

УДК 517.518

Катерина Соліч, кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри математичного аналізу та статистики,
Волинський національний університет
імені Лесі Українки, м. Луцьк, Україна

НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ МАЖОРАНТОЮ МІШАНИХ МОДУЛІВ НЕПЕРЕРВНОСТІ У ПРОСТОРІ L_∞

Анотація. Одержано точні за порядком оцінки апроксимативних характеристик класів типу Нікольського-Бесова $B_{\infty,\theta}^\Omega$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_∞ .

Ключові слова: апроксимативні характеристики, оцінки наближення, функції багатьох змінних, лінійний оператор.

Abstract. We are obtained exact-order estimates of the approximate characteristics of Nikolsky-Besov-type classes $B_{\infty,\theta}^\Omega$ of periodic functions of many variables in the space L_∞ .

Keywords: approximate characteristics, approximation estimates, functions of many variables, linear operator.

Досліджується питання оцінок апроксимативних характеристик класів типу Нікольського-Бесова $B_{\infty,\theta}^\Omega$ періодичних функцій багатьох змінних із заданими функціями $\Omega(t)$ спеціального виду. Апроксимація функцій з відповідних класів здійснюється за допомогою лінійних операторів, які відповідають певним умовам, а похибка апроксимації оцінюється в просторі L_∞ . Отримані оцінки доповнюють і узагальнюють деякі результати роботи [1], пов'язані з апроксимацією класів типу Нікольського H_∞^Ω .

Нехай $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, - d -вимірний простір з елементами $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ і $(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_d y_d$ - скалярний добуток елементів $x, y \in \mathbb{R}^d$. Нехай $L_p(\mathbb{T}^d)$, $\mathbb{T}^d = \prod_{j=1}^d [0, 2\pi)$, визначимо простір функцій f , що є 2π -періодичними по кожній змінній і

$$\|f\|_p := \|f\|_{L_p(\mathbb{T}^d)} = \left((2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{T}^d} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty := \|f\|_{L_\infty(\mathbb{T}^d)} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{T}^d} |f(x)| < \infty.$$

Нехай далі $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$ і $\Omega(t)$ – задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l . Тоді класи $B_{p,\theta}^\Omega$ означимо згідно [2]:

$$B_{p,\theta}^\Omega = \left\{ f \in L_p^0(\mathbb{T}^d) : \|f\|_{B_{p,\theta}^\Omega} \leq 1 \right\},$$

де

$$\|f\|_{B_{p,\theta}^\Omega} = \left\{ \int_{\mathbb{T}^d} \left(\frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)} \right)^\theta \prod_{j=1}^d \frac{dt_j}{t_j} \right\}^{1/\theta}, \quad 1 \leq \theta < \infty,$$

$$\|f\|_{B_{p,\infty}^\Omega} = \sup_{t>0} \frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)},$$

(вираз $t > 0$ для $t = (t_1, t_2, \dots, t_d)$ рівносильний $t_j > 0, j = \overline{1, d}$).

У подальшому будемо вивчати класи $B_{p,\theta}^\Omega$, що визначаються функцією $\Omega(t)$:

$$\Omega(t) = \Omega(t_1, t_2, \dots, t_d) = \begin{cases} \prod_{j=1}^d \frac{t_j^r}{(\log^1/t_j)_+^{b_j}}, & \text{якщо } t_j > 0, j = \overline{1, d}; \\ 0, & \text{якщо } \prod_{j=1}^d t_j = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Тут і надалі розглядаються логарифми з основою 2.

Для функцій з класу $F \subset L_q(\mathbb{T}^d)$ означимо:

$$d_M^B(F, L_q) = \inf_{G \in L_M(B)_q} \sup_{f \in F \cap D(G)} \|f - Gf\|_q,$$

де $L_M(B)_q$ – множина лінійних операторів, що задовольняють умови:

а) область визначення $D(G)$ цих операторів містить усі тригонометричні поліноми, а область їх значень міститься в підпросторі розмірністю M простору $L_q(\mathbb{T}^d)$;

б) існує таке число $B \geq 1$, що для всіх векторів $k = (k_1, k_2, \dots, k_d)$, $k_j \in \mathbb{Z}$, $j = \overline{1, d}$, виконується нерівність $\|Ge^{i(k, \cdot)}\|_2 \leq B$.

Мають місце наступні теореми.

Теорема 1. Нехай $1 \leq \theta < \infty$ і $\Omega(t)$ – функція виду (1). Тоді для $0 < r < l$, $b_1 \leq \dots \leq b_d < r$ має місце співвідношення

$$d_M^B(B_{\infty, \theta}^{\Omega}, L_{\infty}) \asymp M^{-r} (\log M)^{-b_1 - \dots - b_d + (d-1)(r+1-1/\theta)}.$$

Теорема 2. Нехай $1 \leq \theta < \infty$ і $\Omega(t)$ – функція виду (1). Тоді для $0 < r < l$, $b_j > r + 1, j = \nu + 1, \dots, d$ має місце співвідношення

$$d_M^B(B_{\infty, \theta}^{\Omega}, L_{\infty}) \asymp M^{-r} (\log M)^{-b_1 - \dots - b_{\nu} + (\nu-1)(r+1-1/\theta)}.$$

Теорема 3. Нехай $1 \leq \theta < \infty$ і $\Omega(t)$ – функція виду (1). Тоді для $0 < r < l$, $b_2 > b_1 + 1$ має місце співвідношення

$$d_M^B(B_{\infty, \theta}^{\Omega}, L_{\infty}) \asymp M^{-r} (\log M)^{-b_1}.$$

Зауваження. Аналогічні теореми 1-3 для класів H_{∞}^{Ω} були отримані в роботі [1]. Крім того при виконанні умов теореми 3 отримаємо співвідношення

$$d_M^B(B_{\infty, \theta}^{\Omega}, L_{\infty}) \asymp d_M^B(H_{\infty}^{\Omega}, L_{\infty}).$$

Список використаних джерел

1. Pustovoitov N. N. The orhowidths of classes of multidimensional periodic functions, for which the majorant of mixed continuity moduli contains power and logarithmic multipliers. *Anal. Math.* 2008. V. 34 (3). Pp. 187-224. <https://doi.org/10.1007/s10476-008-0303-6>
2. Yongsheng S., Heping W. Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness. *Tr. Mat. Inst. Steklova.* 1997. V. 219. P. 356-377.