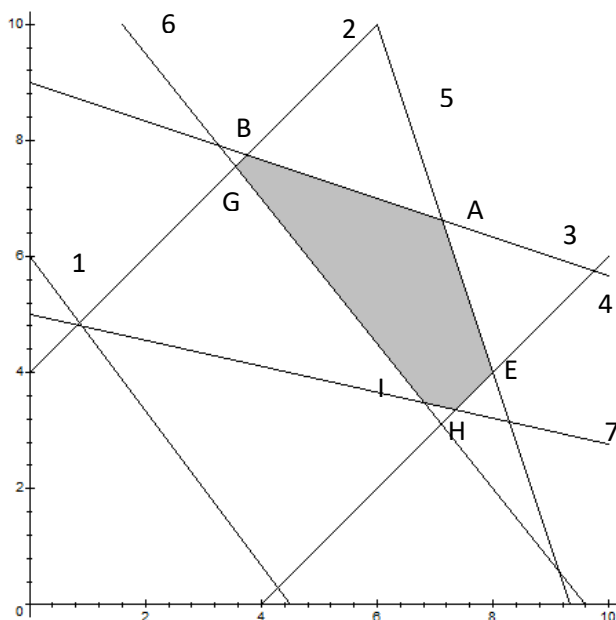


Рисунок 1.4 – Багатокутник розв'язків з урахуванням обмеження

$$2x_1 + 9x_2 \geq 45$$

15) Будуємо вектор градієнт з координатами $\{9;1\}$ для цільової функції $f_3 = 9x_1 + x_2 + 20$ та лінії рівня, які перпендикулярні до вектору-градієнту (рис. 1.5)

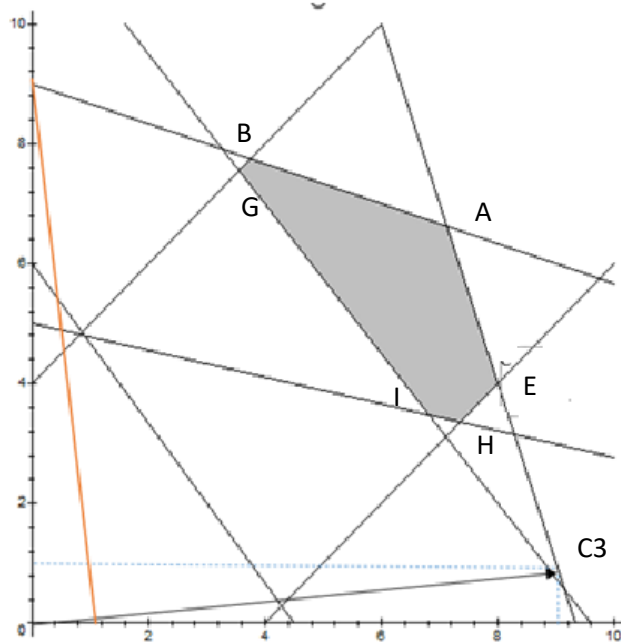


Рисунок 10 – Багатокутник розв'язків і пошук точки оптимума для функції

$$f_3 = 9x_1 + x_2 + 20$$

16) Максимуму цільова функція досягає в точці E, яка є перетином прямих $x_1 - x_2 = 4$ та $3x_1 + x_2 = 28$

1) Знаходимо координати точки B, розв'язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 4 \\ 3x_1 + x_2 = 28 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 8 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

Таким чином, координати точки E(8;4).

Максимальне значення функції f_3 дорівнює:

$$f_3^{max} = 9x_1 + 2x_2 + 20 = 9 * 8 + 2 * 4 + 20 = 96.$$

17) Знаходимо значення інших цільових функцій в точці E

$$f_1 = 5x_1 + 4x_2 + 3 = 5 * 8 + 4 * 4 + 3 = 59$$

$$f_2 = 2x_1 + 9x_2 + 1 = 2 * 8 + 9 * 4 + 1 = 53.$$

Висновок Таким чином, отримаємо оптимальну стратегію $x_1 = 8, x_2 = 4$ з відповідними значеннями функцій

1: $f_1 = 59$ прибуток

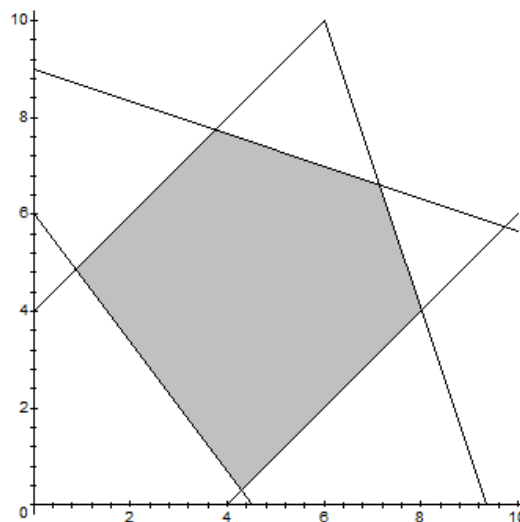
2: $f_2 = 53$ функціональність продукції

3: $f_3 := 96$ споживча привабливість

Приклад розв'язання задачі в середовищі Maple

Фрагмент коду програми:

```
> with (plots) :  
> g1:=inequal ({4*x1+3*x2>=18, -x1+x2<=4, x1+3*x2<=27, x1-  
x2<=4, 3*x1+x2<=28, x1>=0, x2>=0}, x1=0..10, x2=0..10,  
optionsfeasible=(color=gray) ,  
optionsexcluded=(color=white)) :  
> display (g1) ;
```



```
> solve ({x1+3*x2=27, 3*x1+x2=28}, {x1, x2}) ;  
      {x1 = 57/8, x2 = 53/8}  
> g1:=inequal ({4*x1+3*x2>=18, -x1+x2<=4, x1+3*x2<=27, x1-  
x2<=4, 3*x1+x2<=28, 5*x1+4*x2>=47.99, x1>=0, x2>=0}, x1=0..  
10, x2=0..10, optionsfeasible=(color=gray) ,  
optionsexcluded=(color=white)) :  
> display (g1) ;
```

Індивідуальні завдання для виконання практичного заняття

Знайти оптимальний розв'язок задачі з урахуванням поступок:

- значення функції f_1 не повинно бути менше δ_1 свого оптимального значення;
- значення функції f_2 не повинна відрізнятися від свого оптимального значення більш ніж на δ_2 .

Варіанти індивідуальних завдань наведені в таблиці 1.1

Таблиця 1.1 - Варіанти індивідуальних завдань

Варіант1 $f_1 = 3x_1 + 4x_2 + 2 \rightarrow \max$ $f_2 = 3x_1 + 5x_2 + 2 \rightarrow \max$ $f_3 = 6x_1 + 3x_2 + 10 \rightarrow \max$ $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \geq 12, \\ -x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1 + 3x_2 \leq 27, \\ x_1 - x_2 \leq 6, \\ 3x_1 + x_2 \leq 26 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$ $\delta_1 = 65\%, \quad \delta_2 = 30$	Варіант2 $f_1 = -2x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$ $f_2 = 3x_1 + x_2 \rightarrow \max$ $f_3 = x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} -4x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ 2x_1 + x_2 \leq 18, \\ x_1 - 4x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$ $\delta_1 = 75\%, \quad \delta_2 = 4$
Варіант3 $f_1 = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$ $f_2 = -x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$ $f_3 = x_1 - x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ x_1 + 2x_2 \leq 14, \\ 2x_1 - x_2 \leq 8, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$ $\delta_1 = 75\%, \quad \delta_2 = 1$	Варіант4 $f_1 = 2x_1 - x_2 \rightarrow \max$ $f_2 = -x_1 + x_2 \rightarrow \max$ $f_3 = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 3, \\ x_1 - 2x_2 \leq 2, \\ x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$ $\delta_1 = 75\%, \quad \delta_2 = 1$
Варіант5 $f_1 = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$ $f_2 = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \min$ $f_3 = x_1 - x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 18, \\ 3x_1 + x_2 \leq 15, \\ x_1 - x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$ $\delta_1 = 75\%, \quad \delta_2 = 2$	Варіант6 $f_1 = x_1 + 3x_2 + 2 \rightarrow \max$ $f_2 = 9x_1 + 2x_2 \rightarrow \min$ $f_3 = 3x_1 - x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 18, \\ x_1 + x_2 \leq 9, \\ x_1 - 4x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$ $\delta_1 = 45\%, \quad \delta_2 = 33.5$

Варіант7 $f_1 = x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$ $f_2 = 10x_1 + 2x_2 \rightarrow \min$ $f_3 = 3x_1 - x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} x_1 + 4x_2 \leq 24, \\ x_1 + x_2 \leq 10, \\ x_1 - 5x_2 \leq 5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$ $\delta_1 = 75\%, \quad \delta_2 = 28,6$	Варіант8 $f_1 = x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$ $f_2 = 12x_1 + 2x_2 \rightarrow \min$ $f_3 = 2x_1 - x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} x_1 + 5x_2 \leq 30, \\ x_1 + x_2 \leq 12, \\ x_1 - 6x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$ $\delta_1 = 75\%, \quad \delta_2 = 25$
Варіант9 $f_1 = x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$ $f_2 = 10x_1 + 2x_2 \rightarrow \min$ $f_3 = 2x_1 - x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 18, \\ x_1 + x_2 \leq 10, \\ x_1 - 4x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$ $\delta_1 = 75\%, \quad \delta_2 = 30$	Варіант10 $f_1 = x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$ $f_2 = 9x_1 + 2x_2 \rightarrow \min$ $f_3 = 6x_1 - x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} x_1 + 5x_2 \leq 30, \\ x_1 + x_2 \leq 9, \\ x_1 - 6x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$ $\delta_1 = 65\%, \quad \delta_2 = 20$
Варіант11 $f_1 = -2x_1 + x_2 + 5 \rightarrow \max$ $f_2 = 3x_1 + x_2 \rightarrow \max$ $f_3 = x_1 - 3x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ -x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 + x_2 \leq 20, \\ x_1 + 2x_2 \leq 22, \\ x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$ $\delta_1 = 70\%, \quad \delta_2 = 2$	Варіант12 $f_1 = -2x_1 + 3x_2 + 5 \rightarrow \max$ $f_2 = 4x_1 + x_2 \rightarrow \max$ $f_3 = -3x_1 + x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq 12, \\ 0.5x_1 - x_2 \leq 4, \\ x_1 + 2x_2 \leq 22, \\ -x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$ $\delta_1 = 75\%, \quad \delta_2 = 10$
Варіант13 $f_1 = -3x_1 + x_2 \rightarrow \max$ $f_2 = 5x_1 + x_2 \rightarrow \max$ $f_3 = x_1 - 2x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 \leq 20, \\ x_1 - 2x_2 \leq 7, \\ x_1 + x_2 \leq 20, \\ -x_1 + x_2 \leq 7, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$ $\delta_1 = 35\%, \quad \delta_2 = 38$	Варіант14 $f_1 = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max$ $f_2 = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$ $f_3 = -x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 7, \\ 3x_1 - x_2 \leq 7, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ -x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$ $\delta_1 = 75\%, \quad \delta_2 = 13$

Варіант15 $f_1 = 2x_1 - 5x_2 \rightarrow \max$ $f_2 = 4x_1 - 2x_2 \rightarrow \max$ $f_3 = 4x_1 + 7x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 18, \\ x_1 \geq 1, \\ x_1 - x_2 \leq 2, \\ -x_1 + x_2 \leq 9, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$ $\delta_1 = 75\%, \quad \delta_2 = 2.5$	Варіант16 $f_1 = -21x_1 + 18x_2 \rightarrow \max$ $f_2 = -19x_1 + 17x_2 \rightarrow \max$ $f_3 = x_1 - 2x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 18, \\ x_1 \geq 2, \\ x_1 - x_2 \leq 5, \\ x_2 \leq 9, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$ $\delta_1 = 75\%, \quad \delta_2 = 25$
Варіант17 $f_1 = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max$ $f_2 = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$ $f_3 = -x_1 - 3x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 \leq 3, \\ -x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$ $\delta_1 = 75\%, \quad \delta_2 = 1,75$	Варіант18 $f_1 = -x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$ $f_2 = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$ $f_3 = x_1 - 2x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 2, \\ x_2 \leq 2, \\ -x_1 + x_2 \leq 1, \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$ $\delta_1 = 75\%, \quad \delta_2 = 1,9$
Варіант19 $f_1 = 5x_1 + 4x_2 + 3 \rightarrow \max$ $f_2 = 2x_1 + 9x_2 + 1 \rightarrow \max$ $f_3 = 9x_1 + x_2 + 20 \rightarrow \max$ $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \geq 18, \\ x_1 + 3x_2 \leq 27, \\ 3x_1 + x_2 \leq 28, \\ -x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 - x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$ $\delta_1 = 88\%, \quad \delta_2 = 47/3$	Варіант 20 $f_1 = 3x_1 + 4x_2 + 2 \rightarrow \max$ $f_2 = 3x_1 + 5x_2 + 2 \rightarrow \max$ $f_3 = 6x_1 + 3x_2 + 10 \rightarrow \max$ $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \geq 12, \\ -x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1 + 3x_2 \leq 27, \\ x_1 - x_2 \leq 6, \\ 3x_1 + x_2 \leq 26 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$ $\delta_1 = 65\%, \quad \delta_2 = 30$
Варіант 21 $f_1 = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$ $f_2 = -x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$ $f_3 = x_1 - x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ x_1 + 2x_2 \leq 14, \\ 2x_1 - x_2 \leq 8, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$ $\delta_1 = 75\%, \quad \delta_2 = 1$	Варіант 22 $f_1 = 2x_1 - x_2 \rightarrow \max$ $f_2 = -x_1 + x_2 \rightarrow \max$ $f_3 = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 3, \\ x_1 - 2x_2 \leq 2, \\ x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$ $\delta_1 = 75\%, \quad \delta_2 = 1$

Варіант 23 $f_1 = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$ $f_2 = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \min$ $f_3 = x_1 - x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 18, \\ 3x_1 + x_2 \leq 15, \\ x_1 - x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$ $\delta_1 = 75\%, \quad \delta_2 = 2$	Варіант 24 $f_1 = x_1 + 3x_2 + 2 \rightarrow \max$ $f_2 = 9x_1 + 2x_2 \rightarrow \min$ $f_3 = 3x_1 - x_2 \rightarrow \max$ $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 18, \\ x_1 + x_2 \leq 9, \\ x_1 - 4x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$ $\delta_1 = 45\%, \quad \delta_2 = 33.5$
--	--

1.5 Вимоги до оформлення звіту

Звіт повинен містити:

- тему та мету роботи
- короткий конспект теоретичних відомостей;
- результати виконаних дій із змістовними поясненнями;
- висновки.

Контрольні питання

1. У чому полягає основна ідея методу послідовних поступок?
2. Які види інформації про переваги ОПР використовуються при побудові вирішального правила методом послідовних поступок?
3. Чому метод послідовних поступок відноситься до класу багатокрокових?
4. Для яких задач застосовується метод послідовних поступок?
5. Чому критерії необхідно впорядковувати за важливістю?
6. Що називають поступкою в методі послідовних поступок?
7. Які переваги має метод послідовних поступок?
8. Які недоліки властиві даному методу?
9. Що розуміють під компромісним рішенням?
10. Як вибір поступок впливає на результат оптимізації?
11. У яких сферах практичної діяльності застосовується метод?

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №2

Тема: Методи прийняття рішень в умовах багатокритеріальної оптимізації

Мета: Навчити розв'язувати багатокритеріальні задачі за методами згортки критеріїв.

2.1 Основні теоретичні відомості

Постановка багатокритеріальної задачі прийняття рішень

Нехай є k критеріїв, які можна записати у вигляді цільових функцій $f_k(x)$, де $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$. Оскільки $\min f(x) = -\max(-f(x))$, то для простоти надалі припускати, що всі цільові функції максимізуються. Задача багатокритеріальної оптимізації тоді запишеться:

$$F(x) = |f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)| \rightarrow \max \quad (2.1)$$

$$g_i(x) \leq b_i; \quad i = \overline{1, n}; \quad (2.2)$$

$$x \geq 0 \quad (2.3)$$

Основне відношення, за яким проводиться порівняння векторних оцінок (значить, і порівняння результатів), - це відношення домінування по Парето, яке визначається наступним чином,

Кажуть, що векторна оцінка $x = (x_1, \dots, x_m)$, домінує по Парето векторну оцінку $y = (y_1, \dots, y_m)$ (записується у вигляді $x \succ y$), якщо для всіх $j = \overline{1, m}$ виконується нерівність $f_j(x) \geq f_j(y)$. Причому принаймні для одного індексу $j = \overline{1, m}$ нерівність має бути суворою. Якщо ця умова не виконується, то кажуть, що x та y непорівнянні по Парето.

Альтернатива x_0 називається *ефективним* або *Парето-оптимальним* рішенням багатокритеріальної задачі, якщо вона є недомінуючою за Парето. Множина всіх Парето-оптимальних рішень задачі називається *множиною Парето* для даної задачі.

Методи згортки критеріїв

Нехай є багатокритеріальна задача прийняття рішень.

Методи згортки критеріїв засновані на переході від багатокритеріальної задачі до однокритеріального вигляду:

$$W(x) \rightarrow \max, \quad x \in X. \quad (2.4)$$

Тут $W(x)$ – інтегральний показник, що представляє певну комбінацію оцінок альтернативи $x \in X$ по всім критеріям з урахуванням їх важливості, тобто

$$\Pi(\chi) = g(f_1(x), \dots, f_n(x), \Lambda), \quad (2.5)$$

де g – оператор згортки,

$\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ – вектор ступенів відносної важливості ((пріоритетів, вагів) критеріїв.

1) *Аддитивна згортка*

$$W_{ад}(x) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f_j(x) \rightarrow \max, \quad x \in X. \quad (2.6)$$

Даний тип згортки може використовуватися, якщо ОПР вважає припустимим, що абсолютне зменшення оцінки по одному критерію може бути компенсоване сумарним абсолютним збільшенням оцінки по іншим критеріям.

2) *Мультиплікативна згортка*

$$W_{mul}(x) = \prod_{j=1}^n f_j(x)^{\lambda_j} \rightarrow \max, \quad x \in X. \quad (2.7)$$

Оператор мультиплікативної згортки використовується, якщо припустимою вважається не абсолютна, а відносна компенсація змін оцінок. На відміну від аддитивної згортки, даний оператор значно менше лояльний до низьких оцінок по окремим критеріям.

3) *Згортка типу «відстань до ідеалу»*

Даний тип згортки застосовується, якщо інтегральна оцінка альтернативи повинна мати сенс відхилення її векторної критеріальної оцінки від заданого еталонного зразка («ідеалу») x^* в просторі критеріальних оцінок. В якості такого зразка може виступати як реальне рішення, що відповідає деяким прийнятим стандартам або перспективним рівням, так і фізично недосяжне рішення з оцінками

$$f_j^* = f_j^{\max} = \max_{x \in X} f_j(x), \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.8)$$

Оператор згортки має вигляд:

$$W(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i |f_i(x) - f_i^*|^2} \rightarrow \min, \quad x \in X \quad (2.9)$$

2.2 Завдання для самопідготовки

У процесі підготовки до заняття студент в обов'язковому порядку повинен виконати наступні завдання:

- а) вивчити конспект лекцій;
- б) опрацювати рекомендовану літературу: [2] с. 38; [3] с. 86; [4] с. 55
- в) занести у зошит для практичних робіт такі матеріали:

- 1) Методи розв'язання багатокритеріальних задач оптимізації
- 2) Методи згортки критеріїв

2.3 Програма роботи

- 1) Вивчити теоретичні відомості.
- 2) Проробити контрольний приклад
- 3) Виконати індивідуальні завдання:
- 4) Оформити звіт. Вимоги до оформлення звіту наведені у п. 2.5.
- 5) Захистити лабораторну роботу. Питання для самоконтроля наведені у п. 2.6

2.4 Порядок роботи

2.4.1 Контрольний приклад

Задача 1 Виділення множини Парето

Є множина альтернатив x_i , які оцінюються по чотирьом критеріям за допомогою єдиної шкали (більш кращою вважається більш висока оцінка).

Виділити множину Парето.

Таблиця 2.1 – Вихідні дані для задачі 1

	f_1	f_2	f_3	f_4
x_1	2	5	1	4
x_2	5	3	4	7
x_3	3	6	3	5
x_4	4	3	2	5

Розв'язання

- 1) Порівнюючи векторні оцінки альтернативи x_1 з іншими альтернативами по Парето, встановлюємо:

$$x_1 \sim x_2, x_1 < x_3$$

- 2) Альтернативу x_1 виключаємо з розгляду.
- 3) Порівнюємо оцінки альтернатив x_2 з x_3 та x_4 :

$$x_2 \sim x_3, x_2 > x_4$$

- 4) Альтернативу x_4 виключаємо з розгляду.

Висновок. Таким чином, множина Парето для даної задачі має вигляд $P(x) = \{x_2, x_3\}$.

Задача 2 Методи згортки критеріїв

Розглянемо задачу вибору місця роботи з наступними критеріями оцінки альтернатив:

$f_1 \rightarrow \max$ - величина окладу, у.о.

$f_2 \rightarrow \max$ – тривалість відпустки, хв

$f_3 \rightarrow \min$ - середній час, що витрачається на дорогу, хв.

Є 9 альтернативних варіантів, критеріальні оцінки яких наведені в таблиці 2.2.

Таблиця 2.2 - Критеріальні оцінки альтернатив

x_i	$f_1(x_i)$	$f_2(x_i)$	$f_3(x_i)$
x_1	900	20	60
x_2	500	30	20
x_3	700	36	40
x_4	800	40	50
x_5	400	60	15
x_6	600	30	10
x_7	900	35	60
x_8	600	24	10
x_9	650	35	40

На думку ОПР, порядок важливості критеріїв $f_1 > f_3 > f_2$.

Необхідно:

- 1) На основі заданого порядку важливості критеріїв встановити числові оцінки їх ваг;
- 2) Привести оцінки за всіма критеріями до єдиної безрозмірною шкалою шляхом нормування критеріїв;

Вибрати рішення, використовуючи такі види згорток: адитивна, мультиплікативна, відстань до ідеалу.

Розв'язання

- 1) Для оцінки ступенів відносної важливості (ваг) критеріїв, скористаємося пропорційним методом, припустивши, що ОПР вважає критерій f_1 в 5 разів, а критерій f_3 - в 2 рази важливіше найменш важливого критерію f_2 (табл. 2.3).

Таблиця 2.3 – Вагові коефіцієнти критеріїв

f_i	Коефіцієнт важливості	λ_i
f_1	$5w$	0,625
f_2	w	0,125
f_3	$2w$	0,250
Σ	$8w$	1

2) Замінімо критерій f_3 на $-f_3$, для того, щоб від завдання мінімізації перейти до задачі максимізації і виконаємо нормування критеріїв за формулою

$$\tilde{f}_j(x_i) = \frac{f_j - f_j^{\min}}{f_j^{\max} - f_j^{\min}}$$

Наприклад,

$$\tilde{f}_1(x_1) = \frac{f_1(x_1) - f_1^{\min}}{f_1^{\max} - f_1^{\min}} = \frac{900 - 400}{900 - 400} = 1;$$

$$\tilde{f}_1(x_2) = \frac{f_1(x_2) - f_1^{\min}}{f_1^{\max} - f_1^{\min}} = \frac{500 - 400}{900 - 400} = 0,2; \text{ і т.д.}$$

1. Адитивна згортка критеріїв

1) Застосовуючи оператор зваженої аддитивної згортки до нормованих критеріальних оцінок $\tilde{f}_j(x_i)$ і обчисленням на попередньому кроці значенням вагових коефіцієнтів λ_j , отримуємо інтегральні оцінки альтернатив

$$W_{add}(x_1) = 1 \cdot 0,625 + 0 \cdot 0,125 + 0 \cdot 0,25 = 0,625;$$

$$W_{add}(x_2) = 0,2 \cdot 0,625 + 0,25 \cdot 0,125 + 0,8 \cdot 0,25 = 0,356;$$

$$W_{add}(x_3) = 0,6 \cdot 0,625 + 0,4 \cdot 0,125 + 0,4 \cdot 0,25 = 0,525;$$

$$W_{add}(x_4) = 0,8 \cdot 0,625 + 0,5 \cdot 0,125 + 0,2 \cdot 0,25 = 0,613;$$

$$W_{add}(x_5) = 0 \cdot 0,625 + 1 \cdot 0,125 + 0,9 \cdot 0,25 = 0,350;$$

$$W_{add}(x_6) = 0,4 \cdot 0,625 + 0,25 \cdot 0,125 + 1 \cdot 0,25 = 0,531;$$

$$W_{add}(x_7) = 1 \cdot 0,625 + 0,375 \cdot 0,125 + 0 \cdot 0,25 = 0,672;$$

$$W_{add}(x_8) = 0,4 \cdot 0,625 + 0,1 \cdot 0,125 + 1 \cdot 0,25 = 0,513;$$

$$W_{add}(x_9) = 0,5 \cdot 0,625 + 0,375 \cdot 0,125 + 0,4 \cdot 0,25 = 0,459.$$

2) Результати наведені в таблиці 2.4

Таблиця 2.4 – Розрахункові значення оператора зваженої адитивної згортки

x_i	$f_1(x_i)$	$f_2(x_i)$	$f_3(x_i)$	$\tilde{f}_1(x_i)$	$\tilde{f}_2(x_i)$	$\tilde{f}_3(x_i)$	$W_{add}(x_i)$
	$\lambda_1 = 0,625$	$\lambda_2 = 0,125$	$\lambda_3 = 0,250$	$\lambda_1 = 0,625$	$\lambda_2 = 0,125$	$\lambda_3 = 0,250$	
x_1	900	20	-60	1	0	0	0,625
x_2	500	30	-20	0,2	0,25	0,8	0,356
x_3	700	36	-40	0,6	0,4	0,4	0,525
x_4	800	40	-50	0,8	0,5	0,2	0,613
x_5	400	60	-15	0	1	0,9	0,350
x_6	600	30	-10	0,4	0,25	1	0,531
x_7	900	35	-60	1	0,375	0	0,672
x_8	600	24	-10	0,4	0,1	1	0,513
x_9	650	35	-40	0,5	0,375	0,4	0,459

3) Згідно з методом адитивної згортки (2.6) найкращою альтернативою є альтернатива x_7

2. Мультиплікативна згортка критеріїв

1) Застосуємо оператор мультиплікативної згортки до нормованих критеріальних оцінок $\tilde{f}_1(x_1)$:

$$W_{mult}(x_i) = \prod_{j=1}^n \tilde{f}_j(x_i)^{\lambda_j} \rightarrow \max$$

$$W_{mult}(x_1) = 1^{0,625} \cdot 0^{0,125} \cdot 0^{0,25} = 0$$

$$W_{mult}(x_2) = 0,2^{0,625} \cdot 0,25^{0,125} \cdot 0,8^{0,25} = 0,291$$

$$W_{mult}(x_3) = 0,6^{0,625} \cdot 0,4^{0,125} \cdot 0,4^{0,25} = 0,515;$$

$$\dots$$

2) Результати розрахунку наведені в таблиці 2.5

Таблиця 2.4 – Розрахункові значення оператора мультиплікативної згортки

x_i	$f_1(x_i)$	$f_2(x_i)$	$f_3(x_i)$	$\tilde{f}_1(x_i)$	$\tilde{f}_2(x_i)$	$\tilde{f}_3(x_i)$	W_{mult}
	0,625	0,125	0,250	0,625	0,125	0,250	
x_1	900	20	-60	1	0	0	0

x_2	500	30	-20	0,2	0,25	0,8	0,291
x_3	700	36	-40	0,6	0,4	0,4	0,515
x_4	800	40	-50	0,8	0,5	0,2	0,533
x_5	400	60	-15	0	1	0,9	0
x_6	600	30	-10	0,4	0,25	1	0,474
x_7	900	35	-60	1	0,375	0	0
x_8	600	24	-10	0,4	0,1	1	0,423
x_9	650	35	-40	0,5	0,375	0,4	0,456

3) Згідно з методом мультиплікативної згортки найкращою альтернативою є альтернатива x_4

3. Згортка «відстань до ідеалу»

1) Для кожного критерію будемо вважати «ідеальною» найкращу з наявних у ній оцінок, тобто $f_1^* = 900$, $f_2^* = 60$, $f_3^* = -10$.

2) Переходимо від вихідних критеріїв f_j до допоміжних критеріїв φ_j за формулою

$$\varphi_j(x_i) = |f_j(x_i) - f_j^*|.$$

3) Виконаємо нормування допоміжних критеріїв:

$$\tilde{\varphi}_j(x_i) = \frac{\varphi_j - \varphi_j^{\min}}{\varphi_j^{\max} - \varphi_j^{\min}}$$

4) Застосуємо оператор згортки «відстань до ідеалу» до нормованих критеріальних оцінок $\tilde{\varphi}_j(x_i)$

$$W_{id}(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_j \tilde{\varphi}_j^2} \rightarrow \min, \quad x \in X$$

$$W_{id}(x_1) = \sqrt{0,625 * 0^2 + 0,125 * 1^2 + 0,250 * 1^2} = 0,612;$$

$$W_{id}(x_2) = \sqrt{0,625 * 0,8^2 + 0,125 * 0,75^2 + 0,250 * 0,2^2} = 0,693;$$

...

5) Результати застосування оператора згортки до нормованих критеріїв наведені в таблиці 2.5

Таблиця 2.5 - Розрахункові значення оператора згортки «відстань до ідеалу»

x_i	$\varphi_1(x_i)$	$\varphi_2(x_i)$	$\varphi_3(x_i)$	$\tilde{\varphi}_1(x_i)$	$\tilde{\varphi}_2(x_i)$	$\tilde{\varphi}_3(x_i)$	$W_{id}(x_i)$
	0,625	0,125	0,250	0,625	0,125	0,250	
x_1	0	40	50	0	1	1	0,612
x_2	400	30	10	0,8	0,75	0,2	0,693
x_3	200	24	30	0,4	0,6	0,6	0,485
x_4	100	20	40	0,2	0,5	0,8	0,465
x_5	500	0	5	1	0	0,1	0,792
x_6	300	30	0	0,6	0,75	0	0,543
x_7	0	25	50	0	0,625	1	0,547
x_8	300	36	0	0,6	0,9	0	0,571
x_9	250	25	30	0,5	0,625	0,6	0,543

4) Згідно з методом мультиплікативної згортки найкращою альтернативою є альтернатива x_4 . Це рішення також є оптимальним за Парето.

Індивідуальні завдання для виконання практичного заняття

Є множина альтернатив $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, що оцінюються за набором критеріїв оцінюваних по набору критеріїв $F = \{f_1, f_2, \dots, f\}$. Критеріальні оцінки наведені в таблиці. Також заданий порядок важливості критеріїв, що відображає думку ОПР..

Необхідно:

- 1) На основі заданого порядку важливості критеріїв встановити числові оцінки їх ваг, використовуючи метод ранжування чи пропорційний метод;
- 2) Привести оцінки за всіма критеріями до єдиної безрозмірної шкали шляхом нормування критеріїв;
- 3) Виділити множину Парето
- 4) Вибрати рішення, використовуючи такі види згорток: адитивна, мультиплікативна, відстань до ідеалу.

Варіант 1

Вибір технологічної лінії для підприємства із 9 моделей на основі наступних критеріїв:

$f_1 \rightarrow \max$ - продуктивність, виробів за годину.

$f_2 \rightarrow \min$ - вартість, тис. грош. од.;

$f_3 \rightarrow \max$ - зручність в експлуатації, бали;

$f_4 \rightarrow \max$ - термін гарантійного обслуговування, років

x_i	$f_1(x_i)$	$f_2(x_i)$	$f_3(x_i)$	$f_4(x_i)$
x_1	40	220	4	4
x_2	45	240	5	2
x_3	30	200	3	2
x_4	48	300	4	5
x_5	35	180	3	3
x_6	50	320	5	5
x_7	32	160	3	2
x_8	40	250	3	4
x_9	42	200	3	4

Порядок важливості критеріїв $f_1 > f_2 > f_3 > f_4$

ОПР вважає критерій f_1 в 3,5 рази, критерій f_2 в 2,5 рази, f_3 - в 1,5 рази важливіше найменш важливого критерію f_4 .

Варіант 2

Торгове підприємство має намір придбати партію холодильних установок. Вибір здійснюється з 7 моделей на основі наступного набору критеріїв:

$f_1 \rightarrow \max$ – об'єм холодильної камери, л;

$f_2 \rightarrow \max$ - об'єм морозильної камери, л;

$f_3 \rightarrow \max$ - загальна площа полиць, m^2 ;

$f_4 \rightarrow \max$ - термін гарантійного обслуговування, років

$f_5 \rightarrow \min$ вартість, тис. грош. од..

x_i	$f_1(x_i)$	$f_2(x_i)$	$f_3(x_i)$	$f_4(x_i)$	$f_5(x_i)$
x_1	500	250	3,8	5	35
x_2	300	300	1,4	5	24
x_3	250	120	1,5	4	20
x_4	450	200	2,9	3	30
x_5	450	300	3,8	3	25
x_6	500	250	3,8	5	32
x_7	400	250	2,1	3	25

Порядок важливості критеріїв $f_1 > f_5 > f_2 > f_3 > f_4$

ОПР вважає критерій f_1 в 5 разів, критерій f_5 в 3,5 рази, f_2 - в 3 рази, а критерій f_3 в 2 рази важливіше найменш важливого критерію f_4

Варіант 3

Вибір машини для фасування продуктів. Є 7 альтернатив, що оцінюються за такими критеріями:

$f_1 \rightarrow \max$ - продуктивність, упаковок за годину;

$f_2 \rightarrow \max$ - ємність бункера для продукту, л;

$f_3 \rightarrow \min$ - тривалість заправки бункера, хв;

$f_4 \rightarrow \min$ - складність переналаштування на інші види фасування, бали;

$f_5 \rightarrow \max$ - зручність чищення, бали;

$f_6 \rightarrow \min$ - вартість, тис. гр. од

x_i	$f_1(x_i)$	$f_2(x_i)$	$f_3(x_i)$	$f_4(x_i)$	$f_5(x_i)$	$f_6(x_i)$
x_1	200	10	5	5	4	45
x_2	180	8	3	4	5	48
x_3	200	8	2	5	5	50
x_4	190	10	5	3	4	48
x_5	220	12	3	3	5	48
x_6	200	7	2	4	3	42
x_7	220	15	4	2	4	35

Порядок важливості критеріїв $f_4 > f_6 > f_1 > f_5 > f_2 > f_3$

Варіант 4

Керівник цеху розглядає три можливі рішення щодо підвищення продуктивності ділянки фрезерування::

x_1 - модифікувати наявний фрезерний верстат;

x_2 - придбати новий верстат із програмним управлінням;

x_3 - замінити верстат обробним центром.

Оцінка альтернатив здійснюється за такими критеріями:

$f_1 \rightarrow \min$ - вартість придбання, грош. од;

$f_2 \rightarrow \min$ - вартість обслуговування, грош. од;

$f_3 \rightarrow \min$ - вартість навчання персоналу, грош. од;

$f_4 \rightarrow \max$ - продуктивність, виробів за зміну;

$f_5 \rightarrow \min$ - час налагодження, хв;

$f_6 \rightarrow \min$ - кількість металевих відходів, кг за зміну.

x_i	$f_1(x_i)$	$f_2(x_i)$	$f_3(x_i)$	$f_4(x_i)$	$f_5(x_i)$	$f_6(x_i)$
x_1	12	2	3	8	30	176
x_2	25	4	8	14	20	66
x_3	120	15	20	40	3	18

Порядок важливості критеріїв $f_1 \succ f_2 \succ f_3 \succ f_4 \succ f_5 \succ f_6$

Варіант 5

Хімічний комбінат планує впровадити автоматизовану систему керування технологічними процесами. Вибір здійснюється із 7 Варіантів, для оцінки яких використовуються наступні критерії:

$f_1 \rightarrow \min$ - Витрати використання, тис. гр. од.;

$f_2 \rightarrow \min$ - термін введення в експлуатацію, місяців;

$f_3 \rightarrow \max$ - зручність в експлуатації, бали

$f_4 \rightarrow \max$ - термін гарантійного обслуговування, років;

x_i	$f_1(x_i)$	$f_2(x_i)$	$f_3(x_i)$	$f_4(x_i)$
x_1	40	8	3	3
x_2	30	8	5	3
x_3	40	6	2	4
x_4	60	6	5	5
x_5	45	7	1	3
x_6	25	8	4	3
x_7	55	6	3	4

Порядок важливості критеріїв $f_1 \succ f_2 \succ f_4 \succ f_3$

ОПР вважає f_1 в 4 рази, критерій f_2 в 2,5 рази, а критерій f_4 - в 1,5 рази важливіше найменш важливого критерію f_3 .

Варіант 6

У ході реконструкції порту розглядаються проекти будівництва нового терміналу для розвантаження танкерів. Пропонуються 5 проектів, оцінка яких проводиться за наступним набором критеріїв:

$f_1 \rightarrow \max$ - пропускна спроможність, тис. на день;

$f_2 \rightarrow \min$ - витрати на будівництво, млн. гр.од

$f_3 \rightarrow \min$ - термін будівництва, міс.;

$f_4 \rightarrow \max$ - екологічна безпека, бали;

$f_5 \rightarrow \min$ - вартість обробки 1 т нафти, гр.од.

x_i	$f_1(x_i)$	$f_2(x_i)$	$f_3(x_i)$	$f_4(x_i)$	$f_5(x_i)$
x_1	2,6	3,5	24	4	4,5
x_2	2	2,5	30	5	3,5
x_3	2	3	30	4	4,5
x_4	2,5	4	28	3	6

x_5	2,3	2,8	25	4	4
-------	-----	-----	----	---	---

Порядок важливості критеріїв $f_1 \succ f_4 \succ f_5 \succ f_2 \succ f_3$

ОПР вважає критерій f_1 у 5 разів, критерій f_4 у 3,5 рази, критерій f_5 - у 3 рази, а критерій f_2 у 2 рази важливіший за найменш важливий критерій f_1 .

Варіант 7

Вибір машини для виготовлення пластикової упаковки. Є 9 альтернатив, що оцінюються за такими критеріями:

$f_1 \rightarrow \max$ – продуктивність, упаковок на годину;

$f_2 \rightarrow \min$ – втрата матеріалу, %;

$f_3 \rightarrow \max$ - зручність в експлуатації, бали;

$f_4 \rightarrow \min$ – вартість, тис. ден.од.;

x_i	$f_1(x_i)$	$f_2(x_i)$	$f_3(x_i)$	$f_4(x_i)$
x_1	220	7	3	60
x_2	260	3	5	60
x_3	200	8	3	45
x_4	180	4	4	48
x_5	240	4	4	60
x_6	280	5	4	57
x_7	200	3	3	50
x_8	240	6	3	55
x_9	250	4	2	58

Порядок важливості критеріїв $f_1 \succ f_4 \succ f_2 \succ f_3$

ОПР вважає критерій f_1 в 3,5 рази, критерій f_4 в 2,5 рази, а критерій f_2 - в 2 рази важливіший за найменш важливий критерій f_3 .

Варіант 8

Підприємство харчової промисловості вирішує завдання вибору конвеєра транспортування продуктів. Є 6 альтернативних варіантів, що оцінюються за такими критеріями:

$f_1 \rightarrow \max$ - максимальна вага вантажу, що транспортується, кг;

$f_2 \rightarrow \max$ - кількість швидкостей роботи, що перемикаються;

$f_3 \rightarrow \max$ - зручність в експлуатації, бали;

$f_4 \rightarrow \min$ – вартість, тис. грн.;

x_i	$f_1(x_i)$	$f_2(x_i)$	$f_3(x_i)$	$f_4(x_i)$
x_1	80	4	4	45
x_2	90	4	3	45
x_3	60	2	5	48
x_4	80	3	5	42
x_5	40	2	5	40
x_6	50	2	4	42

Порядок важливості критеріїв $f_4 \succ f_1 \succ f_3 \succ f_2$

ОПР вважає критерій f_4 в 5 разів, критерій f_1 в 3 рази, а критерій f_3 - в 1,5 рази важливіше найменш важливого критерію f_2 .

Варіант 9

Вибір компресора для подачі повітря у пневматичне обладнання.

Є 6 альтернатив, що оцінюються за такими критеріями:

$f_1 \rightarrow \max$ - продуктивність, л/хв;

$f_2 \rightarrow \min$ - час встановлення робочого тиску, с;

$f_3 \rightarrow \max$ - зручність в експлуатації, бали;

$f_4 \rightarrow \min$ - вартість, тис. грн.

x_i	$f_1(x_i)$	$f_2(x_i)$	$f_3(x_i)$	$f_4(x_i)$
x_1	120	50	4	12,5
x_2	60	20	4	8
x_3	150	30	2	14
x_4	100	40	3	9,6
x_5	180	50	5	15,8
x_6	120	40	3	12,8

Порядок важливості критеріїв $f_1 \succ f_4 \succ f_2 \succ f_3$

ОПР вважає критерій f_1 в 4,5 рази, критерій f_4 в 2,5 рази, а критерій f_2 - в 1,5 рази важливіший за найменш важливий критерій f_3 .

Варіант 10

Підприємство, яке випускає харчову сіль, має намір придбати машину для розфасовки солі. Вибір здійснюється з 7 моделей на основі таких критеріїв:

$f_1 \rightarrow \max$ - продуктивність, кг/година;

$f_2 \rightarrow \min$ - припустимі відхилення від необхідної ваги упаковки, г

$f_3 \rightarrow \min$ - вартість, тис. грош. од.;

$f_4 \rightarrow \min$ - втрати солі, %

x_i	$f_1(x_i)$	$f_2(x_i)$	$f_3(x_i)$	$f_4(x_i)$
x_1	220	50	52	8
x_2	180	80	35	5
x_3	240	60	47	10
x_4	240	100	40	10
x_5	200	50	50	8
x_6	150	25	40	8
x_7	180	60	50	8

Порядок важливості критеріїв $f_1 \succ f_2 \succ f_3 \succ f_4$

ОПР вважає критерій f_1 в 5 разів, критерій f_2 в 2,5 рази, а критерій f_3 - в 1,5 рази важливіший за найменш важливий критерій f_4 .

Варіант 11

Вибір технологічної лінії для підприємства із 9 моделей на основі наступних критеріїв:

$f_1 \rightarrow \max$ - продуктивність, виробів/година.

$f_2 \rightarrow \min$ - вартість, тис. грош. од.;

$f_3 \rightarrow \max$ - зручність в експлуатації, бали;

$f_4 \rightarrow \max$ - термін гарантійного обслуговування, років

x_i	$f_1(x_i)$	$f_2(x_i)$	$f_3(x_i)$	$f_4(x_i)$
x_1	40	220	4	4
x_2	45	240	5	2
x_3	30	200	3	2
x_4	48	300	4	5
x_5	35	180	3	3
x_6	50	320	5	5
x_7	32	160	3	2
x_8	40	250	3	4
x_9	42	200	3	4

Порядок важливості критеріїв $f_1 \succ f_2 \succ f_3 \succ f_4$

ОПР вважає критерій f_1 в 3 рази, критерій f_2 в 2 рази, а критерій f_3 - в 1,5 рази важливіший за найменш важливий критерій f_4 .

Варіант 12

Торгове підприємство має намір придбати партію холодильних установок. Вибір здійснюється з 7 моделей на основі наступного набору критеріїв:

$f_1 \rightarrow \max$ – об'єм холодильної камери, л;

$f_2 \rightarrow \max$ – об'єм морозильної камери, л;

$f_3 \rightarrow \max$ – загальна площа полиць, м²;

$f_4 \rightarrow \max$ – термін гарантійного обслуговування, років

$f_5 \rightarrow \min$ – вартість, тис. ден.

x_i	$f_1(x_i)$	$f_2(x_i)$	$f_3(x_i)$	$f_4(x_i)$	$f_5(x_i)$
x_1	500	250	3,8	5	35
x_2	300	300	1,4	5	24
x_3	250	120	1,5	4	20
x_4	450	200	2,9	3	30
x_5	450	300	3,8	3	25
x_6	500	250	3,8	5	32
x_7	400	250	2,1	3	25

Порядок важливості критеріїв $f_1 \succ f_5 \succ f_2 \succ f_3 \succ f_4$

Варіант 13

Вибір машини для фасування продуктів. Є 7 альтернатив, що оцінюються за такими критеріями:

$f_1 \rightarrow \max$ – продуктивність, упаковок на годину;

$f_2 \rightarrow \max$ – ємність бункера для продукту, л;

$f_3 \rightarrow \min$ – тривалість заправки бункера, хв;

$f_4 \rightarrow \min$ – складність переналаштування на інші види фасування, бали;

$f_5 \rightarrow \max$ – зручність чищення, бали;

$f_6 \rightarrow \min$ – вартість, тис. грош. од.

x_i	$f_1(x_i)$	$f_2(x_i)$	$f_3(x_i)$	$f_4(x_i)$	$f_5(x_i)$	$f_6(x_i)$
x_1	200	10	5	5	4	45
x_2	180	8	3	4	5	48
x_3	200	8	2	5	5	50
x_4	190	10	5	3	4	48
x_5	220	12	3	3	5	48
x_6	200	7	2	4	3	42
x_7	220	15	4	2	4	35

Порядок важливості критеріїв $f_4 \succ f_6 \succ f_1 \succ f_5 \succ f_2 \succ f_3$

Варіант 14

Керівник цеху розглядає три можливі рішення щодо підвищення продуктивності ділянки фрезерування:

x_1 - модифікувати наявний фрезерний верстат; x_2 - придбати новий верстат із програмним управлінням; x_3 - замінити верстат обробним центром.

Оцінка альтернатив здійснюється за такими критеріями:

$f_1 \rightarrow \min$ – вартість придбання, грош. од.;

$f_2 \rightarrow \min$ - вартість обслуговування, грош. од.;

$f_3 \rightarrow \min$ – вартість навчання персоналу, грош. од.;

$f_4 \rightarrow \max$ - продуктивність, виробів за зміну

$f_5 \rightarrow \min$ – час налагодження, хв;

$f_6 \rightarrow \min$ – кількість металевих відходів, кг за зміну.

x_i	$f_1(x_i)$	$f_2(x_i)$	$f_3(x_i)$	$f_4(x_i)$	$f_5(x_i)$	$f_6(x_i)$
x_1	5	5	3	10	30	175
x_2	30	4	8	14	20	66
x_3	100	15	20	40	30	18

Порядок важливості критеріїв $f_1 \succ f_2 \succ f_3 \succ f_4 \succ f_5 \succ f_6$

Варіант 15

Хімічний комбінат планує впровадити автоматизовану систему керування технологічними процесами. Вибір здійснюється із 7 Варіантів, для оцінки яких використовуються наступні критерії:

$f_1 \rightarrow \min$ - Витрати використання, тис. гр. од.;

$f_2 \rightarrow \min$ - термін введення в експлуатацію, місяців;

$f_3 \rightarrow \max$ - зручність в експлуатації, бали

$f_4 \rightarrow \max$ - термін гарантійного обслуговування, років;

x_i	$f_1(x_i)$	$f_2(x_i)$	$f_3(x_i)$	$f_4(x_i)$
x_1	40	8	3	3
x_2	30	8	5	3
x_3	40	6	2	4
x_4	60	6	5	5
x_5	45	7	1	3
x_6	25	8	4	3
x_7	55	6	3	4

Порядок важливості критеріїв $f_1 \succ f_2 \succ f_4 \succ f_3$

ОПР вважає f_1 в 4 рази, критерій f_2 в 2,5 рази, а критерій f_4 - в 1,5 рази важливіше найменш важливого критерію f_3 .

Варіант 16

У ході реконструкції порту розглядаються проекти будівництва нового терміналу для розвантаження танкерів. Пропонуються 5 проектів, оцінка яких проводиться за наступним набором критеріїв:

$f_1 \rightarrow \max$ - пропускна спроможність, тис. на день;

$f_2 \rightarrow \min$ - витрати на будівництво, млн. гр.од

$f_3 \rightarrow \min$ - термін будівництва, міс.;

$f_4 \rightarrow \max$ - екологічна безпека, бали;

$f_5 \rightarrow \min$ - вартість обробки 1 т нафти, гр.од.

x_i	$f_1(x_i)$	$f_2(x_i)$	$f_3(x_i)$	$f_4(x_i)$	$f_5(x_i)$
x_1	2,6	3,5	24	4	4,5
x_2	2	2,5	30	5	3,5
x_3	2	3	30	4	4,5
x_4	2,5	4	28	3	6
x_5	2,3	2,8	25	4	4

Порядок важливості критеріїв $f_1 \succ f_4 \succ f_5 \succ f_2 \succ f_3$

ОПР вважає критерій f_1 у 5 разів, критерій f_4 у 3,5 рази, критерій f_5 - в 3 рази, а критерій f_2 в 2 рази важливіший за найменш важливий критерій f_1 .

Варіант 17

Вибір машини для виготовлення пластикової упаковки. Є 9 альтернатив, що оцінюються за такими критеріями:

$f_1 \rightarrow \max$ – продуктивність, упаковок на годину;

$f_2 \rightarrow \min$ – втрата матеріалу, %;

$f_3 \rightarrow \max$ - зручність в експлуатації, бали;

$f_4 \rightarrow \min$ – вартість, тис. грош. од.;

x_i	$f_1(x_i)$	$f_2(x_i)$	$f_3(x_i)$	$f_4(x_i)$
x_1	220	7	3	60
x_2	260	3	5	60
x_3	200	8	3	45
x_4	180	4	4	48
x_5	240	4	4	60

x_6	280	5	4	57
x_7	200	3	3	50
x_8	240	6	3	55
x_9	250	4	2	58

Порядок важливості критеріїв $f_1 \succ f_4 \succ f_2 \succ f_3$

ОПР вважає критерій f_1 в 3,5 рази, критерій f_4 в 2,5 рази, а критерій f_2 - в 2 рази важливіший за найменш важливий критерій f_3 .

Варіант 18

Підприємство харчової промисловості вирішує завдання вибору конвеєра транспортування продуктів. Є 6 альтернативних варіантів, що оцінюються за такими критеріями:

$f_1 \rightarrow \max$ - максимальна вага вантажу, що транспортується, кг;

$f_2 \rightarrow \max$ - кількість швидкостей роботи, що перемикаються;

$f_3 \rightarrow \max$ - зручність в експлуатації, бали;

$f_4 \rightarrow \min$ - вартість, тис. грош. од.;

x_i	$f_1(x_i)$	$f_2(x_i)$	$f_3(x_i)$	$f_4(x_i)$
x_1	80	4	4	45
x_2	90	4	3	45
x_3	60	2	5	48
x_4	80	3	5	42
x_5	40	2	5	40
x_6	50	2	4	42

Порядок важливості критеріїв $f_4 \succ f_1 \succ f_3 \succ f_2$

ОПР вважає критерій f_4 в 5 разів, критерій f_1 в 3 рази, а критерій f_3 - в 1,5 рази важливіше найменш важливого критерію f_2 .

Варіант 19

Вибір компресора для подачі повітря у пневматичне обладнання.

Є 6 альтернатив, що оцінюються за такими критеріями:

$f_1 \rightarrow \max$ - продуктивність, л/хв;

$f_2 \rightarrow \min$ - час встановлення робочого тиску, с;

$f_3 \rightarrow \max$ - зручність в експлуатації, бали;

$f_4 \rightarrow \min$ - вартість, тис. грош. од.

x_i	$f_1(x_i)$	$f_2(x_i)$	$f_3(x_i)$	$f_4(x_i)$
x_1	120	50	4	12,5

x_2	60	20	4	8
x_3	150	30	2	14
x_4	100	40	3	9,6
x_5	180	50	5	15,8
x_6	120	40	3	12,8

Порядок важливості критеріїв $f_1 \succ f_4 \succ f_2 \succ f_3$

ОПР вважає критерій f_1 в 4,5 рази, критерій f_4 в 2,5 рази, а критерій f_2 - в 1,5 рази важливіший за найменш важливий критерій f_3 .

Варіант 20

Підприємство, яке випускає харчову сіль, має намір придбати машину для розфасовки солі. Вибір здійснюється з 7 моделей на основі таких критеріїв:

$f_1 \rightarrow \max$ – продуктивність, кг/година;

$f_2 \rightarrow \min$ - припустимі відхилення від необхідної ваги упаковки, г

$f_3 \rightarrow \min$ – вартість, тис. грош. од.;

$f_4 \rightarrow \min$ – втрати солі, %

x_i	$f_1(x_i)$	$f_2(x_i)$	$f_3(x_i)$	$f_4(x_i)$
x_1	220	50	52	8
x_2	180	80	35	5
x_3	240	60	47	10
x_4	240	100	40	10
x_5	200	50	50	8
x_6	150	25	40	8
x_7	180	60	50	8

Порядок важливості критеріїв $f_1 \succ f_2 \succ f_3 \succ f_4$

ОПР вважає критерій f_1 в 5 разів, критерій f_2 в 2,5 рази, а критерій f_3 - в 1,5 рази важливіший за найменш важливого критерію f_4 .

2.5 Вимоги до оформлення звіту

Звіт повинен містити:

- тему та мету роботи
- короткий конспект теоретичних відомостей;

- результати виконаних дій
- висновки по практичній роботі

Контрольні питання

1. Наведіть постановку задачі багатокритеріальної оптимізації
2. Які особливості багатокритеріальних задач порівняно з однокритеріальними?
3. Надайте формальне визначення відношення Парето.
4. Яка альтернатива вважається недомінованою?
5. Яке практичне значення має множина Парето для прийняття рішень?
6. Наведіть приклади векторних критеріальних оцінок, які є порівняльними та непорівнянними по Парето
7. Які рішення багатокритеріальних задач прийняття рішень називають ефективними або Парето-оптимальними?
8. Для чого виконується нормування критеріїв?
9. Що таке згортка критеріїв?
10. Наведіть формальне визначення операторів згортки критеріїв.
11. У чому полягає метод адитивної згортки?
12. Які переваги має метод адитивної згортки?
13. У чому полягає принцип мультиплікативної згортки?
14. Чим мультиплікативна згортка відрізняється від адитивної?
15. У чому полягає метод «відстань до ідеалу»?

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №3

Тема: Побудова функції корисності

Мета: 1) Навчити будувати адитивну функцію корисності

3.1 Основні теоретичні відомості

Корисність – це ціна результату, величина, яку в процесі вибору максимізує особистість.

Відомо, що в умовах раціонального вибору, що має аксіоматичне обґрунтування, існує числова функція корисності U , певна на множині ісходів, що й має наступні властивості :

1) результат x переважніше результату y тоді й тільки тоді, коли $U(x) \geq U(y)$;

$$2) U(x; p; y) = pU(x) + (1 - p)U(y),$$

p – імовірність результату.

Звідси випливає, що потрібно вибирати варіант (дія) з найбільшою корисністю.

Лотереєю називається гра із двома ісходами: результатом x , одержуваним з імовірністю p , і результатом y , одержуваним з імовірністю $(1 - p)$.

Багатокритеріальна теорія корисності MAUT (Multi-Attribute Utility Theory) дозволяє вирішити наступні завдання:

- побудувати функцію корисності, що має математичне обґрунтування;
- перевірити у діалозі з ОПР деякі умови, що визначають форму цієї функції;
- упорядкувати за якістю всі можливі альтернативи та провести їх оцінку на підставі знайденого вирішального правила.

Основні етапи підходу MAUT..

1. Розробити перелік критеріїв.
2. Побудувати функції корисності за кожним із критеріїв
3. Перевірити деякі умови, що визначають загальний вигляд функції корисності.
4. Побудувати залежність між оцінками альтернатив за критеріями та загальною якістю альтернативи.
5. Оцінити всі альтернативи і вибрати найкращу..

Умови, яким має задовольняти функція корисності, формують у вигляді аксіом

Аксіоми загального характеру.

1. Аксіома повноти, яка стверджує, що може бути встановлене ставлення між корисностями будь-яких альтернатив: або одна з них перевершує іншу, або вони рівні.

2. Аксіома транзитивності: з переваги корисності альтернативи А над корисністю альтернативи І та переваги корисності над корисністю З випливає перевага корисності альтернативи А над корисністю альтернативи З.

3. Для співвідношень між корисностями альтернатив А, В, С, що мають вигляд

$$U(A) > U(B) > U(C), \quad 0 < \alpha < 1; \quad 0 < p < 1,$$

можна знайти такі числа, що:

$$\alpha * U(A) + (1 - \alpha) * U(C) = U(B),$$

$$U(A) + (1 - \beta) + \beta * U(\beta) > U(B).$$

Умови незалежності.

1. *Незалежність по різниці.* Уподобання між двома альтернативами, що відрізняються лише оцінками за порядковою шкалою одного критерію C_1 , не залежать від однакових оцінок за іншими критеріями $C_2 \dots C_m$.

2. *Незалежність за корисністю.* Критерій C_1 називається незалежним за корисністю від критеріїв $C_2, \dots, C_m$, якщо порядок переваги лотерей, в яких змінюються лише рівні критерію C_1 , не залежить від фіксованих значень за іншими критеріями.

3. *Незалежність за перевагою.* Два критерії C_1 і C_2 незалежні за перевагою від інших критеріїв $C_3, \dots, C_m$, якщо переваги між альтернативами, що відрізняються лише оцінками C_1, C_2 не залежать від фіксованих значень за іншими критеріями

Якщо умови незалежності по корисності та незалежності за перевагою виконані, то функція корисності є адитивною

$$U(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i U_i(x) \quad \text{при} \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \quad (4.1)$$

або мультиплікативною

$$1 + kU(x) = \prod_{i=1}^n [1 + \lambda_i \lambda_j U_i(x)] \quad \text{при} \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i \neq 1, \quad (4.2)$$

де U, U_i – функції корисності, що змінюються від 0 до 1;

λ_i – вагові коефіцієнти критеріїв.

Таким чином, багатокритеріальну функцію корисності можна визначити, якщо відомі значення коефіцієнтів λ_i , а також однокритеріальні функції корисності $U_i(x)$.

-3.2 Завдання для самопідготовки

У процесі підготовки до заняття студент в обов'язковому порядку повинен виконати наступні завдання:

- а) вивчити конспект лекцій;
- б) опрацювати рекомендовану літературу: [1] с. 42;
- в) занести у зошит для практичних робіт такі матеріали:
 - 1) Теорія корисності в прийнятті рішень
 - 2) Метод багатокритеріальної теорії корисності (MAUT)

3.3 Програма роботи

- 1) Вивчити теоретичні відомості.
- 2) Проробити контрольний приклад

- 3) Виконати індивідуальні завдання;
- 4) Оформити звіт. Вимоги до оформлення звіту наведені у п. 3.5.
- 5) Захистити лабораторну роботу. Питання для самоконтроля наведені у п. 3.6

3.4 Порядок роботи

3.4.1 Контрольний приклад

Перед випускником навчального закладу постає проблема вибору оптимального місця подальшої роботи. Вибір визначається значенням критеріїв:

k_1 - величина зарплати;

k_2 - відсоток творчої роботи;

k_3 - час, за який можна добратися до роботи.

Випускник може робити вибір з п'яти передбачуваних місць роботи з наступними оцінками

Таблиця 3.1 – Оцінки альтернатив

Підприємство	Критерії		
	k_1	k_2	k_3
x_1	100	50	30
x_2	140	30	50
x_3	170	25	45
x_4	130	15	10
x_5	140	40	40

Визначити оптимальну альтернативу

Розв'язання

- 1) Вводимо позначення:

k_j^* - краще значення за критерієм j ($k_1^* = 170$) ; $k_2^*=50$; $k_3^*=10$),

k_j^0 - гірше значення за критерієм j ($k_1^0 = 100$; $k_2^0=15$; $k_3^0=50$).

2) Для зручності роботи із ОПР усі критерії представити з позиції їх максимізації або мінімізації. Тому нове значення критерію k_3^H краще представити як різницю $k_{3i}^H = k_{3\max} - k_{3i}$, де k_{3i} - значення критерію 3 для i -ої альтернативи. $k_{3\max}$ - максимальне значення критерію 3 ($k_{3\max} = 50$). Тоді для третього критерію будемо мати $\max\{50 - 30; 50 - 50; 50 - 45; 50 - 10; 50 - 40\} = 40$. $k_3^0 = 0$, тобто $0 \leq k_3 \leq 40$.

Таблиця 3.2 – Найкращі та найгірші значення критеріїв

Критерії	Найгірше значення k_j^0	Найкраще значення k_j^*
k_1	100	170
k_2	15	50
k_3	0	40

3) Будуємо однокритеріальні функції корисності на основі оцінок експертів.

Побудуємо функцію корисності для критерію k_1 .

Спочатку відомі дві точки функції корисності: $u_1(170) = 1, u_1(100) = 0$. Для знаходження проміжних точок використовуються типові лотереї. В лотереї 1 перед ОНР ставиться наступна задача: «Визначте еквівалент визначеності для лотереї, що має з рівними ймовірностями ($p = 0,5$) мінімальну та максимальну величину заробітної плати». Особі, що приймає рішення, надають ряд значень (наприклад, 120 у.о., 130 у.о. і т.д.) і питають вище чи нижче даного значення знаходиться за його думкою, еквівалент визначеності. Припустимо, що ОНР зупинився на значенні 150 у. о., тоді робиться висновок, що $u_1 = 0,5$ відповідає $k_1 = 150$.

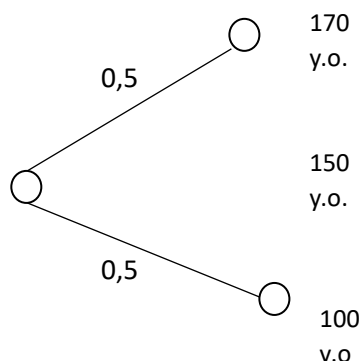


Рисунок 3.1 – Лотерея 1

Аналогічно визначаються інші значення функції корисності. Лотерея 2 дозволяє визначити точку $u_1(160) = 0,75$.

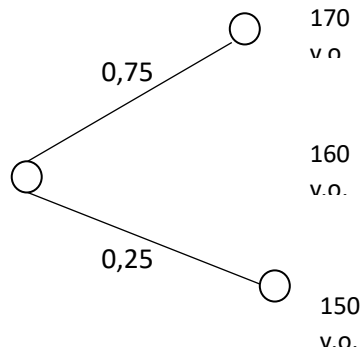


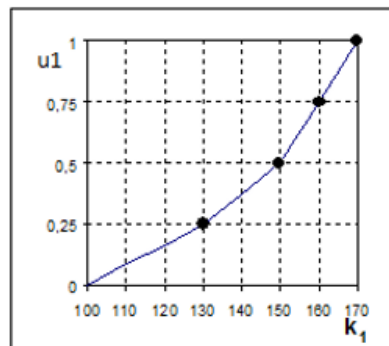
Рисунок 3.2 – Лотерея 2

Таким же чином визначаються значення функції корисності для кожного критерію (табл. 3.3)

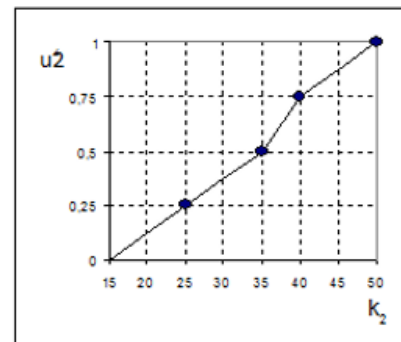
Таблиця 3.3 – Значення функції корисності для критеріїв

u_1	k_1	u_2	k_2	u_3	k_3
0,25	130	0,25	25	0,25	15
0,5	150	0,5	35	0,5	25
0,75	160	0,75	40	0,75	30

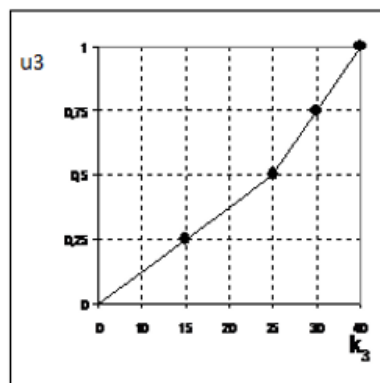
4) Будуємо однокритеріальні функції корисності на основі оцінок ОПР (особою, що приймає рішення виступає студент) для критеріїв (рис. 3.3)



а)



б)



в)

Рисунок 3 – Однокритеріальні функції корисності:
а) для критерія k_1 ; б) для критерія k_2 ; в) для критерія k_3

5) *Перевірка умов незалежності*

Для визначення загальної функції корисності необхідно перевірити умови незалежності по корисності та незалежності по перевазі.

Спочатку особі, яка приймає рішення, повідомляється, що при знаходженні еквівалента визначеності вона повинна прийняти до уваги, що по іншим критеріям маютьсся найкращі значення. Далі перед ОНР ставиться та ж задача, але вже при припущенні, що по іншим критеріям існують найгірші значення. Якщо еквівалент визначеності в обох випадках однаковий, то робиться висновок, що критерій не залежить по корисності від всіх інших критеріїв

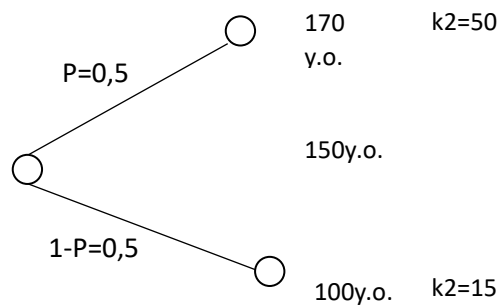


Рисунок 3.4 – Перевірка умов незалежності по корисності

При перевірці умов незалежності по перевазі розглядають площині, де по осях відкладені значення двох критеріїв.

Спочатку передбачається, що по іншим критеріям (в нашому випадку по критерію k_3 існують найкращі значення ($k_3=40$)).

По-перше ОНР повинен визначити свою перевагу між альтернативами $(k_{2\min}, k_{1\max})$ та $(k_{2\max}, k_{1\min})$. В нашому випадку ОНР порівнює місця роботи з оцінками $(15, 170)$ та $(50, 100)$ – дві крайні точки А і В на осях, при умові, що $k_3=40$.

Припустимо, що варіант А має перевагу. Це означає, що критерій заробітної плати більш важливий для ОНР, ніж відсоток творчої роботи. Далі визначається така точка на шкалі критерію k_1 , при якій варіанти А і К однаково значимі для ОНР. Інакше кажучи, визначається така величина заробітної плати k_1 , при якій однаково важливі варіанти $(15, 170)$ і $(50, k_1^*)$.

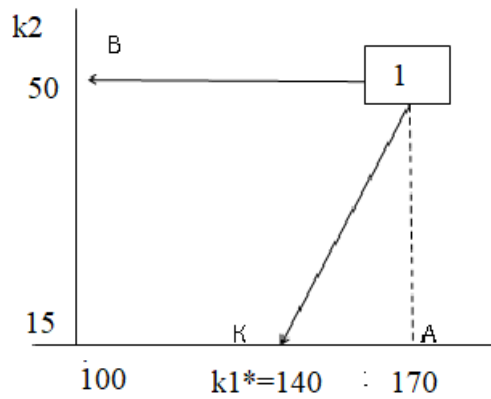


Рисунок 3.5 - Перевірка умови незалежності по перевазі для критеріїв k_1 та k_2 при $k_3=0$

Далі такий же пошук точки байдужості здійснюється при $k_3 = 0$. Якщо результати співпадають, то робиться висновок, що пара критеріїв k_1 і k_2 не залежить по перевазі від третього критерію.

б) Визначення вагових коефіцієнтів

Нехай дано дві альтернативи (k_1^0, k_2^*, k_3) і $(k_1 - ?, k_2^0, k_3)$, де k_j^0 й k_j^* - найгірше і найкраще значення критерію j , k_3 - значення третього критерію (для нас байдуже значення критерію k_3 , тому що всі критерії взаємозалежні). Запитуємо в ОПР: яке повинне бути значення критерію k_1 в другій альтернативи, щоб ці альтернативи були еквівалентні, тобто функції корисності в них були однакові. Для нашої задачі порівнюємо альтернативи $(100, 50, k_3)$ і $(k_1 - ?, 15, k_3)$. З'ясуємо в ОПР: яка повинна бути зарплата, якщо відсоток творчої роботи становить 15 %, а робота повинна бути еквівалентна по ступеню задоволення в роботі, зарплата якої – 100, але відсоток творчої роботи становить 50 %. Якщо ОПР називає припустимо $k_1 = 155$, то $U(k_1^0, k_2^*, k_3) = U(k_1, k_2^0, k_3)$.

Використовуючи формулу аддитивної функції корисності (4.1), визначаємо вагові коефіцієнти критеріїв.

$$\lambda_1 u_1(k_1^0) + \lambda_2 u_2(k_2^*) + \lambda_3 u_3(k_3) = \lambda_1 u_1(k_1) + \lambda_2 u_2(k_2^0) + \lambda_3 u_3(k_3)$$

$$\lambda_1 (u_1(k_1) - u_1(k_1^0)) = \lambda_2 (u_2(k_2^*) - u_2(k_2^0))$$

$$\lambda_2 = \lambda_1 u_1(k_1)$$

За графіком функції корисності $u_1(k_1)$ визначаємо для $k_1 = 155$.

$$\frac{(155 - 150)}{(x - 0.5)} = \frac{(160 - 150)}{(0.75 - 0.5)}$$

$$u_1(155) = x = 0.625$$

$$\lambda_2 = 0,625\lambda_1$$

Аналогічно в особи, що приймає рішення, визначаємо еквівалентність альтернатив:

$$(100, k_2, 40) \approx (k_1 - ?, k_2, 0).$$

Нехай ОПР вибирає $k_1 = 140$. Тоді одержуємо:

$$\lambda_1 u_1(k_1) + \lambda_2 u_2(k_2) + \lambda_3 u_3(k_3^*) = \lambda_1 u_1(k_1) + \lambda_2 u_2(k_2) + \lambda_3 u_3(k_3^0)$$

$$\lambda_3 = \lambda_1 V_1(k_1) = \lambda_1 V_1(140)$$

$$u_1(140) = (140 - 130)(0,5 - 0,25) / (150 - 130) + 0,25 = 0,375$$

Одержуємо систему:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ 0,625\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ 0,375\lambda_1 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Розв'язуємо систему і одержуємо значення вагових коефіцієнтів:

$$\lambda_1 = 0,5; \lambda_2 = 0,3125; \lambda_3 = 0,1875.$$

7) Визначаємо значення функції корисності для всіх альтернатив

$$x_1: U(100; 50; 20) = 0,5 \cdot 0 + 0,3125 \cdot 1 + ((20 - 15) \cdot 0,5 / (25 - 15) + 0,25) \cdot 0,1875 = 0,3828$$

$$x_2: U(140, 30, 0) = 0,3047$$

$$x_3: U(170, 25, 5) = 0,6093$$

$$x_4: U(130, 15, 40) = 0,3125$$

$$x_5: U(140, 40, 10) = 0,4139$$

Висновок: Найбільш сприятливе місце роботи – третє підприємство

Індивідуальні завдання для виконання практичного заняття

Завдання полягає у виборі місця для будівництва супермаркету.

Критерії: k_1 – вартість споруди (млн. грн)

k_2 – час поїздки від центру міста

k_3 – кількість місць для паркування машин

1) Вибрати найкращий варіант, враховуючи схильність ОПР до ризику

2) Виконати програмну реалізацію

Варіант 1

Альтернативи:

A(275 млн, 70 хв, 600)

B(250 млн, 50 хв, 100)

C(225 млн, 80 хв, 200)

D(200 млн, 60 хв, 400)

Діапазон зміни за кожним із критеріїв:

Критерій	Найгірше значення	Найкраще значення
k_1	300	100
k_2	120	50
k_3	100	600

ОПР схильний до ризику

Варіант 2

Альтернативи:

A(275 млн, 70 хв, 600)

B(250 млн, 50 хв, 100)

C(200 млн, 80 хв, 200)

D(150 млн, 60 хв, 400)

Діапазон зміни за кожним із критеріїв:

Критерій	Найгірше значення	Найкраще значення
k_1	300	100
k_2	120	50
k_3	100	600

ОПР не схильний до ризику

Варіант 3

Альтернативи:

A(250 млн, 70 хв, 600)

B(200 млн, 50 хв, 200)

C(150 млн, 100 хв, 100)

D(175 млн, 60 хв, 400)

Діапазон зміни за кожним із критеріїв:

Критерій	Найгірше значення	Найкраще значення
k_1	300	100
k_2	120	50
k_3	100	600

ОПР схильний до ризику

Варіант 4

Альтернативи:

A(280 млн, 50 хв, 600)

B(200 млн, 50 хв, 100)

C(180 млн, 80 хв, 200)

D(150 млн, 120 хв, 500)

Діапазон зміни за кожним із критеріїв:

Критерій	Найгірше значення	Найкраще значення
k_1	300	100
k_2	120	50
k_3	100	600

ОПР не схильний до ризику

Варіант 5

Альтернативи:

A(250 млн, 50 хв, 600)

B(220 млн, 70 хв, 100)

C(200 млн, 90 хв, 200)

D(150 млн, 110 хв, 400)

Діапазон зміни за кожним із критеріїв:

Критерій	Найгірше значення	Найкраще значення
k_1	300	100
k_2	120	50
k_3	100	600

ОПР схильний до ризику

Варіант 6

Альтернативи:

A(100 млн, 90 хв, 550)

B(75 млн, 100 хв, 500)

C(50 млн, 110 хв, 450)

D(25 млн, 120 хв, 550)

Діапазон зміни за кожним із критеріїв:

Критерій	Найгірше значення	Найкраще значення
k_1	100	50
k_2	120	90
k_3	100	400

ОПР не схильний до ризику

Варіант 7

Альтернативи:

A(100 млн, 90 хв, 550)

B(75 млн, 110 хв, 500)

C(50 млн, 100 хв, 550)

D(25 млн, 120 хв, 400)

Діапазон зміни за кожним із критеріїв:

Критерій	Найгірше значення	Найкраще значення
k_1	100	50
k_2	120	90
k_3	400	600

ОПР схильний до ризику

Варіант 8

Альтернативи:

A(100 млн, 90 хв, 600)

B(70 млн, 100 хв, 550)

C(40 млн, 110 хв, 500)

D(300 млн, 120 хв, 450)

Діапазон зміни за кожним із критеріїв:

Критерій	Найгірше значення	Найкраще значення
k_1	100	50
k_2	120	90
k_3	400	600

ОПР не схильний до ризику

Варіант 9

Альтернативи:

A(90 млн, 90 хв, 550)

B(70 млн, 100 хв, 500)

C(50 млн, 100 хв, 450)

D(35 млн, 120 хв, 550)

Діапазон зміни за кожним із критеріїв:

Критерій	Найгірше значення	Найкраще значення
k_1	100	50
k_2	120	90
k_3	400	600

ОПР схильний до ризику

Варіант 10

Альтернативи:

A(90 млн, 90 хв, 550)

B(75 млн, 110 хв, 450)

C(60 млн, 110 хв, 450)

D(45 млн, 120 хв, 400)

Діапазон зміни за кожним із критеріїв:

Критерій	Найгірше значення	Найкраще значення
k_1	100	50
k_2	120	90
k_3	400	600

ОПР не схильний до ризику

Варіант 11

Альтернативи:

A(100 млн, 90 хв, 500)

B(75 млн, 60 хв, 300)

C(50 млн, 40 хв, 150)

D(25 млн, 30 хв, 50)

Діапазон зміни за кожним із критеріїв:

Критерій	Найгірше значення	Найкраще значення
k_1	150	50
k_2	90	30
k_3	50	500

ОПР схильний до ризику

Варіант 12

Альтернативи:

A(150 млн, 90 хв, 500)

B(125 млн, 60 хв, 100)

C(100 млн, 40 хв, 150)

D(75 млн, 30 хв, 50)

Діапазон зміни за кожним із критеріїв:

Критерій	Найгірше значення	Найкраще значення
k_1	150	50
k_2	90	30
k_3	50	500

ОПР не схильний до ризику

Варіант 13

Альтернативи:

A(170 млн, 90 хв, 500)

B(120 млн, 60 хв, 150)

C(100 млн, 40 хв, 100)

D(70 млн, 50 хв, 50)

Діапазон зміни за кожним із критеріїв:

Критерій	Найгірше значення	Найкраще значення
k_1	150	50
k_2	90	30
k_3	50	500

ОПР схильний до ризику

Варіант 14

Альтернативи:

A(200 млн, 30 хв, 150)

B(120 млн, 40 хв, 150)

C(100 млн, 90 хв, 150)

D(70 млн, 90 хв, 150)

Діапазон зміни за кожним із критеріїв:

Критерій	Найгірше значення	Найкраще значення
k_1	150	50
k_2	90	30
k_3	50	500

ОПР не схильний до ризику

Варіант 15

Альтернативи:

A(200 млн, 30 хв, 150)

B(130 млн, 40 хв, 150)

C(75 млн, 60 хв, 300)

D(50 млн, 90 хв, 500)

Діапазон зміни за кожним із критеріїв:

Критерій	Найгірше значення	Найкраще значення
k_1	150	50
k_2	90	30
k_3	50	500

ОПР схильний до ризику

Варіант 16

Альтернативи:

A(100 млн, 40 хв, 300)

B(120 млн, 30 хв, 500)

C(180 млн, 15 хв, 450)

D(110 млн, 10 хв, 100)

Діапазон зміни за кожним із критеріїв:

Критерій	Найгірше значення	Найкраще значення
k_1	180	100
k_2	40	10
k_3	100	500

ОПР не схильний до ризику

Варіант 17

Альтернативи:

A(140 млн, 40 хв, 400)

B(170 млн, 15 хв, 100)

C(130 млн, 25 хв, 450)

D(140 млн, 30 хв, 500)

Діапазон зміни за кожним із критеріїв:

Критерій	Найгірше значення	Найкраще значення
k_1	180	100
k_2	40	10
k_3	100	500

ОПР схильний до ризику

Варіант 18

Альтернативи:

A(250 млн, 90 хв, 250)

B(270 млн, 60 хв, 500)

C(280 млн, 50 хв, 300)

D(230 млн, 35 хв, 450)

Діапазон зміни за кожним із критеріїв:

Критерій	Найгірше значення	Найкраще значення
k_1	280	200
k_2	90	35
k_3	250	500

ОПР не схильний до ризику

Варіант 19

Альтернативи:

A(100 млн, 60 хв, 600)

B(160 млн, 45 хв, 400)

C(180 млн, 15 хв, 300)

D(150 млн, 50 хв, 450)

Діапазон зміни за кожним із критеріїв:

Критерій	Найгірше значення	Найкраще значення
k_1	180	100
k_2	60	15
k_3	300	600

ОПР схильний до ризику

Варіант 20

Альтернативи:

A(275 млн, 70 хв, 600)

B(250 млн, 50 хв, 100)

C(225 млн, 80 хв, 200)

D(200 млн, 60 хв, 400)

Діапазон зміни за кожним із критеріїв:

Критерій	Найгірше значення	Найкраще значення
k_1	300	100
k_2	120	50
k_3	100	600

ОПР не схильний до ризику

Варіант 21

Альтернативи:

A(275 млн, 70 хв, 600)

B(250 млн, 50 хв, 100)

C(200 млн, 80 хв, 200)

D(150 млн, 60 хв, 400)

Діапазон зміни за кожним із критеріїв:

Критерій	Найгірше значення	Найкраще значення
k_1	300	100
k_2	120	50
k_3	100	600

ОПР схильний до ризику

Варіант 22

Альтернативи:

A(250 млн, 70 хв, 600)

B(200 млн, 50 хв, 200)

C(150 млн, 100 хв, 100)

D(175 млн, 60 хв, 400)

Діапазон зміни за кожним із критеріїв:

Критерій	Найгірше значення	Найкраще значення
k_1	300	100
k_2	120	50
k_3	100	600

ОПР не схильний до ризику

Варіант 23

Альтернативи:

A(280 млн, 50 хв, 600)

B(200 млн, 50 хв, 100)

C(180 млн, 80 хв, 200)

D(150 млн, 120 хв, 500)

Діапазон зміни за кожним із критеріїв:

Критерій	Найгірше значення	Найкраще значення
k_1	300	100
k_2	120	50
k_3	100	600

ОПР схильний до ризику

Варіант 24

Альтернативи:

A(250 млн, 50 хв, 600)

B(220 млн, 70 хв, 100)

C(200 млн, 90 хв, 200)

D(150 млн, 110 хв, 400)

Діапазон зміни за кожним із критеріїв:

Критерій	Найгірше значення	Найкраще значення
k_1	300	100
k_2	120	50
k_3	100	600

ОПР не схильний до ризику

3.5 Вимоги до оформлення звіту

Звіт повинен містити:

- тему та мету роботи;
- короткий конспект теоретичних відомостей;
- результати виконаних дій з поясненням;
- висновки з практичної роботи

Контрольні питання

1. Що таке корисність і чому вона важлива в теорії прийняття рішень?
2. Основні положення теорії корисності?
3. Що таке лотерея?
4. Що таке функція корисності?
5. Сформулюйте аксіому транзитивності та наведіть приклади, що підтверджують цю аксіому.

6. Що таке раціональний вибір і чому він важливий у теорії прийняття рішень?
7. Як теорія корисності та раціонального вибору може допомогти приймати кращі рішення?
8. Наведіть приклади практичного застосування теорії корисності та раціонального вибору

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №4

Тема: Прийняття рішень в умовах невизначеності

Мета: 1) Набуття навичок щодо розв'язання задач з прийняття рішень в умовах невизначеності

4.1 Основні теоретичні відомості

Прийняти рішення в умовах невизначеності – це вибрати оптимальну альтернативу, яка забезпечує найбільше значення виграшу за умови, що ми не знаємо, який стан середовища настане.

Для розв'язання задач такого типу використовують наступні критерії:

1) *критерій Лапласа*

Критерій Лапласа застосовується, якщо можна припускати, що всі варіанти зовнішніх умов однаково ймовірні. Для кожного рішення знаходиться середня оцінка за всіма варіантами зовнішніх умов (середній виграш):

$$L(i) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m a_i^j \quad (4.1)$$

Оптимально. за критерієм Лапласа є та альтернатива i^* , що максимізує оцінку:

$$L(i^*) = \max_{i \leq i \leq n} L(i) \quad (4.2)$$

2) *критерій Вальда – максимінний критерій*

Критерій Вальда (критерій крайнього песимізму, максимінний критерій): рішення вибирається з розрахунку на якнайгірші зовнішні умови. Як оцінка кожного рішення використовується мінімальний виграш, який можна одержати при виборі цього рішення:

$$\underline{W}(i) = \min_j a_i^j \quad (4.3)$$

Оптимальною в цьому випадку є альтернатива, яка максимізує функцію $\underline{W}$, тобто альтернатива i^* , для якої виконується умова

$$\underline{W}(i^*) = \max_i \underline{W}(i) = \max_i \min_j a_i^j \quad (4.4)$$

3) критерій песимізму-оптимізму (Гурвіца)

Критерій Гурвіца пов'язаний із введенням показника $0 \leq \alpha \leq 1$, називаного **показником песимізму**. Гіпотеза про поводження середовища складається в цьому випадку в тому, що при будь-якому виборі альтернативи найгірший для приймаючого рішення варіант реалізується з імовірністю α , а найкращий - з імовірністю $1 - \alpha$. Тоді оцінкою альтернативи i є зважена сума

$$H_\alpha(i) = \alpha \min_j a_i^j + (1 - \alpha) \max_j a_i^j \quad (4.5)$$

Умова оптимальності:

$$H_\alpha(i^*) = \max_i H_\alpha(i) \quad (4.6)$$

4) критерій Севіджа

Критерій Севіджа (критерій крайнього песимізму, мінімакський критерій): рішення ухвалюється з розрахунку на якнайгірші зовнішні умови (як і при використанні критерію Вальда), але для оцінки рішень використовується матриця ризиків.

$$r_i^j = \beta^j - \alpha_i^j, \text{ де } \beta^j = \max_i \alpha_i^j. \quad (4.7)$$

$$S(i) = \max_j r_i^j \quad (4.8)$$

Для критерію Севіджа *оптимальною вважається альтернатива, яка мінімізує максимальний ризик*

$$S(i^*) = \min_i S(i). \quad (4.10)$$

4.2 Завдання для самопідготовки

У процесі підготовки до заняття студент в обов'язковому порядку повинен виконати наступні завдання:

- а) вивчити конспект лекцій;
- б) опрацювати рекомендовану літературу: [3] с. 214, [4] с. 152, [6] с. 60;
- в) занести у зошит для практичних робіт такі матеріали:
 - 1) прийняття рішень в умовах невизначеності;
 - 2) критерії прийняття рішень в умовах невизначеності.

4.3 Програма роботи

- 1) Вивчити теоретичні відомості.
- 2) Проробити контрольний приклад
- 3) Виконати індивідуальні завдання:
- 4) Оформити звіт. Вимоги до оформлення звіту наведені у п. 4.5.

5) Захистити лабораторну роботу. Питання для самоконтроля наведені у п. 4.6

4.4 Порядок роботи

8.4.1 Контрольний приклад

Задача. Необхідно оцінити один з трьох розроблюваних програмних продуктів a_i боротьби з одним з чотирьох типів програмних впливів .

Нехай дана матриця ефективності

Таблиця 4.1 – Матриця ефективності

a_i	K_j			
	K_1	K_2	K_3	K_4
a_1	0,1	0,5	0,1	0,2
a_2	0,2	0,3	0,2	0,4
a_3	0,1	0,4	0,4	0,3

a_i - програмний продукт ($i = 1,2,3$);

K_j - оцінка ефективності застосування i -го програмного продукту при j -му програмному впливі ($j = 1,2,3,4$).

Розв'язання

а) критерій Лапласа

Для кожного рядка вихідної платіжної матриці за формулою (6.4) розраховуємо значення критерію L . Результати розрахунку наведені у таблиці 4.2

Таблиця 4.2 — Вибір рішення за критерієм Лапласа

	K_1	K_2	K_3	K_4	$L(i) = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 a_i^j$
a_1	0,1	0,5	0,1	0,2	0,225
a_2	0,2	0,3	0,2	0,4	0,275
a_3	0,1	0,4	0,4	0,3	0,3

$$L(i^*) = \max\{0,225; 0,275; 0,3\} = 0,3$$

Оптимальне рішення – система a_3 .

б) критерій Вальда – максимінний критерій

У кожному рядку платіжної матриці знаходимо найменший елемент і оберемо ту стратегію підприємства, для якої це значення буде максимальним (таблиця 4.3)

Таблиця 4/3 — Вибір рішення за критерієм Вальда

	K_1	K_2	K_3	K_4	$\min_j a_{ij}$
a_1	0,1	0,5	0,1	0,2	0.1
a_2	0,2	0,3	0,2	0,4	0.2
a_3	0,1	0,4	0,4	0,3	0.1

$$\underline{W}(i^*) = \max\{0,1; 0,2; 0,1\} = 0,2$$

Оптимальне рішення – система a_2 .

в) критерій песимізму-оптимізму (Гурвіца)

Нехай $\alpha = 0,6$. У кожному рядку платіжної матриці відшукуємо максимальний та мінімальний елементи і розраховуємо за формулою (4/5) значення критерію $H_\alpha(s)$ (таблиця 4.4):

$$H_\alpha(1) = 0,6 \cdot 0,1 + (1 - 0,6) \cdot 0,5 = 0,26;$$

$$H_\alpha(2) = 0,6 \cdot 0,2 + (1 - 0,6) \cdot 0,4 = 0,28;$$

$$H_\alpha(3) = 0,6 \cdot 0,1 + (1 - 0,6) \cdot 0,4 = 0,22$$

Таблиця 4.4 - Вибір рішення за критерієм Гурвіца

	K_1	K_2	K_3	K_4	$\min_j c_{ij}$	$\max_j c_{ij}$	H_i
a_1	0,1	0,5	0,1	0,2	0.1	0.5	0.26
a_2	0,2	0,3	0,2	0,4	0.2	0.4	0.28
a_3	0,1	0,4	0,4	0,3	0.1	0.4	0.22

$$H_\alpha(i^*) = \max\{0,26; 0,28; 0,22\} = 0,28$$

Оптимальною системою буде a_2

г) критерій Севіджа

Побудуємо матрицю ризиків, для чого у кожному стовпчику платіжної матриці відшукуємо найбільший елемент та віднімаємо від нього всі інші елементи даного стовпчика (таблиця 4.5).

У побудованій матриці ризиків у кожному рядку відшукуємо найбільший елемент

$$S(i) = \max r_i^j$$

Таблиця 4.5 - Матриця ризиків

a_{ij}	K_j				$S(i)$
	K_1	K_2	K_3	K_4	
a_1	0,1	0	0,3	0,2	0,3
a_2	0	0,2	0,2	0	0,2
a_3	0,1	0,1	0	0,1	0,1

Для критерію Севіджа *оптимальною вважається альтернатива, яка мінімізує максимальний ризик*

$$S(i^*) = \min\{0,3; 0,2; 0,1\} = 0,1$$

Оптимальною є система a_3 .

Таким чином, потрібно зробити вибір між наступними рішеннями: за критеріями Гурвіца і Вальда ефективним є програмний продукт a_2 , за критеріями Лапласа і Севіджа - a_3 .

1. Критерій Вальда найкраще використовувати тоді, коли ОПР бажає звести ризик від прийнятого рішення до мінімуму.

2. Коефіцієнт в критерії Гурвіца вибирається з суб'єктивних міркувань: чим небезпечніше ситуація, тим більше ОПР бажає підстрахуватися.

3. Критерій Севіджа зручний, якщо для ОПР прийнятний деякий ризик.

4. Критерій Лапласа може бути застосований, коли ОПР не може віддати перевагу жодній гіпотези

Індивідуальні завдання для виконання практичного заняття

Фермер може посіяти на даній ділянці одну з трьох культур A_1, A_2, A_3 . Врожайність кожної з культур багато в чому залежить від погоди, що може бути посушливою, нормальною чи дощовою (вплив інших факторів не враховується). Відома ціна c_i одного центнера культури A_i , а також врожайності (ц/га) кожної культури A_i :

h_{i1} - врожайність при посушливій погоді,

h_{i2} - врожайність при нормальній погоді

h_{i3} - врожайність при дощовій погоді.

Використовуючи критерії Лапласа, Вальда, Севіджа і Гурвіца (α - коефіцієнт песимізму для критерія Гурвіца) з'ясувати, яку культуру варто сіяти, щоб забезпечити найбільший дохід.

Варіант 1

$$\begin{aligned}c_1 &= 2, c_2 = 3, c_3 = 4 \\h_{11} &= 6, h_{12} = 7, h_{13} = 6.5, \\h_{21} &= 3, h_{22} = 5, h_{23} = 4, \\h_{31} &= 2.75, h_{32} = 6, h_{33} = 2.5 \\ \alpha &= 0.7\end{aligned}$$

Варіант 2

$$\begin{aligned}c_1 &= 3, c_2 = 5, c_3 = 4 \\h_{11} &= 2, h_{12} = 3, h_{13} = 1, \\h_{21} &= 1, h_{22} = 2, h_{23} = 1.6, \\h_{31} &= 2, h_{32} = 3, h_{33} = 1 \\ \alpha &= 0.8\end{aligned}$$

Варіант 3

$$\begin{aligned}c_1 &= 2, c_2 = 3, c_3 = 5 \\h_{11} &= 6, h_{12} = 7, h_{13} = 5, \\h_{21} &= 3, h_{22} = 4, h_{23} = 3.5, \\h_{31} &= 3, h_{32} = 3.2, h_{33} = 2.8 \\ \alpha &= 0.9\end{aligned}$$

Варіант 4

$$\begin{aligned}c_1 &= 5, c_2 = 6, c_3 = 4 \\h_{11} &= 2, h_{12} = 2.2, h_{13} = 1.8, \\h_{21} &= 2, h_{22} = 3, h_{23} = 1, \\h_{31} &= 2, h_{32} = 4, h_{33} = 3 \\ \alpha &= 0.6\end{aligned}$$

Варіант 5

$$\begin{aligned}c_1 &= 7, c_2 = 6, c_3 = 8 \\h_{11} &= 2, h_{12} = 3, h_{13} = 2.5, \\h_{21} &= 3, h_{22} = 4, h_{23} = 2,\end{aligned}$$

$$h_{31} = 2, h_{32} = 3, h_{33} = 1$$

$$\alpha = 0.7$$

Варіант 6

$$c_1 = 8, c_2 = 10, c_3 = 9$$

$$h_{11} = 2, h_{12} = 3, h_{13} = 2.5,$$

$$h_{21} = 2, h_{22} = 2.5, h_{23} = 1.9,$$

$$h_{31} = 2, h_{32} = 3, h_{33} = 1$$

$$\alpha = 0.8$$

Варіант 7

$$c_1 = 10, c_2 = 15, c_3 = 12$$

$$h_{11} = 5, h_{12} = 5.5, h_{13} = 5.3,$$

$$h_{21} = 2, h_{22} = 3, h_{23} = 2.4,$$

$$h_{31} = 4, h_{32} = 5, h_{33} = 4.2$$

$$\alpha = 0.9$$

Варіант 8

$$c_1 = 6, c_2 = 8, c_3 = 7$$

$$h_{11} = 2, h_{12} = 3, h_{13} = 2.5,$$

$$h_{21} = 2, h_{22} = 2.5, h_{23} = 1.5,$$

$$h_{31} = 2, h_{32} = 3, h_{33} = 1$$

$$\alpha = 0.8$$

Варіант 9

$$c_1 = 9, c_2 = 10, c_3 = 12$$

$$h_{11} = 2, h_{12} = 3, h_{13} = 2.5,$$

$$h_{21} = 2, h_{22} = 2.5, h_{23} = 2.2,$$

$$h_{31} = 2, h_{32} = 2.5, h_{33} = 1.5$$

$$\alpha = 0.7$$

Варіант 10

$$c_1 = 8, c_2 = 12, c_3 = 10$$

$$h_{11} = 1, h_{12} = 1.5, h_{13} = 1.25,$$

$$h_{21} = 0.5, h_{22} = 1.5, h_{23} = 1,$$

$$h_{31} = 0.9, h_{32} = 1.1, h_{33} = 0.8$$

$$\alpha = 0.7$$

Варіант 11

$$\begin{aligned}c_1 &= 2, c_2 = 3, c_3 = 5 \\h_{11} &= 6, h_{12} = 7, h_{13} = 6.8, \\h_{21} &= 4, h_{22} = 5, h_{23} = 3, \\h_{31} &= 2.5, h_{32} = 4, h_{33} = 2.5 \\ \alpha &= 0.6\end{aligned}$$

Варіант 12

$$\begin{aligned}c_1 &= 3, c_2 = 5, c_3 = 4 \\h_{11} &= 2.5, h_{12} = 3, h_{13} = 1, \\h_{21} &= 2, h_{22} = 3, h_{23} = 1.6, \\h_{31} &= 2, h_{32} = 3.5, h_{33} = 1 \\ \alpha &= 0.9\end{aligned}$$

Варіант 13

$$\begin{aligned}c_1 &= 1, c_2 = 3, c_3 = 5 \\h_{11} &= 6, h_{12} = 7, h_{13} = 4, \\h_{21} &= 4, h_{22} = 5, h_{23} = 3, \\h_{31} &= 2, h_{32} = 2.4, h_{33} = 1.8 \\ \alpha &= 0.7\end{aligned}$$

Варіант 14

$$\begin{aligned}c_1 &= 5, c_2 = 7, c_3 = 4 \\h_{11} &= 1.3, h_{12} = 2.2, h_{13} = 1.8, \\h_{21} &= 2, h_{22} = 3, h_{23} = 1, \\h_{31} &= 3.8, h_{32} = 5, h_{33} = 4 \\ \alpha &= 0.5\end{aligned}$$

Варіант 15

$$\begin{aligned}c_1 &= 6, c_2 = 7, c_3 = 8 \\h_{11} &= 1, h_{12} = 2, h_{13} = 1.5, \\h_{21} &= 3.6, h_{22} = 4, h_{23} = 2, \\h_{31} &= 3, h_{32} = 4, h_{33} = 1.3 \\ \alpha &= 0.8\end{aligned}$$

Варіант 16

$$\begin{aligned}c_1 &= 7, c_2 = 9, c_3 = 8 \\h_{11} &= 2, h_{12} = 3, h_{13} = 1.5,\end{aligned}$$

$$h_{21} = 2.3, h_{22} = 2.5, h_{23} = 1.9,$$

$$h_{31} = 2, h_{32} = 4, h_{33} = 3$$

$$\alpha = 0.9$$

Варіант 17

$$c_1 = 11, c_2 = 14, c_3 = 12$$

$$h_{11} = 5, h_{12} = 6.5, h_{13} = 3,$$

$$h_{21} = 3, h_{22} = 4, h_{23} = 3.5,$$

$$h_{31} = 3.6, h_{32} = 6, h_{33} = 4.2$$

$$\alpha = 0.7$$

Варіант 18

$$c_1 = 7, c_2 = 8, c_3 = 6$$

$$h_{11} = 1, h_{12} = 3, h_{13} = 2,$$

$$h_{21} = 2, h_{22} = 3.5, h_{23} = 2.7,$$

$$h_{31} = 1.3, h_{32} = 3, h_{33} = 1$$

$$\alpha = 0.9$$

Варіант 19

$$c_1 = 8, c_2 = 11, c_3 = 12$$

$$h_{11} = 2, h_{12} = 3, h_{13} = 1,$$

$$h_{21} = 3, h_{22} = 3.5, h_{23} = 2.1,$$

$$h_{31} = 2, h_{32} = 2.8, h_{33} = 1.5$$

$$\alpha = 0.5$$

Варіант 20

$$c_1 = 7, c_2 = 10, c_3 = 8$$

$$h_{11} = 1, h_{12} = 2.5, h_{13} = 2.2,$$

$$h_{21} = 0.5, h_{22} = 2.7, h_{23} = 1.2,$$

$$h_{31} = 2, h_{32} = 2.1, h_{33} = 0.9$$

$$\alpha = 0.4$$

Варіант 21

$$c_1 = 1, c_2 = 3, c_3 = 4$$

$$h_{11} = 6, h_{12} = 7, h_{13} = 6.5,$$

$$h_{21} = 2, h_{22} = 5, h_{23} = 3,$$

$$h_{31} = 1.75, h_{32} = 4, h_{33} = 2.5$$

$$\alpha = 0.7$$

Варіант 22

$$\begin{aligned}c_1 &= 2, c_2 = 4, c_3 = 3 \\h_{11} &= 1, h_{12} = 2.7, h_{13} = 1, \\h_{21} &= 2, h_{22} = 3, h_{23} = 1.6, \\h_{31} &= 3, h_{32} = 4, h_{33} = 1 \\ \alpha &= 0.9\end{aligned}$$

Варіант 23

$$\begin{aligned}c_1 &= 1, c_2 = 2, c_3 = 5 \\h_{11} &= 6, h_{12} = 8, h_{13} = 5, \\h_{21} &= 3, h_{22} = 4, h_{23} = 3.6, \\h_{31} &= 2, h_{32} = 3.2, h_{33} = 1.8 \\ \alpha &= 0.7\end{aligned}$$

Варіант 24

$$\begin{aligned}c_1 &= 6, c_2 = 7, c_3 = 4 \\h_{11} &= 3, h_{12} = 3.2, h_{13} = 1.8, \\h_{21} &= 1.7, h_{22} = 4, h_{23} = 1, \\h_{31} &= 2, h_{32} = 5, h_{33} = 3 \\ \alpha &= 0.5\end{aligned}$$

Варіант 25

$$\begin{aligned}c_1 &= 9, c_2 = 10, c_3 = 12 \\h_{11} &= 2, h_{12} = 3, h_{13} = 2.5, \\h_{21} &= 2, h_{22} = 2.5, h_{23} = 2.2, \\h_{31} &= 2, h_{32} = 2.5, h_{33} = 1.5 \\ \alpha &= 0.7\end{aligned}$$

8.5 Вимоги до оформлення звіту

Звіт повинен містити:

- тему та мету виконання практичного заняття;
- короткий конспект теоретичних відомостей;
- результати виконаних дій із змістовними поясненнями до кожного етапу;
- Висновки з практичної роботи

4.6 Контрольні запитання

1. Дайте поняття природи та гри з природою.
2. Чим дії природи у грі відрізняються від дій активного гравця?
3. Що таке невизначеність і чим вона відрізняється від ризику?
4. Як невизначеність впливає на процес прийняття рішень?
5. Дайте правила вибору оптимальних стратегій у грі з природою за критеріями Вальда, Севіджа, Гурвіца, Лапласа.
6. Що таке матриця ризиків та як розраховуються її елементи?
7. Дайте міркування щодо вибору значення ступеню оптимізму при виборі рішення за критерієм Гурвіца.
8. Проведіть порівняльний аналіз критеріїв прийняття рішень в умовах повної невизначеності
9. У яких умовах можна використовувати критерій Баєса-Лапласа?
10. Наведіть приклади практичного застосування методів прийняття рішень в умовах невизначеності.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №5

Тема: Прийняття рішень в умовах ризику

Мета: 1) Набуття навичок щодо розв'язання задач з прийняття рішень в умовах ризику

5.1 Основні теоретичні відомості

Прийняття рішення в умовах ризику характеризується тим, що поводження середовища має випадковий характер, причому в цій випадковості є закономірності стохастичного типу. У загальному випадку це проявляється в тім, що існує деяка ймовірнісна міра, відповідно до якої виникають ті або інші стани середовища. При цьому приймаючий рішення має певну інформацію про ймовірності появи станів середовища.

Ризик можна визначити як ймовірність зазнання втрат або недоотримання доходів у порівнянні з прогнозованим сценарієм. У цьому контексті головною характеристикою ризику є небезпека та ймовірність невдачі.

Ситуація ризику виникає тоді, коли можливо кількісно та якісно оцінити ступінь ймовірності реалізації певного варіанту. Її характерними умовами є:

- відсутність повної визначеності;
- необхідність вибору альтернатив (при цьому слід пам'ятати, що навіть відмова від вибору сама по собі є формою вибору);
- можливість оцінити ймовірність здійснення обраних варіантів.

Слід зазначити, що ситуація ризику істотно відрізняється від ситуації невизначеності. Остання характеризується тим, що ймовірність реалізації рішень або подій принципово неможливо встановити.

Для подолання ризикової ситуації суб'єкт приймає рішення і діє відповідно до обраного шляху

Ризик обов'язково включає імовірність відхилення від поставленої мети, причому таке відхилення може мати як негативний, так і позитивний характер.

Основними джерелами виникнення ризику є:

1. Спонтанні природні процеси, явища та стихійні лиха.
2. Фактор випадковості.
3. Протиборчі тенденції та конфлікт інтересів.
4. Неповнота або обмеженість інформації щодо об'єкта, процесу чи явища, яке оцінюється, а також труднощі зі збором і аналізом даних, зумовлені постійною зміною інформаційного середовища

Предметом вивчення є задачі прийняття рішень, у яких цільова функція (функція виграшу) представлена у вигляді таблиці - матриці виграшів $\|a_i^j\|$ ($i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m}$) і, крім того, що приймає рішення (гравцеві) відомий імовірнісний вектор $p = (p_1, \dots, p_m)$. Така ЗПР (називана також грою із природою) задається таблицею 5.1

Таблиця 5.1 – Матриця виграшів

	Стан середовища				
Альтернатива	p_1	...	p_j	...	p_m
	1	...	j	...	m
1	a_1^1		a_1^j		a_1^m
$\vdots$					
i	a_i^1		a_i^j		a_i^m
$\vdots$					
n	a_n^1		a_n^j		a_n^m

Вибираючи альтернативу i , гравець знає, що одержить один з вигравів $a_i^1, \dots, a_i^m$ з ймовірностями $p_1, \dots, p_m$ відповідно.

Для задачі прийняття рішень в умовах ризику вибір альтернативи i приводить до випадкової величини ξ_i , що може бути охарактеризована парою показників (M_i, σ_i) , де $M_i = M\xi_i$ – очікуваний виграв і $\sigma_i = \sqrt{D\xi_i}$ – показник ризику.

Побудова узагальненого критерію домінування по Парето

Візьмемо як узагальнений критерій показник

$$q(M, \sigma) = M - \lambda\sigma \quad (5.1)$$

де λ — деяка постійна.

Фактично критерій (5.1) являє собою зважену суму часткових критеріїв M и σ с ваговими коефіцієнтами 1 і $-\lambda$. При $\lambda > 0$ оцінка випадкової величини за допомогою узагальненого критерію (5.1) менше, ніж її середнє значення, що характерно для обережної людини, тобто людини, не схильної до ризику. Навпроти, при $\lambda < 0$ оцінка (5.1) більше, ніж її середнє значення, що характеризує людини, схильного до ризику. Нарешті, при $\lambda = 0$ оцінка (5.1) випадкової величини збігається з її середнім значенням (тобто можливі відхилення випадкової величини від її середнього значення ігноруються) - це характеризує людину, байдужу до ризику. У якості основного будемо далі розглядати випадок, що людина, яка приймає рішення не схильна до ризику, тобто $\lambda > 0$

Зміст узагальненого критерію (5.1) при $\lambda > 0$ полягає в тому, що збільшення критерію q може відбуватися як за рахунок збільшення M , так і за рахунок зменшення σ . Таким чином, для людини, не схильної до ризику, критерій (5.1) відображає прагнення до збільшення очікуваного виграшу і зменшенню ризику відхилення від нього. При цьому показник λ характеризує суб'єктивне відношення приймаючого рішення до ризику: чим більше λ , тим більшою мірою він не схильний ризикувати; таким чином, λ можна розглядати як суб'єктивний показник міри несхильності до ризику (суб'єктивний показник обережності).

Повне ранжирування Парето - оптимальних альтернатив по перевазі можна виразити в наступний спосіб.

Покладемо

$$\lambda_{\min} = \min \left\{ \frac{M_{i_1} - M_{i_2}}{\sigma_{i_1} - \sigma_{i_2}} \right\}, \quad \lambda_{\max} = \max \left\{ \frac{M_{i_1} - M_{i_2}}{\sigma_{i_1} - \sigma_{i_2}} \right\},$$

де оператори $\min$ і $\max$ поширюються на такі пари індексів (i_1, i_2) для яких альтернативи a_{i_1} , a_{i_2} оптимальні по Парето $M_{i_1} > M_{i_2}$ (отже, $\sigma_{i_1} > \sigma_{i_2}$).

Назвемо λ_{min} – **нижньою границею** неохильності до ризику, λ_{max} — **верхньою границею** неохильності до ризику (завжди виконується нерівність $\lambda_{min} < \lambda_{max}$).

Правило. Якщо у приймаючого рішення його суб'єктивний показник неохильності до ризику менш нижньої границі ($\lambda < \lambda_{min}$), то для нього ранжирування множини Парето - оптимальних альтернатив за узагальненим критерієм q збігається з ранжируванням по показнику очікуваного виграшу M (тобто більше кращої буде альтернатива, для якої більше очікуваний виграш);

Якщо у приймаючого рішення його суб'єктивний показник неохильності до ризику більше верхньої границі ($\lambda > \lambda_{max}$), то для нього ранжирування множини Парето - оптимальних альтернатив за узагальненим критерієм q збігається з ранжируванням по показнику ризику σ (більше кращої буде та альтернатива, для якої менше ризик).

5.2 Завдання для самопідготовки

У процесі підготовки до заняття студент в обов'язковому порядку повинен виконати наступні завдання:

- а) вивчити конспект лекцій;
- б) опрацювати рекомендовану літературу: [3] с. 214; [6] с. 67; [7] с. 78;
- в) занести у зошит для практичних робіт такі матеріали:
 - 1) Прийняття рішень в умовах ризику

5.3 Програма роботи

- 1) Вивчити теоретичні відомості.
- 2) Проробити контрольний приклад
- 3) Виконати індивідуальні завдання:
- 4) Виконати програмну реалізацію
- 5) Оформити звіт. Вимоги до оформлення звіту наведені у п. 5.5.
- 6) Захистити лабораторну роботу. Питання для самоконтроля наведені у п. 5.6

5.4 Порядок роботи

5.4.1 Контрольний приклад

Задача. Фірма може випускати продукцію одного з наступних шести

видів: A1, A2, A3, A4, A5, A6. Голова фірми повинен прийняти рішення, який з цих видів продукції випускати протягом наступного літнього сезону. Прибуток фірми залежить від того, яким буде літо – дощовим, спекотним або помірним, та визначається таблиці 5.1. Вибір якого варіанту виробництва буде оптимальним?

Таблиця 5.2 – Прибуток фірми в залежності від сезону

	Дощове	Спекотне	Помірне
A1	80	60	40
A2	70	40	80
A3	70	50	60
A4	50	50	70
A5	75	50	50
A6	35	75	60

Розв’язання

Якщо приймаючий рішення має інформацію про ймовірності настання дощового, спекотного та помірного літа, то задача є задачею прийняття рішень в умовах ризику.

В нашому випадку необхідна додаткова інформація може бути взята з статистичних даних (спостережень за погодою в даній місцевості). Припустимо, що ймовірність дощового, спекотного та помірного літа дорівнює відповідно 0,2; 0,5; 0,3.

Тоді отримуємо задачу прийняття рішень в умовах ризику, задану таблицею 5.3.

Таблиця 5.3 – Задача прийняття рішень в умовах ризику

	$p_1 = 0,2$	$p_2 = 0,5$	$p_3 = 0,3$
A1	80	60	40
A2	70	40	80
A3	70	50	60
A4	50	50	70
A5	75	50	50
A6	35	75	60

- 1) Знайдемо очікувані виграші, що відповідають альтернативам A1, A2, A3, A4, A5, A6.

$$M_1 = 80 \cdot 0,2 + 60 \cdot 0,5 + 40 \cdot 0,3 = 58;$$

$$M_2 = 70 \cdot 0,2 + 40 \cdot 0,5 + 80 \cdot 0,3 = 58;$$

$$M_3 = 70 \cdot 0,2 + 50 \cdot 0,5 + 60 \cdot 0,3 = 57;$$

$$M_4 = 50 \cdot 0,2 + 50 \cdot 0,5 + 70 \cdot 0,3 = 56;$$

$$M_5 = 75 \cdot 0,2 + 50 \cdot 0,5 + 50 \cdot 0,3 = 55;$$

$$M_6 = 35 \cdot 0,2 + 75 \cdot 0,5 + 60 \cdot 0,3 = 62,5;$$

2) Визначимо дисперсії випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6$, для чого використаємо наступну властивість дисперсії: $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$

$$D\xi_1 = 80^2 \cdot 0,2 + 60^2 \cdot 0,5 + 40^2 \cdot 0,3 - (58)^2 = 196;$$

$$D\xi_2 = 70^2 \cdot 0,2 + 40^2 \cdot 0,5 + 80^2 \cdot 0,3 - (58)^2 = 336;$$

$$D\xi_3 = 70^2 \cdot 0,2 + 50^2 \cdot 0,5 + 60^2 \cdot 0,3 - (57)^2 = 61;$$

$$D\xi_4 = 50^2 \cdot 0,2 + 50^2 \cdot 0,5 + 70^2 \cdot 0,3 - (56)^2 = 84;$$

$$D\xi_5 = 75^2 \cdot 0,2 + 50^2 \cdot 0,5 + 50^2 \cdot 0,3 - (55)^2 = 100;$$

$$D\xi_6 = 35^2 \cdot 0,2 + 75^2 \cdot 0,5 + 60^2 \cdot 0,3 - (62,5)^2 = 231,5;$$

Середньоквадратичні відхилення випадкових величин:

$$\sigma_1 = \sqrt{196} = 14;$$

$$\sigma_2 = \sqrt{336} = 18,3;$$

$$\sigma_3 = \sqrt{61} = 7,8;$$

$$\sigma_4 = \sqrt{84} = 9,2;$$

$$\sigma_5 = \sqrt{100} = 10;$$

$$\sigma_6 = \sqrt{231,5} = 15,2$$

Складемо таблицю значень критеріїв M та σ для кожної альтернативи

Таблиця 5.4 – Значення критеріїв M та σ для кожної альтернативи

	M	σ
A_1	58	14
A_2	58	18,3
A_3	57	7,8
A_4	56	9,2
A_5	55	10
A_6	62,5	15,2

Представимо альтернативи точками на координатній площині змінних (M, σ) .

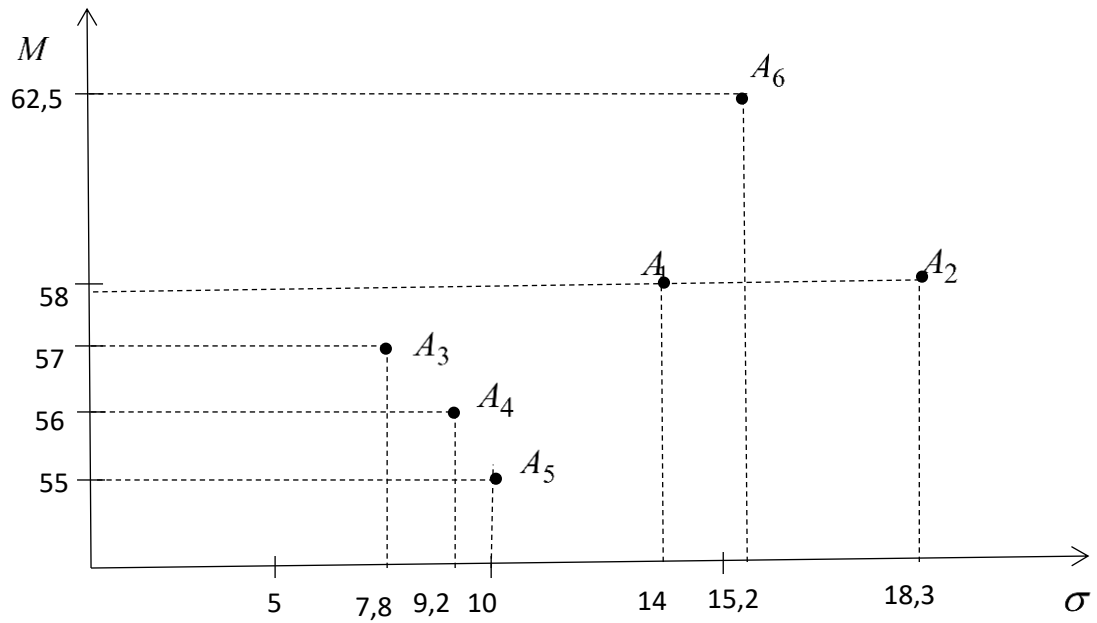


Рисунок 5.1 – Графічне представлення альтернатив

З рисунку знаходимо Парето-оптимальну множину $\{A_1, A_3, A_6\}$. Кінцевий вибір оптимальної альтернативи необхідно проводити з цієї множини. Знайдемо оптимальне рішення за допомогою узагальненого критерію q :

$$q(a_i) = M_i - \lambda \sigma_i$$

$$q(a_1) = 58 - 14\lambda;$$

$$q(a_2) = 58 - 18,3\lambda;$$

$$q(a_3) = 57 - 7,5\lambda;$$

$$q(a_4) = 56 - 9,2\lambda;$$

$$q(a_5) = 55 - 10\lambda;$$

$$q(a_6) = 62,5 - 15,2\lambda$$

Для встановлення Парето-оптимальної множини $\{A_1, A_3, A_6\}$ по узагальненому критерію q знаходимо нижню та верхню межі міри неохочності до ризику.

$$\lambda_{\min} = \min \left\{ \frac{M_{ij} - M_{ik}}{\sigma_{ij} - \sigma_{ik}} \right\}, \quad \lambda_{\max} = \max \left\{ \frac{M_{ij} - M_{ik}}{\sigma_{ij} - \sigma_{ik}} \right\}_{\max}$$

$$\frac{M_1 - M_3}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{58 - 57}{14 - 7,8} = 0,16;$$

$$\frac{M_6 - M_1}{\sigma_6 - \sigma_1} = \frac{62,5 - 58}{15,2 - 14} = 3,8;$$

$$\frac{M_6 - M_3}{\sigma_6 - \sigma_3} = \frac{62,5 - 57}{15,2 - 7,8} = 0,74$$

Звідси

$$\lambda^0 = \min\{0,16; 3,8; 0,74\} = 0,16;$$

$$\lambda^* = \max\{0,16; 3,8; 0,74\} = 3,8.$$

Таким чином, інтервал $(0; +\infty)$ розбивається на 3 інтервали:

$(0; 0,16)$ - зона малої неохайності до ризику (зона малої обережності);

$(3,8; +\infty)$ - зона великої неохайності до ризику (зона великої обережності);

$[0,16; 3,8]$ - зона невизначеності.



Рисунок 5 2 – Інтервали невизначеності

Висновок.

1) Якщо для приймаючого рішення його міра неохайності до ризику $0 \leq \lambda < 0,16$, то для нього ранжирування множин Парето-оптимальних альтернатив співпадає з їх ранжируванням по показнику очікуваного виграшу: $A_6 \succ A_1 \succ A_3$ (знаком $\succ$ позначаємо перевагу за величиною узагальненого критерію q), при цьому оптимальною буде альтернатива A_6 ;

2) Якщо для приймаючого рішення його міра неохайності до ризику $\lambda > 3,8$, то для нього ранжирування множин Парето-оптимальних альтернатив співпадає з їх ранжируванням по показнику ризику: $A_3 \succ A_1 \succ A_6$, при цьому оптимальною буде альтернатива A_3 .

3) Розглянемо випадок, коли міра неохайності до ризику попадає в зону невизначеності. Візьмемо, наприклад $\lambda = 2$. Тоді

$$q(A_1) = 58 - 14 \cdot 2 = 30;$$

$$q(A_3) = 57 - 7,8 \cdot 2 = 41,4;$$

$$q(A_6) = 62,5 - 15,2 \cdot 2 = 32,1.$$

Отримуємо ранжирування $A_3 \succ A_6 \succ A_1$. Таким чином, в цьому випадку перевага для пари $(A_1; A_6)$ визначається за величиною очікуваного виграшу, а для пари $(A_3; A_6)$ - за величиною ризику.

Індивідуальні завдання для виконання практичного заняття

Відповідно до варіанту завдання (табл 5.5). визначити оптимальну стратегію. Вектор імовірностей станів середовища для всіх варіантів

$$p = (0.1 \quad 0.2 \quad 0.2 \quad 0.1 \quad 0.15 \quad 0.25)$$

Таблиця 5.5 – Варіанти індивідуальних завдань

Номер варіанта	Завдання	Номер варіанта	Завдання
1	$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	13	$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 & 6 & 5 & 2 \\ 5 & 6 & 6 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 9 & 9 & 0 & 5 & 1 \\ 6 & 1 & 5 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 6 & 5 & 5 \\ 3 & 3 & 1 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 10 & 8 & 5 & 0 & 2 \\ 4 & 10 & 6 & 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$	14	$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 1 & 7 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 2 & 7 & 1 \\ 5 & 7 & 6 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 5 & 6 & 2 & 7 \\ 3 & 2 & 5 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	15	$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 6 & 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 10 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 7 & 0 & 2 & 10 \\ 4 & 8 & 1 & 6 & 4 & 6 \\ 4 & 1 & 3 & 8 & 2 & 5 \\ 0 & 8 & 0 & 8 & 5 & 0 \end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 & 6 & 1 & 7 \\ 7 & 6 & 1 & 3 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 7 & 0 & 7 \\ 5 & 7 & 5 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 & 7 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 3 & 3 & 3 \\ 7 & 6 & 6 & 5 & 8 & 6 \\ 4 & 16 & 3 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$	17	$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 7 & 0 & 4 & 2 \\ 6 & 0 & 0 & 5 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 7 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 6 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 4 & 6 & 3 \\ 5 & 2 & 1 & 6 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 6 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 7 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$	18	$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 4 & 0 & 5 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 5 & 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 0 & 6 & 6 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 3 & 8 & 6 \\ 6 & 2 & 6 & 3 & 4 & 3 \\ 4 & 4 & 6 & 5 & 8 & 3 \end{pmatrix}$	19	$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 & 8 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 7 & 3 & 8 \\ 1 & 7 & 4 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 8 & 5 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 9 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & 5 & 4 & 1 \\ 8 & 2 & 6 & 10 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$	20	$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 & 0 & 7 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & 7 & 5 \\ 6 & 6 & 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 3 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

9	$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 & 4 & 5 & 0 \\ 6 & 2 & 4 & 6 & 0 & 5 \\ 3 & 6 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 6 & 6 & 0 & 6 \end{pmatrix}$	21	$\begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 & 3 & 5 & 3 \\ 3 & 7 & 2 & 5 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 4 & 5 & 6 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 5 & 2 & 6 \\ 4 & 5 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 8 & 4 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$	22	$\begin{pmatrix} 0 & 6 & 5 & 5 & 2 & 0 \\ 7 & 3 & 6 & 4 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 5 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 4 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 5 & 8 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 9 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 6 & 9 \end{pmatrix}$	23	$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 5 & 2 & 6 \\ 4 & 5 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 8 & 9 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 10 & 4 & 2 \end{pmatrix}$
12	$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 5 & 2 & 6 \\ 1 & 6 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 6 & 3 & 0 & 8 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 12 & 4 & 4 & 8 \end{pmatrix}$	24	$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 5 & 2 & 6 \\ 4 & 5 & 8 & 1 & 4 & 4 \\ 4 & 13 & 4 & 9 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 4 & 10 & 3 \end{pmatrix}$

5.5 Вимоги до оформлення звіту

Звіт повинен містити:

- тему та мету виконання практичного заняття;
- формулювання індивідуального завдання;
- результати виконаних дій із змістовними поясненнями до кожного етапу;
- висновки з лабораторної роботи.

5.6 Контрольні запитання

1. Назвіть особливості прийняття рішень в умовах ризику
2. Які критерії застосовуються при прийнятті рішень в умовах ризику?
3. У яких випадках застосовують критерій очікуваного значення?
4. У яких випадках застосовують критерій очікуване значення – дисперсія?
5. Як визначається точність оцінки середньоарифметичного значення?
6. Чому в критерії «очікуване значення – дисперсія» бажана заміна дисперсії на середньоквадратичне відхилення результату?
7. Як регулюється допустима вірогідність ризику в критерії «очікуване значення – дисперсія»?

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №6

Тема: Елементи теорії ігор. Графічний метод

Мета: 1) Засвоєння основних понять теорії ігор та графоаналітичного методу рішень матричних ігор
2) Навчитися розв'язувати гру зведенням її до задачі лінійного програмування

6.1 Основні теоретичні відомості

Основна задача теорії ігор – пошук оптимальних стратегій, що дають гравцям найбільший середній виграш (найменший середній програш).

Стратегія – метод вибору ходів протягом гри (прийняття рішення про дію) у будь-якій можливій ситуації і при будь-якій фактичній інформації про дії іншої сторони.

Матрична гра – це кінцева гра двох гравців з нульовою сумою, у якій задається виграш першого гравця у вигляді матриці (таблиця 1), рядок матриці відповідає номеру застосовуваної стратегії гравця 1, а стовпець – номеру застосовуваної стратегії 2-го гравця; на перетинанні рядка й стовпця матриці перебувають виграш гравця 1, відповідний до застосовуваних стратегій).

Таблиця 6.1 – Платіжна матриця гри

Стратегії гравця А	Стратегії гравця В					
	B_1	B_2	...	B_j	...	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2j}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...	...	...
A_j	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{ij}	...	a_{in}
...	...	...	...	...	...	...
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mj}	...	a_{mn}

Розв'язання гри полягає у знаходженні оптимальних стратегій гравців

$$S_A^* = (p_1, p_2, \dots, p_m); \quad S_B^* = (q_1, q_2, \dots, q_n),$$

де $p_1, p_2, \dots, p_m$ – ймовірності вибору гравцем А його чистих стратегій $A_1 \dots A_m$;

$q_1, q_2, \dots, q_n$ – ймовірності вибору гравцем В його чистих стратегій $B_1 \dots B_n$.

Дотримання гравцями оптимальних стратегій дає можливість одержати кожному з них максимальний середній виграш (мінімальний середній програш), що називається *ціною гри*.

Гра називається такою, що має сідлову точку, якщо її нижня ціна α дорівнює верхній ціні β :

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij};$$

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij};$$

$$\alpha = \beta.$$

У випадку, коли гра має сідлову точку кажуть, що гра має рішення в *чистих стратегіях*.

Алгоритм рішення гри:

1 Знайти верхню та нижню ціну гри та перевірити наявність у гри сідлової точки та рішення у чистих стратегіях

2 За відсутності у гри сідлових точок спробувати спростити гру, шляхом виключення з платіжної матриці домінуючих (заздалегідь не вигідних) та дублюючих стратегій

Після спрощення платіжної матриці гри її рішення проводять одним з методів: гра $2 \times m$ чи $n \times 2$ - графоаналітичним методом, гра $m \times m$ - методом зведення гри до задачі лінійного програмування

6.2 Завдання для самопідготовки

У процесі підготовки до заняття студент в обов'язковому порядку повинен виконати наступні завдання:

- а) вивчити конспект лекцій;
- б) опрацювати рекомендовану літературу: [1] с. 179; [4] с. 99;
- в) занести у зошит для практичних робіт такі матеріали:
 - 1) Прийняття рішень в умовах ризику

6.3 Програма роботи

- 1) Вивчити теоретичні відомості.
- 2) Проробити контрольний приклад
- 3) Виконати індивідуальні завдання:
- 4) Оформити звіт. Вимоги до оформлення звіту наведені у п. 6.5.
- 5) Захистити лабораторну роботу. Питання для самоконтроля наведені у п. 6.6

6.4 Порядок роботи

Контрольний приклад

Задача 1

Нехай кожний із двох гравців А і В, має по три стратегії.

Визначити нижню й верхню ціну гри, що задана платіжною матрицею

$$P = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,6 & 0,8 \\ 0,9 & 0,7 & 0,8 \\ 0,7 & 0,6 & 0,6 \end{pmatrix}$$

Чи має гра сідлову точку?

Розв'язання.

Складемо платіжну матрицю гри (таблиця 1)

Таблиця 6.2 – Платіжна матриця гри

	B_1	B_2	B_3	α_i
A_1	0,5	0,6	0,8	0,5
A_2	0,9	0,7	0,8	0,7
A_3	0,7	0,6	0,6	0,6
β_j	0,9	0,7	0,8	$\alpha = \beta = 0,7$

Всі розрахунки зручно звести в таблицю, до якої, крім матриці P , додається стовпець α_i і рядок β_j (таблиця 6.1), де $\alpha_i = \min_{j=1,2,3} a_{ij}$, $\beta_j = \max_{i=1,2,3} a_{ij}$.

Проаналізувавши рядка матриці (стратегії гравця A), заповнюємо стовпець α_i : $\alpha_1 = 0,5$, $\alpha_2 = 0,7$, $\alpha_3 = 0,6$ - мінімальні числа в рядках 1, 2, 3.

Проаналізувавши стовпці матриці (стратегії гравця B), заповнюємо рядок β_j : $\beta_1 = 0,9$, $\beta_2 = 0,7$, $\beta_3 = 0,8$ - максимальні числа в стовпцях 1, 2, 3 відповідно. Нижня ціна гри

$$\alpha = \max_{i=1,2,3} \alpha_i = \max(0,5; 0,7; 0,6) = 0,7 - \text{найбільше число в стовпці } \alpha_i.$$

Верхня ціна гри

$$\beta = \min_{j=1,2,3} \beta_j = \min(0,9; 0,7; 0,8) = 0,7 - \text{найменше число в стоці } \beta_j.$$

Ці значення рівні, тобто $\alpha = \beta = 0,7$, і досягаються на парі стратегій (A_2, B_2) .

Отже, гра має сідлову точку (A_2, B_2) й ціна гри $g = 0,7$. Це значить, що гравець А при постійному використанні стратегії A_2 одержує максимальний гарантований виграш, що дорівнює 0,7, а гравець В при постійному використанні стратегії B_2 одержує мінімальний гарантований програш.

У випадку, коли гра не має сідлових точок ($\alpha \neq \beta$), можна одержати оптимальне рішення, відповідним образом чергуючи чисті стратегії.

Задача 2.

Вибрати оптимальний режим роботи нової системи ПЕОМ, яка складається з двох ЕОМ типів A_1 і A_2 . Відомі виграші від впровадження кожного типу ЕОМ в залежності від зовнішніх умов, якщо порівняти зі старою системою.

При використанні ЕОМ типів A_1 і A_2 в залежності від характеру розв'язуємих задач B_1 і B_2 (довгострокові і короткострокові) буде різний ефект. Мається на увазі, що максимальний виграш відповідає найбільшому значенню критерію ефекту від заміни обчислювальної техніки старого покоління на ЕОМ A_1 і A_2 .

Задана матриця гри, де A_1, A_2 —стратегії керівника; B_1, B_2 - стратегії, що відображають характер задач, що розв'язуються на ЕОМ.

$$p = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,8 \\ 0,7 & 0,4 \end{pmatrix}$$

Потрібно знайти оптимальну змішану стратегію керівника та гарантований середній результат g , тобто визначити, яку долю часу повинні використовуватися ЕОМ типів A_1 і A_2 .

Розв'язання

Визначимо наявність сідлової точки.

Таблиця 6.3 – Платіжна матриця гри

	B_1	B_2	$\alpha_i = \min a_{ij}$
A_1	0,3	0,8	0,3
A_2	0,7	0,4	0,4
$\beta_j = \max a_{ij}$	0,7	0,8	

Нижня ціна гри

$$\alpha = \max_{i=1,2} \alpha_i = \max(0,3; 0,4) = 0,4$$

Верхня ціна гри

$$\beta = \min_{j=1,2} \beta_j = \min(0,7; 0,8) = 0,7$$

Таким чином, $\alpha \neq \beta$, отже сідлової точки задача не має.

Знайдемо оптимальну змішану стратегію $S_A(p_1, p_2)$ й ціну гри g графічним методом. Геометричний аналіз можливий, тому що маємо платіжну матрицю розмірності 2×2 .

Гравець А, виходячи зі своїх інтересів зацікавлений виграти якнайбільше й тому буде прагнути одержати виграш, що перевищує ціну гри. При застосуванні гравцем В своїх чистих стратегій B_1 та B_2 це прагнення гравця А визначають такі обмеження:

$$\begin{cases} 0,3p_1 + 0,7p_2 \geq g, \\ 0,8p_1 + 0,4p_2 \geq g. \end{cases} \quad (6.1)$$

Відповідно, гравець В так само застосовує свої змішані стратегії $S_B(q_1, q_2)$, але прагне, щоб величина програшу була якнайменше ціни гри, тобто

$$\begin{cases} 0,3q_1 + 0,8q_2 \leq g, \\ 0,7q_1 + 0,4q_2 \leq g \end{cases}$$

Побудуємо графіки прямих (6.1), замінюючи відповідні обмеження нерівності рівностями.

$$(1) \quad 0,3p_1 + 0,7p_2 = g$$

або тому що $p_2 = 1 - p_1$

$$0,3p_1 + 0,7(1 - p_1) = g$$

$$0,3p_1 + 0,7 - 0,7p_1 = g$$

$$-0,4p_1 + 0,7 = g$$

p_1	0	1
g	0,7	0,3

$$(2) \quad 0,8p_1 + 0,4p_2 = g$$

$$0,8p_1 + 0,4(1 - p_1) = g$$

$$0,8p_1 + 0,4 - 0,4p_1 = g$$

$$0,4p_1 + 0,4 = g$$

p_1	0	1
g	0,4	0,8

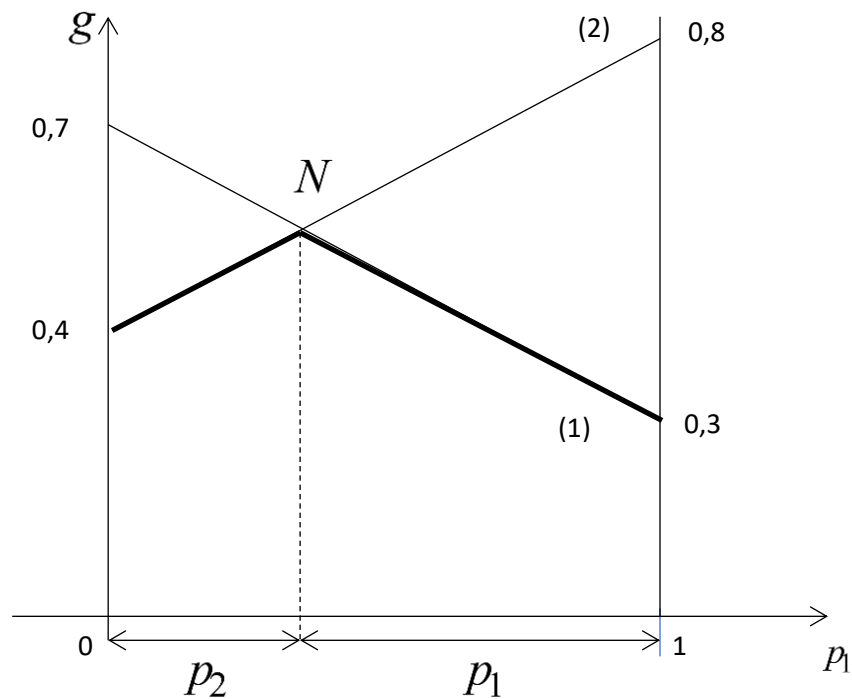


Рисунок 6.1 – Графічний розв'язок

Гарантований середній виграш гравця A – жирна ламана лінія. Максимальний гарантований виграш досягається в точці N .

Знайдемо координати точки N .

$$\begin{cases} -0,4p_1 + 0,7 = g \\ 0,4p_1 + 0,4 = g \end{cases}$$

$$0,8p_1 = 0,3$$

$$p_1 = 0,375 \quad g = 0,55$$

$$p_2 = 1 - p_1 = 0,625$$

Таким чином оптимальна стратегія для гравця A : $S_A(0,375; 0,625)$, ціна гри $g = 0,55$.

Висновок: При установці нової системи ЕОМ, якщо невідомі умови розв'язання задач замовника, на роботу ЕОМ A_1 повинно приходиться 37,5% часу, а на роботу ЕОМ A_2 - 62,5%. При цьому виграш буде складати 55% в порівнянні з попередньою системою ЕОМ.

Задача 2

Знайти рішення й ціну гри, задану платіжною матрицею

$$p = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Розв'язання

Визначимо наявність сідлової точки.

	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i
A_1	3	2	7	4	2
A_2	2	4	3	3/2	3/2
β_j	3	4	7	4	

$$\alpha = 2,$$

$$\beta = 3.$$

Таким чином, $\alpha \neq \beta$, отже сідлової точки задача не має.

Знайдемо оптимальну змішану стратегію $S_A(p_1, p_2)$ й ціну гри g графічним методом. Геометричний аналіз можливий, тому що маємо платіжну матрицю розмірності 2×4 .

Гравець A , виходячи зі своїх інтересів зацікавлений виграти якнайбільше й тому буде прагнути одержати виграш, що перевищує ціну гри. При застосуванні гравцем U своїх чистих стратегій B_1, B_2, B_3 і B_4 це прагнення гравця A визначають такі обмеження:

$$\begin{cases} 3p_1 + 2p_2 \geq g, \\ 2p_1 + 4p_2 \geq g, \\ 7p_1 + 3p_2 \geq g, \\ 4p_1 + 3/2p_2 \geq g. \end{cases} \quad (6.1)$$

Відповідно, гравець B так само застосовує свої змішані стратегії $S_B(q_1, q_2, q_3, q_4)$, але прагнути, щоб величина програшу була якнайменше ціни гри, тобто

$$\begin{cases} 3q_1 + 2q_2 + 7q_3 + 4q_4 \leq g, \\ 2q_1 + 4q_2 + 3q_3 + 3/2q_4 \leq g. \end{cases} \quad (6.2)$$

Побудуємо графіки прямих (6.1), замінюючи відповідні обмеження нерівності рівностями.

I:

$$3p_1 + 2(1 - p_1) = g$$

$$3p_1 + 2 - 2p_1 = g$$

$$p_1 + 2 = g$$

$$\begin{array}{c|c|c} p_1 & 0 & 1 \\ \hline g & 2 & 3 \end{array}$$

II:

$$2p_1 + 4(1 - p_1) = g$$

$$-2p_1 + 4 = g$$

$$\begin{array}{c|c|c} p_1 & 0 & 1 \\ \hline g & 4 & 2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{III:} \\ 7p_1 + 3(1 - p_1) &= g \\ 4p_1 + 3 &= g \end{aligned}$$

p_1	0	1
g	3	7

$$\begin{aligned} \text{IV:} 4p_1 + 3/2(1 - p_1) &= g \\ 5/2p_1 + 3/2 &= g \end{aligned}$$

p_1	0	1
g	3/2	4

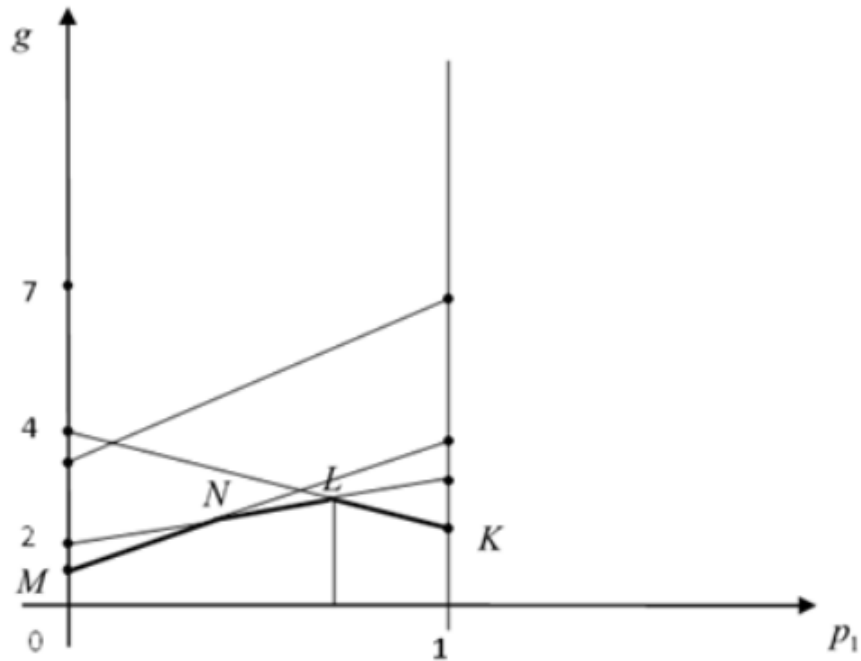


Рисунок 6.1 – Графічний розв'язок задачі

Нижня границя виграшу задається ламаною $MNLK$. Оптимальне рішення гри досягається в крапці L .

Знайдемо її координати. Точка L утворена перетинанням I й II прямих, (це означає, що оптимальна стратегія гравця Y включає чисті стратегії B_1 й B_2 з імовірностями q_1 й q_2):

$$\begin{cases} p_1 + 2 = g \\ -2p_1 + 4 = g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 + 2 = -2p_1 + 4 \\ 3p_1 - 2 = 0 \\ p_1 = \frac{2}{3} \\ g = \frac{8}{3} \end{cases}$$

$$p_2 = 1 - p_1 = \frac{1}{3}$$

У такий спосіб оптимальна стратегія для гравця A : $S_A\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$, ціна гри $g = \frac{8}{3}$.

Аналогічно знаходимо оптимальну стратегію для гравця B з рівнянь (6.2).

Гравець B повинен урахувати стратегії, які визначив гравець A в якості оптимальних. Це приводить до вибору гравцем B стратегій, що визначають його оптимальне рішення, тобто маємо $q_3 = 0, q_4 = 0$, отже

$$3q_1 + 2q_2 \leq g$$

$$2q_1 + 4q_2 \leq g,$$

$$\text{при цьому } q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 1.$$

Будуємо графіки прямих, що відповідають нерівностям. Знаходимо координати точки перетинання

$$3q_1 + 2(1 - q_1) = 2q_1 + 4(1 - q_1)$$

$$3q_1 + 2 - 2q_1 - 4 + 4q_1 = 0$$

$$3q_1 = 2$$

$$q_1 = \frac{2}{3}, q_2 = 1 - q_1 = \frac{1}{3}$$

Таким чином, оптимальна стратегія гравця B $S_B(2/3; 1/3; 0; 0)$, ціна гри $g = 8/3$.

Висновок: Рішенням ігри є стратегії $S_A\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$ й $S_B\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; 0; 0\right)$, при цьому ціна гри $g = \frac{8}{3}$.

Індивідуальні завдання для виконання практичного заняття

Знайти розв'язок гри графічним методом

Визначити оптимальні стратегії гравців

Варіант 1					Варіант 2				
	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	-9	4	-8	3	A_1	-1	1	0	-2
A_2	2	-6	3	-5	A_2	4	5	-3	9
Варіант 3					Варіант 4				
	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	-5	0	4	-1	A_1	-1	0	2	1
A_2	8	7	3	8	A_2	5	2	8	-4

Варіант 5					Варіант 6				
	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	4	2	3	5	A_1	5	-1	0	3
A_2	0	7	-1	-4	A_2	2	4	-2	2
Варіант 7					Варіант 8				
	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	7	8	2	0	A_1	-2	0	4	3
A_2	-4	-3	0	5	A_2	6	1	-3	2
Варіант 9					Варіант 10				
	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	5	4	5	1	A_1	-3	7	2	4
A_2	2	1	-4	3	A_2	10	0	5	-1
Варіант 11					Варіант 12				
	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	6	-1	3	0	A_1	0	4	2	1
A_2	0	5	3	5	A_2	6	-5	2	9
Варіант 13					Варіант 14				
	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	4	7	-1	0	A_1	1	0	7	-3
A_2	2	1	3	8	A_2	10	5	0	6
Варіант 15					Варіант 16				
	B_1	B_1				B_1	B_1		
A_1	7	-4			A_1	-5	4		
A_2	5	0			A_2	-1	2		
A_3	3	-1			A_3	0	3		
A_4	-2	6			A_4	2	1		
Варіант 17					Варіант 18				
	B_1	B_1				B_1	B_1		
A_1	-3	8			A_1	-6	0		
A_2	2	7			A_2	4	-4		

A_3	4	-1		A_3	3	-6	
A_4	5	4		A_4	2	-1	
Варіант 19				Варіант 20			
	B_1	B_1			B_1	B_1	
A_1	9	-1		A_1	6	0	
A_2	5	4		A_2	-2	5	
A_3	0	6		A_3	3	4	
A_4	1	4		A_4	0	1	
Варіант 21				Варіант 22			
	B_1	B_1			B_1	B_1	
A_1	0	10		A_1	-1	-3	
A_2	2	8		A_2	-8	2	
A_3	4	1		A_3	0	-4	
A_4	1	0		A_4	2	-3	
Варіант 23				Варіант 24			
	B_1	B_1			B_1	B_1	
A_1	-2	9		A_1	0	4	
A_2	0	4		A_2	6	-3	
A_3	2	1		A_3	2	0	
A_4	-4	7		A_4	1	4	

6.4 Вимоги до оформлення звіту

Звіт повинен містити:

- тему та мету виконання практичного заняття;
- формулювання індивідуального завдання;
- результати виконаних дій із змістовними поясненнями;
- висновки.

6.5 Контрольні питання

- 1 Дайте визначення наступним поняттям: гра, гравець, стратегія, хід, чиста стратегія, змішана стратегія.
- 2 Поясніть, яка гра називається матричною грою з нульовою сумою?

- 3 Що таке платіжна матриця гри?
- 4 Який сенс мають елементи платіжної матриці?
- 5 У чому полягає розв'язання гри?
- 6 Дайте визначення і спосіб пошуку верхньої та нижньої ціни гри.
- 7 Що таке сідловка точка і як перевіряється її наявність?
- 8 Поясніть порядок рішення ігор графоаналітичним методом

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №7

Тема: Приведення матричної гри до задачі лінійного програмування

Мета: 1) Засвоєння основних понять теорії ігор та графоаналітичного методу рішень матричних ігор
 2) Навчитися розв'язувати гру зведенням її до задачі лінійного програмування

7.1 Основні теоретичні відомості

Нехай матрична гра представлена платіжною матрицею A розмірністю $m \times n$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Припустимо, що змішана стратегія гравця A складається зі стратегій $A_1, A_2, \dots, A_m$ з імовірностями p_i ($i = 1 \dots m$). Оптимальна змішана стратегія гравця B складається зі стратегій $B_1, B_2, \dots, B_n$ з імовірностями q_j ($j = 1 \dots n$).

Застосування гравцем A оптимальної змішаної стратегії $S_A(p_1; p_2; \dots; p_m)$ гарантує йому, незалежно від поведінки гравця B , виграш, не менший ніж ціна гри g :

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \dots + a_{m1}p_m \geq g; \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \dots + a_{m2}p_m \geq g; \\ \dots\dots\dots \\ a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \dots + a_{mn}p_n \geq g, \end{cases} \quad (7.1)$$

де $p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1, \quad p_i \geq 0 \quad (i = \overline{1, m})$.

Аналогічно стратегія $S_B(q_1; q_2; \dots; q_n)$ гравця B гарантує йому програш, не більший ніж ціна гри g , незалежно від вибору стратегії гравцем A :

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \dots + a_{1n}q_m \leq g; \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \dots + a_{2n}q_m \leq g; \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + \dots + a_{mn}q_m \geq g, \end{cases} \quad (7.2)$$

де $q_1 + q_2 + \dots + q_n = 1, \quad q_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n})$.

Оскільки елементи платіжної матриці можна зробити позитивними, то і ціна гри $g \geq 0$

Поділимо системи (7.1) та (7.2) на g , отримуємо:

$$\begin{cases} a_{11} \frac{p_1}{g} + a_{21} \frac{p_2}{g} + \dots + a_{m1} \frac{p_m}{g} \geq 1; \\ a_{12} \frac{p_1}{g} + a_{22} \frac{p_2}{g} + \dots + a_{m2} \frac{p_m}{g} \geq 1; \\ \dots \\ a_{1n} \frac{p_1}{g} + a_{2n} \frac{p_2}{g} + \dots + a_{mn} \frac{p_m}{g} \geq 1, \end{cases} \quad (7.3)$$

де $\frac{p_1}{g} + \frac{p_2}{g} + \dots + \frac{p_m}{g} = \frac{1}{g}$.

$$\begin{cases} a_{11} \frac{q_1}{g} + a_{12} \frac{q_2}{g} + \dots + a_{1n} \frac{q_n}{g} \leq 1; \\ a_{21} \frac{q_1}{g} + a_{22} \frac{q_2}{g} + \dots + a_{2n} \frac{q_n}{g} \leq 1; \\ \dots \\ a_{m1} \frac{q_1}{g} + a_{m2} \frac{q_2}{g} + \dots + a_{mn} \frac{q_n}{g} \leq 1, \end{cases} \quad (7.4)$$

де $\frac{q_1}{g} + \frac{q_2}{g} + \dots + \frac{q_n}{g} = \frac{1}{g}$.

Позначимо $\frac{p_i}{g} = x_i, \frac{q_j}{g} = y_j$. Тоді нерівності (7.3) та (7.4) запишуться у вигляді:

$$(7.4)$$

де $x_1 + x_2 + \dots + x_m = \frac{1}{g}, \quad x_i \geq 0$.

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \leq 1; \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \leq 1; \\ \dots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \dots + a_{mn}y_n \leq 1, \end{cases} \quad (7.5)$$

де $y_1 + y_2 + \dots + y_m = \frac{1}{g}, \quad y_j \geq 0$.

Ігрова стратегія гравця А така, що він зацікавлений у більших значеннях величини g (виграш гравця А повинен бути не менше ціни гри g). Але прагнення одержати план, що забезпечує найбільше значення g , адекватно прагненню відшукати план X , при якому функція $F = \sum_{i=1}^m x_i$

приймає своє мінімальне значення. Таким чином, рішення гри для гравця А полягає в розв'язанні задачі лінійного програмування:

Знайти мінімальне значення функції F

$$F = x_1 + x_2 + \dots + x_m \rightarrow \min$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m \geq 1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}x_m \geq 1; \\ \dots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}x_m \geq 1; \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m} \end{cases} \quad (7.6)$$

Шукані компоненти оптимального рішення (плану) матричної гри для гравця А знаходять зі співвідношень $p = gx, i = 1, 2, \dots, m$

Позиція гравця В така, що він прагне знайти таке рішення, при якому величина ціни гри g була б мінімальною. Це адекватно вимозі одержати максимальне значення функції $F^* = \sum_{j=1}^n y_j = \frac{1}{g}$.

Звідси випливає, що рішення гри для гравця В полягає в рішенні наступної задачі лінійного програмування:

Знайти максимальне значення функції F*

$$F^* = y_1 + y_2 + \dots + y_n \rightarrow \max$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \leq 1; \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \leq 1; \\ \dots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \dots + a_{mn}y_n \leq 1; \\ y_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n} \end{cases} \quad (7.7)$$

Розв'язання даної задачі дозволяє визначити вектор $Y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*)$ та величину $F^* = \frac{1}{g}$.

Шукані компоненти оптимального рішення (плану) матричної гри для гравця В знаходяться зі співвідношень $q_j = gy_j, j = 1, 2, \dots, n$.

Отримані для гравців А и В задачі лінійного програмування утворюють симетричну пару двоїстих задач. Властивість симетричності дозволяє вирішувати задачу, що вимагає менше обчислювальних витрат, а рішення іншої задачі визначають на підставі теорем двоїстості. Очевидно, що оптимальна ціна гри для обох гравців буде дорівнювати

$$: g = \frac{1}{F_{\min}} = \frac{1}{F_{\max}^*}.$$

7.2 Завдання для самопідготовки

У процесі підготовки до заняття студент в обов'язковому порядку повинен виконати наступні завдання:

- а) вивчити конспект лекцій;
- б) опрацювати рекомендовану літературу: [1] с. 179, [4] с. 99;
- в) занести у зошит для практичних робіт такі матеріали:
 - 1) Приведення матричної гри до задачі лінійного програмування

7.3 Програма роботи

- 1) Вивчити теоретичні відомості.
- 2) Проробити контрольний приклад
- 3) Виконати індивідуальні завдання:
- 4) Оформити звіт. Вимоги до оформлення звіту наведені у п. 7.5.
- 5) Захистити лабораторну роботу. Питання для самоконтроля наведені у п. 7.6

7.4 Порядок роботи

Контрольний приклад

Задача

Фермер, що володіє землею, може засіяти її трьома різними видами культур: A_1, A_2, A_3 . Урожай цих культур залежить головним чином від погоди, що може

перебувати в трьох станах B_1, B_2, B_3 . Вартість одного центнера культур A_1, A_2 і A_3 - 2, 4 і 8 тис. грн. відповідно.

У таблиці 7.1 наведена врожайність культур, при різних станах погоди.

Таблиця 7.1 – Врожайність культур при різних станах погоди

Види культур	Стан погоди		
	Посуха B_1 .	Нормальна B_2 .	Дощова B_3 .
A_1	20	5	15
A_2	7,5	12,5	5
A_3	0	7,5	10

Необхідно побудувати платіжну матрицю й визначити в яких пропорціях фермер повинен засіяти свою частину землі, щоб максимізувати прибуток незалежно від погодних умов.

Рішення.

Фермер (гравець A) має три чисті стратегії:

A_1 - всю землю засіяти культурою A_1 ;

A_2 - всю землю засіяти культурою A_2 ;

A_3 - всю землю засіяти культурою A_3 .

Природа (гравець B) так само має три стратегії B_1, B_2, B_3 .

1) Складемо платіжну матрицю (матрицю прибутку)

Таблиця 7.2 – Платіжна матриця гри

Стратегії	B_1	B_2	B_3	α_i
A_1	40	10	30	10
A_2	30	50	20	20
A_3	0	60	80	0
β_j	40	60	80	

2) Визначимо чи має гра сідлову точку.

$$\alpha = 20; \beta = 40$$

$\alpha \neq \beta$ - сідлової точки немає.

3) Знайдемо оптимальну змішану стратегію $S_A(p_1, p_2, p_3)$

$$\begin{cases} 40p_1 + 30p_2 \geq g, & \text{при стратегії } B_1, \\ 10p_1 + 50p_2 + 60p_3 \geq g, & \text{при стратегії } B_2, \\ 30p_1 + 20p_2 + 80p_3 \geq g, & \text{при стратегії } B_3. \end{cases}$$

4) Введемо заміну:

$$x_1 = \frac{p_1}{g}; x_2 = \frac{p_2}{g}; x_3 = \frac{p_3}{g}, \text{ маємо}$$

$$\begin{cases} 40x_1 + 30x_2 \geq 1, \\ 10x_1 + 50x_2 + 60x_3 \geq 1, \\ 30x_1 + 20x_2 + 80x_3 \geq 1. \end{cases}$$

З іншого боку, тому що $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, то $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{g}$.

Ціль гравця A – максимізувати свій гарантований виграш, тобто ціну гри g (або мінімізувати величину $\frac{1}{g}$).

Таким чином, приходимо до наступної ЗЛП:

Знайти таке рішення $X = (x_1, x_2, x_3)$, при якому

$$F = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \min$$

при умовах

$$\begin{cases} 40x_1 + 30x_2 \geq 1, \\ 10x_1 + 50x_2 + 60x_3 \geq 1, \\ 30x_1 + 20x_2 + 80x_3 \geq 1, \\ x_j \geq 0, (j = \overline{1,3}). \end{cases}$$

Вирішивши задачу, одержимо оптимальну стратегію $S_A(p_1, p_2, p_3)$.

Аналогічно, визначимо оптимальну змішану стратегію $S_B(q_1, q_2, q_3)$.

$$\begin{cases} 40q_1 + 10q_2 + 30q_3 \leq g, \text{ при стратегії } A_1, \\ 30q_1 + 50q_2 + 20q_3 \leq g, \text{ при стратегії } A_2, \\ 60q_1 + 80q_2 \leq g, \text{ при стратегії } A_3. \end{cases}$$

Введемо заміну

$$y_1 = \frac{q_1}{g}; y_2 = \frac{q_2}{g}; y_3 = \frac{q_3}{g}, \text{ маємо}$$

$$\begin{cases} 40y_1 + 10y_2 + 30y_3 \leq 1, \\ 30y_1 + 50y_2 + 20y_3 \leq 1, \\ 60y_2 + 80y_3 \leq 1. \end{cases}$$

З іншого боку, тому що $q_1 + q_2 + q_3 = 1$, те $y_1 + y_2 + y_3 = \frac{1}{g}$. Ціль гравця B – мінімізувати свій програш, тобто ціну гри g (або максимізувати величину $\frac{1}{g}$).

Таким чином, приходимо до ЗЛП:

Знайти такий план $Y = (y_1, y_2, y_3)$ при якому

$$F^* = y_1 + y_2 + y_3 \rightarrow \max$$

при умовах

$$\begin{cases} 40y_1 + 10y_2 + 30y_3 \leq 1, \\ 30y_1 + 50y_2 + 20y_3 \leq 1, \\ 60y_2 + 80y_3 \leq 1, \\ y_j \geq 0, (j = \overline{1,3}). \end{cases}$$

Задачі лінійного програмування гравців A і B є двоїстими, тому досить вирішити одну із двох задач, наприклад задачу гравця B .

Вирішимо задачу симплекс-методом. Приведемо її до канонічного виду й складемо таблицю.

Таблиця 7.3 – Симплекс-таблиця

				1	1	1	0	0	0
i	базис	Cb_i	b_i	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
1	y_4	0	1	40	10	30	1	0	0
2	y_5	0	1	30	50	20	0	1	0

3	y_6	0	1	0	60	80	0	0	1
	Δ_j			-1	-1	-1	0	0	0
1	y_4	0	5/6	40	0	50/3	1	0	-1/6
2	y_5	0	1/6	30	0	-140/3	0	1	-5/6
3	y_2	1	1/60	0	1	4/3	0	0	1/60
	Δ_j			-1	0	1/3	0	0	1/60
1	y_4	0	11/18	0	0	$\frac{710}{9}$	1	-4/3	17/18
2	y_1	1	1/180	1	0	$-\frac{14}{9}$	0	1/30	$-\frac{5}{180}$
3	y_2	1	1/60	0	1	4/3	0	0	1/60
	Δ_j			0	0	-11/9	0	1/30	-1/90
1	y_3	1	11/1420	0	0	1	$\frac{9}{710}$	$-\frac{12}{710}$	$\frac{17}{1420}$
2	y_1	1	$\frac{25}{1420}$	1	0	0	$\frac{14}{710}$	1/142	$-\frac{13}{1420}$
3	y_2		$\frac{9}{1420}$	0	1	0	$-\frac{12}{710}$	$\frac{16}{710}$	$\frac{1}{1420}$
				0	0	0	$\frac{11}{710}$	$\frac{9}{710}$	$\frac{5}{1420}$
							x_1	x_2	x_3

Оптимальне рішення двоїстої задачі лінійного програмування:

$$Y = \left(\frac{25}{1420}; \frac{9}{1420}; \frac{11}{1420} \right)$$

$$F^* = \frac{25 + 9 + 11}{1420} = \frac{45}{1420}$$

Знайдемо ціну гри з формули $y_1 + y_2 + y_3 = \frac{1}{g}$;

$$g = \frac{1420}{45}$$

З урахуванням заміни

$$q_1 = y_1 \cdot g = \frac{25}{1420} \cdot \frac{1420}{45} = \frac{25}{45},$$

$$q_2 = y_2 \cdot g = \frac{9}{1420} \cdot \frac{1420}{45} = \frac{9}{45},$$

$$q_3 = y_3 \cdot g = \frac{11}{1420} \cdot \frac{1420}{45} = \frac{11}{45}.$$

У такий спосіб $S_B = \left(\frac{25}{45}; \frac{9}{45}; \frac{11}{45}\right)$.

Рішення вихідної задачі лінійного програмування знаходимо з останньої симплекс-таблиці

$$X = \left(\frac{22}{1420}; \frac{18}{1420}; \frac{5}{1420}\right);$$

$$F = \frac{22 + 18 + 5}{1420} = \frac{45}{1420};$$

$$g = \frac{1420}{45};$$

$$p_1 = \frac{22}{45}; p_2 = \frac{18}{45}; p_3 = \frac{5}{45};$$

$$S_A \left(\frac{22}{45}; \frac{18}{45}; \frac{5}{45}\right).$$

Висновок: Оптимальна стратегія фермера полягає в тому, що $\frac{22}{45}$ частини землі необхідно засіяти культурою A_1 , $\frac{18}{45}$ - культурою A_2 й $\frac{5}{45}$ культурою A_3 . При цій стратегії прибуток при будь-якій погоді становить не менш 31,5 тис. грн. з га

Приклад знаходження оптимальної стратегії гравця A в середовищі Maple

```
>with(simplex):
```

```
>F:=x1+x2+x3;
```

$$F := x1 + x2 + x3$$

```
>
```

```
ogr:={40*x1+30*x2>=1,10*x1+50*x2+60*x3>=1,30*x1+20*x2+80*x3>=1};
```

$$ogr := \{1 \leq 30 x1 + 20 x2 + 80 x3, 1 \leq 10 x1 + 50 x2 + 60 x3, \\ 1 \leq 40 x1 + 30 x2\}$$

```
> f:=minimize(F,ogr,NONNEGATIVE);
```

$$f := \{x1 = 11/710, x3 = 1/284, x2 = 9/710\}$$

```
> assign(f);
```

```
> x1;
```

$$11/710$$

```
> x2;
```

	$9/710$
> x3;	
	$1/284$
> F;	
	$9/284$
> g:=1/F;	
	$g:= 284/9$
> p1:=x1*g;	
	$p1:= 22/45$
> p2:=x2*g;	
	$p2:= 2/5$
> p3:=x3*g;	
	$p3:= 1/9$

Індивідуальні завдання для виконання практичного заняття

Задача. Вибрати оптимальний набір комп'ютерів для нової системи ЕОМ, яка може складатися із чотирьох типів ЕОМ - А1, А2, А3 і А4. При використанні ЕОМ типів А1, А2, А3 і А4 залежно від характеру розв'язуваних задач В1, В2, В3 і В4 буде різний ефект. Виграші від впровадження кожного типу ЕОМ, з урахуванням витрат на впровадження кожного типу, задані в таблиці. Знайти оптимальний склад нової системи. Варіанти завдань наведені в таблиці 7.2

Розв'яжіть гру за допомогою надбудови Пошук рішень в Excel (або інших стандартних пакетів, вбудованих функцій, методів, бібліотек), визначивши ймовірність стратегій першого гравця, ймовірність стратегій другого гравця та ціну гри. Проаналізуйте отримане рішення (зробіть висновки).

Таблиця 7.2 – Варіанти індивідуальних завдань

Вар1		В1	В2	В3	В4	Вар2		В1	В2	В3	В4
	А1	15	2	1	6		А1	2	4	11	6
	А2	10	19	24	4		А2	4	26	15	10
	А3	46	3	39	10		А3	8	1	3	1
	А4	28	9	39	15		А4	10	15	6	9
Вар3		В1	В2	В3	В4	Вар4		В1	В2	В3	В4
	А1	26	5	32	24		А1	11	3	5	29
	А2	1	15	1	6		А2	4	2	6	3
	А3	4	4	7	3		А3	6	16	14	6
	А4	8	25	9	14		А4	15	8	17	5

Bap5		B1	B2	B3	B4	Bap6		B1	B2	B3	B4
	A1	2	4	6	41		A1	21	7	41	6
	A2	15	8	14	4		A2	15	1	34	18
	A3	30	15	23	17		A3	1	2	25	3
	A4	40	10	11	8		A4	9	3	2	4
Bap7		B1	B2	B3	B4	Bap8		B1	B2	B3	B4
	A1	1	5	46	9		A1	26	19	4	9
	A2	3	6	2	8		A2	34	28	6	8
	A3	4	14	15	14		A3	2	46	15	1
	A4	8	2	11	19		A4	16	31	10	42
Bap9		B1	B2	B3	B4	Bap10		B1	B2	B3	B4
	A1	21	13	1	17		A1	24	8	2	25
	A2	34	14	8	15		A2	3	22	27	17
	A3	46	30	37	26		A3	7	15	36	10
	A4	15	20	42	41		A4	12	16	14	40
Bap11		B1	B2	B3	B4	Bap12		B1	B2	B3	B4
	A1	2	15	41	47		A1	1	28	14	4
	A2	4	16	3	3		A2	13	3	46	6
	A3	6	22	28	2		A3	22	15	38	8
	A4	8	44	15	6		A4	34	40	2	10
Bap13		B1	B2	B3	B4	Bap14		B1	B2	B3	B4
	A1	44	23	28	44		A1	44	23	1	4
	A2	37	2	16	47		A2	37	2	3	5
	A3	28	4	17	59		A3	28	4	2	8
	A4	34	15	31	4		A4	34	15	6	10
Bap15		B1	B2	B3	B4	Bap16		B1	B2	B3	B4
	A1	45	21	2	4		A1	13	9	21	8
	A2	30	4	3	10		A2	9	13	11	12
	A3	27	5	2	15		A3	7	11	8	14
	A4	35	10	6	2						
Bap17		B1	B2	B3	B4	Bap18		B1	B2	B3	B4
	A1	20	15	10	15		A1	26	13	11	25
	A2	16	12	14	22		A2	16	24	24	12
	A3	13	18	15	20		A3	13	15	17	28
Bap19		B1	B2	B3	B4	Bap20		B1	B2	B3	B4
	A1	26	13	11	25		A1	23	16	11	22
	A2	16	24	24	12		A2	13	12	24	5
	A3	13	15	17	28		A3	14	14	15	18

Вар21		B1	B2	B3	B4	Вар22		B1	B2	B3	B4
	A1	31	25	19	24		A1	15	15	5	12
	A2	28	23	23	40		A2	14	10	11	20
	A3	18	26	25	20		A3	11	11	23	10
Вар23		B1	B2	B3	B4	Вар24		B1	B2	B3	B4
	A1	20	15	10	25		A1	20	15	10	25
	A2	10	22	16	11		A2	10	12	26	11
	A3	23	18	25	20		A3	23	18	15	20
Вар25		B1	B2	B3	B4	Вар26		B1	B2	B3	B4
	A1	20	15	7	25		A1	20	15	7	25
	A2	12	12	16	8		A2	12	12	16	8
	A3	18	18	9	20		A3	18	18	9	20

7.5 Вимоги до оформлення звіту

Звіт повинен містити:

- тему та мету виконання практичного заняття;
- формулювання індивідуального завдання;
- скриншоти, що містять результати виконання завдань із змістовними поясненнями до них;
- висновки з практичного заняття.

7.5 Контрольні питання

- 1 У чому полягає розв'язання гри?
- 2 Дайте визначення і спосіб пошуку верхньої та нижньої ціни гри.
- 3 Що таке сидловка точка і як перевіряється її наявність?
- 4 При якому розмірі платіжної матриці гри для її рішення можна застосовувати метод лінійного програмування?
- 5 Якими повинні бути елементи платіжної матриці гри для її рішення методом лінійного програмування?

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №8

Тема: Прийняття рішень в умовах нечіткої інформації

Мета: Отримання практичного досвіду із застосування методів прийняття рішень, коли інформація про переваги ОПР представлена у вигляді нечітких відношень.

8.1 Основні теоретичні відомості

Нечітким відношенням R на множині X називається нечітка підмножина декартова добутку $X_1 \times X_2$, яка характеризується функцією належності μ_R :

$$\mu_R: X_1 \times X_2 \rightarrow [0; 1]. \quad (8.1)$$

Значення μ_R цієї функції показує ступінь істинності або ймовірність відношення R між елементами x і y . Зрозуміло, що звичайні відношення можна вважати окремим випадком нечітких відношень, функції належності яких можуть мати тільки два значення: 0 або 1.

Об'єднанням двох відношень R_1 та R_2 позначається $R_1 \cup R_2$ та визначається виразом

$$\mu_{R_1 \cup R_2}(x, y) = \max\{\mu_{R_1}(x, y), \mu_{R_2}(x, y)\}. \quad (8.2)$$

Перетин нечітких відношень R_1 та R_2 позначається $R_1 \cap R_2$ та визначається виразом

$$\mu_{R_1 \cap R_2}(x, y) = \min\{\mu_{R_1}(x, y), \mu_{R_2}(x, y)\}. \quad (8.3)$$

Відношення включення. Нечітке відношення B містить нечітке відношення A , якщо для нечітких множин A і B має місце включення $A \subset B$, тобто між їх функціями належності є справедливою така нерівність:

$$\mu_R(x, y) \leq \mu_R(y, x), \quad \forall x, y \in X. \quad (8.4)$$

Відношення доповнення. Якщо R є нечітким відношенням на множині X , то нечітке відношення $\bar{R}$, функція належності якого $\mu_{\bar{R}}(x, y) = 1 - \mu_R(x, y)$, є доповненням до відношення R на множині X . наприклад, доповненням до нечіткого відношення «більше» буде відношення «не більше»

Композиція двох нечітких відношень. Нехай R_1 – нечітке відношення $R_1: X \times Y \rightarrow [0; 1]$ між X та Y , та R_2 – нечітке відношення $R_2: Y \times Z \rightarrow [0; 1]$ між Y та Z . Нечітке відношення між X та Z , яке позначається $R_1 \circ R_2$ та визначається виразом

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(x, z) = \max_y \min\{\mu_{R_1}(x, y), \mu_{R_2}(y, z)\} \quad (8.5)$$

Постановка задачі прийняття рішень із нечіткою вхідною інформацією

Задано множину альтернатив

$$U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$$

та нечітке відношення нестрогої переваги R на множині U з функцією належності $\mu_R(u_i, u_j) \in [0,1]$ – довільне рефлексивне нечітке відношення переваги, для якого $\mu_R(u_i, u_j) = 1, \forall u_i \in U$.

Нечітке відношення переваги задається зазвичай особою, що приймає рішення, в результаті опитування експертів. Для будь-якої пари альтернатив $u_i, u_j \in U$ значення $\mu_R(u_i, u_j)$ розуміється як ступінь переваги « u_i не гірше u_j » в запису $u_i \geq u_j$.

Задача прийняття рішень полягає у раціональному виборі найбільш переважних альтернатив з множини U , на якій задане нечітке відношення переваги R .

Алгоритм розв'язку задачі

1. Побудова нечіткого відношення переваги R^S , асоційованого з R , що визначається функцією належності μ_R^S :

$$\mu_R^S = \begin{cases} \mu_R(u_i, u_j) - \mu_R(u_j, u_i), & \text{якщо } \mu_R(u_i, u_j) > \mu_R(u_j, u_i) \\ 0, & \text{якщо } \mu_R(u_i, u_j) \leq \mu_R(u_j, u_i) \end{cases} \quad (8.6)$$

Це відношення може бути представлене у вигляді $R^S = R \setminus R^T$, де R^T – «обернене» відношення (матриця відношень R^T отримується транспонуванням матриці відношень R).

2. Побудова нечіткої підмножини недовідомих альтернатив $U_R^{nd} \subset U$, асоційованої з R , що визначається функцією належності

$$\mu_R^{nd}(u_i) = \min_{u_j \in U} \{1 - \mu_R^S(u_i, u_j)\} = 1 - \max_{u_j \in U} \{\mu_R^S(u_i, u_j)\}, \quad u_i \in U. \quad (8.7)$$

3. Вибір альтернативи u^* , для якої значення $\mu_R^{nd}(u^*)$ є максимальним:

$$u^* = \arg \max_{u_j \in U} \mu_R^{nd}(u_j) \quad (8.8)$$

8.2 Завдання для самопідготовки

У процесі підготовки до заняття студент в обов'язковому порядку повинен виконати наступні завдання:

- а) вивчити конспект лекцій;
- б) опрацювати рекомендовану літературу: [1] с. 287, [3] с. 161, [5] с. 79;
- в) занести у зошит для практичних робіт такі матеріали:
 - 1) Прийняття рішень в умовах нечіткої інформації

8.3 Програма роботи

- 1) Вивчити теоретичні відомості.
- 2) Проробити контрольний приклад
- 3) Виконати індивідуальні завдання:
- 4) Оформити звіт. Вимоги до оформлення звіту наведені у п. 8.5.
- 5) Захистити лабораторну роботу. Питання для самоконтроля наведені у п. 8.6

8.4 Порядок роботи

8.4.1 Контрольний приклад

Задача 1

Розглянемо типову ситуацію, пов'язану з консалтингом в області вибору професії для подальшого навчання і отримання відповідної спеціальності. З цією метою необхідно побудувати нечітку модель, засновану на двох бінарних нечітких відношеннях R_1 і R_2 .

На множинах X та Y задане нечітке відношення S , на множинах Y та Z задана нечітка множина G . Множина X – множина спеціальностей, за якими проводиться відбір на навчання, Y – множина психологічних характеристик спеціальностей. Відношення S змістовно описує психологічне профілювання спеціальностей. Множина Z – множина кандидатів на навчання. Відношення G – змістовно описує психологічне профілювання кандидатів на навчання.

Нехай множина $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, де x_1 – «менеджер», x_2 – «програміст», x_3 – «водій», x_4 – «секретар-референт». $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$, де y_1 – «вміння швидко приймати рішення», y_2 – «стійкість і концентрація уваги», y_3 – «зорова пам'ять», y_4 – «швидкість реакції», y_5 – «відповідальність». $Z = \{z_1, z_2, z_3\}$, де z_1 – «Петренко», z_2 – «Іванченко», z_3 – «Сидоренко».

Конкретні значення функцій приналежності і даних нечітких стосунків представлені наступними таблицями 8.1 та 8.2.

Таблиця 8.1 - Нечітке відношення R1 профілювання спеціальностей навчання

	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5
X1	0.9	0.8	0.4	0.5	0.8
X2	0.5	0.9	0.3	0.1	0.5
X3	0.9	0.6	0.5	0.9	0.3
X4	0.5	0.5	0.5	0.2	0.9

Таблиця 8.2 - Нечітке відношення R2 профілювання кандидатів на навчання

	Z1	Z2	Z3
Y1	0.6	0.8	0.8
Y2	0.5	0.9	0.5
Y3	0.5	0.9	0.5
Y4	1	0.6	0.5
Y5	0.3	0.5	0.9

Побудувати композицію нечітких відношень $R_1 \circ R_2$. Зробити висновок про кращий вибір спеціальностей з множини кандидатів на навчання з множини Z.

Розі'язання

1. Будуємо композицію алгебраїчним шляхом

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(x, z) = \max_y \min\{\mu_{R_1}(x, y), \mu_{R_2}(y, z)\}$$

Максимінна композиція відношень має вигляд:

$$\begin{aligned} \mu_{R_1 \circ R_2}(x_1, z_1) &= (0,9 \cap 0,6) \cup (0,8 \cap 0,5) \cup (0,4 \cap 0,5) \cup (0,5 \cap 0,1) \cup \\ &\cup (0,8 \cap 0,3) = 0,6 \cup 0,5 \cup 0,4 \cup 0,5 \cup 0,3 = 0,6; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_{R_1 \circ R_2}(x_1, z_2) &= (0,9 \cap 0,4) \cup (0,8 \cap 0,9) \cup (0,4 \cap 0,9) \cup (0,5 \cap 0,6) \cup \\ &\cup (0,8 \cap 0,5) = 0,4 \cup 0,8 \cup 0,4 \cup 0,5 \cup 0,5 = 0,8; \end{aligned}$$

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(x_1, z_3) = 0,8 \cup 0,5 \cup 0,4 \cup 0,5 \cup 0,8 = 0,8;$$

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(x_2, z_1) = 0,5 \cup 0,5 \cup 0,3 \cup 0,1 \cup 0,3 = 0,5;$$

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(x_2, z_2) = 0,4 \cup 0,9 \cup 0,3 \cup 0,1 \cup 0,5 = 0,9;$$

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(x_2, z_3) = 0,5 \cup 0,5 \cup 0,3 \cup 0,1 \cup 0,5 = 0,5;$$

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(x_3, z_1) = 0,6 \cup 0,5 \cup 0,5 \cup 0,9 \cup 0,5 = 0,9;$$

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(x_3, z_2) = 0,6 \cup 0,5 \cup 0,5 \cup 0,9 \cup 0,5 = 0,9;$$

$$\begin{aligned}\mu_{R_1 \circ R_2}(x_3, z_2) &= 0,4 \cup 0,6 \cup 0,5 \cup 0,6 \cup 0,3 = 0,6; \\ \mu_{R_1 \circ R_2}(x_3, z_3) &= 0,8 \cup 0,5 \cup 0,5 \cup 0,5 \cup 0,3 = 0,8; \\ \mu_{R_1 \circ R_2}(x_4, z_1) &= 0,5 \cup 0,5 \cup 0,5 \cup 0,2 \cup 0,3 = 0,5; \\ \mu_{R_1 \circ R_2}(x_4, z_2) &= 0,4 \cup 0,5 \cup 0,5 \cup 0,2 \cup 0,5 = 0,5; \\ \mu_{R_1 \circ R_2}(x_4, z_3) &= 0,5 \cup 0,5 \cup 0,5 \cup 0,2 \cup 0,9 = 0,9.\end{aligned}$$

Результат операції нечіткої композиції цих відносин може бути представлений у вигляді результуючого нечіткого відношення (табл. 8.3)

Таблиця 8.3 – Нечітка композиція відношень R1 та R2

	Z1	Z2	Z3
X1	0,6	0,8	0,8
X2	0,5	0,9	0,5
X3	0,9	0,6	0,8
X4	0,5	0,5	0,9

2. Будуємо композицію шляхом побудови графа.

Нижче наведені графи, які відповідають відношенням R1 і R, «склеєні» по Y. В отриманому графі розглядаємо шляхи від x_i до z_j і кожному ставимо в відповідності мінімальну з «вагів» його складових.

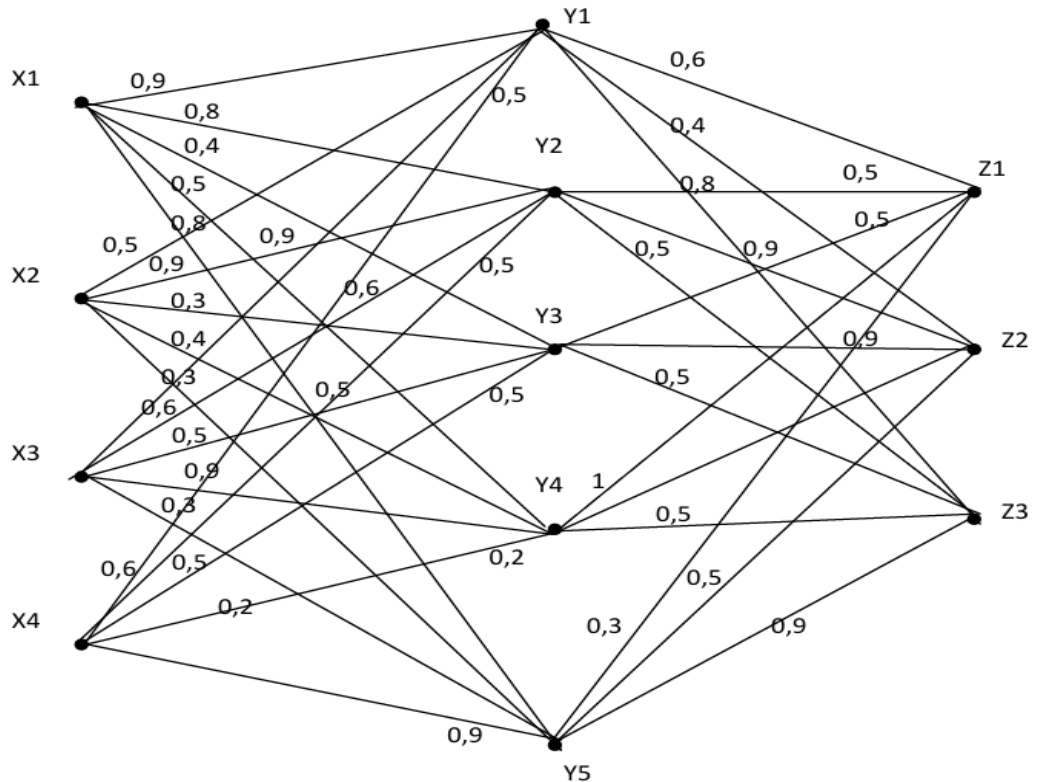


Рисунок 8.1 – Подання операції композиції нечітких відносин R1 та R2 у вигляді нечіткого графа

Далі визначаємо максимум по всім шляхам із x_i в z_j який дає композицію відношень.

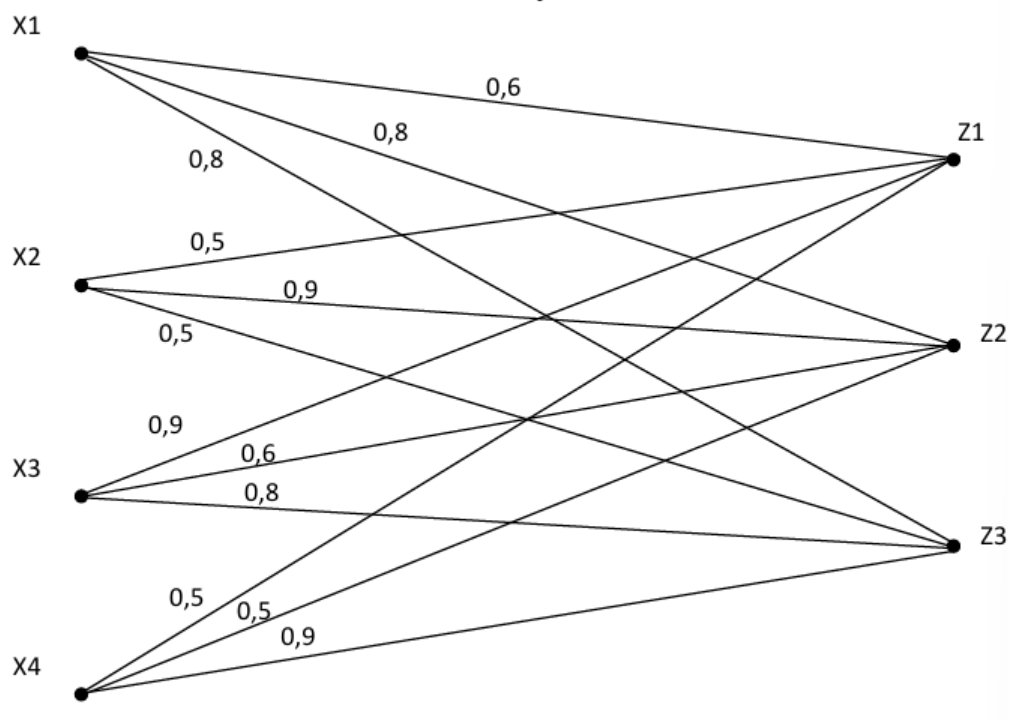


Рисунок 8.2 - Максимінна композиція відношень

Висновок. Аналіз отриманих результатів показав, що кандидатам можна порекомендувати навчання по наступним спеціальностям (на основі тах функцій належності): Петренко – водій, Іванченко – програміст, Сідоренко – секретар-референт. З погляду підготовки фахівців для навчання за фахом «менеджер» (x_1) найбільш підходять кандидати Іванченко (z_2) і Сідоренко (z_3); за фахом «програміст» (x_2) - Іванченко (z_2); за фахом «водій» (x_3)- Петренко (z_1); за фахом «секретар-референт» (x_4) - Сідоренко (z_3).

Задача 2

На множині $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ задане нечітке відношення R матрицею відношення:

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0,3 & 0,7 \\ 1 & 1 & 0,8 & 0,1 \\ 0,5 & 0,5 & 1 & 1 \\ 0,5 & 0,5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Необхідно визначити найкращу альтернативу.

Розв'язання

- 1) Будуємо матрицю відношень R^T транспонуванням матриці

відношень R

$$R^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0,5 & 0,5 \\ 0,3 & 0,8 & 1 & 0 \\ 0,7 & 0,1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Матриця відношення R^S , асоційованого з R , побудована за співвідношенням (8.6), має вигляд:

$$R^S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0,2 \\ 1 & 0 & 0,3 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0,4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3) Визначаємо значення $\max_{u_j \in U} \{\mu_R^S(u_i, u_j)\}$ та $\mu_R^{nd}(u_i)$ за формулою (8.7).

$$\begin{aligned} \max_{u_j \in U} \{\mu_R^S(u_1, u_j)\} &= \max\{0; 1; 0,2; 0\} = 1; \\ \mu_R^{nd}(u_1) &= 1 - \max_{u_j \in U} \{\mu_R^S(u_1, u_j)\} = 1 - 1 = 0; \\ \max_{u_j \in U} \{\mu_R^S(u_2, u_j)\} &= \max\{0; 0; 0; 0,4\} = 0,4; \\ \mu_R^{nd}(u_2) &= 1 - 0,4 = 0,6; \\ \max_{u_j \in U} \{\mu_R^S(u_3, u_j)\} &= \max\{0; 0,3; 0; 0\} = 0,3; \\ \mu_R^{nd}(u_3) &= 1 - 0,3 = 0,7; \\ \max_{u_j \in U} \{\mu_R^S(u_4, u_j)\} &= \max\{0,2; 0; 1; 0\} = 1; \\ \mu_R^{nd}(u_4) &= 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Таблиця 8.4 – Значення $\max_{u_j \in U} \{\mu_R^S(u_i, u_j)\}$ та $\mu_R^{nd}(u_i)$

	u_1	u_2	u_3	u_4
$\max_{u_j \in U} \{\mu_R^S(u_i, u_j)\}$	1	0,4	0,3	1
$\mu_R^{nd}(u_i)$	0	0,6	0,7	0

Висновок. Оскільки $\max(\mu_R^{nd}(u_i)) = \max\{0; 0,6; 0,7; 0\} = 0,7 = \mu_R^{nd}(u_3)$, то найкращою альтернативою є u_3

Індивідуальні завдання для виконання практичного заняття

Задача 1.

Задані нечіткі відношення R1 и R2.

Побудувати композицію нечітких відношень

Задача 2

Задано множину альтернатив $\{A_1, \dots, A_6\}$, яку оцінює один експерт, результати оцінки представлені матрицею нечіткого відношення переваги на множині альтернатив (згідно варіанту). Необхідно виконати ранжування на множині альтернатив та здійснити раціональний вибір найбільш переважної альтернативи

Варіант 1

Задача 1

R1	y1	y2	y3	y4
x1	0,5	0,7	0,6	0,9
x2	0,3	0	0,1	0
x3	0,7	0,9	0,4	0

R2	z1	z2	z3
y1	0	0,7	0,3
y2	0,7	0	0,6
y3	0,3	0,9	0,5
y4	0,1	0,8	0,3

Задача 2

	A1	A2	A3	A4	A5	A6
A1	0,2	0,2	0,6	0,4	0,7	0,2
A2	0,7	0,9	0,1	0,9	0,9	0,9
A3	0	0,4	0,6	0,1	0,6	0,9
A4	0,3	0,7	1	1	0,8	0,7
A5	0,1	0,8	0,2	0,1	0,9	0,2
A6	0,9	0,1	0,1	0,3	0,2	0,6

Варіант 2

Задача 1

R1	y1	y2	y3	y4
x1	0,2	0,3	0	0
x2	0	0,7	0,1	0,8
x3	0	0,1	0,7	0

R2	z1	z2	z3
y1	0,9	0	0,7
y2	0,6	0,5	0,4
y3	0	0	0,6
y4	0,1	0,8	0,3

Задача 2

	A1	A2	A3	A4	A5	A6
A1	0,4	0,2	0,7	0,8	0,5	0,6
A2	0,2	0,9	0,3	0,8	0,5	0,7
A3	0,6	0,7	0,1	0,9	0,4	0,6
A4	0,6	0,1	0,8	0,2	0,9	0,5
A5	0,4	0,2	0,8	1	0,2	0,9
A6	0,1	0,1	0,2	0,3	0,7	0,3

Варіант 3

Задача 1

: R1	y1	y2	y3	y4
x1	0,5	0,7	0,9	0,4
x2	0,3	0	0	0,8
x3	0,7	0,9	0,1	0,9

R2	z1	z2	z3
y1	0	0,7	0,3
y2	0,7	0	0,6
y3	0,3	0,9	0,5
y4	0,1	0,8	0,3

Задача 2

	A1	A2	A3	A4	A5	A6
A1	0,1	0,2	0,8	0,4	0,9	0,5
A2	0,2	0,3	0,5	0,5	0,8	0,7
A3	0,2	0,1	0,3	0,8	0,3	0,2
A4	1	0,2	0,7	1	0,6	0,1
A5	0,7	0,9	0,5	0,7	0,1	0,6
A6	0,9	0,4	0,3	0,6	0,7	0,1

Варіант 4

Задача 1

R1	y1	y2	y3	y4	y5
x1	1	0,8	0,6	0	0,2
x2	0,9	0,7	0,4	0,3	0,7
x3	0,8	0,9	0,6	0,2	0

R2	z1	z2	z3
y1	0	0,2	0,8
y2	0,1	0,2	0,2
y3	0,5	0,6	0,7
y4	0,1	0,8	0,3
y5	0,6	0,7	0,6

Задача 2

	A1	A2	A3	A4	A5	A6
A1	9,9	0,7	0,8	0,5	0,6	0,9
A2	0,1	0,7	0,5	0,7	0,1	0,5
A3	0,4	0,9	0,9	0,8	0,7	0,1
A4	0,5	0,6	0,7	0,6	0	0,8
A5	0,6	0,9	0,4	0,8	0,8	0,6
A6	0,6	0,9	0,6	0,5	0,3	0,8

Варіант 5**Задача 1**

R1	y1	y2	y3	y4	y5
x1	0	0,2	0,8	0,7	0,5
x2	1	0,8	0,9	0,2	0,7
x3	0,5	0,7	0,6	0,3	0

R2	z1	z2	z3
y1	0	0,2	0,1
y2	1	0,9	0,5
y3	0,3	0,4	0,6
y4	0,5	0,7	0,8
y5	0,2	0,3	0,6

Задача 2

	A1	A2	A3	A4	A5	A6
A1	0,5	0,4	0,5	0,4	0,1	0,9
A2	0,2	0,3	0	1	0,8	0,6
A3	0,8	0,8	0,6	0	0	1
A4	0,4	0,5	0,7	0,2	0,7	0,1
A5	0,3	0,7	0,5	0,8	0,7	0,1
A6	0,6	0,7	0,8	0,1	0,8	0,1

Варіант 6**Задача 1**

R1	y1	y2	y3	y4	y5
x1	0	0,1	0,8	0,7	0,5
x2	0,4	0,2	0,5	0,7	0,9
x3	1	0,3	0,4	0,5	0,8

R2	z1	z2	z3
y1	0,9	0,6	0,2
y2	0,1	0,5	0,7
y3	0,2	0,2	0,5
y4	0	0	0,1
y5	0,9	0,5	0,8

Задача 2

	A1	A2	A3	A4	A5	A6
A1	0,7	0,68	0,3	0,7	0,3	1
A2	0,9	0,4	0,9	0,5	0,5	0,8
A3	0,8	0,4	0,6	0,8	0,1	0,1
A4	0,6	0,5	0,2	0,1	0,2	0,9
A5	0	0,7	0,2	0,1	0,7	0,9
A6	0,8	0,3	0,2	1	0,4	0,9

Варіант 7**Задача 1**

R1	y1	y2	y3	y4	y5
x1	0,5	0,7	0,2	0,4	0,6
x2	0,4	0,8	0,7	0,9	0
x3	0,3	0,2	0,4	0,6	0,2

R2	z1	z2	z3
y1	0	0,1	0,6
y2	0,2	0,3	0,4
y3	0,5	0,8	0,2
y4	0,6	0,5	0,4
y5	0,3	0,2	0,5

Задача 2

	A1	A2	A3	A4	A5	A6
A1	1	0,5	0,5	0,8	0,8	0,7
A2	1	0,7	0,4	0,7	0,3	0,4
A3	1	0,8	0,6	0,8	1	1
A4	0,3	0,6	0,5	1	0,4	0,7
A5	0,5	0,4	0,8	0,8	0,2	0,4
A6	0	0,6	0,7	0,2	0,7	0,7

Варіант 8**Задача 1**

R1	y1	y2	y3	y4
x1	0	0,2	0,8	0,7
x2	1	0,8	0,9	0,2
x3	0,5	0,7	0,6	0,3
x4	0,2	0,8	0,6	0,2

R2	z1	z2	z3
y1	0	0,2	0,1
y2	1	0,9	0,5
y3	0,3	0,4	0,6
y4	0,5	0,7	0,8

Задача 2

	A1	A2	A3	A4	A5	A6
A1	0,8	0,4	0,2	0,2	0,2	0,9
A2	0,4	0,7	0,4	0,1	0,8	0,1
A3	1	0,2	0,9	0,9	0,2	0,4
A4	0,2	0,8	0,2	0,7	0,1	0,9
A5	0,3	0,8	0,2	0,8	0,8	0,3
A6	0,8	0,9	0,1	0,8	0,9	0,2

Варіант 9**Задача 1**

R1	y1	y2	y3	y4
x1	0,2	0,3	0,5	0,8
x2	0,1	0,4	0,6	0,2
x3	0,3	0	0	0,8
x4	0,4	0,5	0,6	0,8

R2	z1	z2	z3	z4
y1	0	0	0,1	0,4
y2	0,2	0,3	0,8	0,2
y3	0,1	0,4	0,9	0,1
y4	0,2	0	0	0,8

Задача 2

	A1	A2	A3	A4	A5	A6
A1	0,8	0,1	0,6	0,1	0,9	0,1
A2	0,2	0,6	0,1	0,9	0,5	0
A3	0,3	0,7	0,3	0,8	0,4	0,9
A4	0,8	0,8	0,5	0,6	0,7	0,2
A5	0,1	0,3	0,4	0,9	0,2	0,3
A6	0,8	0,7	0,7	0,5	0,6	0,8

Варіант 10**Задача 1**

R1	y1	y2	y3	y4
x1	0	0	0,1	0,4
x2	0,2	0,3	0,8	0,2
x3	0,1	0,4	0,9	0,1
x4	0,2	0	0	0,8

R2	z1	z2	z3	z4
y1	0,2	0,3	0,5	0,8
y2	0,1	0,4	0,6	0,2
y3	0,3	0	0	0,8
y4	0,4	0,5	0,6	0,8

Задача 2

	A1	A2	A3	A4	A5	A6
A1	0,4	0,6	0,8	0,3	0,7	0,6
A2	0,9	0,6	0,3	0,7	0,4	0,3
A3	0	0,6	0,3	0,4	0,7	0,9
A4	0,5	0,5	0,3	0,8	0,1	0,9
A5	0,3	0,2	0	0,6	0,8	0,3
A6	0,5	0,7	0,4	0,2	0,5	0,4

Варіант 11**Задача 1**

R1	y1	y2	y3	y4
x1	0,2	0,3	0	0,1
x2	0,5	0	0,7	0,8
x3	0,3	0,8	0,9	0,7
x4	0,7	0,9	0	0

R2	z1	z2	z3	z4
y1	0,9	0	0,7	0,8
y2	0,6	0,7	0,3	0,2
y3	0,7	0,8	0	0,6
y4	0,3	0,9	0,5	0,1

Задача 2

	A1	A2	A3	A4	A5	A6
A1	0,3	0,8	1	0	0,5	0,7
A2	0,1	0	0,3	0	0,7	0,1
A3	0,1	0,3	0,8	0,4	0,3	0,9
A4	0,5	0,6	0,1	0,4	0,4	0,5
A5	0,2	0,7	0,5	0,7	0,3	0,9
A6	0,7	0,8	0,5	0,5	0	0,2

Варіант 12**Задача 1**

R1	y1	y2	y3	y4
x1	0,8	0,5	0,7	0,9
x2	0,3	0	0,2	0,3
x3	0	0	0,8	0,1
x4	0	0,9	0,8	0,5

R2	z1	z2	z3	z4
y1	0	0,3	0,3	0
y2	0,7	0,6	0,6	0,2
y3	0,4	0,7	0,7	0,9
y4	0,2	0,5	0,5	0

Задача 2

	A1	A2	A3	A4	A5	A6
A1	0,4	1	0,9	0,6	1	0,9
A2	0,2	0,7	0,5	0,1	0,3	0,8
A3	0,3	0,3	0,2	0,6	0,9	0,6
A4	1	1	1	0,3	1	0,8
A5	0,1	0	1	0,3	0,8	0,2
A6	0,9	0	0,3	0,8	0,8	1

Варіант 13**Задача 1**

R1	y1	y2	y3	y4
x1	0,5	0,7	0,6	0,9
x2	0,3	0	0,1	0
x3	0,7	0,9	0,4	0

R2	z1	z2	z3
y1	0	0,7	0,3
y2	0,7	0	0,6
y3	0,3	0,9	0,5
y4	0,1	0,8	0,3

Задача 2

	A1	A2	A3	A4	A5	A6
A1	1	0,6	0,5	0,5	0,8	0,7
A2	0,6	0,3	0,9	0,5	0,3	0,6
A3	0,5	0,8	0,2	0,3	0,5	0,4
A4	0,2	0,9	0,4	0,2	0,8	0,1
A5	0,9	0,6	0	0,5	0,9	0,4
A6	0,6	0,1	0,5	0,5	0,8	0,5

Варіант 14**Задача 1**

R1	y1	y2	y3	y4
x1	0,2	0,3	0	0
x2	0	0,7	0,1	0,8
x3	0	0,1	0,7	0

R2	z1	z2	z3
y1	0,9	0	0,7
y2	0,6	0,5	0,4
y3	0	0	0,6
y4	0,1	0,9	0,5

Задача 2

	A1	A2	A3	A4	A5	A6
A1	0,5	0,9	0,4	0,6	0,9	0,3
A2	0,7	1	0,7	0,1	0,1	0
A3	0,8	0,3	0,8	0,8	0,9	0,1
A4	0,1	0,5	0,7	1	0,2	0,7
A5	0,8	1	0,1	0,1	0,1	0,3
A6	0,1	0,5	0,1	0,8	0,9	0,6

Варіант 15**Задача 1**

R1	y1	y2	y3	y4
x1	0,5	0,7	0,9	0,4
x2	0,3	0	0	0,8
x3	0,7	0,9	0,1	0,9

R2	z1	z2	z3
y1	0	0,7	0,3
y2	0,7	0	0,6
y3	0,3	0,9	0,5
y4	0,1	0,8	1

Задача 2

	A1	A2	A3	A4	A5	A6
A1	0,7	0,9	0,2	0,2	0,5	0,7
A2	0,5	0,2	0,5	0,9	0,8	0,4
A3	0,5	0,1	0,6	0,8	0,6	0,4
A4	0,9	0,4	1	0,1	0,4	0,7
A5	0,1	0,3	0,5	0,4	0,2	0
A6	0,5	0,4	0,5	0,4	0,6	0,5

Варіант 16**Задача 1**

R1	y1	y2	y3	y4	y5
x1	1	0,8	0,6	0	0,2
x2	0,9	0,7	0,4	0,3	0,7
x3	0,8	0,9	0,6	0,2	0

R2	z1	z2	z3
y1	0	0,2	0,8
y2	0,1	0,2	0,2
y3	0,5	0,6	0,7
y4	0,3	0,8	0,5
y5	0,6	0,7	0,6

Задача 2

	A1	A2	A3	A4	A5	A6
A1	0,8	0,6	1	0,4	0,8	1
A2	0,3	0,9	0,2	1	0,2	0,4
A3	0,2	0,3	0,8	0,9	0,3	0,1
A4	0,8	0,8	0,5	0,3	0	0,2
A5	0,9	0,9	0,7	0,1	0,3	0,2
A6	0,3	1	0,5	0,7	0,9	0,8

Варіант 17**Задача 1**

R1	y1	y2	y3	y4	y5
x1	0	0,2	0,8	0,7	0,5
x2	1	0,8	0,9	0,2	0,7
x3	0,5	0,7	0,6	0,3	0

R2	z1	z2	z3
y1	0	0,2	0,1
y2	1	0,9	0,5
y3	0,3	0,4	0,6
y4	0,5	0,7	0,8
y5	0,2	0,3	0,6

Задача 2

	A1	A2	A3	A4	A5	A6
A1	0,6	0,4	0,8	1	0,3	0,5
A2	0,5	0,2	0,1	0,4	1	0,1
A3	0,6	0,8	0,8	0,8	0,6	0,5
A4	0,1	0,5	0,3	0,3	0,8	0,5
A5	0,7	1	0,7	0,2	0,2	0,1
A6	0,3	0,2	0,1	0,9	0,4	0,1

Варіант 18**Задача 1**

R1	y1	y2	y3
x1	0	0,1	0,8
x2	0,4	0,2	0,5
x3	1	0,3	0,4
x4	0,2	0,5	0,4
x5	0	0,6	0,8

R2	z1	z2	z3	z4
y1	0,9	0,6	0,2	0,1
y2	0,1	0,5	0,7	0,5
y3	0,2	0,2	0,5	0,4

Задача 2

	A1	A2	A3	A4	A5	A6
A1	0,8	0,8	0,6	0,4	0,9	0,2
A2	0,2	0,4	0,7	1	0,1	0,2
A3	0,3	0,5	0,8	0,9	0,7	0,4
A4	0,4	0,2	0,6	0,8	0,6	0,6
A5	0	0,2	0,1	0,1	0,1	0,9
A6	0,7	0,8	0,8	0,7	0,6	0,8

Варіант 19**Задача 1**

R1	y1	y2	y3	y4
x1	0,5	0,7	0,6	0,9
x2	0,3	0	0,1	0
x3	0,7	0,9	0,4	0

R1	z1	z2	z3
y1	0	0,7	0,3
y2	0,7	0	0,6
y3	0,3	0,9	0,5
y4	0,1	0,8	0,3

Задача 2

	A1	A2	A3	A4	A5	A6
A1	0,4	0,3	0,2	0,8	0,2	0,2
A2	0,3	1	0,3	0,3	0,1	0,9
A3	0,4	0,5	0,3	0,3	0,6	0,6
A4	0,4	0	0,5	0,3	0,6	0,7
A5	0,3	0,5	0,3	0	0,3	0,9
A6	0,2	0,7	0,9	0,1	0	0,2

Варіант 20**Задача 1**

R1	y1	y2	y3	y4
x1	0,2	0,3	0	0
x2	0	0,7	0,1	0,8
x3	0	0,1	0,7	0

R1	z1	z2	z3
y1	0,9	0	0,7
y2	0,6	0,5	0,4
y3	0	0	0,6
y4	0,1	0,8	0,3

Задача 2

	A1	A2	A3	A4	A5	A6
A1	0	0,7	0	0,8	0,2	0,9
A2	0,9	0,6	0,7	0,2	0,6	1
A3	0,1	0,8	0,1	0,1	0,7	0,5
A4	0,1	0,1	0,8	0,6	0,3	0
A5	0,9	0	0	0,7	0,9	0,5
A6	0,7	0,8	0	0,5	0,4	0,5

8.5 Вимоги до оформлення звіту

Звіт повинен містити:

- тему та мету виконання практичного заняття;
- формулювання індивідуального завдання;
- результати виконання завдань із змістовними поясненнями до них;
- висновки з практичного заняття

8.6 Контрольні питання

1. Наведіть приклади реальних задач, що потребують введення поняття нечіткої множини.
2. В чому полягає суть функції належності нечіткої множини?
3. Що називають нечітким відношенням?
4. Як можна задавати нечіткі відношення?
5. Які математичні операції можна застосовувати до нечітких відношень?
6. Наведіть приклади нечітких відношень. Наведіть основні властивості нечітких відношень.
7. Що являє собою нечітке відношення переваги?
8. Наведіть загальну процедуру вирішення багатокритеріальної задачі раціонального вибору непоміжованих альтернатив.
9. Поясніть сенс операції композиції між нечіткими відношеннями.

КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ ПРАКТИЧНИХ РОБІТ

Виконання практичних робіт оцінюється за результатами захисту відповідних звітів. Звіт з лабораторної роботи має бути представлений викладачеві до початку виконання наступної лабораторної роботи. Звіт з лабораторної роботи має містити титульний аркуш згідно встановленої форми та результати виконання роботи згідно індивідуальних завдань, що надаються викладачем. Результати виконання практичних робіт оцінюються за такою шкалою (у відсотках до максимального балу):

90-100% «відмінно»: виконано всі завдання практичного заняття, студент чітко та без помилок відповів на всі контрольні питання.

75-89% «добре»: виконано всі завдання практичного заняття; студент відповів на всі контрольні питання із зауваженнями.

60-74% «задовільно»: виконані всі завдання практичного заняття з зауваженнями; студент відповів на всі контрольні питання із зауваженнями.

35-59% «незадовільно»: студент не виконав чи виконав неправильно завдання практичного заняття; студент відповів на контрольні питання з помилками чи не відповів на контрольні питання.

ЛІТЕРАТУРА

1. Байєсівські мережі в системах підтримки прийняття рішень: навч. посіб. / Згуровський М.З. та ін.; відп. ред. Данілов В.Я.; Нац. техн. ун-т України «Київ. політехн. ін-т». Київ: Едельвейс, 2015. 300 с
2. Волошин О.Ф., Мищенко С.О. Моделі та методи прийняття рішень: Навчальний посібник. Київ: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2006. 235 с.
3. Жураковська О.С. Теорія прийняття рішень: навч. посіб. для студ. спеціальності 126 «Інформаційні системи та технології» та спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення». Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. 99 с.
4. Малкіна В.М., Зінов'єва О.Г., Мірошніченко М.Ю. Дослідження операцій: навчальний посібник. Мелітополь: Люкс, 2020. 201 с.
5. Нікітіна Л., Яценко І. Моделі та методи прийняття рішень: навчальний посібник. Харків: НТУ «ХП», 2023. 179 с.
6. Новожилова М.В., Чуб О.І. Методи та засоби прийняття рішень: навч. посіб. Харків: ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2024. 115 с.
7. Творошенко І.С. Технології прийняття рішень в інформаційних системах: навч. посібник. Харків: ХНУРЕ, 2021. 120 с.
8. Ус С.А., Коряшкіна Л.С. Моделі й методи прийняття рішень: навч. посіб. Дніпро: НТУ «ДП», 2018. 299 с.
9. Файнзільберг Л.С., Жураковська О.А., Якимчук В.С. Теорія прийняття рішень: підруч. Київ: Освіта України, 2018. 246 с.