

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ТАВРІЙСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ АГРОТЕХНОЛОГІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ДМИТРА МОТОРНОГО**

Г.В. АНТОНОВА, Л.Ю. БОНДАРЕНКО, О.О. ВЕРШКОВ

ПРИКЛАДНА МЕХАНІКА



**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ТАВРІЙСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ АГРОТЕХНОЛОГІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ДМИТРА МОТОРНОГО**

Г.В. АНТОНОВА, Л.Ю. БОНДАРЕНКО, О.О. ВЕРШКОВ

ПРИКЛАДНА МЕХАНІКА

*Рекомендовано Вченою радою
Таврійського державного агротехнологічного
університету імені Дмитра Моторного
як навчальний посібник для підготовки здобувачів
ступеня вищої освіти «Бакалавр» зі спеціальності 181
«Харчові технології»*

МЕЛІТОПОЛЬ

2019

УДК 531(075.8)
А72

*Рекомендовано Вченою радою Таврійського державного
агротехнологічного університету як навчальний посібник
Протокол № 11 від «28» травня 2019р*

Рецензенти:

С.В. Кюрчев – кандидат технічних наук, проф. (Таврійський державний агротехнологічний університет, завідувач кафедри технології конструкційних матеріалів);

В.М. Верещага – д-р техн. наук, проф. (Мелітопольський державний педагогічний університет ім. Б. Хмельницького, завідувач кафедри математики і фізики)

Антонова Г.В.

А72 Прикладна механіка: навч. посіб. / Г.В.Антонова, Л.Ю.Бондаренко, О.О. Вершков; Таврійський державний агротехнологічний університет імені Дмитра Моторного. – Мелітополь: ТДАТУ, 2019. – 202с.

Зміст видання відповідає освітньо-професійній програмі підготовки бакалаврів зі спеціальностей: 181 «Харчові технології» (галузевий стандарт вищої освіти України ГСВО ОПП) та програмі навчальної дисципліни «Прикладна механіка».

Навчальний посібник націлений на формування у студентів базового комплексу знань з прикладної механіки, що в подальшому будуть сприяти поширенню наукового світогляду та підвищенню загальної культури майбутнього фахівця, розвитку його мислення.

Навчальний посібник складений відповідно до програми навчальної дисципліни і містить теоретичний матеріал, приклади, питання для самоконтролю, список рекомендованої літератури та призначений для студентів вищих навчальних закладів при підготовці здобувачів ступеня вищої освіти «Бакалавр» зі спеціальності 181 «Харчові технології».

© Антонова Г.В.
© Бондаренко Л.Ю.,
© Вершков О.О.,
© Таврійський державний
агротехнологічний університет, 2019

ЗМІСТ

ВСТУП	5
РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА. СТАТИКА	6
1.1 Вступ в теоретичну механіку. Вступ в статику	6
1.2 Основні поняття і визначення статички	11
1.3 Аксиоми та теореми статички	13
1.4 Реакції зв'язків. Системи сил, що сходяться	
Умови рівноваги системи сил, що сходяться	16
1.5 Момент сили відносно точки. Момент сили відносно осі	20
1.6 Пара сил. Теорема про суму моментів пари сил	24
1.7 Приведення сили до заданого центру. Приведення системи сил до заданого центру. Умови рівноваги просторової системи сил	28
1.8 Плоска система сил	31
1.9 Центр паралельних сил. Паралельні сили розподілені по відрітку прямої. Центр тяжіння твердого тіла, поверхні і лінії	34
1.10 Тертя ковзання. Закони Кулона. Кут і конус тертя. Умови рівноваги. Тертя кочення	40
РОЗДІЛ 2. КІНЕМАТИКА	48
2.1 Вступ в кінематику. Кінематика точки. Поняття траєкторії. Способи завдання руху	48
2.2 Геометричні поняття: кривизна кривої, радіус кривизни, осі природного тригранника. Швидкість і прискорення точки. Окремі випадки руху точки	53
2.3 Швидкість і прискорення точки в полярних координатах	60
2.4 Завдання кінематики твердого тіла. Види руху твердого тіла	62
2.5 Швидкість та прискорення точки тіла при обертанні	70
2.6 Плоский рух твердого тіла. Рівняння плоского руху	77

РОЗДІЛ 3. ДИНАМІКА	83
3.1 Вступ в динаміку. Аксиоми класичної механіки.	
Диференціальні рівняння руху точки	83
3.2 Загальні теореми динаміки точки	88
3.3 Момент кількості руху точки	91
3.4 Робота сили. Потужність	92
РОЗДІЛ 4. МЕХАНІКА МАТЕРІАЛІВ І КОНСТРУКЦІЙ	97
4.1 Основні поняття, допущення	97
4.2 Осьовий розтяг-стиск	104
4.3 Випробування матеріалів	109
4.4 Чистий зсув. Кручення	114
4.5 Плоский згин	122
4.6 Диференціальна залежність між згинальним моментом, поперечною силою та інтенсивності розподіленого навантаження	125
4.7 Повна перевірка міцності балки	131
4.8 Розрахунок гнучких ниток	133
РОЗДІЛ 5. ДЕТАЛІ МАШИН	139
5.1 Загальні відомості	139
5.2 Механічні передачі	145
5.3 Зубчасті передачі	148
5.4 Пасові передачі	159
5.5 Вали і осі	171
5.6 Опори валів	181
5.7 Шпонкові і шліцьові з'єднання	189
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	202

ВСТУП

Розвиток сучасної техніки ставить перед інженерами найрізноманітніші завдання, пов'язані з розрахунком різних споруд, з проектуванням, виробництвом і експлуатацією всіляких машин і механізмів. Незважаючи на різноманітність всіх цих проблем, рішення їх в певній частині ґрунтується на деяких загальних принципах і має загальну наукову базу. Це пояснюється тим, що у вказаних завданнях значне місце займають питання, що вимагають вивчення законів руху або рівноваги тих або інших матеріальних об'єктів. Наука про закони руху і рівноваги матеріальних тіл і про взаємодії, що виникають при цьому між тілами називається загальною механікою. Теоретичною ж механікою ми називатимемо такий розділ загальної механіки, в якому досліджуються найбільш загальні закони механічного руху без урахування спеціальних фізичних властивостей матеріальних об'єктів (електропровідність, теплопровідність і тому подібне). На основі теоретичної механіки вивчається механіка тіл, що деформуються: опір матеріалів, теорія машин і механізмів, теорія пружності, пластичності, механіка рідини і газу, аеродинаміка і багато спеціальних дисциплін.

Математичний апарат технічної механіки широко застосовується в багатьох областях науки. Багато розділів математики виникли і розвивалися під впливом і у зв'язку з відповідними потребами механіки, тому при вивченні механіки можна отримати наочне, яскраве і переконливе уявлення про багато інших розділів математики, оскільки при цьому за формулами видно глибокі, змістовні зв'язки, а математичні величини наділяються ясным сенсом.

Даний курс базується на класичній (Ньютонівській) механіці, яка на відміну від релятивістської механіки заснована на уявленні про абстрактний геометричний простір не пов'язаний за своїми властивостями з рухом матерії в ньому. Тобто в основі теоретичної механіки лежить уявлення про простір і час не пов'язаних один з одним. Подібне допущення, як показує теорія відносності, цілком застосовано для рухомих тіл з швидкостями багато меншими швидкості світла.

РОЗДІЛ І. ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА. СТАТИКА

1.1 Вступ в теоретичну механіку. Вступ в статику

Теоретична механіка – це наука, в якій вивчаються механічні рухи речових форм матеріальних об'єктів.

Теоретичну механіку називають ще класичною механікою або механікою Ньютона.

Механічний рух – це переміщення матеріальних об'єктів в просторі з часом без розгляду фізичних властивостей цих об'єктів і їх зміни в процесі руху.

Теоретична механіка вивчає тільки речові форми матеріальних об'єктів. Елементарні частинки і різні поля не являються предметом вивчення в теоретичній механіці.

Рух матеріальних об'єктів відбувається в просторі і в часі. Простір є тривимірним простором Евкліда.

Теоретична механіка являється базою для інших розділів механіки (теорії пружності, опору матеріалів, теорії механізмів і машин та ін.) і багатьох технічних дисциплін.

Теоретична механіка ділиться на три частини: статику, кінематику і динаміку. Головною частиною є динаміка.

Вивчення теоретичної механіки зазвичай починається із статички.

Статика - це розділ теоретичної механіки, в якому висловлюється загальне вчення про сили і вивчаються умови рівноваги матеріальних тіл, що знаходяться під дією сил.

Під рівновагою тіла в статистиці розуміється стан його спокою по відношенню до інших тіл, що приймаються за нерухомі.

У теоретичній механіці розглядаються такі векторні величини як сила, моменти сили відносно точки та осі, момент пари сил, швидкість, прискорення та інші.

Поняття вектора. Для визначеності розглянемо прямокутну Декартову систему координат.

Вектор - це направлений відрізок, який характеризується довжиною і напрямом.

Операції над векторами. Вектори можна складати і множити на число.

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ сума двох векторів є вектор,

$\alpha \cdot \vec{a} = \vec{b}$ добуток вектора на дійсне число є вектор,

$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ існує нульовий вектор.

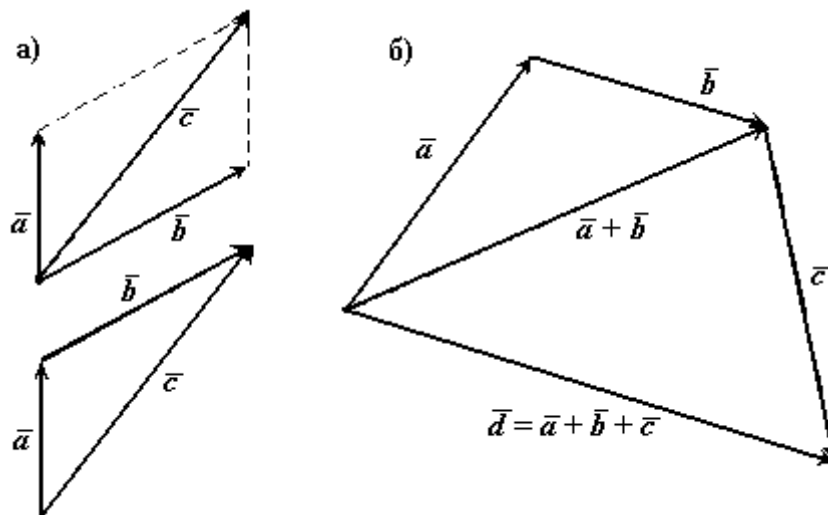


Рисунок 1.1 – Складання векторів

В математиці всі вектори є вільними, їх можна переносити паралельно самим собі.

У сумі двох векторів (рисунок 1.1а) початок другого вектора можна помістити в кінець першого, тоді суму двох векторів можна представити як вектор, що має начало на початку першого вектора, а кінець - в кінці другого вектора. Застосовуючи це правило для суми декількох векторів (рисунок 1.1б) отримуємо, що сумою декількох векторів є вектор, що замикає ламану лінію, що складається з складових векторів.

Праві та ліві системи координат

Декартові системи координат діляться на два види: **праву та ліву**.

Розглянемо Декартові системи координат на площині (рисунок 1.2).

При повороті осі Ox правої системи координат на 90° проти годинникової стрілки вона співпадає з віссю Oy .

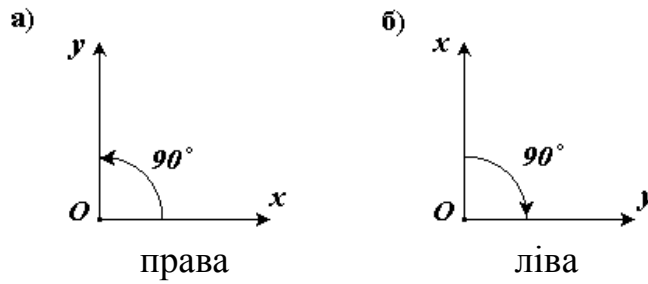


Рисунок 1.2 - Декартові системи координат на площині

Розглянемо Декартові системи координат в просторі (рисунок 1.3).

При повороті осі Ox правої системи координат навколо осі Oz на 90° проти годинникової стрілки вона співпадає з віссю Oy .

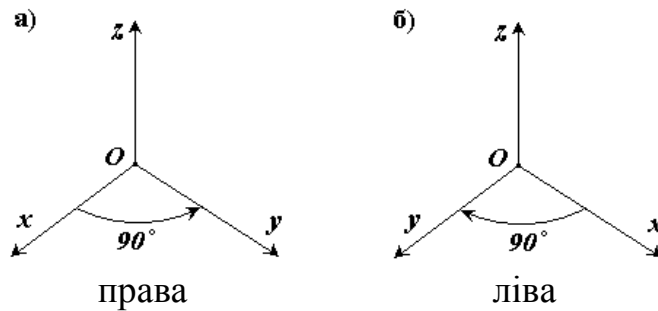


Рисунок 1.3 - Декартові системи координат в просторі

Довжина проекції та направляючі косинуси вектора

Надалі розглядатимемо праву Декартову систему координат. Одиничні вектори вздовж осей Ox , Oy і Oz утворюють систему одиничних (або базисних) векторів. Будь-який вектор, що має початок у точці O можна представити як суму $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$, числа (a_x, a_y, a_z) – це проекції вектора \vec{a} на осі координат (рисунок 1.4).

Довжина (або модуль) вектора \vec{a} визначається формулою

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \text{ і позначається } a \text{ або } |\vec{a}|.$$

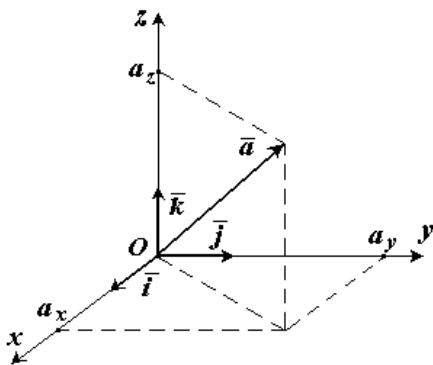


Рисунок 1.4 – Проекції вектора \vec{a} на осі координат

Проекцією вектора на вісь називається скалярна величина, яка визначається відрізком, що відсікається перпендикулярами, опущеними з початку та кінця вектора на цю вісь. Проекція вектора вважається позитивною (+), якщо напрям її співпадає з позитивним напрямом осі, і негативною (-) – якщо проекція направлена в протилежну сторону.

Направляючими косинусами $\cos(\alpha)$, $\cos(\beta)$, $\cos(\gamma)$ вектора називаються косинуси кутів між вектором і позитивними напрямками осей Ox , Oy і Oz відповідно.

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{a} \quad \cos \beta = \frac{a_y}{a} \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{a}, \quad (1.1)$$

Будь-яка точка простору з координатами (x, y, z) може бути задана своїм радіус-вектором

$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}, \quad (1.2)$$

Координати (x, y, z) це проєкції вектора \vec{r} на осі координат.

Скалярний добуток двох векторів

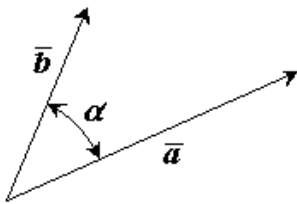


Рисунок 1.5 - Скалярний добуток двох векторів

Є два вектори \vec{a} і \vec{b} .

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \quad \vec{b} = (b_x, b_y, b_z).$$

Результатом скалярного добутку двох векторів \vec{a} і \vec{b} є скалярна величина.

Записується як $\vec{a} \cdot \vec{b}$ або (\vec{a}, \vec{b}) .

Скалярний добуток двох векторів дорівнює

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha), \quad (1.3)$$

Властивості скалярного добутку:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}, \quad (1.4)$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}, \quad (1.5)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 = a^2 \geq 0, \quad (1.6)$$

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1, \quad (1.7)$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0, \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}) \cdot (b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}) = \\ &= a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z \end{aligned}, \quad (1.9)$$

Векторний добуток двох векторів

Є два вектори \vec{a} і \vec{b} . $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$.

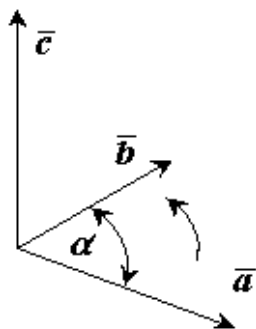


Рисунок 1.6 – Векторний добуток двох векторів

Результатом векторного добутку двох векторів \vec{a} і \vec{b} є вектор \vec{c} . Записується як $\vec{a} \times \vec{b}$ або $[\vec{a}, \vec{b}]$.

Векторний добуток двох векторів (рисунок 1.6) – це вектор \vec{c} , перпендикулярний обом цим векторам, і направлений так, щоб з його кінця поворот вектора \vec{a} до вектора \vec{b} був видний проти годинникової стрілки.

Довжина (або модуль) векторного добутку дорівнює:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\alpha), \quad (1.10)$$

Властивості векторного добутку:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= -\vec{b} \times \vec{a} & \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) &= \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \\ (\alpha \cdot \vec{a}) \times \vec{b} &= \alpha \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) & \vec{a} \times \vec{a} &= 0, \\ \vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) &= 0 \end{aligned} \quad (1.11)$$

Векторний добуток двох векторів обчислюється через їх проекції таким

чином:

$$\begin{aligned} \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot \vec{i} + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \cdot \vec{k} = \\ &= (a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y) \cdot \vec{i} + (a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z) \cdot \vec{j} + (a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x) \cdot \vec{k} \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} c_x &= (a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y) \\ c_y &= (a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z), \\ c_z &= (a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x) \end{aligned} \quad (1.13)$$

1.2 Основні поняття і визначення статички

Матеріальним тілом називається деяка кількість речовини, яка заповнює будь-який об'єм в просторі. Можливі випадки, коли тіло в тих або інших напрямках має вельми малі розміри в порівнянні з розмірами в інших напрямках.

Матеріальною точкою називається проста модель матеріального тіла будь-якої форми, розміри якого достатньо малі, і яке можна прийняти за геометричну точку, що має певну масу.

Механічною дією одного тіла на інше називається така дія, при якій нехтують змінами в хімічній структурі тіла і його фізичному стані. Якщо тіло випробовує механічна дія з боку інших матеріальних тіл, то воно може змінювати свій рух в просторі або залишатися в спокої. Механічна дія може відбуватися як при зіткненні тіл, так і на відстані (тяжіння, відштовхування).

Механічною системою називається будь-яка сукупність матеріальних точок.

Абсолютно твердим тілом (або **незмінною механічною системою**) називається матеріальне тіло, геометрична форма якого і розміри не змінюються ні при яких механічних діях з боку інших тіл, а відстань між будь-якими двома його точками залишається постійним.

Сила - це основна кількісна міра механічної дії одного тіла на інше, яка характеризує його інтенсивність і напрям.

Природа сили може бути різною. Це можуть бути гравітаційні, електромагнітні, пружні сили або сили тиску. Теоретична механіка не цікавиться природою сил.

Сила визначається точкою прикладання, числовим значенням і напрямом дії, тобто є **векторною величиною**.

Модуль сили знаходять шляхом її порівняння з силою, прийнятою за одиницю. Для статичного вимірювання сили служать прилади, звані **динамометрами**.

Силу, як величину векторну позначають буквою і знаком вектора \vec{F} . Для виразу числового значення сили або її модуля використовується знак модуля від вектора або без знаку вектора (наприклад, $|\vec{F}|$ або $|F|$).

Системою сил називається група сил, які діють на дане тіло або (у загальному випадку) на точки механічної системи.

Якщо лінії дії всіх сил лежать в одній площині, то система сил називається **плоскою**, а якщо ці лінії дії не лежать в одній площині, - то система сил називається **просторовою**.

Системою сил еквівалентною нулю, або **урівноваженою системою сил** називається така система сил, дія якої на тверде тіло або матеріальну точку, що знаходяться у спокої або рухомі за інерцією, не приводить до зміни стану спокою або руху за інерцією цього тіла або матеріальної точки.

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \text{ еквівалентна } 0$$

Дві системи сил називаються еквівалентними, якщо їх дія окремо на одне і те ж тверде тіло або матеріальну точку однаково за інших рівних умов.

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \text{ еквівалентна } (\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, \dots, \vec{F}'_k)$$

Рівнодіючою силою даної системи сил називається сила, дія якої на тверде тіло або матеріальну точку еквівалентна дії цієї системи сил. Рівнодіючу силу позначають зазвичай \vec{R}

$$(\vec{R}) \text{ еквівалентна } (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$$

Силою що врівноважує дану системи сил називається сила, додавання якої до заданої системи сил дає нову систему, еквівалентну нулю.

Сила що врівноважує дорівнює по модулю рівнодіючій і протилежна їй за напрямом.

Сила, прикладена до тіла в одній її точці називається **зосередженою** (F). Сили, що діють на всі точки даного об'єму, даній частині поверхні тіла або даної частини кривої, називаються **розподіленими** (q).

Поняття про зосереджену силу є умовним. Сили, які в механіці розглядаються як зосереджені, є рівнодіючими деяких систем розподілених сил.

1.3 Аксиоми та теореми статички

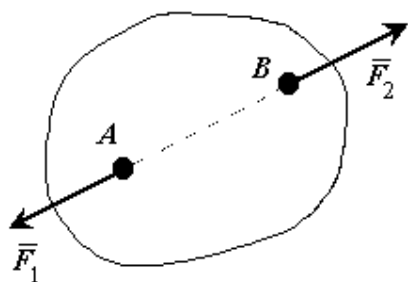


Рисунок 1.7 - Аксиома про рівновагу двох сил

Аксиома про рівновагу двох сил (рисунок 1.7). Якщо на вільне абсолютно тверде тіло діють дві сили, то тіло може знаходитися в рівновазі тоді і тільки тоді, коли ці сили рівні по величині і направлені вздовж однієї прямої в протилежні сторони.

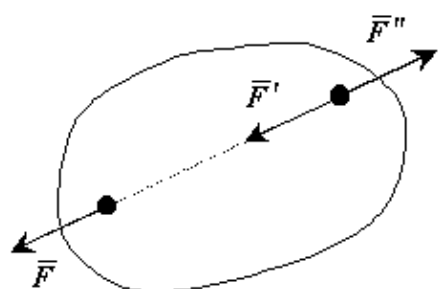


Рисунок 1.8 - Аксиома про додавання (відкидання) врівноваженої системи сил

Аксиома про додавання (відкидання) врівноваженої системи сил (рисунок 1.8). Якщо на тверде тіло діє система сил, то до неї можна додати (відкинути) врівноважену систему сил. Отримана після додавання (відкидання) нова система сил еквівалентна первинній.

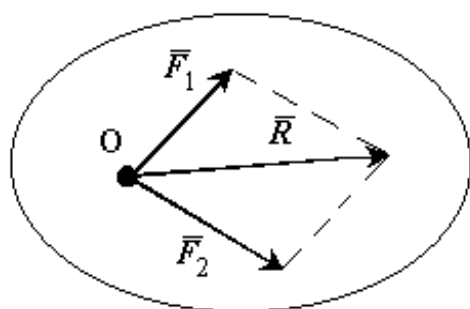


Рисунок 1.8 - Аксиома паралелограма сил

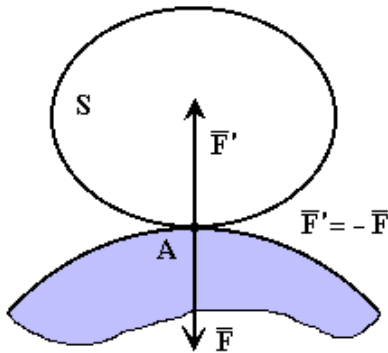
Аксиома паралелограма сил. Дві сили, прикладені до тіла в одній точці мають рівнодіючу, прикладену в тій же точці і рівну по величині і напрямку діагоналі паралелограма, побудованого на цих силах, як на сторонах. $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos(\vec{F}_1, \vec{F}_2)}$$

Ця аксіома допускає і зворотнє твердження:

Силу можна розкласти безліччю способами на дві сили, прикладені в будь-якій точці лінії дії даної сили.

Аксиома про рівність дії та протидії (рисунок 1.9). При всякій дії одного матеріального тіла на інше має місце така ж по величині, але протилежна за напрямом протидія.



Якщо до даного тіла прикладена сила дії \vec{F} від іншого тіла, то від даного тіла до іншого тіла буде прикладена сила \vec{F}' , яка дорівнює і прямо протилежна силі \vec{F} . Сили прикладені в одній геометричній точці, але до різних тіл.

Рисунок 1.9 - Аксиома про рівність дії та протидії

Вільним твердим тілом називається тіло, що має можливість отримувати будь-який рух з даного положення, для чого необхідно прикласти відповідну силу.

При вирішенні більшості завдань механіки доводиться мати справу з тілами позбавленими можливості переміщатися у напрямі дії прикладених до них активних сил.

Тіла, що обмежують рух даного тіла, називаються **зв'язками**.

Сила, з якою зв'язок діє на тіло, перешкоджаючи його переміщенню в тому або іншому напрямі називається силою реакції (протидії) цього зв'язку або просто **реакцією зв'язку**.

Аксиома про зв'язки (рисунок 1.10). Ефект від дії зв'язків такий же, як від дії певних, додаткових сил, які можуть бути прикладені до вільного тіла замість зв'язків.

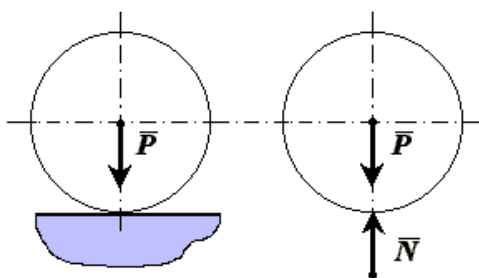


Рисунок 1.10 - Аксиома про зв'язки

Аксиому про зв'язки називають також **принципом визволення від зв'язків**. Згідно цієї аксіоми, не змінюючи рівноваги тіла, кожен зв'язок можна відкинути, замінивши її реакцією зв'язку.

Сили, які можуть повідомляти вільному тілу рух, називаються **активними силами**.

Приклавши до тіла, окрім активних сил, реакції зв'язків, можна розглядати тіло як вільне. Активні сили і сили реакції називаються зовнішніми силами.

Наприклад, на гладкій нерухомій горизонтальній площині покоїться куля (рисунок 1.10), площина, що обмежує рух кулі, є для нього зв'язком. Якщо звільнити кулю від зв'язку, то для утримання його у спокої до нього в точці дотику з площиною потрібно прикласти силу \bar{N} , рівну по модулю ваги кулі \bar{P} і протилежну йому за напрямом. Сила \bar{N} і є реакція площини (реакція зв'язку). Куля, звільнена від зв'язку, буде вільним тілом, на яке діє сила \bar{P} , що задається (активна), і реакція площини \bar{N} .

Аксиома твердіння. Рівновага механічної системи не порушується від накладення нових зв'язків; зокрема, рівновага механічної системи не порушиться, якщо всі частини системи зв'язати між собою незмінно, жорстко.

Теорема про перенесення сили уздовж лінії дії (рисунок 1.11).

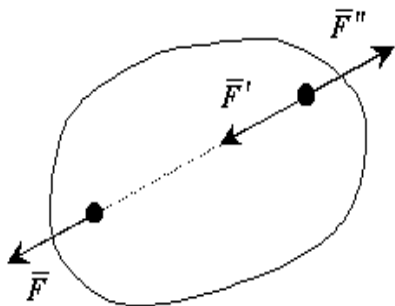


Рисунок 1.11 - Теорема про перенесення сили уздовж лінії дії

Дія сили на тверде тіло не зміниться від перенесення сили уздовж своєї лінії дії.

$$(\bar{F}) \text{ еквівалентна } (\bar{F}, \bar{F}', \bar{F}'')$$

$$\bar{F}'' = -\bar{F}'$$

$$(\bar{F}, \bar{F}'') \text{ еквівалентна } 0$$

$$(\bar{F}) \text{ еквівалентна } (\bar{F}')$$

Теорема про три сили (рисунок 1.12).

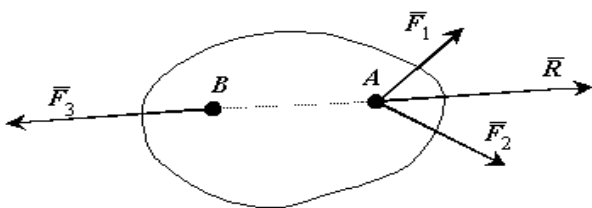


Рисунок 1.12 - Теорема про три сили

Якщо тверде тіло під дією трьох сил, дві з яких перетинаються в одній точці, знаходиться в рівновазі, то лінії дії таких трьох сил перетинаються в одній точці.

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2) \text{ еквівалентна } (\bar{R})$$

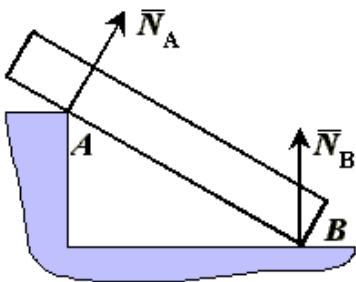
$$(\bar{R}, \bar{F}_3) \text{ еквівалентна } (0)$$

отже сили перетинаються в одній точці.

1.4 Реакції зв'язків. Системи сил, що сходяться. Умови рівноваги системи сил, що сходяться

Реакції зв'язків

Окреме тіло може бути пов'язане з іншими тілами різними способами.



Тіла, що контактують з поверхнею

Якщо контактують абсолютно гладкі тіла, то сили взаємодії між ними направлені по загальній нормалі до їх поверхонь в точці зіткнення.

Рисунок 1.13 - Тіла, що контактують з поверхнею

Зв'язок за допомогою ниток (нитка, ланцюг, трос)

Зв'язок, здійснюваний у вигляді гнучкої нерозтяжної і невагомої нитки, не дає віддалятися тілу від точки підвісу уздовж нитки. Тому реакція натягнутої нитки також направлена уздовж нитки, до точки її підвісу.

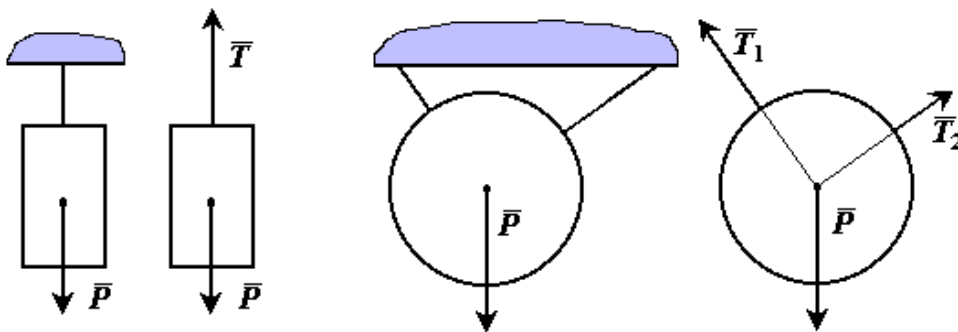


Рисунок 1.14 - Зв'язок за допомогою ниток (нитка, ланцюг, трос)

Звільнимо гирю від зв'язку (розрізаємо нитку в будь-якому місці) і додавши силу реакції зв'язку, який направимо вздовж нитки вгору (позначимо її \bar{T}). Гиря стає вільним твердим тілом, на яке діють дві сили і при цьому воно знахо-

диться у спокої. Згідно з аксіомою про рівновагу двох сил, сили \bar{P} і \bar{T} рівні за величиною і протилежні за напрямом.

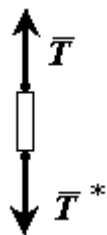


Рисунок 1.15 - Реакція зв'язку

Виріжмо частину нитки в будь-якому місці і додамо в місцях розрізу сили реакції зв'язку (рисунок 1.15), позначимо їх \bar{T} і \bar{T}^* . Тіло під дією двох сил знаходиться в рівновазі. Згідно з аксіомою про рівновагу двох сил, сили \bar{T} і \bar{T}^* рівні за величиною і діють уздовж однієї прямої в протилежні сторони. Реакція зв'язку натягнутої нитки направлена вздовж нитки.

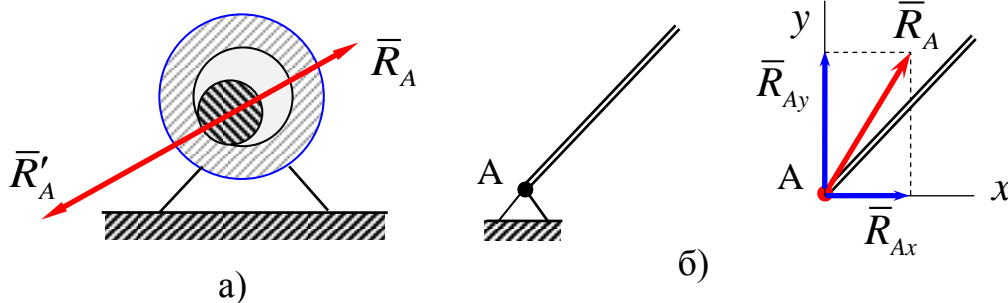
З'єднання тіл за допомогою шарнірів

Шарніром називається пристрій, що зв'язує тіла і що дозволяє здійснювати обертання одного тіла відносно іншого.

Циліндровий шарнір (рисунок 1.16а) допускає обертання тіл навколо однієї осі (і ковзання вздовж неї).

Шарнірно-нерухома опора (рисунок 1.16б) перешкоджає будь-якій поступальній ході, але дає можливість вільно обертатися навколо осі шарніра.

Реакція \bar{R} шарнірно-нерухомої опори проходить через центр шарніра A і лежить в площині перпендикулярною до осі шарніра, але її модуль і напрям невідомі.



а - циліндровий шарнір;

б - шарнірно-нерухома опора

Рисунок 1.16 – Циліндровий шарнір та шарнірно – нерухома опора

Шарнірно-рухома опора (шарнірно-нерухома опора поставлена на катки) не перешкоджає переміщенню паралельно опорної поверхні. Якщо не враховувати тертя катків, то лінія дії реакції такої опори проходить через центр шарніра перпендикулярно опорній поверхні. Невідомий тільки модуль цієї реакції.

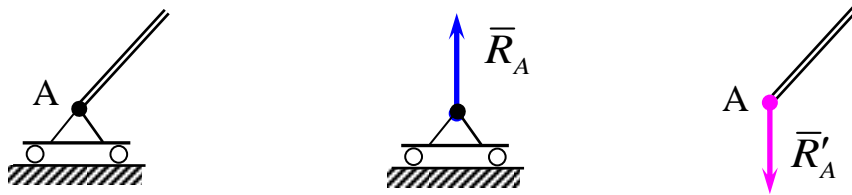


Рисунок 1.17 - Шарнірно-рухома опора

Кульовий шарнір. Кульовим шарніром назива-

ється пристрій, що дозволяє тілам, які мають загальну точку з'єднання, здійснювати обертання в просторі відносно один одного навколо загальної точки. Кульовий шарнір складається з сферичної чаші, що знаходиться на одному тілі, і сферичного виступу того ж діаметру на іншому. Реакція в кульовому шарнірі може мати будь-який напрям в просторі.

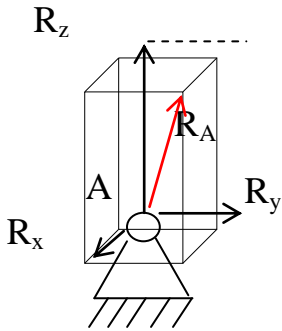
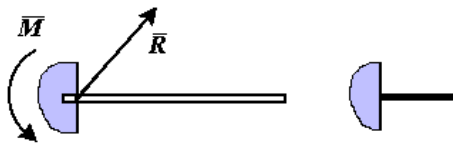


Рисунок 1.18 – Кульовий шарнір

Жорстке затиснення

У разі затиснення одного тіла в інше реакція зв'язку складається з сили \bar{R}



і пари сил з моментом \bar{M} . Величина і напрям реакції визначається із загальних рівнянь рівноваги твердого тіла.

Рисунок 1.19 – Жорстке затиснення

Приклад 1.1 На невагому трьохшарнірну арку (рисунок 1.20) діє горизонтальна сила \bar{F} . Визначити лінію дії реакції \bar{R}_A (реакції зв'язку в точці А).

Розв'язання: Розглянемо праву частину арки окремо. У точках В і С прикладемо сили реакції зв'язків \bar{R}_B і \bar{R}_C . Тіло під дією двох сил знаходиться в рівновазі. Згідно аксіомі про рівновагу двох сил, сили \bar{R}_B і \bar{R}_C однакові по величині і діють вздовж однієї прямої в протилежні сторони. Таким чином напрям сили \bar{R}_C нам відомий (вздовж лінії ВС).

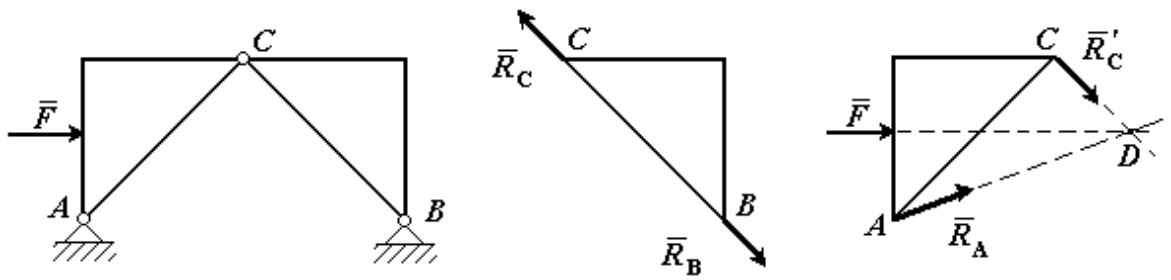


Рисунок 1.20 – Трьохшарнірна арка. Схема сил

Розглянемо ліву частину арки окремо. У точках А і С прикладемо сили реакції зв'язків \bar{R}_B і \bar{R}'_C . Сила $\bar{R}'_C = -\bar{R}_C$ - дія дорівнює протидії. На тіло діють три сили, напрямки двох сил (\bar{F} і \bar{R}'_C) відомі. Згідно теореми про три сили лінії дії всіх трьох сил перетинаються в одній точці. Отже, сила \bar{R}_A направлена вздовж лінії AD.

Приклад 1.2. Однорідний стержень закріплений шарнірно в точці А і спирається на гладкий циліндр (рисунок 1.21). Визначити лінію дії реакції \bar{R}_A (реакції зв'язку в точці А).

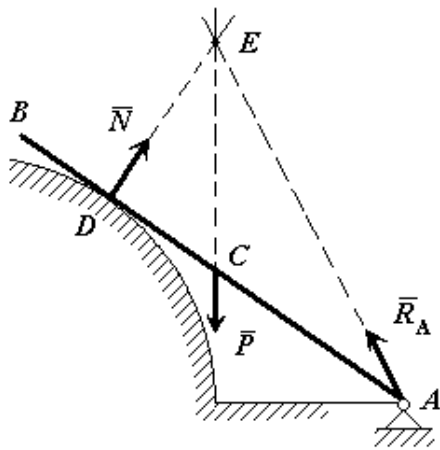


Рисунок 1.21 - Розрахункова схема до прикладу 1.2

Розв'язання: Оскільки стержень однорідний, то рівнодіюча сил тяжіння (сила \bar{P}), що діють на стержень, прикладена в його геометричному центрі (точка С). Оскільки стержень спирається на гладку поверхню, то реакція зв'язку (сила \bar{N}) в точці дотику (точка D) направлена по нормалі до цієї поверхні. На тіло діють три сили, напрямки двох сил (\bar{N} і \bar{P}) відомі. Згідно теореми про три сили лінії дії всіх трьох сил перетинаються в одній

точці. Отже, сила \bar{R}_A направлена вздовж лінії AE.

Система сил, що сходиться

Системою сил, що сходиться, називається така система сил, лінії дії якої перетинаються в одній точці.

Рівнодіюча системи сил, що сходиться, дорівнює векторній сумі складових сил і визначається замикаючою стороною силового багатокутника, побудованого на силах як на складових. Точка додатку рівнодіючої сили співпадає з точкою перетину ліній дії сил

$$\bar{\mathbf{R}} = \bar{\mathbf{F}}_1 + \bar{\mathbf{F}}_2 + \dots + \bar{\mathbf{F}}_3 = \sum_i \bar{\mathbf{F}}_i, \quad (1.14)$$

Проекції рівнодіючої сили на осі координат дорівнюють алгебраїчній сумі проекцій сил, що становлять на ці осі.

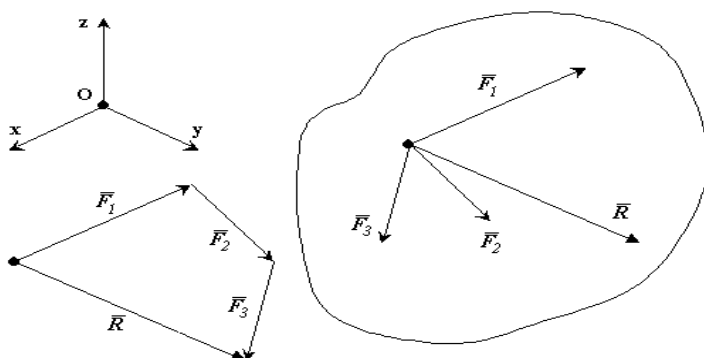


Рисунок 1.22 – Система сил, що сходиться

Умови рівноваги системи сил, що сходяться у векторній формі

Для рівноваги системи сил, прикладених до твердого тіла, що сходиться необхідно і достатньо, щоб рівнодіюча сила дорівнювала нулю.

$$\bar{\mathbf{R}} = 0, \quad (1.15)$$

Умови рівноваги системи сил, що сходяться в алгебраїчній формі

Для рівноваги просторової системи сил, що сходяться, прикладених до твердого тіла, необхідно і достатньо, щоб суми проекцій всіх сил на кожну з трьох прямокутних осей координат дорівнювали нулю

$$\sum F_{xi} = 0 \quad \sum F_{yi} = 0 \quad \sum F_{zi} = 0, \quad (1.16)$$

1.5 Момент сили відносно точки. Момент сили відносно осі

Якщо під дією прикладеної сили тверде тіло може здійснювати обертання навколо деякої точки, то для того, щоб охарактеризувати обертальний ефект сили, необхідно ввести нове поняття - момент сили відносно точки.

Розглянемо силу \vec{F} , прикладену до тіла в точці А. З деякої точки О опустимо перпендикуляр на лінію дії сили \vec{F} .

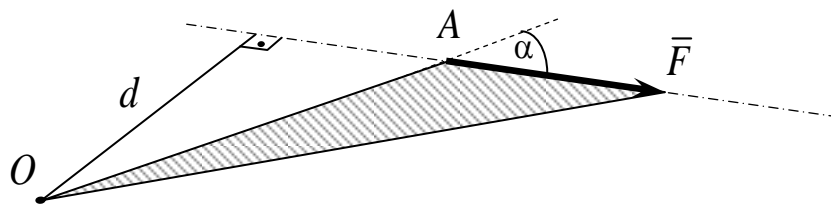


Рисунок 1.23 - Момент сили відносно точки

Плечем d сили \vec{F} відносно точки О називається найкоротша відстань між цією точкою і лінією дії сили.

Через силу \vec{F} і точку О можна провести площину. Сила \vec{F} намагається обернути тіло навколо осі, яка проходить через точку О і яка перпендикулярна площині, в якій лежить сила. Точка О називається моментною точкою.

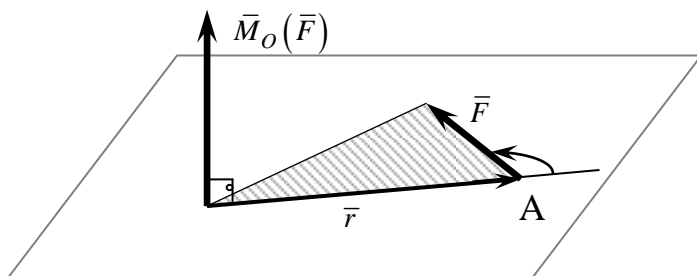


Рисунок 1.24 - Момент сили відносно точки

Моментом сили \vec{F} відносно точки О (рисунок 1.24) називається вектор $\vec{M}_0(\vec{F})$, прикладений в цій точці і рівний векторному добутку радіус-вектора, що з'єднує цю точку з точкою додатку сили на вектор сили \vec{F} .

$$\vec{M}_0(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}, \quad (1.17)$$

Модуль вектора $M_0(\vec{F})$ дорівнює добутку модуля сили F на її плече h .

$$M_0(\vec{F}) = F \cdot r \cdot \sin(\alpha) = F \cdot d, \quad (1.18)$$

Момент сили \vec{F} відносно точки О направлений перпендикулярно площині, в якій лежать сила і моментна точка (радіус-вектор), в тому напрямі звідки видно прагнення сили обернути тіло проти руху годинникової стрілки.

Момент сили відносно точки не міняється від перенесення сили вздовж лінії її дії.

Момент сили дорівнює нулю, якщо лінія дії сили проходить через моментну точку.

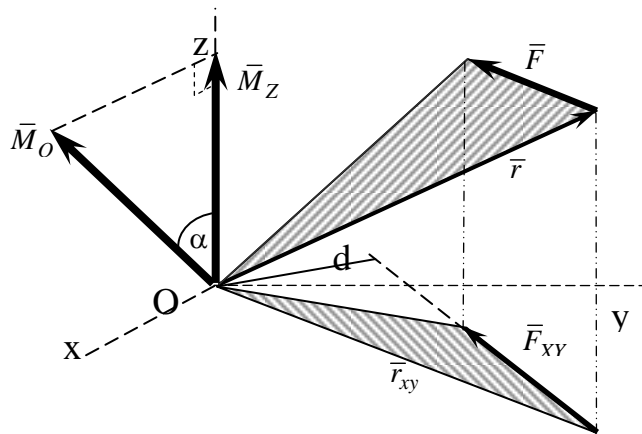


Рисунок 1.25 – Властивості моменту сили відносно точки

Якщо сила \vec{F} задана своїми проекціями F_x , F_y , F_z на осі координат і задані координати x , y , z точки додатку цієї сили, то момент сили відносно початку координат обчислюється таким чином:

$$\begin{aligned} \vec{M}_0(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & z \\ F_y & F_z \end{vmatrix} \cdot \vec{i} + \begin{vmatrix} z & x \\ F_z & F_x \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} x & y \\ F_x & F_y \end{vmatrix} \cdot \vec{k} = \\ &= (y \cdot F_z - z \cdot F_y) \cdot \vec{i} + (z \cdot F_x - x \cdot F_z) \cdot \vec{j} + (x \cdot F_y - y \cdot F_x) \cdot \vec{k} \end{aligned} \quad (1.19)$$

Проекції моменту на осі координат дорівнюють:

$$\begin{aligned} M_{0x}(\vec{F}) &= (y \cdot F_z - z \cdot F_y) \\ M_{0y}(\vec{F}) &= (z \cdot F_x - x \cdot F_z), \\ M_{0z}(\vec{F}) &= (x \cdot F_y - y \cdot F_x) \end{aligned} \quad (1.20)$$

Момент сили відносно осі

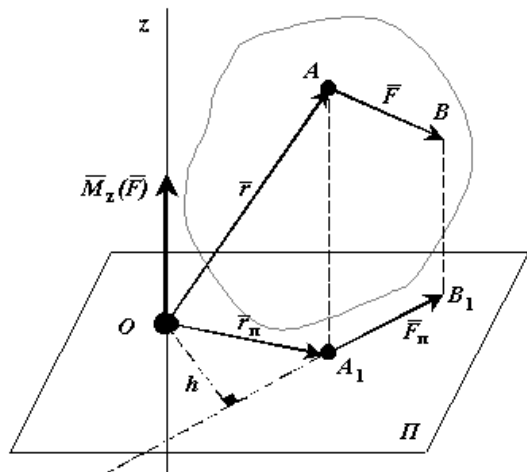


Рисунок 1.26 - Момент сили відносно осі

До твердого тіла в точці А прикладена сила \vec{F} . Проведемо в просторі вісь (наприклад z). На осі z довільно виберемо точку O . З'єднаємо точку O з точкою A радіус-вектором. Через точку O проведемо площину Π перпендикулярну осі z . Спроектуємо вектора \vec{F} і \vec{r} на площину Π .

Моментом сили \vec{F} відносно осі називається вектор, який дорівнює моменту проекції сили \vec{F} на площину Π відносно точки O перетину осі z з площиною Π .

$$\vec{M}_z(\vec{F}) = \vec{M}_0(\vec{F}_\Pi) = \vec{r}_\Pi \times \vec{F}_\Pi, \quad (1.21)$$

$$M_z(\vec{F}) = F_\Pi \cdot r_\Pi \cdot \sin(\angle(\vec{r}_\Pi, \vec{F}_\Pi)) = F_\Pi \cdot h, \quad (1.22)$$

Властивості моменту сили відносно осі:

1 Момент сили відносно осі дорівнює нулю, якщо сила паралельна осі. В цьому випадку дорівнює нулю проекція сили на площину, перпендикулярну осі.

2 Момент сили відносно осі дорівнює нулю, якщо лінія дії сили перетинається з віссю. В цьому випадку дорівнює нулю плече сили.

Зв'язок моменту сили відносно осі з моментом сили відносно точки

Проведемо через точку O , де заданий момент сили відносно точки $\vec{M}_0(\vec{F})$ Декартові осі координат x, y, z . Момент сили відносно точки можна представити у вигляді суми трьох векторів $\vec{M}_0(\vec{F}) = \vec{M}_x(\vec{F}) + \vec{M}_y(\vec{F}) + \vec{M}_z(\vec{F})$. Ці вектора є моментами сили відносно осей x, y, z відповідно.

$$\vec{M}_x(\vec{F}) = M_{0x}(\vec{F}) \cdot \vec{i} \quad \vec{M}_y(\vec{F}) = M_{0y}(\vec{F}) \cdot \vec{j} \quad \vec{M}_z(\vec{F}) = M_{0z}(\vec{F}) \cdot \vec{k}, \quad (1.23)$$

Момент сили відносно осі дорівнює проекції на цю вісь моменту сили відносно будь-якої точки на осі.

$$M_z(\vec{F}) = M_0(\vec{F}) \cdot \cos(\angle(Oz, \vec{M}_0(\vec{F}))), \quad (1.24)$$

Формули для моментів сили відносно осей координат

Якщо сила \vec{F} задана своїми проекціями F_x, F_y, F_z на осі координат і задані координати x, y, z точки додатку цієї сили відносно осей координат, то моменти сили відносно осей координат обчислюються таким чином:

$$\begin{aligned} M_x(\vec{F}) &= M_{0x}(\vec{F}) = (y \cdot F_z - z \cdot F_y) \\ M_y(\vec{F}) &= M_{0y}(\vec{F}) = (z \cdot F_x - x \cdot F_z), \\ M_z(\vec{F}) &= M_{0z}(\vec{F}) = (x \cdot F_y - y \cdot F_x) \end{aligned} \quad (1.25)$$

1.6 Пара сил. Теорема про суму моментів пари сил

Парою сил називається система двох однакових по модулю, паралельних і направлених в протилежні сторони сил, що діють на абсолютно тверде тіло.

Площиною дії пари сил називається площина, в якій розташовані ці сили.

Плечем пари сил d називається найкоротша відстань між лініями дії пари сил.

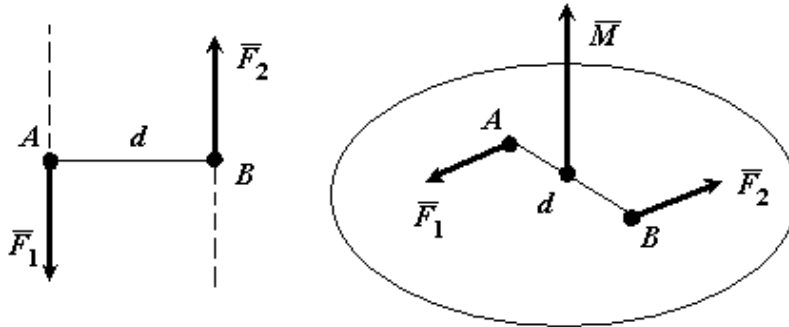


Рисунок 1.27 – Момент пари сил

Моментом пари сил називається вектор \vec{M} , модуль якого дорівнює добутку модуля однієї з сил пари на її плече і який направлений перпендикулярно площини дії сил пари в ту сторону, звідки пару видно прагнучою повернути тіло проти ходу годинникової стрілки.

$$M = F_1 \cdot d, \quad (1.26)$$

Теорема про суму моментів пари сил. Сума моментів сил, що входять до складу пари, відносно будь-якої точки не залежить від вибору цієї точки і дорівнює моменту цієї пари сил.

$$\vec{M}_0(\vec{F}_1) + \vec{M}_0(\vec{F}_2) = \vec{M}(F_1, F_2), \quad (1.27)$$

Доказ: Виберемо довільно точку O . Проведемо з неї в точки A і B радіус-вектори (рисунок 1.28).

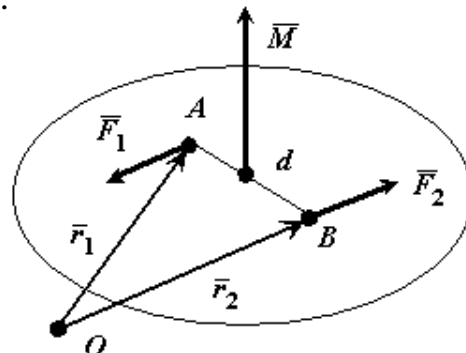


Рисунок 1.28 - Теорема про суму моментів пари сил

$$\overline{F}_1 = -\overline{F}_2, \quad \overline{r}_2 - \overline{r}_1 = \overline{AB}, \quad (1.28)$$

$$\begin{aligned} \overline{M}_0(\overline{F}_1) + \overline{M}_0(\overline{F}_2) &= \overline{r}_1 \times \overline{F}_1 + \overline{r}_2 \times \overline{F}_2 = \overline{r}_2 \times \overline{F}_2 - \overline{r}_1 \times \overline{F}_2 = \\ &= (\overline{r}_2 - \overline{r}_1) \times \overline{F}_2 = \overline{AB} \times \overline{F}_2 = \overline{M}_A(\overline{F}_2) = \overline{M}(\overline{F}_1, \overline{F}_2) \end{aligned} \quad (1.29)$$

Що і потрібно було довести.

Дві пари сил називаються еквівалентними, якщо їх дія на тверде тіло однакова за інших рівних умов.

Теорема про еквівалентність пар сил. Пару сил, що діє на тверде тіло, можна замінити іншою парою сил, розташованою в тій же площині дії, що має момент, однаковий з першою парою.

Доказ: Нехай на тверде тіло діє пара сил $(\overline{F}_1, \overline{F}_2)$.

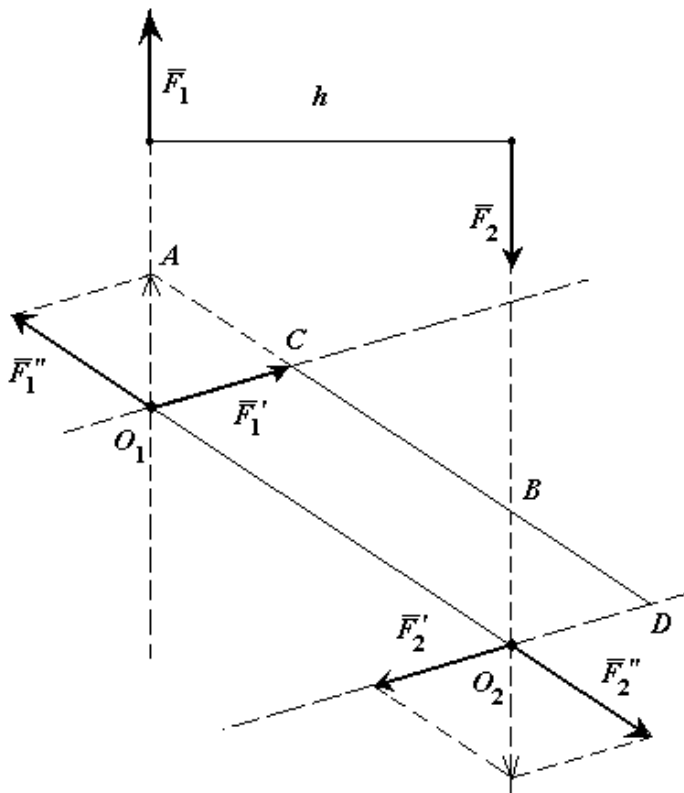


Рисунок 1.29 - Теорема про еквівалентність пар сил

Перенесемо силу \overline{F}_1 в точку O_1 , а силу \overline{F}_2 - в точку O_2 . Проведемо через точки O_1, O_2 дві будь-які паралельні прямі, що перетинають лінії дії сил пари. З'єднаємо точки O_1, O_2 відрізком прямої і розкладемо сили \overline{F}_1 в точці O_1 і \overline{F}_2 в точці O_2 за правилом паралелограма.

$$\overline{F}_1 = \overline{F}'_1 + \overline{F}''_1, \quad (1.30)$$

$$\overline{F}_2 = \overline{F}'_2 + \overline{F}''_2, \quad (1.31)$$

Оскільки $\overline{F}_1 = -\overline{F}_2$, то

$$\overline{F}'_1 = -\overline{F}'_2 \quad \text{і} \quad \overline{F}''_1 = -\overline{F}''_2.$$

Тому $(\overline{F}_1, \overline{F}_2)$ еквівалентна системі $(\overline{F}'_1, \overline{F}'_2, \overline{F}''_1, \overline{F}''_2)$, а ця система еквівалентна системі $(\overline{F}'_1, \overline{F}'_2)$, оскільки $(\overline{F}''_1, \overline{F}''_2)$ еквівалентна нулю.

Таким чином ми задану пару (\vec{F}_1, \vec{F}_2) сил замінили іншою парою сил (\vec{F}'_1, \vec{F}'_2) .

Доведемо, що моменти цих пар сил однакові.

Момент початкової пари сил (\vec{F}_1, \vec{F}_2) чисельно дорівнює площі паралелограма O_1ABO_2 , а момент пари сил (\vec{F}'_1, \vec{F}'_2) чисельно дорівнює площі паралелограма O_1CDO_2 . Але площі цих паралелограмів однакові, оскільки площа трикутника O_1AC дорівнює площі трикутника O_2BD .

Що і потрібно було довести.

Висновки:

1 Пару сил як жорстку фігуру можна як завгодно повертати і переносити в її площині дії.

2 У пари сил можна змінювати плече і сили, зберігаючи при цьому момент пари і площину дії.

Теорема про перенесення пари сил в паралельну площину. Дія пари сил на тверде тіло не зміниться від перенесення цієї пари в паралельну площину.

Доказ: Нехай на тверде тіло діє пара сил (\vec{F}_1, \vec{F}_2) в площині Π_1 . З точок додатку сил A і B опустимо перпендикуляри на площину Π_2 і в точках їх пе-

ретину з площиною Π_2 прикладемо дві системи сил (\vec{F}'_1, \vec{F}'_2) і, кожна з яких еквівалентна нулю.

$$\begin{aligned} \vec{F}'_1 &= -\vec{F}'_2, & \vec{F}'_2 &= -\vec{F}'_1, & \vec{F}'_1 &= -\vec{F}_1, \\ \vec{F}'_2 &= -\vec{F}_2, \end{aligned} \quad (1.32)$$

Складемо дві однакові і паралельні сили \vec{F}_1 і \vec{F}'_2 . Їх рівнодіюча \vec{R} паралельна цим силам, дорівнює їх сумі і прикладена посередині відрізка AB_1 в точці O .

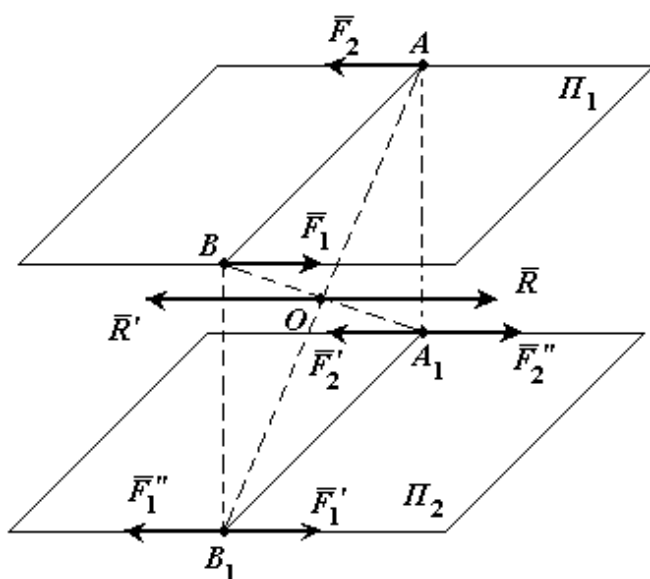


Рисунок 1.30 - Теорема про перенесення пари сил в паралельну площину

Складемо дві однакові і паралельні сили \vec{F}_2 і \vec{F}_1'' . Їх рівнодіюча \vec{R}' паралельна цим силам, дорівнює їх сумі і прикладена посередині відрізка BA_1 в точці O .

Оскільки $\vec{R} = -\vec{R}'$, то система сил (\vec{R}, \vec{R}') еквівалентна нулю і її можна відкинути.

Таким чином пара сил (\vec{F}_1, \vec{F}_2) еквівалентна парі сил (\vec{F}_1', \vec{F}_2') , але лежить в іншій, паралельній площині. Що і потрібно було довести.

Слідство: Момент пари сил, що діє на тверде тіло, є вільний вектор.

Дві пари сил, що діють на одне і те ж тверде тіло еквівалентні, якщо вони мають однакові по модулю та напрямку моменти.

Теорема про складання пар сил. Дві пари сил, що діють на одне і те ж тверде тіло, і які лежать в пересічних площинах, можна замінити однією еквівалентною парою сил, момент якої дорівнює сумі моментів заданих пар сил.

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2, \quad (1.33)$$

Доказ: Нехай є дві пари сил (рисунок 1.31), розташовані в пересічних площинах. Пара сил (\vec{F}_1, \vec{F}_1') в площині Π_1 характеризується моментом \vec{M}_1 , а пара сил (\vec{F}_2, \vec{F}_2') в площині Π_2 характеризується моментом \vec{M}_2 .

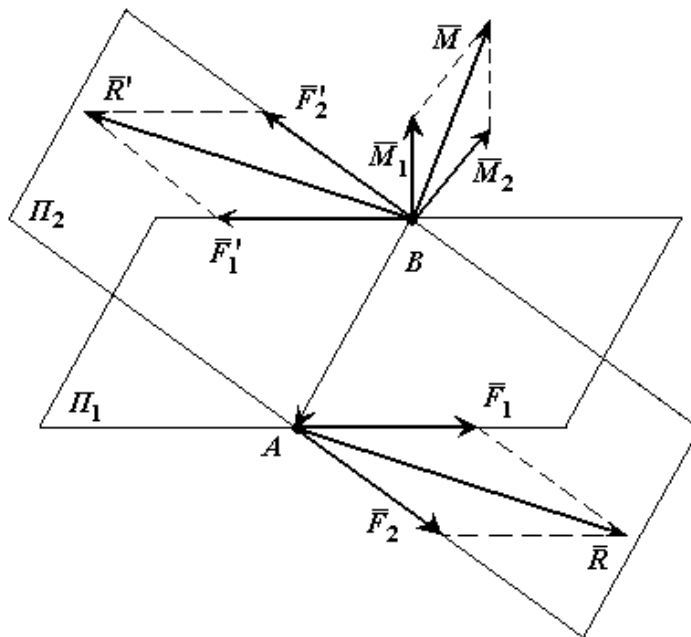


Рисунок 1.31 - Теорема про складання пар сил

Розташуємо пари сил так, щоб плече пар було загальним і розташовувалося на лінії перетину площин. Складаємо сили, прикладені в точці А і в точці В.

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2; \quad \bar{R}' = \bar{F}'_1 + \bar{F}'_2, \quad (1.34)$$

Отримуємо пару сил (\bar{R}, \bar{R}') .

$$\bar{M} = \overline{BA} \times \bar{R} = \overline{BA} \times (\bar{F}_1 + \bar{F}_2) = \overline{BA} \times \bar{F}_1 + \overline{BA} \times \bar{F}_2 = \bar{M}_1 + \bar{M}_2, \quad (1.35)$$

Що і потрібно було довести.

Умови рівноваги пар сил

Якщо на тверде тіло діє декілька пар сил, як завгодно розташованих в просторі, то послідовно застосовуючи правило паралелограма до кожних двох моментів пар сил, можна будь-яку кількість пар сил замінити однією еквівалентною парою сил, момент якої дорівнює сумі моментів заданих пар сил.

$$\bar{M} = \sum \bar{M}_i, \quad (1.36)$$

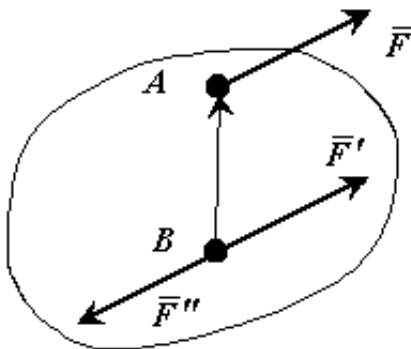
Теорема. Для рівноваги пар сил, прикладених до твердого тіла, необхідно і достатньо, щоб момент еквівалентної пари сил дорівнював нулю.

$$\bar{M} = 0, \quad (1.37)$$

Теорема. Для рівноваги пар сил, прикладених до твердого тіла, необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума проекцій моментів пар сил на кожну з трьох координатних осей дорівнювала нулю.

$$M_x = \sum M_{ix} = 0, \quad M_y = \sum M_{iy} = 0, \quad M_z = \sum M_{iz} = 0, \quad (1.38)$$

1.7 Приведення сили до заданого центру. Приведення системи сил до заданого центру. Умови рівноваги просторової системи сил



Приведення сили до заданого центру

Рівнодіюча системи сил, що сходяться, безпосередньо знаходиться за допомогою складання сил за правилом паралелограма. Очевидно, що аналогічну задачу можна буде вирішити і для довільної системи сил, якщо знайти для них метод, що дозволяє перенести всі сили в одну точку.

Рисунок 1.32 - Приведення сили до заданого центру

Теорема про паралельне перенесення сили. Силу, прикладену до абсолютно твердого тіла, можна, не змінюючи дії, що надається нею, переносити з даної точки в будь-яку іншу точку тіла, додаючи при цьому пару з моментом, який дорівнює моменту сили, що переноситься відносно точки, куди сила переноситься.

Нехай сила \vec{F} прикладена в точці А. Дія цієї сили не змінюється, якщо в точці В прикласти дві врівноважені сили. Отримана система трьох сил є силою \vec{F}' , яка дорівнює \vec{F} , але прикладену в точці В і пару (\vec{F}, \vec{F}'') з моментом $\vec{M} = \vec{BA} \times \vec{F}$. Процес заміни сили \vec{F} силою \vec{F}' і парю сил (\vec{F}, \vec{F}'') називається **приведенням сили \vec{F} до заданого центру В**.

Приведення системи сил до заданого центру

Основна теорема статички (теорема Пуансо)

Будь-яку довільну систему сил, що діє на тверде тіло, можна в загальному випадку привести до сили і пари сил. Цей процес заміни системи сил однією силою і однією парю сил називається **приведенням системи сил до заданого центру**.

Головним вектором системи сил називається вектор, який дорівнює векторній сумі цих сил.

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_i, \quad (1.39)$$

Головним моментом системи сил відносно точки О тіла, називається вектор, який дорівнює векторній сумі моментів всіх сил системи відносно цієї точки.

$$\vec{L}_0 = \sum \vec{M}_0(\vec{F}_i), \quad (1.40)$$

Формули для обчислення головного вектора і головного моменту

$$R_x = \sum F_{ix}, \quad R_y = \sum F_{iy}, \quad R_z = \sum F_{iz}, \quad (1.41)$$

$$L_{0x} = L_x = \sum M_x(\vec{F}_i) = \sum (y_i \cdot F_{iz} - z_i \cdot F_{iy})$$

$$L_{0y} = L_y = \sum M_y(\vec{F}_i) = \sum (z_i \cdot F_{ix} - x_i \cdot F_{iz}), \quad (1.42)$$

$$L_{0z} = L_z = \sum M_z(\bar{F}_i) = \sum (x_i \cdot F_{iy} - y_i \cdot F_{ix})$$

Формули для обчислення модуля і направляючих косинусів головного вектора і головного моменту

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} , \quad (1.43)$$

$$\cos(x, \bar{R}) = \frac{R_x}{R} , \quad \cos(y, \bar{R}) = \frac{R_y}{R} , \quad \cos(z, \bar{R}) = \frac{R_z}{R} , \quad (1.44)$$

$$L_0 = \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2} , \quad (1.45)$$

$$\cos(x, \bar{L}_0) = \frac{L_x}{L_0} , \quad \cos(y, \bar{L}_0) = \frac{L_y}{L_0} , \quad \cos(z, \bar{L}_0) = \frac{L_z}{L_0} , \quad (1.46)$$

Умови рівноваги системи сил

Векторна форма

Для рівноваги довільної системи сил, прикладених до твердого тіла, необхідно і достатньо, щоб головний вектор системи сил дорівнював нулю і головний момент системи сил відносно будь-якого центру приведення також дорівнював нулю.

$$\bar{R} = \sum \bar{F}_i = 0 , \quad \bar{L}_0 = \sum \bar{M}_0(\bar{F}_i) = 0 , \quad (1.47)$$

Алгебраїчна форма

Для рівноваги довільної системи сил, прикладених до твердого тіла, необхідно і достатньо, щоб три суми проекцій всіх сил на осі Декартових координат дорівнювали нулю і три суми моментів всіх сил відносно трьох осей координат також дорівнювали нулю.

$$\sum F_{ix} = 0 , \quad \sum F_{iy} = 0 , \quad \sum F_{iz} = 0 , \quad (1.48)$$

$$\sum M_x(\bar{F}_i) = 0 , \quad \sum M_y(\bar{F}_i) = 0 , \quad \sum M_z(\bar{F}_i) = 0 , \quad (1.49)$$

Умови рівноваги просторової системи паралельних сил

На тіло діє система паралельних сил. Розташуємо вісь Oz паралельно силам.

$$\text{Рівняння} \quad \sum F_{iz} \equiv 0 \quad \sum F_{iy} \equiv 0 \quad \sum M_z(\bar{F}_i) \equiv 0$$

Для рівноваги просторової системи паралельних сил, що діють на тверде тіло, необхідно і достатньо, щоб сума проєкцій цих сил дорівнювала нулю і суми моментів цих сил відносно двох координатних осей, перпендикулярним силам, також дорівнювали нулю.

$$\sum F_{iz} = \sum F_i = 0, \quad \sum M_x(\bar{F}_i) = 0, \quad \sum M_y(\bar{F}_i) = 0, \quad (1.50)$$

F_i - проєкція сили на вісь Oz.

Теорема про момент рівнодіючої (теорема Варіньона)

Векторний момент рівнодіючої даної системи сил щодо будь-якої точки рівний сумі векторних моментів всіх сил цієї системи щодо тієї ж точки.

Іншими словами, якщо $\{\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n\} \propto \{\bar{R}\}$, то

$$\bar{M}_O(\bar{R}) = \sum_k \bar{M}_O(\bar{F}_k), \quad (1.51)$$

Для плоскої системи сил дана теорема запишеться у вигляді моментів алгебри щодо довільної крапки на площині

$$\bar{M}_O(\bar{R}) = \sum_k \bar{M}_O(\bar{F}_k), \quad (1.52)$$

Ця теорема широко застосовується в обчисленнях моментів сил при вирішенні практичних завдань.

1.8 Плоска система сил

Умови рівноваги плоскої системи сил

На тіло діє плоска система сил. Розташуємо осі Ox і Oy в площині дії сил.

$$\text{Рівняння} \quad \sum F_{iz} \equiv 0 \quad \sum M_x(\bar{F}_i) \equiv 0 \quad \sum M_y(\bar{F}_i) \equiv 0$$

Для рівноваги плоскої системи сил, що діють на тверде тіло необхідно і достатньо, щоб суми проєкцій цих сил на кожну з двох прямокутних осей координат, розташованих в площині дії сил, дорівнювали нулю і сума моментів цих сил відносно будь-якої точки, що знаходиться в площині дії сил також дорівнювала нулю.

$$\sum F_{ix} = 0, \quad \sum F_{iy} = 0, \quad \sum M_0(\bar{F}_i) = 0, \quad (1.53)$$

Теорема про три моменти

Для рівноваги плоскої системи сил, що діють на тверде тіло, необхідно і достатньо, щоб суми моментів цих сил системи відносно трьох будь-яких точок, розташованих в площині дії сил і не лежачих на одній прямій, дорівнювали нулю.

$$\sum M_A(\bar{F}_i) = 0, \quad \sum M_B(\bar{F}_i) = 0, \quad \sum M_C(\bar{F}_i) = 0, \quad (1.54)$$

Статично визначені і статично невизначені завдання

Для будь-якої плоскої системи сил, що діють на тверде тіло є три незалежні умови рівноваги. Отже, для будь-якої плоскої системи сил з умов рівноваги можна знайти не більше трьох невідомих.

У разі просторової системи сил, що діють на тверде тіло є шість незалежних умов рівноваги. Отже, для будь-якої просторової системи сил з умов рівноваги можна знайти не більше шести невідомих.

Завдання, в яких число невідомих не більше числа незалежних умов рівноваги для даної системи сил, прикладених до твердого тіла, називаються ***статично визначеними***.

Інакше завдання статично невизначені.

Рівновага системи тіл

Розглянемо рівновагу сил, прикладених до системи тіл, що взаємодіють між собою. Тіла можуть бути з'єднані між собою за допомогою шарнірів або іншим способом.

Сили, що діють на дану систему тіл можна розділити на зовнішні і внутрішні.

Зовнішніми називаються сили, з якими на тіла даної системи діють тіла, що не входять в цю систему сил.

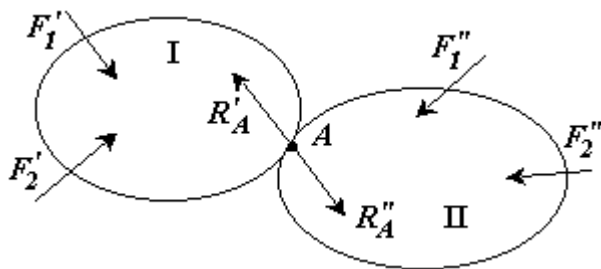
Внутрішніми називаються сили взаємодії між тілами даної системи.

При розгляді рівноваги сил, прикладених до системи тіл, треба розділити систему тіл на окремі тверді тіла і до сил, що діють на ці тіла, застосувати умови

рівноваги, отримані для одного тіла. До цих умов рівноваги увійдуть як зовнішні, так і внутрішні сили системи тіл. Внутрішні сили на підставі аксіоми про рівність сил дії і протидії в кожній точці тіл утворюють рівноважну систему сил.

Покажемо це на прикладі системи двох тіл і плоскої системи сил.

Якщо скласти умови рівноваги для кожного твердого тіла системи тіл, то



$$\text{для тіла I} \quad \sum \bar{F}_i' + \bar{R}'_A = 0$$

$$\sum M_0(\bar{F}_i') + M_0(\bar{R}'_A) = 0 ,$$

$$\text{для тіла II} \quad \sum \bar{F}_i'' + \bar{R}''_A = 0$$

$$\sum M_0(\bar{F}_i'') + M_0(\bar{R}''_A) = 0$$

Рисунок 1.33 – Рівновага системи тіл

Крім того, з аксіоми про рівність сил дії і протидії для двох взаємодіючих тіл маємо $\bar{R}'_A = -\bar{R}''_A$ $M_0(\bar{R}'_A) = -M_0(\bar{R}''_A)$.

Представлена рівновага і є умовою рівноваги зовнішніх сил, що діють на систему.

Реакція затиснення

Розглянемо балку (рисунок 1.34), один кінець якої АВ затиснений в стіну. Таке кріплення кінця балки АВ називається затисненням в точці В.

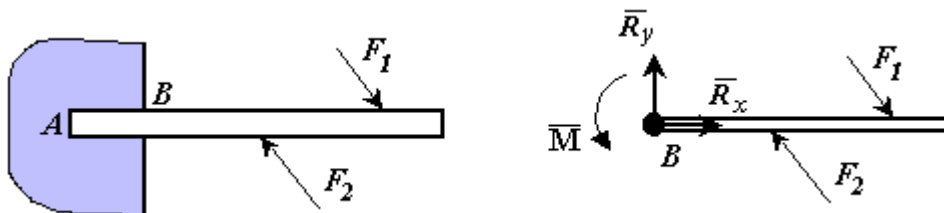


Рисунок 1.34 – Реакція затиснення

Нехай на балку діє плоска система сил. Визначимо сили, які треба прикласти до точки В балки, якщо частину балки АВ відкинути. До перетину балки (В) прикладені розподілені сили реакції. Якщо ці сили замінити елементарними зосередженими силами і потім привести їх до точки В, то в точці В отримаємо силу \bar{R}_B (головний вектор сил реакції) і пару сил з моментом М (головний вектор сил реакції відносно точки В). Момент М називають моментом затис-

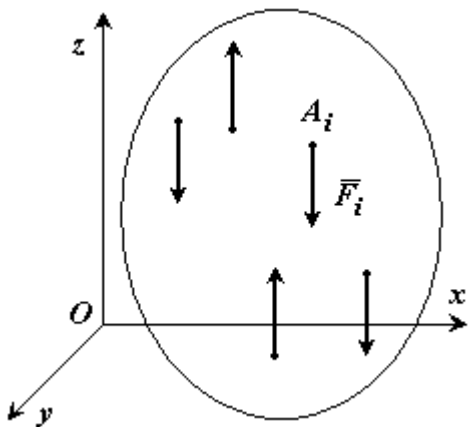
нення або реактивним моментом. Силу реакції \overline{R}_B можна замінити двома складовими \overline{R}_x і \overline{R}_y . Затиснена балка на відміну від шарніра створює не тільки невідому по величині і напрямку реакцію \overline{R}_B , але ще і пару сил з невідомим моментом M в затисненні.

1.9 Центр паралельних сил. Паралельні сили розподілені по відрітку прямої. Центр тяжіння твердого тіла, поверхні і лінії

Центр паралельних сил

Для системи паралельних сил введемо поняття центру паралельних сил.

На тіло діє система паралельних сил \overline{F}_i (рисунок 1.35), прикладених в точках $A_i(x_i, y_i, z_i)$. Виберемо осі координат так, щоб вісь Oz була паралельна силам.



$$F_{ix} \equiv 0, \quad F_{iy} \equiv 0, \quad F_{iz} = F_i$$

F_i - проекція сили на вісь Oz .

$$x_C = \frac{\sum x_i \cdot F_i}{\sum F_i};$$

$$y_C = \frac{\sum y_i \cdot F_i}{\sum F_i}$$

$$z_C = \frac{\sum z_i \cdot F_i}{\sum F_i}$$

Рисунок 1.35 – Центр паралельних сил

Точка C з координатами (x_C, y_C, z_C) називається **центром паралельних сил**.

Властивості центру паралельних сил:

1 Сума моментів всіх сил \overline{F}_i відносно точки C дорівнює нулю

$$\sum M_C(\overline{F}_i) = 0, \quad (1.55)$$

2 Якщо всі сили повернути на кут, не змінюючи точок додатку сил, то центр нової системи паралельних сил буде тією ж точкою C .

Паралельні сили розподілені по відрітку прямої

а) загальний випадок

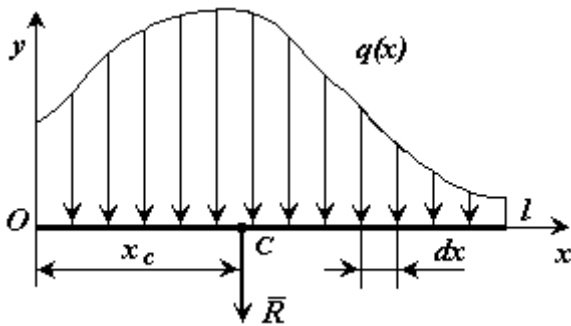


Рисунок 1.36 – Інтенсивність розподіленої сили (загальний випадок)

$q(x)$ - інтенсивність розподіленої сили, [Н/м]

$d\bar{F}_q = q(x) \cdot dx$ - елементарна сила,

l – довжина відрізка.

Розподілена по відрітку прямої сила інтенсивності $q(x)$ еквівалентна зо-

середженій силі $F_q = \int_0^l q(x) dx$. Зосере-

джена сила прикладається в точці С (центрі паралельних сил) з координатою

$$x_c = \frac{\int_0^l xq(x) dx}{F_q}, \quad (1.56)$$

б) постійна інтенсивність

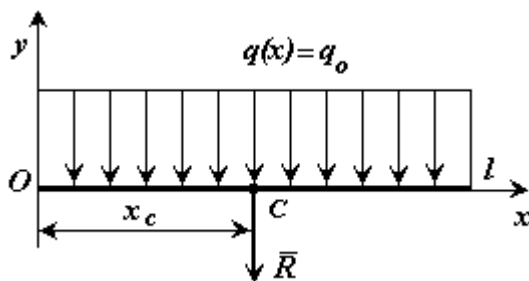


Рисунок 1.37 – Постійна інтенсивність

$$F_q = \int_0^l q_0 dx = q_0 \cdot l, \quad (1.57)$$

$$\int_0^l x \cdot q_0 dx = q_0 \cdot \frac{l^2}{2}, \quad (1.58)$$

$$x_c = \frac{1}{2}$$

в) інтенсивність, яка змінюється по лінійному закону

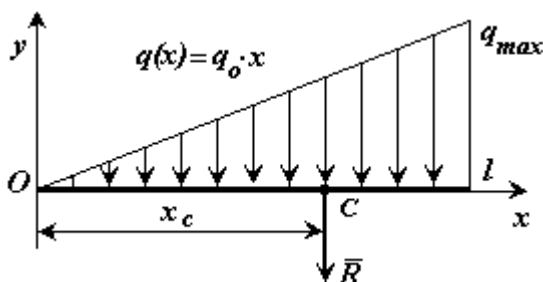


Рисунок 1.38 – Інтенсивність, яка змінюється по лінійному закону

$$F_q = \int_0^l q_0 \cdot x dx = q_0 \cdot \frac{l^2}{2}, \quad (1.59)$$

$$R = \int_0^l q_0 \cdot x dx = q_0 \cdot \frac{l^2}{2}, \quad (1.60)$$

$$x_c = \frac{2 \cdot l}{3}$$

Центр тяжіння

Центром тяжіння тіла називається геометрична точка, жорстко пов'язана з цим тілом, що є центром паралельних сил тяжіння, прикладених до окремих елементарних частинок тіла.

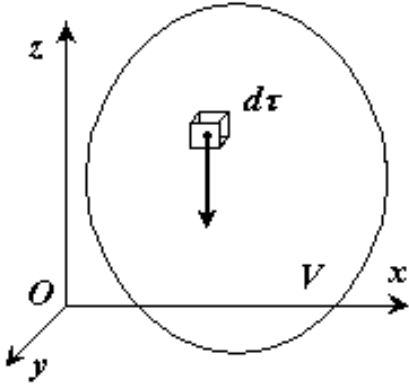


Рисунок 1.39 – Центр тяжіння

Координати центру тяжіння *неоднорідного твердого тіла* у вибраній системі відліку визначаються таким чином:

$$x_C = \frac{\int x \cdot \gamma_T(x, y, z) d\tau}{\int_V \gamma_T(x, y, z) d\tau}, \quad (1.61)$$

$$y_C = \frac{\int y \cdot \gamma_T(x, y, z) d\tau}{\int_V \gamma_T(x, y, z) d\tau}, \quad (1.62)$$

$$z_C = \frac{\int z \cdot \gamma_T(x, y, z) d\tau}{\int_V \gamma_T(x, y, z) d\tau}, \quad (1.63)$$

де $\gamma_T(x, y, z)$ - вага одиниці об'єму тіла (питома вага),

$\int_V \gamma_T(x, y, z) d\tau$ - вага всього тіла.

Для однорідного твердого тіла $\gamma_T(x, y, z) = \text{const}$ і формули отримують вигляд:

$$x_C = \frac{\int x d\tau}{\int_V d\tau}; \quad y_C = \frac{\int y d\tau}{\int_V d\tau}; \quad z_C = \frac{\int z d\tau}{\int_V d\tau}, \quad (1.64)$$

де $V = \int_V d\tau$ - об'єм всього тіла.

Якщо тверде тіло є *неоднорідною поверхнею* (рисунок 1.40), то координати центру тяжіння у вибраній системі відліку визначаються таким чином:

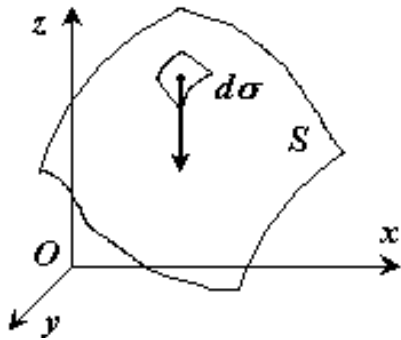


Рисунок 1.40 - Неоднорідна поверхня

$$x_C = \frac{\int_S x \cdot \gamma_S(x, y, z) d\sigma}{\int_S \gamma_S(x, y, z) d\sigma}, \quad (1.65)$$

$$y_C = \frac{\int_S y \cdot \gamma_S(x, y, z) d\sigma}{\int_S \gamma_S(x, y, z) d\sigma}, \quad (1.66)$$

$$z_C = \frac{\int_S z \cdot \gamma_S(x, y, z) d\sigma}{\int_S \gamma_S(x, y, z) d\sigma}, \quad (1.67)$$

де $\gamma_S(x, y, z)$ - вага одиниці площі тіла,

$\int_S \gamma_S(x, y, z) d\sigma$ - вага всього тіла.

Для однорідної поверхні $\gamma_S(x, y, z) = \text{const}$ і формули отримують вигляд:

$$x_C = \frac{\int_S x d\sigma}{\int_S d\sigma}; \quad y_C = \frac{\int_S y d\sigma}{\int_S d\sigma}; \quad z_C = \frac{\int_S z d\sigma}{\int_S d\sigma}, \quad (1.68)$$

де $S = \int_S d\sigma$ - площа поверхні.

Якщо тверде тіло є *неоднорідною лінією*, то координати центру тяжіння у вибраній системі відліку визначаються таким чином:

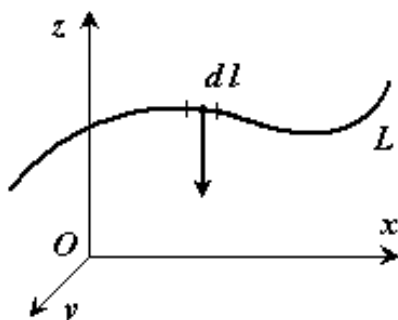


Рисунок 1.41 - Неоднорідна лінія

$$x_C = \frac{\int_L x \cdot \gamma_L(x, y, z) dl}{\int_L \gamma_L(x, y, z) dl}, \quad (1.69)$$

$$y_C = \frac{\int_L y \cdot \gamma_L(x, y, z) dl}{\int_L \gamma_L(x, y, z) dl}, \quad (1.70)$$

$$z_C = \frac{\int_L z \cdot \gamma_L(x, y, z) dl}{\int_L \gamma_L(x, y, z) dl}, \quad (1.71)$$

де $\gamma_L(x, y, z)$ - вага одиниці довжини тіла,

$$\int_L \gamma_L(x, y, z) dl \quad - \text{ вага всього тіла.}$$

Для однорідної лінії $\gamma_L(x, y, z) = \text{const}$ і формули отримують вигляд:

$$x_C = \frac{\int x dl}{L}, \quad y_C = \frac{\int y dl}{L}, \quad z_C = \frac{\int z dl}{L}, \quad (1.72)$$

де $L = \int_L dl$ - довжина лінії.

Способи визначення координат центру тяжіння

Виходячи з отриманих вище загальних формул, можна вказати конкретні способи визначення координат центрів тяжіння тіл.

1 Симетрія. Якщо однорідне тіло має площину, вісь або центр симетрії, то його центр тяжіння лежить відповідно в площині симетрії, осі симетрії або в центрі симетрії.

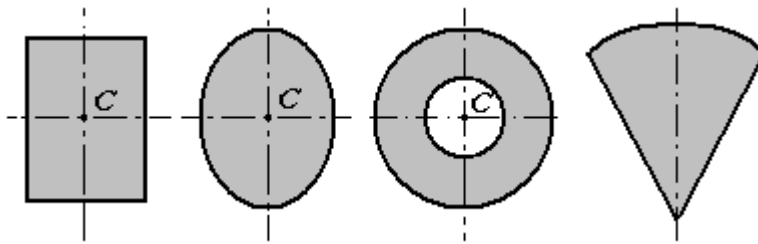
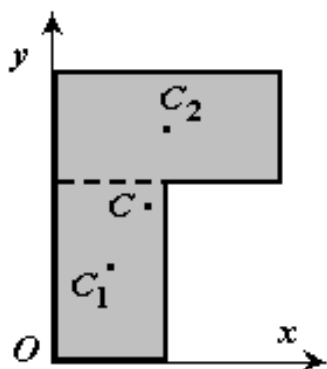


Рисунок 1.42 - Координати центрів тяжіння тіл

2 Розбиття. Тіло розбивається на кінцеве число частин, для кожної з яких положення центру тяжіння і площа відомі.



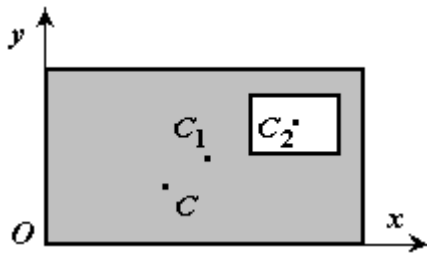
$$C_1(x_1, y_1), \quad S_1 \quad C_2(x_2, y_2), \quad S_2, \quad (1.73)$$

$$x_C = \frac{x_1 \cdot S_1 + x_2 \cdot S_2}{S_1 + S_2}; \quad y_C = \frac{y_1 \cdot S_1 + y_2 \cdot S_2}{S_1 + S_2}, \quad (1.74)$$

$$S = S_1 + S_2, \quad (1.75)$$

Рисунок 1.43 – Розбиття фігур

3 Доповнення. Окремий випадок способу розбиття. Він застосовується до тіл, що мають вирізи, якщо центри тяжіння тіла без вирізу і вирізаної частини відомі.



$$C_1(x_1, y_1), S_1 \quad C_2(x_2, y_2), S_2, \quad (1.76)$$

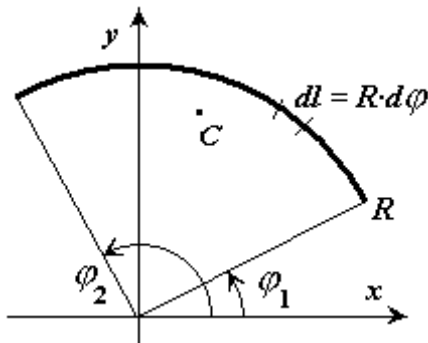
$$x_C = \frac{x_1 \cdot S_1 - x_2 \cdot S_2}{S_1 - S_2}, \quad (1.77)$$

$$y_C = \frac{y_1 \cdot S_1 - y_2 \cdot S_2}{S_1 - S_2}, \quad (1.78)$$

$$S = S_1 - S_2, \quad (1.79)$$

Рисунок 1.44 – Центр тяжіння тіл, що мають вирізи

Центр тяжіння дуги кола



$$x = R \cdot \cos \phi \quad y = R \cdot \sin \phi$$

$$L = \int_L dl = \int_{\phi_1}^{\phi_2} R \, d\phi = R \cdot (\phi_2 - \phi_1)$$

$$S_y = \int_L x dl = \int_{\phi_1}^{\phi_2} R^2 \cdot \cos \phi \, d\phi = R^2 \cdot (\sin(\phi_2) - \sin(\phi_1))$$

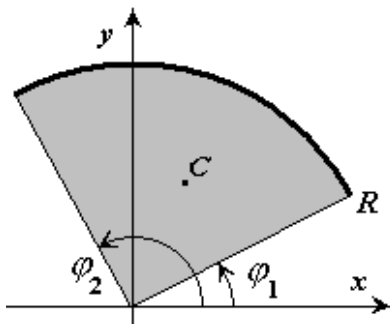
$$S_x = \int_L y dl = \int_{\phi_1}^{\phi_2} R^2 \cdot \sin \phi \, d\phi = R^2 \cdot (\cos(\phi_1) - \cos(\phi_2))$$

Рисунок 1.45 – Центр тяжіння дуги кола

$$y_C = \frac{S_x}{L} = \frac{R}{(\phi_2 - \phi_1)} \cdot (\cos(\phi_1) - \cos(\phi_2))$$

Для дуги, яка дорівнює половині кола $\phi_1 = 0 \quad \phi_2 = \pi \quad x_C = 0 \quad y_C = \frac{2 \cdot R}{\pi}$

Центр тяжіння площі сектора кола



$$x = r \cdot \cos \phi \quad y = r \cdot \sin \phi$$

$$d\sigma = dx \cdot dy = r \cdot dr \cdot d\phi$$

$$S = \int_S d\sigma = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_0^R r \, dr d\phi = \frac{R^2}{2} \cdot (\phi_2 - \phi_1)$$

$$S_y = \int_S x d\sigma = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_0^R r^2 \cdot \cos \phi \, dr d\phi = \frac{R^3}{3} \cdot (\sin(\phi_2) - \sin(\phi_1))$$

Рисунок 1.46 – Центр тяжіння площі сектора кола

$$S_x = \int_S y d\sigma = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_0^R r^2 \cdot \sin\phi \, dr d\phi = \frac{R^3}{3} \cdot (\cos(\phi_1) - \cos(\phi_2))$$

$$x_C = \frac{S_y}{S} = \frac{2 \cdot R}{3 \cdot (\phi_2 - \phi_1)} \cdot (\sin(\phi_2) - \sin(\phi_1))$$

$$y_C = \frac{S_x}{S} = \frac{2 \cdot R}{3 \cdot (\phi_2 - \phi_1)} \cdot (\cos(\phi_1) - \cos(\phi_2))$$

Для площі, яка дорівнює половині круга $\phi_1 = 0; \phi_2 = \pi; x_C = 0; y_C = \frac{4 \cdot R}{3 \cdot \pi}$

1.10 Тертя ковзання. Закони Кулона. Кут і конус тертя. Умови рівноваги. Тертя кочення

Тертя ковзання

Досвід показує, що при прагненні рухати одне тіло по поверхні іншого в площині зіткнення тіл виникає сила опору їх відносному ковзанню. Цю силу називають силою тертя ковзання.

Якщо тверде тіло знаходиться на абсолютно гладкій поверхні іншого тіла в рівновазі, то реакція зв'язку направлена по нормалі до поверхні.

Насправді абсолютно гладких поверхонь не буває. Всі поверхні тіл в тому або іншому ступені шорсткі. Тому сила реакції \bar{R} шорсткої поверхні при рівновазі тіла залежить від активних сил не тільки по числовій величині, але і за напрямом.

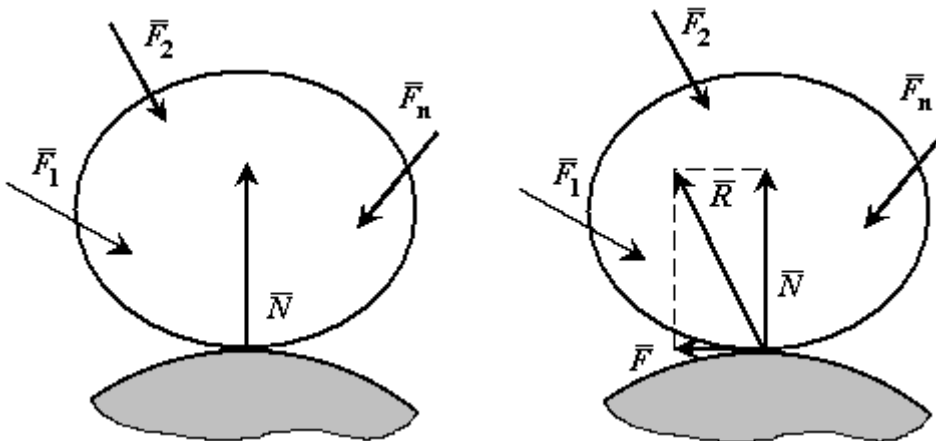


Рисунок 1.47 – Тертя ковзання

Розкладемо силу реакції \bar{R} шорсткої поверхні на складові: одну з яких \bar{N} направимо по загальній нормалі до поверхні зіткнення, а іншу \bar{F} направимо в дотичній площині до цих поверхонь.

Силою тертя ковзання (або просто силою тертя) називається складова сили реакції зв'язку, який лежить в дотичній площині до поверхонь дотичних тіл.

Силою нормальної реакції зв'язку називається складова сили реакції зв'язку, яка направлена по загальній нормалі до поверхонь дотичних тіл.

$$\bar{R} = \bar{N} + \bar{F}, \quad (1.80)$$

Природа сили тертя дуже складна і ми її не торкаємося. У теоретичній механіці передбачається, що між поверхнями дотичних тіл немає речовини, що змащує.

Сухим тертям називається тертя, коли між поверхнями дотичних тіл речовини, що змащує.

Розглядатимемо два випадки: тертя при спокої або рівновазі тіла і тертя ковзання при русі одного тіла по поверхні іншого з деякою відносною швидкістю.

При спокої сила тертя залежить тільки від активних сил. При вибраному напрямі дотичній в точці зіткнення поверхонь тіл сила тертя обчислюється за формулою:

$$\bar{F} = -\sum \bar{F}_{ti}, \quad (1.81)$$

Аналогічно при вибраному напрямі нормалі нормальна реакція виражається через задані сили:

$$\bar{N} = -\sum \bar{F}_{ni}, \quad (1.82)$$

При русі одного тіла по поверхні іншого сила тертя є постійною величиною.

У інженерних розрахунках зазвичай виходять з ряду встановлених досвідченим шляхом закономірностей, які з достатньою для практики точністю відображають основні особливості явища сухого тертя. Ці закономірності називаються законами тертя ковзання або законами Кулона.

Закони Кулона

1 Сила тертя ковзання знаходиться в загальній дотичній площині дотичних поверхонь тіл і направлена у бік, протилежний напрямку можливого ковзання тіла під дією активних сил. Сила тертя залежить від активних сил, і її модуль поміщений між нулем і максимальним значенням, яке досягається у момент виходу тіла з положення рівноваги, тобто:

$$0 < \overline{F}_{\text{тер}} < \overline{F}_{\text{термакс}}, \quad (1.83)$$

де $\overline{F}_{\text{термакс}}$ - називається **граничною силою тертя**.

2 Гранична сила тертя ковзання за інших рівних умов не залежить від площі зіткнення поверхонь, що труться. З цього закону виходить, що для того, щоб зрушити, наприклад, цеглину, треба прикласти одну і ту ж силу незалежно від того, якою гранню він покладений на поверхню - широкою або вузькою.

3 Гранична сила тертя ковзання пропорційна нормальній реакції (нормальному тиску), тобто

$$\overline{F}_{\text{термакс}} = f \cdot \overline{N}, \quad (1.84)$$

де f - безрозмірний коефіцієнт, який називають **коефіцієнтом тертя** ковзання; він не залежить від нормальної реакції.

4 Коефіцієнт тертя ковзання залежить від матеріалу і фізичного стану поверхонь, що труться, тобто від величини і характеру шорсткості, вологості, температури та інших умов. Коефіцієнт тертя встановлюється експериментально.

Вважається, що коефіцієнт тертя не залежить від швидкості руху.

Кут тертя. Умови рівноваги

Багато завдань на рівновагу тіла на шорсткій поверхні, тобто за наявності тертя, зручно вирішувати геометрично. Для цього введемо поняття кута і конуса тертя.

Реакція реального (шорсткого) зв'язку \overline{R} складається з двох складових: нормальної реакції \overline{N} і перпендикулярної до неї сили тертя $\overline{F}_{\text{тер}}$. Отже, реакція зв'язку \overline{R} відхиляється від нормалі до поверхні на деякий кут. При зміні сили

тертя від нуля до максимальної, сила реакції \bar{R} змінюється від нуля до $\bar{R}_{\text{пр}}$, а її кут з нормаллю зростає від нуля до деякого граничного значення ϕ .

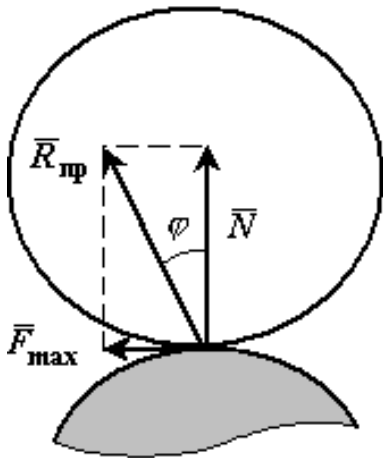


Рисунок 1.48 – Кут тертя

Кутом тертя називається найбільший кут ϕ між граничною силою реакції шорсткого зв'язку $\bar{R}_{\text{пр}}$ і нормальною реакцією \bar{N} (рисунок 1.48).

$$\text{tg}\phi = \frac{F_{\text{терmax}}}{N}, \quad (1.85)$$

$$F_{\text{терmax}} = f \cdot N \Rightarrow \text{tg}\phi = f, \quad (1.86)$$

Кут тертя ϕ залежить від коефіцієнта тертя.

Конусом тертя називають конус, описаний граничною силою реакції шорсткого зв'язку $\bar{R}_{\text{пр}}$ навколо напрямку нормальної реакції.

Приклад 1.3

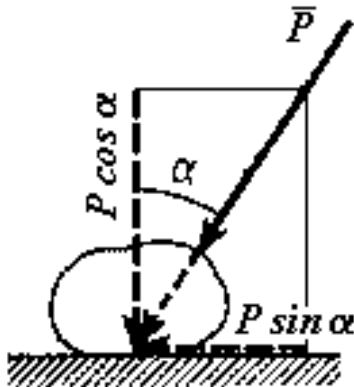


Рисунок 1.49 – Визначення сили тертя

Якщо до тіла, яке лежить на шорсткій поверхні (рисунок 1.49), прикласти силу F , утворюючи кут α з нормаллю, то тіло зрушиться тільки тоді, коли зусилля, що зрушує $F \cdot \sin \alpha$ буде більше граничної сили тертя $F_{\text{терmax}} = f \cdot F \cdot \cos \alpha$ (якщо нехтувати вагою тіла, то $N = F \cdot \cos \alpha$ нерівність $F \cdot \sin \alpha \geq f \cdot F \cdot \cos \alpha$ виконується тільки при $\text{tg}(\alpha) \geq \text{tg}(\phi)$, тобто при $\alpha \geq \tilde{\phi}$).

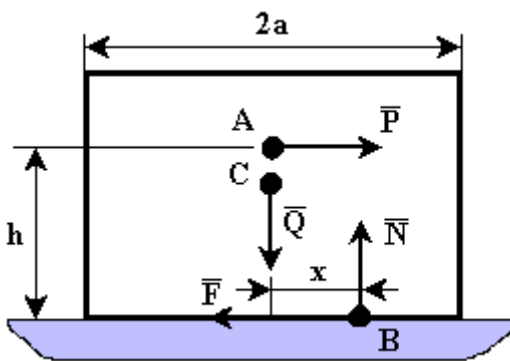
Отже, ніякою силою, утворюючою з нормаллю кут, менший за кут тертя ϕ тіло вздовж даної поверхні зрушити не можна.

Для рівноваги твердого тіла на шорсткій поверхні необхідно і достатньо, щоб лінія дії рівнодіючої активних сил, що діють на тверде тіло, проходила всередині конуса тертя або по його утворюючій через його вершину.

Тіло не можна вивести з рівноваги будь-якою по модулю активною силою, якщо її лінія дії проходить всередині конуса тертя.

Приклад 1.4

Розглянемо тіло (рисунок 1.50), що має вертикальну площину симетрії.



Перетин тіла цієї площини має форму прямокутника. Ширина тіла дорівнює $2a$.

До тіла в точці C , яка лежить на осі симетрії, прикладена вертикальна сила \bar{F} і в точці A , яка лежить на відстані h від основи, горизонтальна сила \bar{F}_1 . Реакція площини основи (реакція зв'язку) приводиться до нормальної реакції \bar{N} і силі тертя $\bar{F}_{\text{тер}}$.

Рисунок 1.50 – Розрахункова схема

Координата лінії дії сили \bar{N} невідома. Відстань від точки C до лінії дії сили \bar{N} позначимо x ($x \leq a$). Складемо три рівняння рівноваги:

$$\sum F_{ix} = 0 \quad F_1 - F_{\text{тер}} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{\text{тер}} = F_1$$

$$\sum F_{iy} = 0 \quad N - F = 0 \quad \Rightarrow \quad N = F$$

$$\sum M_B(\bar{F}_i) = 0 \quad F \cdot x - F_1 \cdot h = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{F_1 \cdot h}{F} \leq a$$

Згідно закону Кулона,

$$F_1 \leq f \cdot F, \quad (1.87)$$

Оскільки

$$\frac{F_1 \cdot h}{F} \leq a, \quad \text{то} \quad F_1 \leq \frac{a}{h} F, \quad (1.88)$$

Проаналізуємо отримані результати:

Збільшимо силу \bar{F}_1 .

1 Якщо $f < \frac{a}{h}$, то рівновага матиме місце до тих пір, поки сила тертя не досягне своєї граничної величини, умова (1.87) перетвориться на рівність. Подальше збільшення сили приведе до ковзання тіла по поверхні.

2 Якщо $f > \frac{a}{h}$, то рівновага матиме місце до тих пір, поки сила тертя не досягне величини $\frac{a \cdot F}{h}$, умова (1.88) перетвориться на рівність. Величина x буде дорівнювати h . Подальше збільшення сили приведе до того, що тіло почне перекидатися навколо точки В (ковзання не буде).

Тертя кочення

Тертям кочення називається опір, що виникає при коченні одного тіла по поверхні іншого.

Розглянемо циліндровий каток радіусу r на горизонтальній площині. Під катком на площині в місці їх зіткнення можуть виникнути реакції, що перешкоджають дії активних сил, каток може котитися по площині. Із-за деформації поверхонь не тільки ковзанню, але і коченню.

Активні сили, що діють на катки у вигляді коліс, зазвичай складаються з сили тяжіння \bar{F}_G , горизонтальної сили F , прикладеної до центру катка, і пари сил з моментом \bar{L} , прагнучої котити колесо. Колесо в цьому випадку називається **ведучим**.

Якщо $\bar{L} = 0$, а $\bar{F} \neq 0$, то колесо називається **веденим**.

Якщо $\bar{L} \neq 0$, а $\bar{F} = 0$ те колесо називається **ведучим**.

Зіткнення катка з нерухомою площиною із-за деформації катка і площини відбувається не в точці, а по деякій лінії BD. По цій лінії на каток діють розподілені сили реакції. Якщо привести сили реакції до точки А, то в цій точці.

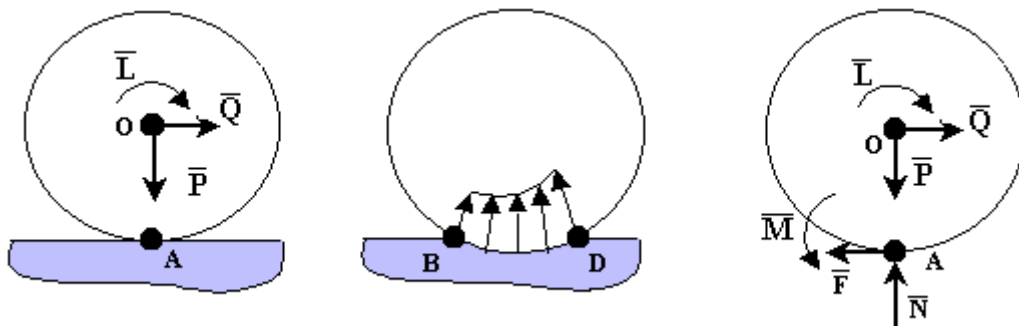


Рисунок 1.51 – Тертя кочення

Отримаємо головний вектор \bar{R} цих розподілених сил з складовими \bar{N} (нормальна реакція) і \bar{F} (сила тертя ковзання), а також пару сил з моментом \bar{M} .

Розглянемо рівновагу катка. Система сил – плоска. Запишемо рівняння рівноваги системи сил.

$$\begin{aligned} (x) \quad F - F_{\text{тер}} &= 0 \quad \Rightarrow \quad F_{\text{тер}} = F \\ (y) \quad N - F_G &= 0 \quad \Rightarrow \quad N = F_G, \\ (M_A) \quad M - F \cdot r - L &= 0 \quad \Rightarrow \quad M = L + F \cdot r \end{aligned} \quad 1.89)$$

Момент \bar{M} називається моментом тертя кочення. Найбільше значення M досягається у момент початку кочення катка по площині.

Встановлені наступні наближені закони для найбільшого моменту пари сил, що перешкоджають коченню.

1 Найбільший момент пари сил, що перешкоджають коченню в досить широких межах не залежить від радіусу катка.

2 Граничне значення моменту M_{max} пропорційне нормальній реакції N .

$$M_{\text{max}} = k \cdot N,$$

Коефіцієнт пропорційності k називають коефіцієнтом тертя кочення при спокої. Розмірність k - це розмірність довжини.

3 Коефіцієнт тертя кочення k залежить від матеріалу катка, площини і фізичного стану їх поверхонь. Коефіцієнт тертя кочення при коченні в першому наближенні можна вважати не залежним від кутової швидкості кочення катка і його швидкості ковзання по площині.

Для вагонного колеса по рейці $k = 0.5$ мм.

Розглянемо рух веденого колеса.

$$\bar{L} = 0, \text{ а } \bar{F} \neq 0, \quad (1.90)$$

Кочення колеса почнеться, коли виконається умова

$$F \cdot r > M_{\text{max}} \text{ або } F > \frac{M_{\text{max}}}{r} = \frac{k \cdot N}{r} = \frac{k}{r} \cdot N, \quad (1.91)$$

Ковзання колеса почнеться, коли виконається умова

$$F > F_{\text{терmax}} = f \cdot N, \quad (1.92)$$

Звичайне відношення $\frac{k}{r} < f$ і кочення починається раніше ковзання.

Якщо $\frac{k}{r} > f$, то колесо ковзатиме по поверхні без кочення.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ДО РОЗДІЛУ 1

- 1 Як визначається крутильний момент M ?
- 2 В яких одиницях вимірюється сила F ?
- 3 В яких випадках напрямок крутильного моменту M приймають позитивним ?
- 4 В яких випадках напрямок крутильного моменту M приймають негативним ?
- 5 В яких випадках напрямок сили F приймають позитивним ?
- 6 В яких випадках напрямок сили F приймають негативним?
- 7 В якому випадку проекція сили F на вісь дорівнює нулю?
- 8 В якому випадку проекція сили F на вісь дорівнює її натуральній величині?
- 9 Якщо дві сили врівноважують одна одну, то як направлені ці сили одна до одної?
- 10 Чим характеризується дія сили на тіло?
- 11 В якому зв'язку, виникає одна реакція яка завжди направлена по нормалі до поверхні?
- 12 У якому випадку плоска система сил називатиметься такою, що сходиться?
- 13 Скільки реакцій виникає в плоскій шарнірно - нерухомій опорі?
- 14 Скільки реакцій виникає в плоскій шарнірно - рухомій опорі?
- 15 Скільки реакцій виникає в консольно - затисненій опорі?
- 16 Як визначаються рівнодіючі R_x плоскої системи сил, що сходиться?
- 17 Як визначається головний момент плоскої довільної системи сил?
- 18 Як визначаються рівнодіючі R_y плоскої системи сил, що сходиться?
- 19 Як знайти зосереджену силу (R) для розподіленого зовнішнього навантаження(q) діючого на довжині (l) ?
- 20 Як приводиться довільна плоска система сил до сходячої плоскої системи сил?

РОЗДІЛ 2. КІНЕМАТИКА

2.1 Вступ в кінематику. Кінематика точки. Поняття траєкторії. Способи завдання руху

Вступ. Кінематикою називається розділ теоретичної механіки, в якому вивчаються рухи матеріальних об'єктів таких як точка і тверде тіло, без розгляду причин, що викликають або змінюють це рух.

Таке вивчення руху матеріальних об'єктів не вимагає урахування матеріальних характеристик цих об'єктів - маси, моментів інерції та ін.

Рух матеріальних об'єктів завжди відбувається в просторі відносно певної системи відліку і в часі. Простір вважається тривимірним простором, властивості якого не залежать від рухомих в ньому матеріальних об'єктів.

Час в класичній механіці не пов'язаний з простором і рухом матеріальних об'єктів. У всіх системах відліку рухомих один відносно одного воно протікає однаково.

В курсі теоретичної механіки кінематика ділиться на кінематику точки і кінематику твердого тіла.

У кінематиці точки розглядаються характеристики руху точки, такі, як швидкість і прискорення і методи їх визначення при різних способах завдання руху.

Траєкторією точки називається геометричне місце її послідовних положень в просторі з часом відносно даної системи відліку.

Форма траєкторії може бути прямолінійною або криволінійною і залежить від вибраної системи координат.

Приклад 2.1

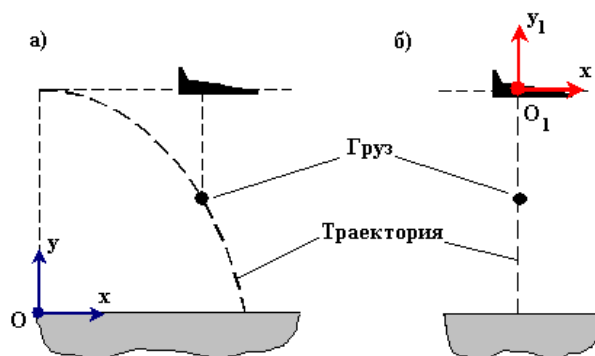


Рисунок 2.1 – Траєкторія центра мас відносно системи відліку

З літака (рисунок 2.1), що горизонтально летить відносно Землі скинутий вантаж. Опір повітря відсутній.

Траєкторією центру мас вантажу відносно системи відліку O_{xy} , жорстко пов'язаною із Землею, буде парабола (рисунок 2.1а).

Траєкторією центру мас вантажу відносно системи відліку $O_{1x_1y_1}$, жорстко пов'язаною з літаком, що летить, буде пряма лінія (рисунок 2.1б).

Приклад 2.2

Колесо радіусу R котиться по горизонтальній прямій без ковзання. Точка A на ободі колеса здійснює складний рух.

Траєкторією точки A відносно системи відліку O_{xy} , жорстко пов'язаною з прямою, буде крива під назвою циклоїда.

Траєкторією точки A відносно системи відліку $O_{1x_1y_1}$, яка рухається поступово з початок відліку якої знаходиться в центрі мас колеса, буде коло радіусу R , центр якої знаходиться в точці O_1 .

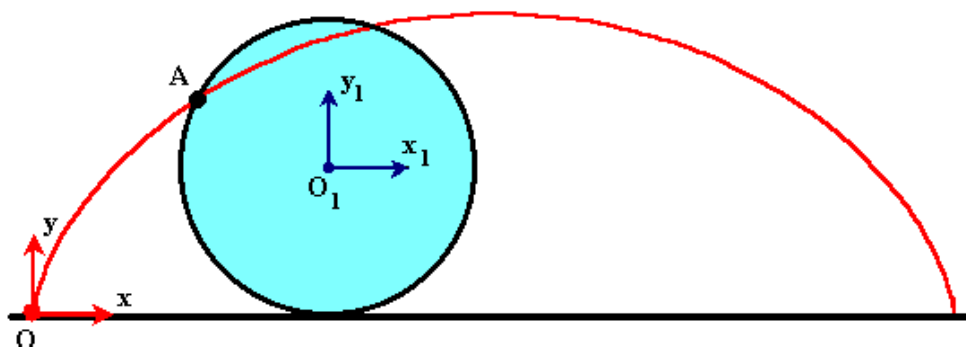


Рисунок 2.2 - Траєкторією точки A відносно системи відліку $O_1X_1Y_1$

Способи задавання руху

Рух точки можна вивчати, використовуючи будь-яку систему координат. Розглянемо три способи задавання руху: векторний, координатний та природний.

Векторний спосіб

Розглянемо випадок Декартової прямокутної системи координат.

Рух точки відносно даної системи відліку заданий, якщо відомий радіус-вектор $\vec{r} = \vec{r}(t)$ цієї точки як функція часу, тобто

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \quad (2.1)$$

Векторний спосіб зазвичай застосовується для теоретичного викладу кінематики точки.

Координатний спосіб

Рух точки можна вивчати використовуючи будь-яку систему координат. Розглянемо випадок Декартової прямокутної системи координат.

Рух точки заданий, якщо відомі координати точки, як безперервні функції часу, що двічі диференціюються, тобто

$$x = f_1(t), y = f_2(t), z = f_3(t), \quad (2.2)$$

Рівняння руху є також рівняння траєкторії точки в параметричній формі. Параметром є час t .

$$\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k}. \quad (2.3)$$

Рівняння траєкторії в координатній формі отримують з рівнянь (2.1) виключенням параметра t . Отримують рівняння двох поверхонь $\Phi_1(x, y) = 0$; $\Phi_2(x, y) = 0$. Перетин цих поверхонь дає криву в просторі – траєкторію точки.

Природний спосіб завдання руху

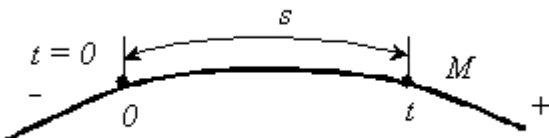


Рисунок 2.3 – Природний спосіб завдання руху

При природному способі завдання руху задаються траєкторія точки і закон руху точки по траєкторії. Рух точки розглядається відносно фіксованої системи відліку.

Для завдання закону руху точки по траєкторії необхідно вибрати на траєкторії точку, що приймається за початок відліку. Крім того необхідно задати початок відліку часу.

$s = f(t)$ - закон руху точки по траєкторії.

Функція $s = f(t)$ повинна бути безперервною і такою, що двічі диференціюється.

Від задавання руху в Декартових координатах можна перейти до його задавання природним способом. Закон руху точки по траєкторії в диференціальній формі через Декартові координати виражається у вигляді

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}, \quad (2.3)$$

і після інтегрування - в кінцевій формі

$$s = \int_0^t \sqrt{f_1'(t)^2 + f_2'(t)^2 + f_3'(t)^2} dt, \quad (2.4)$$

якщо $x = f_1(t)$; $y = f_2(t)$; $z = f_3(t)$

Швидкість точки

Однією з основних характеристик руху точки є її швидкість відносно вибраної системи відліку.

Швидкість точки при векторному способі завдання руху

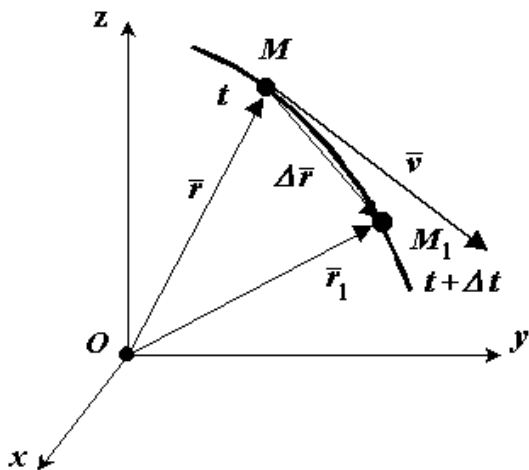


Рисунок 2.4 - Положення рухомої точки M відносно системи відліку у момент часу t

Положення рухомої точки M відносно системи відліку у момент часу t визначається радіус-вектором \vec{r} . В інший момент часу $t_1 = t + \Delta t$ точка займе положення M_1 з радіус-вектором \vec{r}_1 . За час Δt радіус-вектор рухомої точки зміниться на $\Delta \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}$ (рисунок 2.4).

Середньою швидкістю \vec{v}_{cp} називається відношення зміни радіус-вектора $\Delta \vec{r}$ до зміни часу Δt .

$$\vec{v}_{\text{cp}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}, \quad (2.5)$$

Швидкість точки дорівнює першій похідній за часом від її радіус-вектора.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad \text{при } \Delta t \rightarrow 0, \quad (2.6)$$

Швидкість точки при координатному способі завдання руху

Розкладемо радіус-вектор і швидкість на складові, паралельні осям координат. Отримаємо:

$$\bar{r}(t) = x(t) \cdot \bar{i} + y(t) \cdot \bar{j} + z(t) \cdot \bar{k}, \quad (2.7)$$

$$\bar{v}(t) = v_x(t) \cdot \bar{i} + v_y(t) \cdot \bar{j} + v_z(t) \cdot \bar{k}, \quad (2.8)$$

Після диференціювання

$$\frac{d\bar{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} \cdot \bar{i} + \frac{dy(t)}{dt} \cdot \bar{j} + \frac{dz(t)}{dt} \cdot \bar{k}, \quad (2.9)$$

Звідси слідує

$$\begin{aligned} v_x(t) &= \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t); \\ v_y(t) &= \frac{dy(t)}{dt} = \dot{y}(t), \\ v_z(t) &= \frac{dz(t)}{dt} = \dot{z}(t), \end{aligned} \quad (2.10)$$

Проекція швидкості точки на яку-небудь координатну вісь дорівнює першій похідній за часом від відповідної координати цієї точки.

Модуль швидкості і направляючі косинуси дорівнюють:

$$v = |\bar{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2}, \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \cos(\bar{v}, x) &= \frac{v_x}{v} = \frac{\dot{x}}{v}; \\ \cos(\bar{v}, y) &= \frac{v_y}{v} = \frac{\dot{y}}{v}, \\ \cos(\bar{v}, z) &= \frac{v_z}{v} = \frac{\dot{z}}{v} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Якщо точка рухається в площині, то, вибравши осі координат O_x і O_y в цій площині, отримаємо:

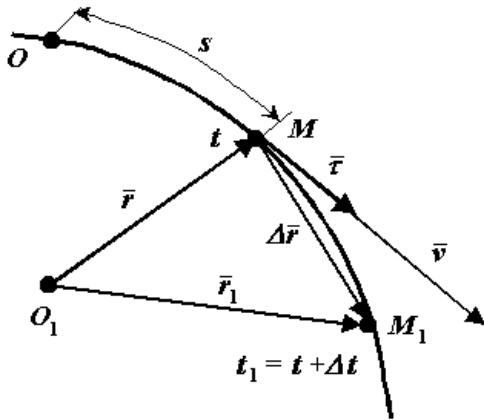
$$z = \text{const} = 0, \quad v_z = \dot{z} = 0; \quad v = |\bar{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}, \quad (2.13)$$

Для прямолінійного руху точки координатну вісь, наприклад вісь O_x , направляємо по траєкторії. Тоді:

$$y = z = \text{const} = 0, \quad v_y = \dot{y} = 0, \quad v_z = \dot{z} = 0 \quad v = |\bar{v}| = v_x = \dot{x}, \quad (2.14)$$

Швидкість точки при природному способі задавання руху

Нехай швидкість точки задана природним способом, тобто задані траєкторія точки і закон її руху по траєкторії $s = f(t)$ (рисунок 2.5).



Обчислимо швидкість точки.

Використовуємо радіус-вектор \bar{r} рухомої точки, початок якого знаходиться в нерухомій точці O_1

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{d\bar{r}}{ds} \cdot \dot{s}, \quad (2.15)$$

де $\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{\tau}$ - одиничний вектор, на-

правлений по дотичній до траєкторії у бік зростаючих відстаней

$$\bar{v} = \dot{s} \cdot \bar{\tau}, \quad (2.16)$$

При $ds > 0$ напрями векторів $\bar{\tau}$ та $d\bar{r}$ співпадають. Якщо точка рухається у бік відстані, що зменшується, то $ds < 0$ і напрями векторів $\bar{\tau}$ і $d\bar{r}$ протилежні.

При $\dot{s} > 0$ вектор швидкості направлений по $\bar{\tau}$, тобто у бік зростаючих відстаней; при $\dot{s} < 0$ він має напрям, протилежний $\bar{\tau}$, тобто у бік відстані, що зменшується.

$\dot{s} = v_\tau$ - **алгебраїчна швидкість точки**, проекція швидкості \bar{v} на позитивний напрям дотичній до траєкторії.

Природне завдання руху точки повністю визначає швидкість за величиною і напрямом.

2.2 Геометричні поняття: кривизна кривої, радіус кривизни, осі природного тригранника. Швидкість і прискорення точки. Окремі випадки руху точки

Геометричні поняття

У точці M кривої лінії (рисунок 2.6) проведемо дотичну $M\tau$. В точці M_1 побудуємо дотичну $M_1\tau_1$. Між точками M і M_1 відстань Δs .

У загальному випадку просторової кривої дотичні $M\tau$ і $M_1\tau_1$ схрещуватимуться.

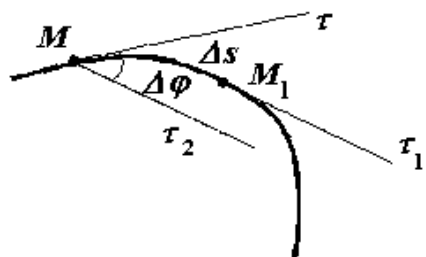


Рисунок 2.6 - Кривизною (k) кривої в точці M

Проводимо в точці M пряму лінію $M\tau_2$ паралельну $M_1\tau_1$. Кут $\Delta\phi$ між лініями $M\tau$ і $M\tau_2$ називається **кутом суміжності**.

Кривизною (k) кривої в точці M називається границя, до якої прагне кут суміжності, що доводиться на одиницю відстані Δs , при Δs , прагнучому до нуля,

$$\text{тобто} \quad k = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta s} = \frac{d\phi}{ds} \quad \text{при} \quad \Delta s \rightarrow 0, \quad (2.16)$$

Радіусом кривизни кривої ρ в точці M (рисунок 2.7) називається величина, зворотна кривизні кривої в цій точці, тобто

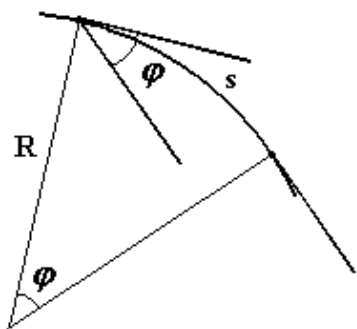


Рисунок 2.7 - Радіусом кривизни кривої ρ

$$\rho = \frac{1}{k} = \frac{ds}{d\phi}, \quad (2.17)$$

Обчислимо радіус кривизни дуги кола радіусу R . Дуга кола довжиною s , що спирається на центральний кут ϕ , має залежність

$$s = R \cdot \phi; \quad \rho = \frac{ds}{d\phi} = R, \quad (2.18)$$

Через пересічні прямі $M\tau$ і $M\tau_2$ проводимо площину. Граничне положення цієї площини при збігу в межах точок M і M_1 називається **дотичною площиною кривої в точці M** .

У разі плоскої кривої дотична площина для всіх точок кривої є сама площина, в якій розташована ця крива.

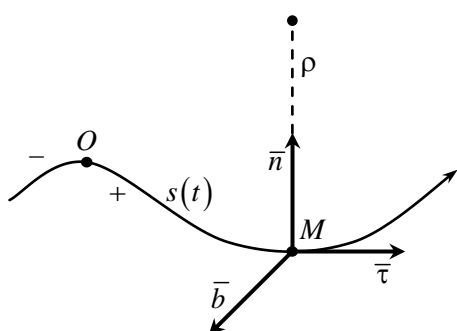


Рисунок 2.8 – Природний трикутник

Побудуємо в точці M кривої лінії **природні осі**.

Природний трикутник

Першою природною віссю є дотична $M\tau$. Її позитивний напрям співпадає з напрямом одичного вектора $\bar{\tau}$.

Побудуємо в точці M кривої лінії **природні осі**. Першою природною віссю є дотична $M\tau$. Її позитивний напрям співпадає з напрямом одичного вектора $\bar{\tau}$.

Перпендикулярно дотичній $M\tau$ розташовується **нормальна площина** кривої. Нормаль, розташована в дотичній площині називається **головною нормаллю**. По головній нормалі Mn всередину угнутості кривої направимо одиничний вектор \bar{n} . Він визначає позитивний напрям другої осі. Нормаль, перпендикулярна головній нормалі називається **бінормаллю**. Позитивний напрям бінормалі визначається одиничним вектором $\bar{b} = \bar{\tau} \times \bar{n}$.

Три взаємно перпендикулярні осі $M\tau$, Mn і Mb називаються **природними осями кривої**. Ці осі утворюють в точці M природний тригранник.

Диференціювання одиничного вектора

Обчислення похідної від одиничного вектора $\bar{\tau}$ за часом дає наступний результат

$$\frac{d\bar{\tau}}{dt} = \frac{\dot{s}}{\rho} \cdot \bar{n}, \quad (2.19)$$

Радіус кривизни вважаємо позитивним.

Одиничний вектор \bar{n} перпендикулярний вектору, направленому по дотичній до кривої і лежить в дотичній площині. Вектор \bar{n} направлений по головній нормалі кривої у бік її угнутості.

Прискорення точки

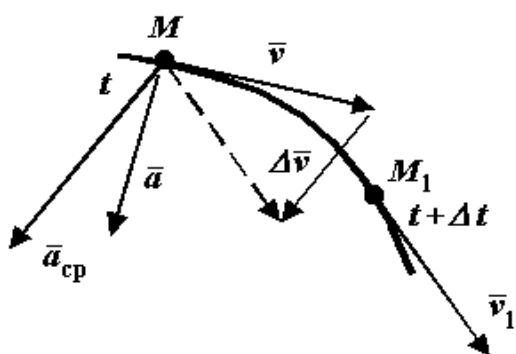


Рисунок 2.9 - Прискорення точки

Нехай рухома точка M у момент часу має швидкість \bar{v} (рисунок 2.9). В інший момент часу $t_1 = t + \Delta t$ ця точка займатиме положення M_1 і матиме швидкість \bar{v}_1 . Щоб зобразити прирощення швидкості $\Delta\bar{v}$ за час Δt , перенесемо вектор \bar{v}_1 паралельно самому собі в точку M .

Середнім прискоренням точки $\bar{a}_{\text{ср}}$ за час Δt називається відношення вектора приросту швидкості $\Delta\bar{v}$ до зміни часу Δt .

$$\bar{a}_{\text{ср}} = \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t}, \quad (2.20)$$

Прискоренням точки \bar{a} в момент часу t називається границя, до якої прагне середнє прискорення при Δt , яке прагне до нуля. Прискорення точки дорівнює першій похідній за часом від швидкості точки або другій похідній за часом від радіус-вектора.

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{a}_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2}. \quad (2.21)$$

Прискорення точки в Декартових координатах

Розкладемо прискорення і швидкість точки на складові, паралельні осям Декартової системи координат. Отримаємо

$$\bar{a}(t) = a_x(t) \cdot \bar{i} + a_y(t) \cdot \bar{j} + a_z(t) \cdot \bar{k}, \quad (2.22)$$

$$\bar{v}(t) = v_x(t) \cdot \bar{i} + v_y(t) \cdot \bar{j} + v_z(t) \cdot \bar{k}, \quad (2.23)$$

Після диференціювання

$$\bar{a}(t) = \frac{d\bar{r}(t)}{dt} = \frac{dv_x(t)}{dt} \cdot \bar{i} + \frac{dv_y(t)}{dt} \cdot \bar{j} + \frac{dv_z(t)}{dt} \cdot \bar{k}, \quad (2.24)$$

Звідси слідує

$$\begin{aligned} a_x(t) &= \frac{dv_x(t)}{dt} = \ddot{x}(t); \\ a_y(t) &= \frac{dv_y(t)}{dt} = \ddot{y}(t), \\ a_z(t) &= \frac{dv_z(t)}{dt} = \ddot{z}(t). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Проекція прискорення точки на будь-яку координатну вісь дорівнює другій похідній за часом від відповідної координати цієї точки.

Модуль прискорення і направляючі косинуси дорівнюють:

$$a = |\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{(\ddot{x})^2 + (\ddot{y})^2 + (\ddot{z})^2}, \quad (2.26)$$

$$\cos(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = \frac{a_x}{a} = \frac{\ddot{x}}{a};$$

$$\cos(a, y) = \frac{a_y}{a} = \frac{\ddot{y}}{a}, \quad (2.27)$$

$$\cos(a, z) = \frac{a_z}{a} = \frac{\ddot{z}}{a}.$$

Якщо точка рухається в площині, то, вибравши осі координат Ox і Oy в цій площині, отримаємо:

$$z = \text{const} = 0, \quad a_z = \ddot{z} = 0; \quad a = |\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(\ddot{x})^2 + (\ddot{y})^2}, \quad (2.28)$$

Для прямолінійного руху точки координатну вісь, наприклад вісь Ox , направляємо по траєкторії. Тоді

$$y = z = \text{const} = 0, \quad a_y = \ddot{y} = 0, \quad a_z = \ddot{z} = 0; \quad a = |\bar{a}| = a_x = \ddot{x}, \quad (2.29)$$

Прискорення точки при природному способі завдання руху

Швидкість точки дорівнює $\bar{v} = \dot{s} \cdot \bar{\tau} = v_\tau \cdot \bar{\tau}$.

Відповідно до визначення прискорення

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{s}\bar{\tau}) = \ddot{s} \cdot \bar{\tau} + \dot{s} \cdot \frac{d\bar{\tau}}{dt} = \ddot{s} \cdot \bar{\tau} + \frac{(\dot{s})^2}{\rho} \cdot \bar{n} = \ddot{s} \cdot \bar{\tau} + \frac{v^2}{\rho} \cdot \bar{n}, \quad (2.30)$$

Або

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n, \quad (2.31)$$

Таким чином отримано розкладання вектора прискорення точки по осях природного трикутника.

Частина прискорення

$$\bar{a}_\tau = \ddot{s} \cdot \bar{\tau} = \frac{dv_\tau}{dt} \cdot \bar{\tau}, \quad (2.32)$$

називається ***дотичною складовою прискорення***.

Інша частина прискорення

$$\bar{a}_n = \frac{(\dot{s})^2}{\rho} \cdot \bar{n} = \frac{v^2}{\rho} \cdot \bar{n}, \quad (2.33)$$

називається **нормальною складовою прискорення**. Вона направлена всередину угнутості траєкторії, тобто у бік позитивного напрямку одиничного вектора головної нормалі \bar{n} .

Формули для проекції прискорення на природні осі:

$$a_\tau = \ddot{s} = \frac{dv_\tau}{dt}; a_n = \frac{v^2}{\rho}; a_b = 0; a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}; \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{a_\tau}{a_n}, \quad (2.34)$$

Дотична складова \bar{a}_τ при $\ddot{s} > 0$ направлена за напрямом вектора $\bar{\tau}$, при $\ddot{s} < 0$ протилежно $\bar{\tau}$.

Обчислення проекцій прискорення точки на природні осі

Нехай рух точки заданий в координатній формі. Проекція прискорення на дотичну до траєкторії дорівнює $a_\tau = \frac{dv_\tau}{dt}$, алгебраїчна швидкість з точністю до знаку дорівнює модулю швидкості $v_\tau = \pm v$, а модуль швидкості дорівнює

$$v = |\bar{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2}, \quad (2.35)$$

Обчислимо першу похідну за часом від цього виразу, отримаємо

$$a_\tau = \frac{v_x \cdot a_x + v_y \cdot a_y + v_z \cdot a_z}{v_\tau} = \frac{\dot{x} \cdot \ddot{x} + \dot{y} \cdot \ddot{y} + \dot{z} \cdot \ddot{z}}{v_\tau}, \quad (2.36)$$

Проекція прискорення на нормаль до траєкторії дорівнює

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}, \quad (2.37)$$

Радіус кривизни траєкторії в поточній точці дорівнює

$$\rho = \frac{v^2}{a_n}, \quad (2.38)$$

Окремі випадки руху точки

Рівномірний рух

При рівномірному русі точки по траєкторії будь-якої форми модуль швидкості $v = \text{const}$, отже постійна і алгебраїчна швидкість v_τ , яка може відрізнятися від v тільки знаком.

Оскільки $\frac{ds}{dt} = v_\tau$, то $ds = v_\tau \cdot dt$. Якщо прийняти при $t = t_0$, $s = s_0$, то після

інтегрування отримаємо

$$\int_{s_0}^s ds = v_\tau \cdot \int_{t_0}^t dt, \quad s - s_0 = v_\tau \cdot (t - t_0), \quad (2.39)$$

Або

$$s = v_\tau \cdot (t - t_0) + s_0, \quad (2.40)$$

Можна також записати

$$v_\tau = \frac{s - s_0}{(t - t_0)}; \quad (t - t_0) = \frac{s - s_0}{v_\tau}, \quad (2.41)$$

Рух який рівномірно змінюється

Рухом який рівномірно змінюється називається такий рух точки по траєкторії будь-якої форми, при якому дотичне прискорення постійне, тобто $a_\tau = const$. Рух називається ***рівноприскореним***, якщо алгебраїчна швидкість v_τ і дотичне прискорення a_τ мають однакові знаки. Якщо v_τ і a_τ мають різні знаки, то називається ***рівносповільненим***. Отримаємо формули для алгебраїчної швидкості і відстані при русі який рівномірно змінюється. Маємо:

$$\frac{dv_\tau}{dt} = a_\tau; \quad dv_\tau = a_\tau \cdot dt, \quad (2.42)$$

Якщо прийняти при $t = t_0$, $v_\tau = v_0$, то після інтегрування отримаємо

$$\int_{v_0}^{v_\tau} dv_\tau = a_\tau \cdot \int_{t_0}^t dt, \quad v_\tau - v_0 = a_\tau \cdot (t - t_0), \quad (2.43)$$

Або

$$v_\tau = v_0 + a_\tau \cdot (t - t_0), \quad (2.44)$$

Можна також записати

$$a_\tau = \frac{v_\tau - v_0}{(t - t_0)}; \quad (t - t_0) = \frac{v_\tau - v_0}{a_\tau}, \quad (2.45)$$

Далі

$$ds = (v_0 + a_\tau \cdot (t - t_0)) \cdot dt, \quad (2.46)$$

і після інтегрування

$$\int_{s_0}^s ds = \int_{t_0}^t (v_0 + a_\tau \cdot (t - t_0)) dt, \quad s - s_0 = v_0 \cdot (t - t_0) + a_\tau \cdot \frac{(t - t_0)^2}{2}, \quad (2.47)$$

Або

$$s = s_0 + v_0 \cdot (t - t_0) + a_\tau \cdot \frac{(t - t_0)^2}{2}, \quad (2.48)$$

Можна також записати

$$v_0 = \frac{s - s_0}{(t - t_0)} - \frac{a_\tau \cdot (t - t_0)}{2}, \quad (2.49)$$

$$a_\tau = \frac{2 \cdot (s - s_0)}{(t - t_0)^2} - \frac{2 \cdot v_0}{(t - t_0)}, \quad (2.50)$$

Якщо квадратне рівняння, то можна знайти $(t - t_0)$.

2.3 Швидкість і прискорення точки в полярних координатах

Розглянемо рух точки в площині. В цьому випадку рух можна задати в полярних координатах. Для цього прийmemo будь-яку точку O площини за полюс і проведемо з неї полярну вісь, наприклад вісь Ox . Положення рухомої точки M на площині відоме, якщо задані радіус r і полярний кут φ як функції часу, тобто

$$r = r(t) \quad \text{і} \quad \varphi = \varphi(t), \quad (2.51)$$

Ці рівняння називаються **рівняннями руху точки в полярних координатах**. Якщо з рівнянь (2.51) виключити параметр - час (t) , то отримаємо рівняння траєкторії в полярних координатах: $F(r, \varphi) = 0$.

Введемо одиничний вектор \bar{r}_0 , направлений по радіус-вектору від по-

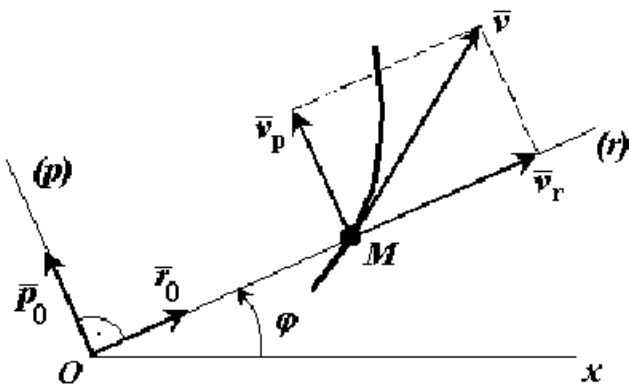


Рисунок 2.10 - Рух точки в полярних координатах

люса O до точки M (рисунок 2.10). Тоді $\overline{OM} = \bar{r} = r \cdot \bar{r}_0$.

Для швидкості \bar{v} отримуємо

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r \cdot \bar{r}_0) = \frac{dr}{dt} \cdot \bar{r}_0 + r \cdot \frac{d\bar{r}_0}{dt}, \quad (2.52)$$

Похідна від одиничного вектора за часом дорівнює

$$\frac{d\bar{r}_0}{dt} = \frac{d\phi}{dt} \cdot \bar{p}_0, \quad (2.53)$$

де \bar{p}_0 - одиничний вектор, напрям якого виходить поворотом вектора \bar{r}_0 на 90° в позитивному напрямі кута ϕ .

Після цього для швидкості \bar{v} отримуємо

$$\bar{v} = \dot{r} \cdot \bar{r}_0 + r \cdot \dot{\phi} \cdot \bar{p}_0, \quad (2.54)$$

Це розкладання швидкості точки на радіальну v_r і трансверсальну (поперечну) v_p складові, тобто

$$\bar{v} = \bar{v}_r + \bar{v}_p; \quad \bar{v}_r = \dot{r} \cdot \bar{r}_0; \quad \bar{v}_p = r \cdot \dot{\phi} \cdot \bar{p}_0, \quad (2.55)$$

де $v_r = \dot{r}$ - радіальна швидкість;

$v_p = r \cdot \dot{\phi}$ - трансверсальна швидкість.

Модуль швидкості дорівнює

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_p^2}, \quad (2.56)$$

Визначимо прискорення точки $\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{r} \cdot \bar{r}_0 + r \cdot \dot{\phi} \cdot \bar{p}_0)$,

(2.57)

Після диференціювання отримуємо

$$\bar{a} = (\ddot{r} - \dot{r} \cdot \dot{\phi}^2) \cdot \bar{r}_0 + (r \cdot \ddot{\phi} + 2 \cdot \dot{r} \cdot \dot{\phi}) \cdot \bar{p}_0, \quad (2.58)$$

Розкладемо прискорення точки на радіальну a_r і трансверсальну (поперечну) a_p складові, тобто

$$\bar{a} = \bar{a}_r + \bar{a}_p \quad \bar{a}_r = (\ddot{r} - \dot{r} \cdot \dot{\phi}^2) \cdot \bar{r}_0 \quad \bar{a}_p = (r \cdot \ddot{\phi} + 2 \cdot \dot{r} \cdot \dot{\phi}) \cdot \bar{p}_0$$

де $a_r = (\ddot{r} - \dot{r} \cdot \dot{\varphi}^2)$ - радіальна швидкість;

$a_p = (r \cdot \ddot{\varphi} + 2 \cdot \dot{r} \cdot \dot{\varphi})$ - тангенціальна швидкість.

Модуль прискорення дорівнює

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_p^2}, \quad (2.59)$$

Окремі випадки:

1 Якщо $\varphi = \text{const}$, то маємо прямолінійний рух по прямій $O\varphi$.

В цьому випадку $\dot{\varphi} = \ddot{\varphi} = 0$;

$$v_r = \dot{r}; \quad v_p = 0; \quad v = |\dot{r}|$$

$$a_r = \ddot{r}; \quad a_p = 0; \quad a = |\ddot{r}|$$

2 Якщо $r = \text{const}$, то маємо рух по колу.

В цьому випадку $\dot{r} = \ddot{r} = 0$;

$$v_r = 0; \quad v_p = r \cdot \dot{\varphi}; \quad v = r \cdot |\dot{\varphi}|;$$

$$a_r = -r \cdot \dot{\varphi}^2; \quad a_p = r \cdot \ddot{\varphi}; \quad a = r \cdot \sqrt{\dot{\varphi}^4 + \ddot{\varphi}^2}$$

$\dot{\varphi}$ - кутова швидкість обертання радіус-вектора,

$\ddot{\varphi}$ - його кутове прискорення.

Швидкість і прискорення точки в циліндрових координатах

При русі точки в просторі іноді використовуються циліндрові осі координат.

Положення точки визначається координатами

$$r = r(t) \quad \varphi = \varphi(t) \quad \text{і} \quad z = z(t), \quad (2.60)$$

2.4 Завдання кінематики твердого тіла. Види руху твердого тіла

Кінематика твердого тіла

Абсолютно твердим тілом називається матеріальне тіло, геометрична форма якого і розміри не змінюються ні при яких механічних діях з боку інших тіл, а відстань між будь-якими двома його точками залишається постійним.

Кінематика твердого тіла, також як і динаміка твердого тіла, одним з найбільш важких розділів курсу теоретичної механіки.

Завдання кінематики твердого тіла розподіляються на дві частини:

1 Задавання руху і визначення кінематичних характеристик руху тіла в цілому;

2 Визначення кінематичних характеристик (траєкторія, швидкість і прискорення) руху окремих точок тіла.

Існує п'ять видів руху твердого тіла:

1 Поступальний рух;

2 Обертання навколо нерухомої осі;

3 Плоский рух;

4 Обертання навколо нерухомої точки;

5 Вільний рух.

Перші два називаються простими рухами твердого тіла.

Ступені свободи твердого тіла

Числом ступенів свободи твердого тіла називається число незалежних параметрів, які однозначно визначають положення тіла в просторі відносно даної системи відліку.

Рух твердого тіла багато в чому залежить від числа його ступенів свободи.

Розглянемо приклад.

Якщо диск, не обертаючись, може ковзати вздовж нерухомої в даній системі відліку осі (рисунок 2.11а), то він має одну ступінь свободи - положення диска однозначно визначається, координатою x його центру, відлічуваній в осі.

Якщо диск, крім того, може ще і обертатися (рисунок 2.11б), то він набуває ще одну ступінь свободи - до координати x додається кут повороту φ диска навколо осі.

Якщо вісь із диском затиснута в рамці, яка може обертатися навколо вертикальної осі (рисунок 2.11в), то число ступенів свободи стає рівним трьом – до x і φ додається кут повороту рамки φ .

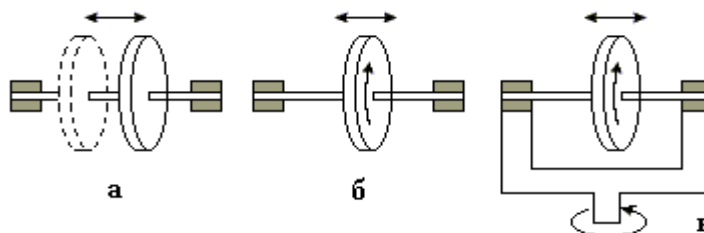


Рисунок 2.11 - Ступені свободи твердого тіла

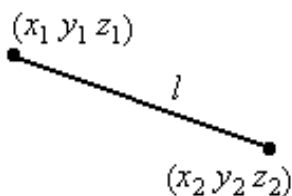
Вільна матеріальна точка в просторі має три степені свободи: наприклад Декартові координати x , y і z . Координати точки можуть визначатися також в циліндровій (r, φ, z) і сферичній (r, φ, ϕ) системах відліку, але число параметрів, що однозначно визначають положення точки в просторі завжди три.

Матеріальна точка на площині має дві степені свободи. Якщо в площині вибрати систему координат xOy , то координати x і y визначають положення точки на площині, а координата z дорівнює нулю.

Вільна матеріальна точка на поверхні будь-якого вигляду має дві степені свободи. Наприклад: положення точки на поверхні Землі визначається двома параметрами: широтою і довготою.

Матеріальна точкана кривій будь-якого вигляду має одну степінь свободи. Параметром, що визначає положення точки на кривій, можливо, наприклад, відстань вздовж кривої від початку відліку.

Розглянемо дві матеріальні точки в просторі (рисунок 2.12), сполучені жорстким стрижнем довжини l . Положення кожної точки визначається трьома параметрами, але на них накладений зв'язок.



Рівняння

$$l^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2, \quad (2.61)$$

рівнянням зв'язку. З цього рівняння будь-яка одна координата може бути виражена через решту п'ять координат (п'ять незалежних параметрів). Тому ці дві точки мають $(2 \cdot 3 - 1 = 5)$ - п'ять

Рисунок 2.12 – Розрахункова схема

ступеней свободи.

Розглянемо три матеріальні точки в просторі (рисунок 2.13), які не лежать на одній прямій, сполучені трьома жорсткими стрижнями. Число ступеней свободи цих точок дорівнює $(3 \cdot 3 - 3 = 6)$ - шести. Вільне тверде тіло в загальному випадку має 6 ступенів свободи.

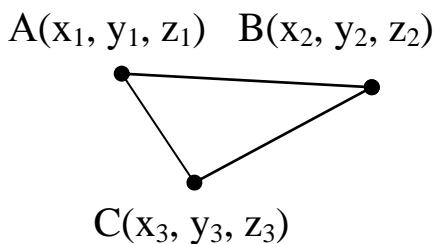


Рисунок 2.13 – Розрахункова схема

Дійсно, положення тіла в просторі відносно будь-якої системи відліку, визначається задаванням трьох його точок, які не лежать на одній прямій, і відстані між точками в твердому тілі залишаються незмінними при будь-яких його рухах. Згідно вищесказаному, число ступенів свободи повинно дорівнювати шести.

Поступальний рух твердого тіла

Поступальним рухом твердого тіла називається такий його рух, при якому будь-яка пряма, що жорстко скріплена з тілом залишається паралельною своєму первинному положенню в кожен момент часу.

Поступально рухаються педалі велосипеда відносно його рами під час руху, поршні в циліндрах двигуна внутрішнього згорання відносно циліндрів, кабіни колеса огляду в парках відносно Землі (рисунок 2.14).

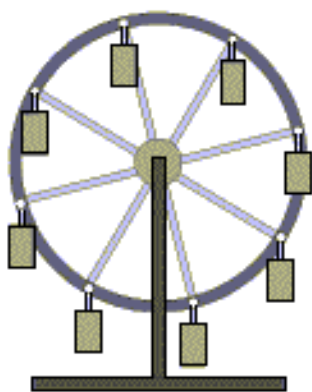


Рисунок 2.14 – Поступальна хода твердого тіла

Траєкторії точок у поступально рухомого твердого тіла можуть бути не тільки прямими, але і кривими, зокрема колами.

Теорема. При поступальній ході твердого тіла траєкторії, швидкості і прискорення всіх точок твердого тіла однакові.

Якщо вибрати дві точки твердого тіла A і B (рисунок 2.15), то радіус-вектори цих точок пов'язані співвідношенням $\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{AB}$. Траєкторія точки A - це крива, яка задається функцією $\vec{r}_A(t)$, а траєкторія точки B -

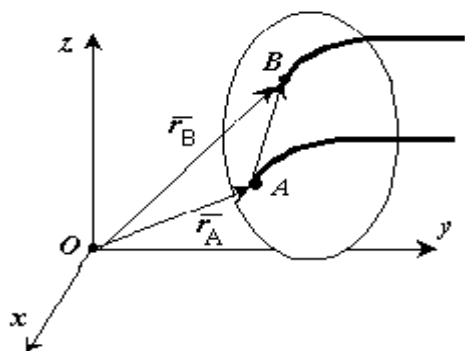


Рисунок 2.15 – Розрахункова схема

це крива, яка задається функцією $\vec{r}_B(t)$. Траєкторія точки B утворюється перенесенням траєкторії точки A в просторі вздовж вектора \vec{AB} , який не змінює своєї величини і напрямку в часі. Отже, траєкторії всіх точок твердого тіла однакові.

Візьмемо диференціал за часом виражен-

ня $\overline{r_B} = \overline{r_A} + \overline{AB}$, отримуємо

$$\overline{v_B} = \frac{\overline{r_A}}{dt} + \frac{\overline{AB}}{dt} = \overline{v_A}, \quad (2.62)$$

оскільки $\frac{\overline{AB}}{dt} = \overline{0}$.

Візьмемо диференціал за часом швидкості і отримаємо вираження $\overline{a_B} = \overline{a_A}$.

Отже, швидкості і прискорення всіх точок твердого тіла однакові. Що і потрібно було довести.

Поступальний рух твердого тіла повністю характеризується рухом однієї будь-якої його точки.

Тверде тіло при поступальному русі має три степені свободи.

Для задавання руху твердого тіла в Декартовій системі координат досить знати координати $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ будь-якої його точки.

Функції $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ називаються *рівняннями поступального руху твердого тіла*.

Обертання твердого тіла навколо нерухомої осі

Обертанням твердого тіла навколо нерухомої осі називається такий його рух, при якому дві точки тіла залишаються нерухомими протягом всього часу

руху (рисунок 2.16). При цьому також залишаються нерухомими всі точки тіла, розташовані на прямій, що проходить через його нерухомі точки. Ця пряма називається *віссю обертання тіла*.

Нехай точки А і В нерухомі. Вздовж осі обертання спрямуємо вісь Oz. Через вісь обертання проведемо нерухому площину Π_0 і рухо-

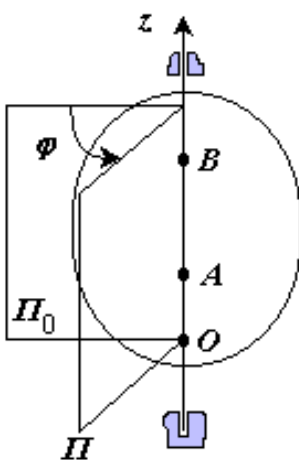


Рисунок 2.16 – Обертання твердого тіла навколо нерухомої осі (при $t = 0$ $\Pi \rightarrow \Pi_0$).

Положення площини Π і самого тіла визначається двограним кутом між площинами Π і Π_0 . Позначимо його φ . Кут φ називається **кутом повороту тіла**.

Положення тіла відносно вибраної системи відліку однозначно визначається у будь-який момент часу, якщо задано рівняння,

$$\varphi = f(t), \quad (2.63)$$

де $f(t)$ - будь-яка функція часу, що двічі диференціюється. Рівняння (2.63) називається **рівнянням обертання твердого тіла навколо нерухомої осі**.

У тіла, що здійснює обертання навколо нерухомої осі, одна ступень свободи, оскільки його положення визначається завданням тільки одного параметра – кута φ .

Кут φ вважається позитивним, якщо він відкладається проти годинникової стрілки, і негативним – в протилежному напрямі. Траєкторії точок тіла при його обертанні навколо нерухомої осі є кола, розташовані в площинах, перпендикулярних осі обертання.

Для характеристики обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі введемо поняття **кутової швидкості** і **кутового прискорення**.

Кутвою алгебраїчною швидкістю тіла в будь-який момент часу називається перша похідна за часом від кута повороту у цей момент, тобто

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}, \quad (2.64)$$

Кутлова швидкість є позитивною величиною при обертанні тіла проти годинникової стрілки, оскільки кут повороту зростає з часом, і негативною – при обертанні тіла за годинниковою стрілкою, тому що кут повороту при цьому убуває.

Розмірність кутової швидкості за визначенням: $[\omega] = \frac{\text{кут}}{\text{час}} = \frac{\text{рад}}{\text{с}} = \text{с}^{-1}$

У техніці кутлова швидкість – це частота обертання, виражена в оборотах за хвилину. За одну хвилину тіло обернеться на кут $\omega = 2 \cdot \pi \cdot n$,

$$(2.65)$$

де n - число обертів за хвилину.

Розділивши цей кут на число секунд у хвилині, отримаємо:

$$\omega_{c^{-1}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot n_{\text{об/хв}}}{60} = \frac{\pi \cdot n_{\text{об/хв}}}{30} \approx 0.1 \cdot n_{\text{об/хв}}, \quad (2.66)$$

Кутовим алгебраїчним прискоренням тіла називається перша похідна за часом від кутової швидкості, тобто друга похідна від кута повороту, тобто

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \quad (2.67)$$

Розмірність кутового прискорення за визначенням: $[\varepsilon] = \frac{\text{кут}}{\text{час}^2} = \frac{\text{рад}}{\text{с}^2} = \text{с}^{-2}$

Введемо поняття векторів кутової швидкості і кутового прискорення тіла.

$$\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{k} \quad \text{і} \quad \vec{\varepsilon} = \varepsilon \cdot \vec{k}, \quad (2.68)$$

де \vec{k} - одиничний вектор осі обертання.

Вектори $\vec{\omega}$ і $\vec{\varepsilon}$ можна зображати в будь-яких точках осі обертання, вони є ковзаючими векторами.

Кутова алгебраїчна швидкість - це проекція вектора кутової швидкості на вісь обертання. Кутове алгебраїчне прискорення - це проекція вектора кутового прискорення швидкості на вісь обертання (рисунок 2.17).

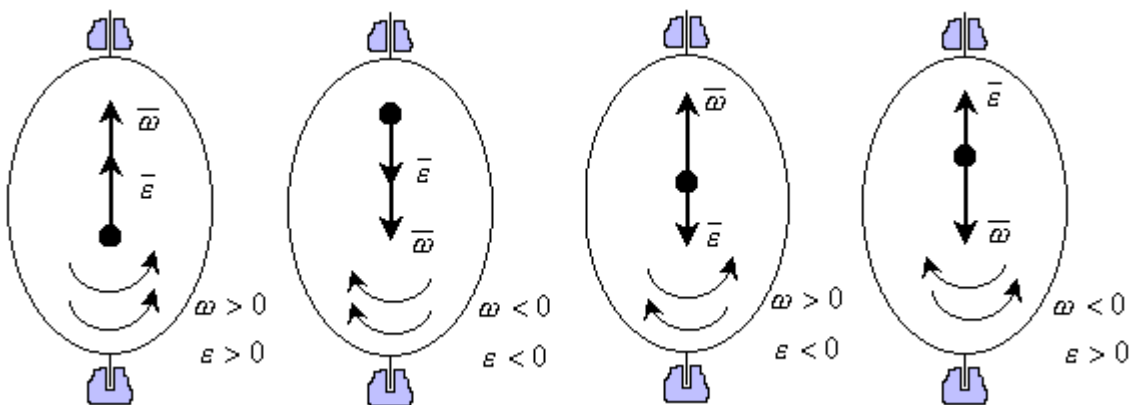


Рисунок 2.17 - Кутова швидкість та кутове прискорення тіла

Якщо $\varepsilon > 0$ при $\omega > 0$, то кутова алгебраїчна швидкість зростає з часом і, отже, тіло обертається прискорено в даний момент часу в позитивну сторону.

Напрями векторів $\vec{\omega}$ і $\vec{\varepsilon}$ співпадають, обидва вони направлені в позитивну сторону осі обертання Oz .

При $\varepsilon < 0$ і $\omega < 0$ тіло обертається прискорено в негативну сторону. Напрями векторів $\vec{\omega}$ і $\vec{\varepsilon}$ співпадають, обидва вони направлені в негативну сторону осі обертання Oz .

Якщо $\varepsilon < 0$ при $\omega > 0$, то маємо сповільнене обертання в позитивну сторону. Вектори $\vec{\omega}$ і $\vec{\varepsilon}$ направлені в протилежні сторони.

Якщо $\varepsilon > 0$ при $\omega < 0$, то маємо сповільнене обертання в негативну сторону. Вектори $\vec{\omega}$ і $\vec{\varepsilon}$ направлені в протилежні сторони.

Кутову швидкість і кутове прискорення на рисунках зображають дуговими стрілками навколо осі обертання (якщо не можна зобразити вектора) (рисунок 2.17). Дугова стрілка для кутової швидкості вказує напрям обертання тіла, а дугова стрілка для кутового прискорення – напрям, в якому збільшується кутова алгебраїчна швидкість. Для прискореного обертання дугові стрілки для кутової швидкості і кутового прискорення мають однакові напрями, для сповільненого їх напрями - протилежні(рисунок 2.17).

Окремі випадки обертання твердого тіла

Рівномірне обертання

Обертання називається рівномірним, якщо його кутова швидкість постійна, тобто $\omega = \text{const}$.

Оскільки $\frac{d\phi}{dt} = \omega$, то $d\phi = \omega \cdot dt$. Початкові умови: $t = t_0, \phi = \phi_0$, то після інтегрування отримаємо

$$\int_{\phi_0}^{\phi} d\phi = \omega \cdot \int_{t_0}^t dt, \quad \phi - \phi_0 = \omega \cdot (t - t_0), \quad (2.69)$$

$$\int_{\phi_0}^{\phi} d\phi = \omega \cdot \int_{t_0}^t dt, \quad \phi - \phi_0 = \omega \cdot (t - t_0), \quad (2.70)$$

Або

$$\phi = \omega \cdot (t - t_0) + \phi_0, \quad (2.71)$$

$$\omega = \frac{\varphi - \varphi_0}{(t - t_0)}, \quad (t - t_0) = \frac{\varphi - \varphi_0}{\omega}, \quad (2.72)$$

Обертання яке рівномірно змінюється

Обертання називається ***рівноприскореним***, якщо його кутове прискорення постійне і більше нуля, тобто $\varepsilon = \text{const} > 0$.

Обертання називається ***рівносповільненим***, якщо його кутове прискорення постійне і менше нуля, тобто $\varepsilon = \text{const} < 0$.

Оскільки $\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon$, то $d\omega = \varepsilon \cdot dt$. Початкові умови: $t = t_0$, $\varphi = \varphi_0$, $\omega = \omega_0$,

то після інтегрування отримаємо:

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \varepsilon \cdot \int_{t_0}^t dt, \quad \omega - \omega_0 = \varepsilon \cdot (t - t_0), \quad (2.73)$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \cdot (t - t_0), \quad (2.74)$$

Далі

$$d\varphi = \omega \cdot dt, \quad d\varphi = (\omega_0 + \varepsilon \cdot (t - t_0)) \cdot dt, \quad (2.75)$$

І після інтегрування

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int_{t_0}^t (\omega_0 + \varepsilon \cdot (t - t_0)) dt, \quad \varphi - \varphi_0 = \omega_0 \cdot (t - t_0) + \varepsilon \cdot \frac{(t - t_0)^2}{2}, \quad (2.76)$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 \cdot (t - t_0) + \varepsilon \cdot \frac{(t - t_0)^2}{2}, \quad (2.77)$$

2.5 Швидкість та прискорення точки тіла при обертанні

Швидкості та прискорення точок тіла при обертанні

Перейдемо до вивчення руху окремих точок твердого тіла. Відоме рівняння обертання твердого тіла навколо нерухомої осі $\varphi(t)$.

Розглянемо яку-небудь точку M твердого тіла, що знаходиться на відстані h від осі обертання.

При обертанні твердого тіла точка M описуватиме коло радіусу h , площина якої перпендикулярна осі обертання, а центр O лежить на самій осі (рисунки 2.18).

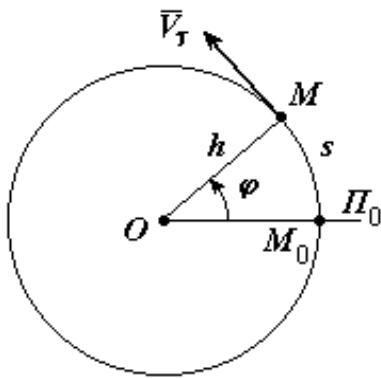


Рисунок 2.18 – Швидкість та прискорення точок тіла при обертання

Якщо за час dt відбувається елементарний поворот тіла на кут $d\varphi$, то точка M_0 при цьому здійснює вздовж своєї траєкторії елементарне переміщення $ds = h \cdot d\varphi$ в точку M .

Тоді алгебраїчна швидкість буде дорівнювати:

$$v_\tau = \frac{ds}{dt} = h \cdot \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{або} \quad v_\tau = h \cdot \omega, \quad (2.78)$$

Швидкість точки дорівнює $\bar{v} = v_\tau \cdot \bar{\tau}$.

Швидкість \bar{v} на відміну від кутової швидкості тіла називають іноді ще **лінійною** або **окружною швидкістю**.

Модуль швидкості дорівнює

$$v = h \cdot |\omega|, \quad (2.79)$$

Величини швидкостей точок тіла при його обертанні навколо нерухомої осі пропорційні найкоротшим відстаням від цих точок до осі. Коефіцієнтом пропорційності є кутова швидкість ω . Швидкості точок направлені по дотичним до траєкторій і, отже, перпендикулярні радіусам обертання.

Прискорення точки розкладаємо на дотичну і нормальну складові, тобто

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n, \quad (2.80)$$

Дотичне і нормальне прискорення обчислюються за формулами

$$a_\tau = \ddot{s} = h \cdot \ddot{\varphi} = h \cdot \varepsilon, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{h^2 \cdot \omega^2}{h} = h \cdot \omega^2, \quad (2.81)$$

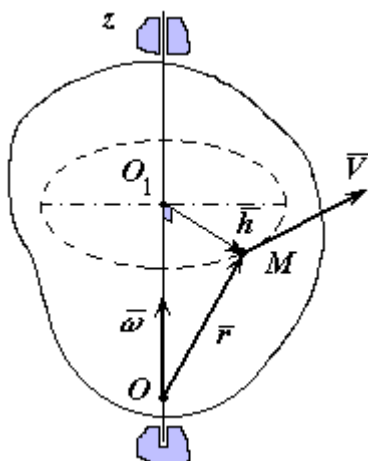
Таким чином, $a_n = h \cdot \omega^2$ і модуль прискорення обчислюється за формулою $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = h \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$.

Дотичні, нормальні і повні прискорення точок тіла при його обертанні навколо нерухомої осі, як і швидкості, так само пропорційні найкоротшим відстаням від цих точок до осі. Нормальне прискорення направлене по радіусу кола

до осі обертання. Напрямок дотичного прискорення залежить від знаку кутового прискорення.

Векторні швидкості та прискорення точок тіла

Швидкість точки по модулю і напрямку можна представити векторним добутком



$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (2.82)$$

де \vec{r} - радіус-вектор точки M, проведений з довільної точки осі обертання Oz.

Цей вираз називається **векторною формулою Ейлера**.

Доказ. Вектор $\vec{\omega} \times \vec{r}$ перпендикулярний площині, в якій розташовані вектори $\vec{\omega}$ і \vec{r} , отже, по напрямку він співпадає з швидкістю \vec{v} .

Модуль векторного добутку

$$|\vec{\omega} \times \vec{r}| = \omega \cdot r \cdot \sin(\angle(\vec{\omega}, \vec{r})) = \omega \cdot h = v, \quad (2.83)$$

Рисунок 2.19 – Векторні швидкості та прискорення точок тіла

Таким чином, векторний добуток $\vec{\omega} \times \vec{r}$ по модулю і напрямку визначає швидкість точки.

Визначимо прискорення точки. Візьмемо диференціал від формули Ейлера.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}, \quad (2.84)$$

Або

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}, \quad (2.85)$$

Перший доданок є дотичним прискоренням, а другий – нормальним.

$$\vec{a}_\tau = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}, \quad (2.86)$$

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -\vec{h} \cdot \omega^2, \quad (2.87)$$

Зіставлення двох формул для швидкості точки ($\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}$ і $\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}$) дає формулу для обчислення похідної за часом від вектора \bar{r} : $\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{r}$.

У цій формулі вектор \bar{r} має постійний модуль, оскільки сполучає весь час дві точки твердого тіла.

Складний рух точки

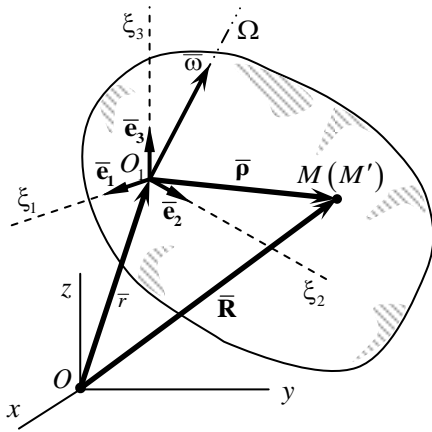


Рисунок 2.20 – Складний рух точки

У багатьох завданнях рух точки доводиться розглядати відносно двох (і більш) систем відліку, рухомих один відносно одного (рисунок 2.20). У простому випадку складний рух точки складається з **відносного** і **переносного рухів**.

Основні поняття

Визначимо ці рухи. Розглянемо дві системи відліку рухомі один відносно одного. Одну систему відліку $Oxyz$ прийемо за основну і нерухому. Друга система відліку $O_1\xi_1\xi_2\xi_3$ рухатиметься відносно першої.

Рух точки відносно рухомої системи відліку $O_1\xi_1\xi_2\xi_3$ називається **відносним**. Характеристики цього руху, такі як траєкторія, швидкість і прискорення, називаються **відносними**. Їх позначають індексом r .

Рух точки відносно основної нерухомої системи відліку $Oxyz$ називається **абсолютним** (або складним). Траєкторія, швидкість і прискорення цього руху називаються **абсолютними**. Їх позначають без індексу.

Переносним рухом точки називається рух, який вона здійснює разом з рухомою системою відліку як точка, що жорстко скріплена з цією системою в даний момент часу. Внаслідок відносного руху рухома точка в різні моменти часу співпадає з різними точками тіла, з яким скріплена рухома система відліку. **Переносною** швидкістю і **переносним** прискоренням є швидкість і прискорення.

рення тієї точки тіла, з якою в даний момент співпадає рухома точка. Переносну швидкість і прискорення позначають індексом e .

Якщо траєкторії всіх точок тіла, що скріплюються з рухомою системою відліку зобразити на рисунку, то отримаємо сімейство ліній – сімейство траєкторій переносного руху точки M . Внаслідок відносного руху точки M в кожен момент часу вона знаходиться на одній з траєкторій переносного руху.

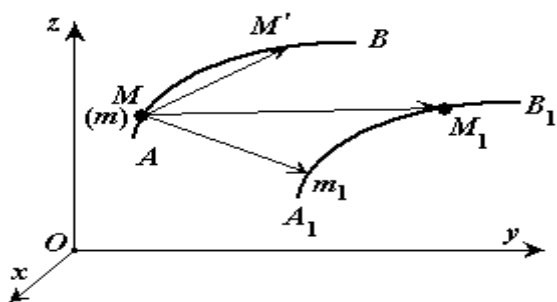
Один і той же абсолютний рух, вибираючи різні рухомі системи відліку, можна вважати таким, що складається з різних переносних і відповідно відносних рухів.

Приклад.

Розглянемо круглий диск, який обертається з постійною кутовою швидкістю навколо осі, перпендикулярної площині диска. На диску є канавка, направлена вздовж радіуса диска. Вздовж канавки переміщається матеріальна точка. Матеріальна точка здійснює складний рух. Рух точки відносно нерухомої системи відліку є абсолютним. Рухому систему відліку жорстко пов'яжемо з диском, що обертається, одну з осей (наприклад, x) направимо вздовж канавки. Рух точки вздовж осі x буде відносним, рух точки разом з рухомою системою відліку (разом з диском) буде переносним рухом.

Складання швидкостей

Визначимо швидкість абсолютного руху точки M , якщо відомі швидкості



абсолютного і переносного рухів цієї точки (рисунок 2.21).

За малий проміжок часу dt вздовж траєкторії AB точка M зробить відносне переміщення, визначуване вектором $\overline{MM'}$. Сама крива, рухаючись разом з рухомими осями, перейде за

Рисунок 2.21 – Складання швидкостей

той же проміжок часу в нове положення A_1B_1 . Одночасно та точка m кривої, з якою співпадала точка M зробить переносне переміщення $\overline{mm_1} = \overline{Mm_1}$. В результаті точка M зробить переміщення $\overline{MM_1}$.

$$\overline{MM_1} = \overline{Mm_1} + \overline{MM'}, \quad (2.88)$$

Ділячи обидві частини рівності на dt і переходячи до межі, отримаємо:

$$\overline{v} = \overline{v_e} + \overline{v_r}, \quad (2.89)$$

Складання прискорень при поступальному переносному русі

Визначимо прискорення абсолютного руху точки в окремому випадку поступальної переносної ходи.

Справедлива теорема $\overline{v} = \overline{v_e} + \overline{v_r}$. Якщо рухома система відліку $O_1\xi_1\xi_2\xi_3$ рухається поступально відносно нерухомої $Oxyz$, то всі точки тіла, що скріпляються з цією системою, мають однакові швидкості і прискорення, рівні швидкості і прискоренню початку координат рухомої системи O . Отже, для швидкості і прискорення переносного руху маємо

$$\overline{v_e} = \overline{v_0}, \quad \overline{a_e} = \overline{a_0}, \quad (2.90)$$

Виразимо відносну швидкість в Декартових координатах

$$\overline{v_r} = \dot{x} \cdot \bar{i} + \dot{y} \cdot \bar{j} + \dot{z} \cdot \bar{k}, \quad (2.91)$$

Підставляючи в теорему про складання швидкостей значення переносної і відносної швидкостей, отримуємо

$$\overline{v} = \overline{v_0} + \dot{x} \cdot \bar{i} + \dot{y} \cdot \bar{j} + \dot{z} \cdot \bar{k}, \quad (2.92)$$

За визначенням

$$\overline{a} = \frac{d}{dt} \overline{v} = \frac{d}{dt} (\overline{v_0} + \dot{x} \cdot \bar{i} + \dot{y} \cdot \bar{j} + \dot{z} \cdot \bar{k}), \quad (2.93)$$

$$\overline{a} = \frac{d\overline{v_0}}{dt} + \ddot{x} \cdot \bar{i} + \ddot{y} \cdot \bar{j} + \ddot{z} \cdot \bar{k}, \quad \frac{d\overline{v_0}}{dt} = \overline{a_0}, \quad \overline{a_r} = \ddot{x} \cdot \bar{i} + \ddot{y} \cdot \bar{j} + \ddot{z} \cdot \bar{k}, \quad (2.94)$$

Отже

$$\overline{a} = \overline{a_e} + \overline{a_r}, \quad (2.95)$$

Абсолютне прискорення точки при поступальному переносному русі дорівнює векторній сумі прискорень переносного і відносного рухів.

$$a = \sqrt{a_e^2 + a_r^2 + 2 \cdot a_e \cdot a_r \cdot \cos(\overline{a_e}, \overline{a_r})}, \quad (2.96)$$

Остаточне абсолютне прискорення можна визначити як результат складання переносного, відносного і Коріолісова прискорень:

$$\bar{a} = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_c, \quad (2.97)$$

ПРИСКОРЕННЯ КОРІОЛІСА З'ЯВЛЯЄТЬСЯ ПО НАСТУПНИХ ПРИЧИНАХ:

- із-за зміни переносній швидкості у відносному русі (рисунок 2.22 а)
- із-за зміни відносній швидкості в переносному русі (рисунок 2.22 б).

$$\bar{a}_c \approx \frac{\Delta \bar{v}^*}{\Delta t} = \frac{\Delta \bar{v}_e^* + \Delta \bar{v}_r^*}{\Delta t}, \quad (2.98)$$

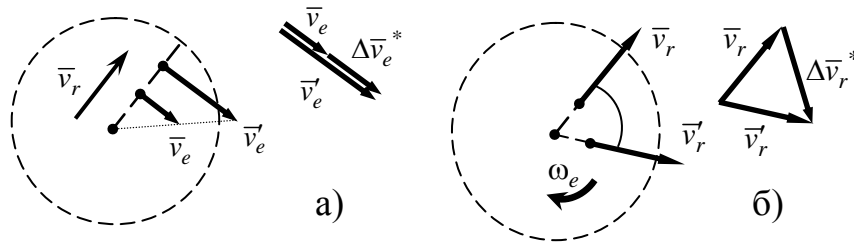


Рисунок 2.22 - Прискорення Коріоліса

Розглянемо докладніше алгоритм обчислення Коріолісова прискорення. З визначення векторного твору виходить, що вектор прискорення Коріоліса направлений перпендикулярно векторам - співмножникам $\bar{\omega}_e$ і \bar{v}_r , причому обертання першого з них $\bar{\omega}_e$ вироблюване по найкоротшому шляху до другого співмножника \bar{v}_r повинно спостерігатися з вістря вектора-результату що відбувається в напрямі проти годинникової стрілки.

Модуль прискорення Коріоліса визначається по формулі:

$$a_c = 2 \omega_e v_r \sin(\bar{\omega}_e, \bar{v}_r), \quad (2.99)$$

і, отже, $\bar{a}_c = 0$ в наступних випадках:

$\bar{\omega}_e = 0$ при переносному поступальному русі;

$\bar{v}_r = 0$ при відносному спокої;

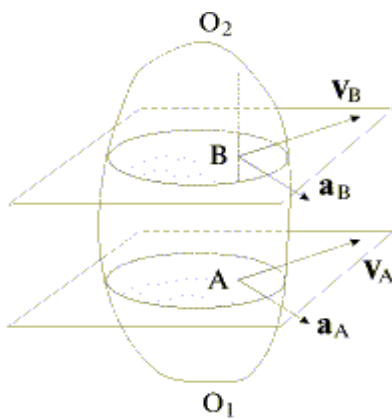
$\sin(\bar{\omega}_e, \bar{v}_r)$ у тому випадку, коли кут між векторами відносної швидкості і переносної кутової швидкості рівний 0 або 180

градусів.

2.6 Плоский рух твердого тіла. Рівняння плоского руху

Плоским рухом твердого тіла називається такий його рух, при якому кожна його точка весь час рухається в одній і тій же площині.

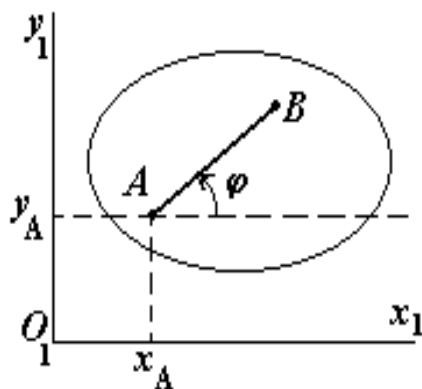
Площини, в яких рухаються окремі точки тіла паралельні між собою і паралельні одній і тій же нерухомій площині. Плоский рух твердого тіла часто називають плоско-паралельним. Траєкторії точок тіла при плоскому русі є плоскими кривими.



Плоский рух твердого тіла має велике значення в техніці. Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі є окремим випадком руху твердого тіла.

При вивченні плоского руху, як і будь-якого іншого необхідно розглянути способи задання цього руху, а також прийоми обчислення швидкостей і прискорень точок тіла.

Якщо в тілі провести деяку пряму O_1O_2 , перпендикулярну площинам, в яких відбувається рух точок, то всі точки цієї прямої рухатимуться по однаковим траєкторіям з однаковими швидкостями і прискореннями; сама пряма буде, природно, зберігати свою орієнтацію в просторі. Таким чином, при плоскому русі твердого тіла досить розглянути рух один з перетинів тіла.



Перетин твердого тіла називатимемо плоскою фігурою. Положення фігури на її площині повністю визначається положенням відрізка прямої лінії, що жорстко скріплюється з цією плоскою фігурою.

Рівняння плоского руху твердого тіла

Рисунок 2.24 – Рівняння плоского руху твердого тіла

Для завдання положення плоскої фігури на площині відносно системи координат $O_1x_1y_1$, яка лежить в площині фігури досить задати на цій площині положення відрізка АВ, що скріплюється з фігурою (рисунок 2.24).

Положення відрізка АВ відносно системи координат $O_1x_1y_1$ визначається завданням координат будь-якої точки цього відрізка і його напрямку. Наприклад, координати точки А (x_A, y_A) і напрям, заданий кутом φ .

Рівняння руху плоскої фігури відносно системи координат $O_1x_1y_1$ мають вигляд: $x_A = x_A(t), y_A = y_A(t), \varphi = \varphi(t)$.

Тверде тіло при плоскому русі має три степені свободи.

Функції

$$x_A = x_A(t), y_A = y_A(t), \varphi = \varphi(t), \quad (2.100)$$

називаються *рівняннями плоского руху твердого тіла*.

Перейдемо до вивчення руху окремої точки твердого тіла. Положення будь-якої точки М плоскої фігури відносно рухомої системи відліку Oxy , що скріплюється з цією рухомою фігурою і яка лежить в її площині, повністю визначається завданням координат x і y точки М (рисунок 2.25).

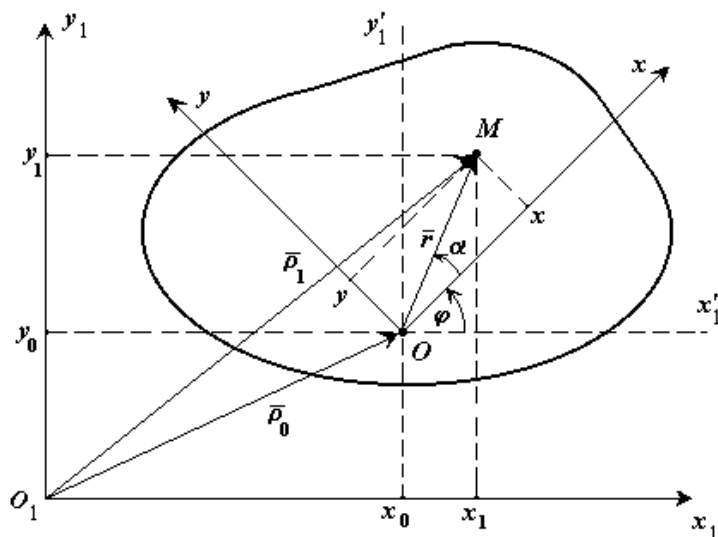


Рисунок 2.25 – Розрахункова схема

Між координатами точки М в різних системах відліку існує зв'язок:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_0 + r \cdot \cos(\alpha + \phi) \\ y_1 &= y_0 + r \cdot \sin(\alpha + \phi) \end{aligned} \right\}, \quad (2.101)$$

де r - довжина відрізка OM ,

α - постійний кут між OM і віссю Ox .

З урахуванням виразів $r \cdot \cos(\alpha) = x$ і $r \cdot \sin(\alpha) = y$ отримуємо:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_0 + x \cdot \cos(\phi) - y \cdot \sin(\phi) \\ y_1 &= y_0 + x \cdot \sin(\phi) + y \cdot \cos(\phi) \end{aligned} \right\}, \quad (2.102)$$

Формули (2.102) є рівняннями руху точки M плоскої фігури відносно координат $O_1x_1y_1$. Ці формули дозволяють визначити координати будь-якої точки плоскої фігури по заданих рівняннях руху цієї фігури і координатах цієї точки відносно рухомої системи відліку, що скріплюється з рухомою фігурою.

Використовуючи векторні для матриці позначення, рівняння (2.102) можна записати в такій формі:

$$\bar{\rho}_1 = \bar{\rho}_0 + A \cdot \bar{r}, \quad (2.103)$$

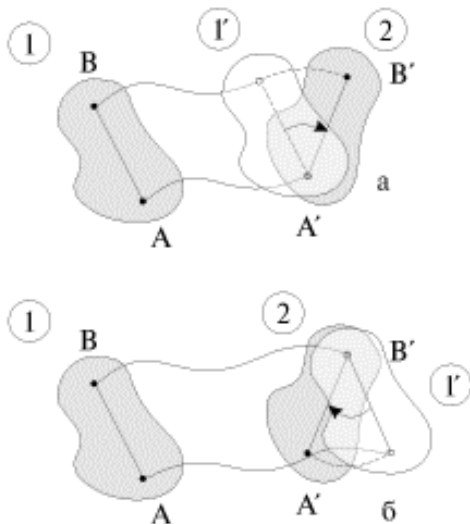
де A – матриця повороту на площині:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}, \quad \bar{\rho}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\rho}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad \bar{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (2.104)$$

Розкладання плоского руху на поступальні і обертальні рухи

Теорема. Будь-який рух твердого тіла, у тому числі і рух плоскої фігури в її площині, безліччю способів можна розкласти на два рухи, один з яких переносний, а другий – відносний.

Зокрема, рух плоскої фігури в її площині відносно системи, розташованої



в тій же площині, можна розкласти на переносний і відносний рухи таким чином. Прийmemo за переносний рух фігури її рух разом з поступально рухомою системою координат $Ox'_1y'_1$, початок якої скріплюється з точкою O фігури, прийнятою за полюс. Тоді відносний рух фігури буде по відношенню до рухомої системи координат $Ox'_1y'_1$ обертанням навколо рухомої осі,

Рисунок 2.26 – Розкладання плоского руху на поступальні і обертальні рухи

перпендикулярній плоскій фігурі, що проходить через вибраний полюс.

Для доказу цього досить показати, що плоску фігуру в її площині з одного положення в будь-яке інше можна перевести двома переміщеннями – поступальним переміщенням в площині фігури разом з будь-яким полюсом і поворотом в тій же площині навколо цього полюса.

Розглянемо два будь-яких положення плоскої фігури 1 і 2 (рисунок 2.26). Виділимо відрізок АВ в даній фігурі.

Перехід фігури з положення 1 в положення 2 можна розглядати як суперпозицію двох рухів: поступального з 1 в 1' і обертального з 1' в 2 навколо точки А', званої зазвичай полюсом (рисунок 2.26а). Істотно, що як полюс можна вибрати будь-яку точку, що належить фігурі або навіть лежачу в площині поза фігурою. На рисунку 2.26б, наприклад, як полюс вибрана точка В. Зверніть увагу: довжина шляху при поступальному переміщенні змінилася (в даному випадку збільшилася), але кут повороту залишився тим самим.

Кутова швидкість і кутове прискорення тіла при плоскому русі

Для характеристики обертальної частини плоского руху твердого тіла навколо рухомої осі, що проходить через вибраний полюс, вводиться поняття кутової швидкості $\bar{\omega}$ і кутового прискорення $\bar{\varepsilon}$.

$$\bar{\omega} = \omega \cdot \bar{k} \text{ і } \bar{\varepsilon} = \varepsilon \cdot \bar{k}, \quad (2.105)$$

де \bar{k} - одиничний вектор, направлений по осі обертання.

Якщо кут повороту навколо рухомої осі, що проходить через полюс позначити φ , то

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \text{ а } \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \quad (2.106)$$

Вектори $\bar{\omega}$ і $\bar{\varepsilon}$ можна зображати в будь-яких точках рухомої осі обертання, тобто вони є вільними векторами.

Швидкості точок тіла при плоскому русі

Теорема. Швидкість будь-якої точки фігури при її плоскому русі дорівнює векторній сумі швидкості полюса і відносної швидкості цієї точки від обертання фігури навколо полюса.

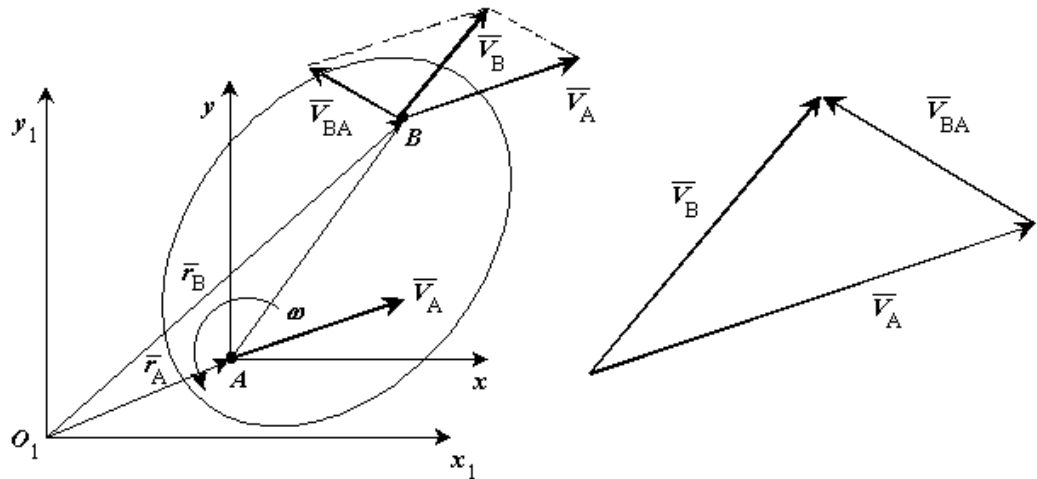


Рисунок 2.27 - Кутова швидкість і кутове прискорення тіла при плоскому русі

Застосовуючи до плоского руху теорему про складання швидкостей для будь-якої точки В фігури, отримуємо:

$$\overline{v_B} = \overline{v_{Be}} + \overline{v_{Br}}, \quad (2.107)$$

де $\overline{v_B}$ - абсолютна швидкість точки В плоскої фігури;

$\overline{v_{Be}}$ - швидкість точки В переносного поступального руху плоскої фігури разом, наприклад, з точкою А цієї фігури;

$\overline{v_{Br}}$ - швидкість точки В у відносному русі, яким є обертання плоскої фігури навколо точки А з кутовою швидкістю ω .

Оскільки за переносний рух вибрана поступальна хода разом з точкою А, то у всіх точок плоскої фігури однакові переносні швидкості, які співпадають з абсолютною швидкістю точки А, тобто $\overline{v_{Be}} = \overline{v_A}$.

Швидкість відносного руху, у разі, коли воно є обертальним рухом, дорівнює: $v_{Br} = \omega \cdot AB$.

Швидкість $\overline{v_{Br}}$ розташована в площині рухомої фігури і направлена перпендикулярно відрізку АВ, що сполучає точку В з полюсом А. Цю відносну швидкість можна виразити у вигляді векторного добутку $\overline{v_{Br}} = \overline{\omega} \times \overline{AB}$, де куто-

ва швидкість $\vec{\omega}$ вважається направленою по рухомій осі обертання, що проходить через точку А і перпендикулярній площині фігури. Відносну швидкість \vec{v}_{Br} позначимо \vec{v}_{BA} . Це позначення показує, що швидкість відносного руху точки В виходить від обертання плоскої фігури навколо рухомої осі, що проходить через точку А, або просто навколо точки А.

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}, \quad (2.108)$$

де $v_{BA} = \omega \cdot AB$. Що і потрібно було довести.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ДО РОЗДІЛУ 2

- 1 Способи завдання руху точки?
- 2 Як визначається миттєва швидкість?
- 3 Як визначається середня швидкість?
- 4 Основні кінематичні характеристики обертального руху?
- 5 Як визначається миттєва кутова швидкість?
- 6 Як визначається середня кутова швидкість?
- 7 Як визначається миттєве кутове прискорення?
- 8 Як визначається середнє кутове прискорення?
- 9 У якому випадку напрям кутового прискорення співпадає з напрямом обертання?
- 10 У якому випадку напрям кутового прискорення не співпадають з напрямом обертання?
- 11 У якому випадку кутове прискорення рівне нулю?
- 12 Як визначається окружна швидкість при обертальному русі?
- 13 Яка направлена окружна швидкість при обертанні?
- 14 Як визначається нормальна складова прискорення при обертанні?
- 15 Як визначається тангенціальна складова прискорення при обертанні?
- 16 Як визначається кутова швидкість при відомому числі оборотів?
- 17 Як направлено нормальне прискорення при обертанні?
- 18 Як направлено дотичне прискорення при обертанні?

19 Як визначається сумарне прискорення при обертанні?

РОЗДІЛ 3. ДИНАМІКА

3.1 Вступ в динаміку. Аксиоми класичної механіки. Диференціальні рівняння руху точки

У динаміці вивчаються механічні рухи матеріальних об'єктів під дією сил. Простим матеріальним об'єктом є матеріальна точка.

Матеріальна точка - це модель матеріального тіла будь-якої форми, розмірами якого можна нехтувати і прийняти за геометричну точку, що має певну масу.

Складніші матеріальні об'єкти – **механічні системи** і **тверді тіла** складаються з набору матеріальних точок.

Рух матеріальних об'єктів завжди відбувається в просторі відносно певної системи відліку і в часі. Простір вважається тривимірним евклідовим простором, властивості якого не залежать від рухомих в ньому матеріальних об'єктів.

Час в класичній механіці не пов'язаний з простором і рухом матеріальних об'єктів. У всіх системах відліку рухомих один відносно другого воно протікає однаково.

Аксиоми класичної механіки

Перша аксіома або закон інерції.

Матеріальна точка, на яку не діють сили або діє рівноважна система сил володіє здатністю зберігати свій стан спокою або рівномірного і прямолінійного руху відносно інерційної системи відліку.

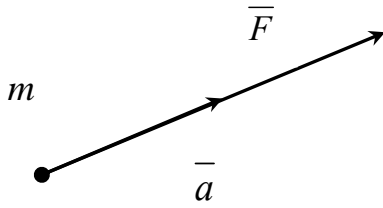
Матеріальна точка, на яку діє рівноважна система сил називається **ізолюваною матеріальною точкою**.

Рівномірний і прямолінійний рух точки називається **рухом за інерцією**.

Друга аксіома або основний закон динаміки.

Прискорення матеріальної точки відносно інерційної системи відліку пропорційно прикладеній до точки сили і направлено по цій силі.

$$m \cdot \bar{a} = \bar{F}, \quad (3.1)$$



Позитивний коефіцієнт пропорційності m , характеризує інертні властивості матеріальної точки і називається **масою точки** (рисунок 3.1).

Рисунок 3.1 – Друга аксіома або основний закон динаміки

Маса не залежить від характеристик руху точки і від природи сил. Маса вважається постійною величиною і залежить тільки від самої матеріальної точки.

Сила, прикладена до матеріальної точки, завжди має матеріальне джерело у вигляді інших матеріальних тіл, які діють на точку шляхом контакту при безпосередньому зіткненні з нею або на відстані.

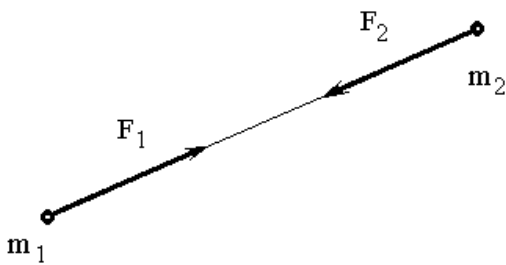


Рисунок 3.2 – Третя аксіома або закон про рівність сил дії і протидії.

Третя аксіома або закон про рівність сил дії і протидії.

Сили взаємодії двох матеріальних точок рівні по величині і протилежні за напрямом (рисунок 3.2):

$$\bar{F}_1 = -\bar{F}_2, \quad (3.2)$$

Четверта аксіома або закон незалежної дії сил

При одночасній дії на матеріальну точку декількох сил прискорення точки відносно інерційної системи відліку від дії кожної окремої сили не залежить від наявності інших, прикладених до точки, сил і повне прискорення дорівнює векторній сумі прискорень від дії окремих сил.

$$m \cdot \bar{a}_i = \bar{F}_i; \quad \bar{a} = \sum_i \bar{a}_i, \quad (3.3)$$

Аксіоми класичної механіки добре узгоджуються з результатами дослідів.

Диференціальні рівняння руху точки

Основне рівняння динаміки

$$m \cdot \bar{a} = \bar{F}, \quad (3.4)$$

можна записати так $m \cdot \frac{d^2 \bar{\mathbf{r}}}{dt^2} = \bar{\mathbf{F}}$ або так $m \cdot \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} = \bar{\mathbf{F}}$

Проектуючи рівняння $m \cdot \bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{F}}$ на осі координат отримуємо

$$m \cdot a_x = F_x; \quad m \cdot a_y = F_y; \quad m \cdot a_z = F_z, \quad (3.5)$$

оскільки $a_x = \ddot{x}; \quad a_y = \ddot{y}; \quad a_z = \ddot{z}$, то

$$m \cdot \ddot{x} = F_x; \quad m \cdot \ddot{y} = F_y; \quad m \cdot \ddot{z} = F_z, \quad (3.6)$$

Окремі випадки:

а) Точка рухається в площині. Вибираємо в площині координати xOy , отримуємо

$$m \cdot \ddot{x} = F_x; \quad m \cdot \ddot{y} = F_y; \quad F_z \equiv 0, \quad (3.7)$$

б) Точка рухається по прямій. Вибираємо на прямій координату Ox , отримуємо

$$m \cdot \ddot{x} = F_x; \quad F_y \equiv 0; \quad F_z \equiv 0, \quad (3.8)$$

Основне рівняння динаміки $m \cdot \bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{F}}$ можна спроектувати на природні рухомі осі:

$$m \cdot a_\tau = F_\tau; \quad m \cdot a_n = F_n; \quad m \cdot a_b = F_b, \quad (3.9)$$

$$a_\tau = \frac{d^2 s}{dt^2}; \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}; \quad a_b \equiv 0, \quad (3.10)$$

Ця форма рівнянь зручна для дослідження деяких випадків польоту снарядів і ракет.

Основні завдання динаміки

Перше або пряме завдання:

Відома маса (m) точки і закон її руху, необхідно знайти силу, що діє на точку.

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t); \quad z = f_3(t), \quad (3.11)$$

Обчислюємо другі похідні за часом від координат точки, множимо їх на масу і отримуємо проекції сили на осі координат

$$F_x = m \cdot \ddot{x} = m \cdot f_1''(t); \quad F_y = m \cdot \ddot{y} = m \cdot f_2''(t); \quad F_z = m \cdot \ddot{z} = m \cdot f_3''(t), \quad (3.12)$$

Знаючи проекції сили на осі координат, визначуваний модуль сили і її напрямляючі косинуси:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}; \quad \cos \alpha = \frac{F_x}{F}; \quad \cos \beta = \frac{F_y}{F}; \quad \cos \gamma = \frac{F_z}{F} \quad (3.13)$$

Приклад 3.1: Рух точки в площині xOy визначається рівняннями:

$$x(t) = a \cdot \cos(\omega \cdot t);$$

$$y(t) = b \cdot \sin(\omega \cdot t);$$

де $a, b, \omega - \text{const}$; $t - \text{час}$.

Рішення: $F_x = m \cdot \ddot{x} = -m \cdot a \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t);$

$$F_y = m \cdot \ddot{y} = -m \cdot \omega^2 \cdot b \cdot \sin(\omega \cdot t);$$

$$F_x = -m \cdot \omega^2 \cdot x; \quad F_y = -m \cdot \omega^2 \cdot y.$$

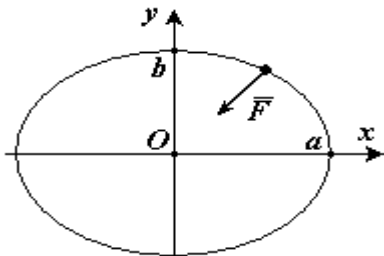


Рисунок 3.3 – Проекції сили на осі координат

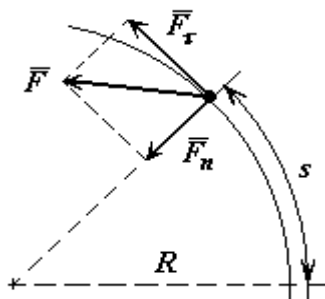
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \quad - \text{рівняння траєкторії в координатній формі (еліпс).}$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = m \cdot \omega^2 \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\bar{F} = -m \cdot \omega^2 \cdot \bar{r}; \quad \cos(\bar{F}, x) = \frac{F_x}{F} = -\frac{x}{r}, \quad \cos(\bar{F}, y) = \frac{F_y}{F} = -\frac{y}{r}$$

Приклад 3.2: Точка, що має масу m рухається із стану спокою по колу радіусу R з постійним дотичним прискоренням a_τ . Визначити силу, що діє на точку в мить, коли вона пройде по траєкторії відстань $s_1 = R\sqrt{2}$.

Рішення: Застосовуючи диференціальні рівняння руху точки в проекціях на природні осі, маємо:



$$F_\tau = m \cdot a_\tau; \quad F_n = m \cdot \frac{v^2}{R}; \quad F_b = 0;$$

Оскільки $a_\tau = \text{const}$,

$$\text{то } v_\tau = a_\tau \cdot t \quad s = \frac{a_\tau \cdot t^2}{2}$$

$$F_\tau = m \cdot a_\tau; \quad F_n = m \cdot \frac{(a_\tau \cdot t)^2}{R};$$

Рисунок 3.4 – Розрахункова схема

$$F = \sqrt{F_\tau^2 + F_n^2} = m \cdot a_\tau \cdot \sqrt{1 + \frac{a_\tau^2 \cdot t^4}{R^2}}$$

$$s_1 = \frac{a_\tau \cdot t_1^2}{2} = R\sqrt{2}; \quad \text{отже} \quad t_1^2 = \frac{2R\sqrt{2}}{a_\tau};$$

$$\frac{a_\tau^2 \cdot t_1^4}{R^2} = a_\tau^2 \cdot \frac{8 \cdot R^2}{a_\tau^2 \cdot R^2} = 8; \quad \text{отже}$$

$$F(t_1) = m \cdot a_\tau \cdot \sqrt{1+8} = 3 \cdot m \cdot a_\tau$$

$$F(t_1) = 3 \cdot m \cdot a_\tau$$

Друге або зворотнє завдання:

Відома маса точки і сила, що діє на точку, необхідно визначити закон руху цієї точки.

Розглянемо рішення цієї задачі в Декартовій системі координат. Сила залежить від часу, координат точки, її швидкості та інших причин.

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}),$$

$$m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \quad (3.14)$$

$$m \cdot \frac{d^2z}{dt^2} = F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

З теорії звичайних диференціальних рівнянь відомо, що вирішення одного диференціального рівняння другого порядку містить дві довільні постійні.

Для випадку системи трьох звичайних диференціальних рівнянь другого порядку є шість довільних постійних: $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$

Кожна з координат x, y, z рухомої точки після інтеграції системи рівнянь залежить від часу і всіх шести довільних постійних, тобто

$$x = f_1(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6)$$

$$y = f_2(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \quad (3.15)$$

$$z = f_3(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6)$$

До цих рівнянь необхідно додати початкові умови:

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0, \quad z(t_0) = z_0, \quad (3.16)$$

$$\dot{x}(t_0) = v_{x0}, \quad \dot{y}(t_0) = v_{y0}, \quad \dot{z}(t_0) = v_{z0}, \quad (3.17)$$

Використовуючи ці початкові умови можна отримати шість алгебраїчних рівнянь для визначення шести довільних постійних $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$.

Основні види прямолінійного руху точки

Диференціальне рівняння прямолінійного руху точки вздовж осі Ox має вигляд:

$$m \cdot \ddot{x} = F_x(t, x, \dot{x}), \quad (3.18)$$

Початкові умови $x(t_0) = x_0; \quad \dot{x}(t_0) = v_{x0}$.

Найбільш важливі випадки

1 *Сила постійна* $F_x = \text{const}; \quad m \cdot \ddot{x} = \text{const}; \quad \ddot{x} = \text{const}.$

Маємо рух який рівномірно змінюється (рух з постійним прискоренням)

2 *Сила залежить від часу* $F_x = F_x(t); \quad m \cdot \ddot{x} = F_x(t)$

$$\dot{x} = \frac{1}{m} \cdot \int_0^t F_x(t) dt; \quad \ddot{x} = \frac{1}{m} \cdot \int_0^t \left(\int_0^t F_x(t) dt \right) dt, \quad (3.19)$$

3 *Сила залежить від координати або швидкості*

Сила, залежна від координати $-F_x(x)$, створює пружні тіла при їх деформації (наприклад, стисла або розтягнута пружина) $-F_x = F_x(t)$

Сила, залежна від швидкості руху $-F_x(v)$ це сила опору (повітря, води і так далі).

У цих випадках рішення задачі спрощується.

3.2 Загальні теореми динаміки точки

Для вирішення багатьох завдань динаміки замість безпосереднього інтегрування диференціальних рівнянь руху, виявляється ефективнішим користуватися так званими загальними теоремами, які є наслідком основного закону динаміки.

Кількість руху точки

Кількістю руху матеріальної точки \bar{q} називається вектор, який дорівнює добутку маси точки m на її швидкість \bar{v} .

$$\bar{q} = m \cdot \bar{v}, \quad (3.20)$$

Кількість руху точки у фізиці часто називають **імпульсом матеріальної точки**.

Проекції кількості руху точки на прямокутні Декартові осі координат дорівнюють:

$$q_x = m \cdot v_x = m \cdot \dot{x}, \quad q_y = m \cdot v_y = m \cdot \dot{y}, \quad q_z = m \cdot v_z = m \cdot \dot{z}, \quad (3.21)$$

Одиницею вимірювання кількості руху в СІ є $1 \text{ кг} \cdot \text{м} / \text{с} = 1 \text{ Н} \cdot \text{с}$

Елементарний і повний імпульс сили

Дія сили \bar{F} на матеріальну точку в перебігу часу dt можна охарактеризувати **елементарним імпульсом сили** $d\bar{S} = \bar{F} \cdot dt$.

Повний імпульс сили \bar{F} за час t , або імпульс сили \bar{S} , визначається по формулі $\bar{S} = \int_0^t \bar{F} dt$. (Повний інтеграл за час t від елементарного імпульсу).

В окремому випадку, якщо сила \bar{F} постійна і по величині і за напрямом ($\bar{F} = \text{const}$), $\bar{S} = \bar{F} \cdot t$.

Проекції імпульсу сили на прямокутні Декартові осі координат дорівнюють:

$$\bar{S}_x = \int_0^t \bar{F}_x dt; \quad \bar{S}_y = \int_0^t \bar{F}_y dt; \quad \bar{S}_z = \int_0^t \bar{F}_z dt, \quad (3.22)$$

Одиницею вимірювання імпульсу в СІ є $1 \text{ Н} \cdot \text{с}$

Теорема про зміну кількості руху точки

Теорема. Похідна за часом від кількості руху точки дорівнює силі, що діє на точку.

Запишемо основний закон динаміки у вигляді

$$\mathbf{m} \cdot \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} = \bar{\mathbf{F}}, \quad (3.23)$$

Оскільки маса постійна, то внесемо її під знак похідної. Тоді

$$\frac{d(\mathbf{m} \cdot \bar{\mathbf{v}})}{dt} = \bar{\mathbf{F}}, \quad (3.24)$$

що і потрібно було довести.

У проекціях на координатні осі рівняння (3.19) можна представити у вигляді:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{m} \cdot \bar{v}_x) = \bar{F}_x; \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{m} \cdot \bar{v}_y) = \bar{F}_y; \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{m} \cdot \bar{v}_z) = \bar{F}_z, \quad (3.25)$$

Теорема імпульсів (у диференціальній формі). Диференціал від кількості руху точки дорівнює елементарному імпульсу сили, що діє на точку.

Помножимо ліву і праву частини рівняння (3.25) на dt і отримаємо:

$$d(\mathbf{m} \cdot \bar{\mathbf{v}}) = d\bar{\mathbf{F}} \cdot dt = d\bar{\mathbf{S}}, \quad (3.26)$$

У проекціях на координатні осі отримуємо:

$$\begin{aligned} d(\mathbf{m} \cdot \bar{v}_x) &= d\bar{F}_x \cdot dt = d\bar{S}_x; \\ d(\mathbf{m} \cdot \bar{v}_y) &= d\bar{F}_y \cdot dt = d\bar{S}_y, \\ d(\mathbf{m} \cdot \bar{v}_z) &= d\bar{F}_z \cdot dt = d\bar{S}_z. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Теорема імпульсів (в інтегральній формі). Зміна кількості руху точки за будь-який проміжок часу дорівнює імпульсу сили за цей же проміжок часу.

Інтегруючи обидві частини рівняння (3.27) за часом в межах від нуля до t отримуємо:

$$\mathbf{m} \cdot \bar{\mathbf{v}} - \mathbf{m} \cdot \bar{\mathbf{v}}_0 = \bar{\mathbf{S}}, \quad (3.28)$$

У проекціях на координатні осі отримуємо:

$$\begin{aligned} \mathbf{m} \cdot \bar{v}_x - \mathbf{m} \cdot \bar{v}_{0x} &= \bar{S}_x; \\ \mathbf{m} \cdot \bar{v}_y - \mathbf{m} \cdot \bar{v}_{0y} &= \bar{S}_y, \\ \mathbf{m} \cdot \bar{v}_z - \mathbf{m} \cdot \bar{v}_{0z} &= \bar{S}_z \end{aligned} \quad (3.29)$$

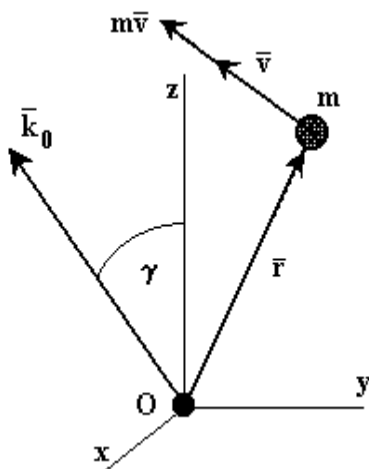
3.3 Момент кількості руху точки

У деяких завданнях в якості динамічної характеристики рухомої точки замість самої кількості руху розглядають його момент відносно будь-якого центру або осі. Ці моменти визначаються також як і моменти сили.

Моментом кількості руху матеріальної точки відносно деякого центру O називається вектор, який визначається рівністю:

$$\bar{k}_0 = M_0(m \cdot \bar{v}) = \bar{r} \times m \cdot \bar{v}, \quad (3.30)$$

Момент кількості руху точки називають також **кінетичним моментом**.



Момент кількості руху відносно будь-якої осі Oz , що проходить через центр O , дорівнює проекції вектора кількості руху \bar{k}_0 на цю вісь

$$k_z = M_z(m \cdot \bar{v}) = k_0 \cdot \cos(\gamma), \quad (3.31)$$

Якщо кількість руху $m \cdot \bar{v}$ задана своїми проекціями $m \cdot v_x$, $m \cdot v_y$, $m \cdot v_z$ на осі координат і задані координати x y z точки m в просторі, то момент кількості руху \bar{k}_0 відносно початку координат обчислюється таким чином:

Рисунок 3.5 – Момент кількості руху

$$\begin{aligned} \bar{k}_0 = & \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ m \cdot v_x & m \cdot v_y & m \cdot v_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & z \\ m \cdot v_y & m \cdot v_z \end{vmatrix} \cdot \bar{i} + \\ & + \begin{vmatrix} z & x \\ m \cdot v_z & m \cdot v_x \end{vmatrix} \cdot \bar{j} + \begin{vmatrix} x & y \\ m \cdot v_x & m \cdot v_y \end{vmatrix} \cdot \bar{k} = (y \cdot m \cdot v_z - z \cdot m \cdot v_y) \cdot \bar{i} + \\ & + (z \cdot m \cdot v_x - x \cdot m \cdot v_z) \cdot \bar{j} + (x \cdot m \cdot v_y - y \cdot m \cdot v_x) \cdot \bar{k} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Проекції моменту кількості руху на осі координат дорівнюють:

$$\begin{aligned} k_x &= (y \cdot m \cdot v_z - z \cdot m \cdot v_y); \\ k_y &= (z \cdot m \cdot v_x - x \cdot m \cdot v_z), \\ k_z &= (x \cdot m \cdot v_y - y \cdot m \cdot v_x), \end{aligned} \quad (3.33)$$

Одиницею вимірювання кількості руху в СІ є $1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$.

Теорема про зміну моменту кількості руху точки

Теорема. Похідна за часом від моменту кількості руху точки, взятої відносно будь-якого центру, дорівнює моменту сили, що діє на точку відносно того ж центру.

$$\frac{d}{dt}(\overline{M}_0(m \cdot \overline{v})) = \overline{M}_0(\overline{F}), \quad (3.34)$$

Доказ:

Візьмемо диференціал від рівняння моменту кількості руху за часом

$$\frac{d}{dt}(\overline{r} \times m \cdot \overline{v}) = \frac{d\overline{r}}{dt} \times m \cdot \overline{v} + \overline{r} \times \frac{d}{dt}(m \cdot \overline{v}) = \overline{v} \times m \cdot \overline{v} + \overline{r} \times (m \cdot \overline{a}), \quad (3.35)$$

$$\overline{v} \times m \cdot \overline{v} = 0 \quad \overline{r} \times (m \cdot \overline{a}) = \overline{r} \times \overline{F}, \text{ отже } \frac{d}{dt}(\overline{r} \times m \cdot \overline{v}) = \overline{r} \times \overline{F}, \quad (3.36)$$

що і потрібно було довести.

Теорема. Похідна за часом від моменту кількості руху точки, узятій відносно будь-якої осі, дорівнює моменту сили, що діє на точку відносно тієї ж осі.

Для доказу досить спроектувати векторне рівняння (3.36) на цю вісь. Для осі Oz це виглядатиме так:

$$\frac{dk_z}{dt} = M_z(\overline{F}), \quad (3.37)$$

Слідства з теорем:

1 Якщо момент сили відносно точки дорівнює нулю, то момент кількості руху відносно цієї точки величина постійна.

$$\overline{M}_0(\overline{F}) = 0, \Rightarrow \quad \overline{k}_0 = \overline{M}_0(m \cdot \overline{v}) = (\overline{r} \times m \cdot \overline{v}) = \overline{\text{const}}, \quad (3.38)$$

2. Якщо момент сили відносно осі дорівнює нулю, то момент кількості руху відносно цієї осі величина постійна.

$$\overline{M}_z(\overline{F}) = 0, \Rightarrow \quad \overline{k}_z = \overline{M}_z(m \cdot \overline{v}) = \overline{\text{const}}, \quad (3.39)$$

3.4 Робота сили. Потужність

Одна з основних характеристик сили, що оцінюють дію сили на тіло при деякому його переміщенні.

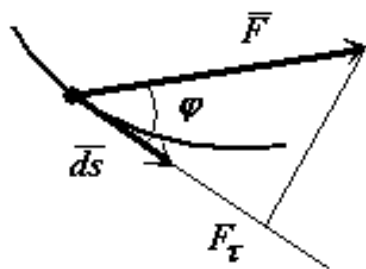


Рисунок 3.6 – Елементарна робота сили

Елементарна робота сили скалярна величина дорівнює добутку елементарного переміщення на проекцію сили на це переміщення.

$$dA = F_{\tau} \cdot ds; \quad dA = F \cdot ds \cdot \cos(\phi), \quad (3.40)$$

де ϕ - кут між \vec{F} і \vec{ds}

Одиницею вимірювання роботи в СІ є –

$$1\text{Н} \cdot \text{м} = 1\text{Дж}$$

$$\text{При } F_{\tau} > 0, \quad dA > 0 \quad \text{при } F_{\tau} < 0, \quad dA < 0$$

$$\text{Окремі випадки: } \phi = 0^{\circ}, \quad dA = F \cdot ds$$

$$\phi = 90^{\circ}, \quad dA = 0$$

$$\phi = 180^{\circ}, \quad dA = -F \cdot ds$$

Елементарне переміщення дорівнює диференціалу радіус-вектора точки додатку сили.

Елементарна робота сили дорівнює скалярному добутку сили на елементарне переміщення або на диференціал радіус-вектора точки додатку сили.

$$dA = \vec{F} \cdot \vec{ds} = \vec{F} \cdot \vec{dr}, \quad (3.41)$$

Елементарна робота сили дорівнює скалярному добутку елементарного імпульсу сили на швидкість точки.

$$dA = \vec{F} \cdot \vec{dr} = \vec{F} \cdot \vec{v} \cdot dt = \vec{dS} \cdot \vec{v}, \quad (3.42)$$

Якщо сила \vec{F} задана своїми проекціями (F_x F_y F_z) на осі координат і елементарне переміщення задано своїми проекціями (dx dy dz) на осі координат, то елементарна робота сили дорівнює:

$$dA = F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz, \quad (3.43)$$

(аналітичний вираз елементарної роботи).

Робота сили на будь-якому кінцевому переміщенні M_0M дорівнює узятому вздовж цього переміщення інтегралу від елементарної роботи.

$$A = \int_{M_0}^M dA = \int_{M_0}^M \vec{F} \cdot \vec{ds} = \int_{M_0}^M (F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz), \quad (3.44)$$

Потужністю сили називається величина, що визначає роботу, що здійснюється силою в одиницю часу. У загальному випадку потужність дорівнює першій похідній за часом від роботи.

$$P = \frac{dA}{dt}; \quad P = \frac{\bar{F} \cdot \bar{v} \cdot dt}{dt} = \bar{F} \cdot \bar{v}, \quad (3.45)$$

Потужність дорівнює скалярному добутку сили на швидкість.

Одиницею вимірювання потужності в СІ є – 1Дж / с = 1Вт

У техніці за одиницю сили береться $1\text{к.с.} = 736\text{Вт} = 75 \frac{\text{кГ} \cdot \text{М}}{\text{с}}$.

Приклад 3.1 Робота сили тяжіння

Хай точка М, на яку діє сила тяжіння Р, переміщається з положення $M_0(x_0, y_0, z_0)$ в положення $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Виберемо осі координат так, щоб вісь Oz була направлена вертикально вгору.

Тоді, $F_{Gx} = 0$; $F_{Gy} = 0$; $F_{Gz} = F_G$ і

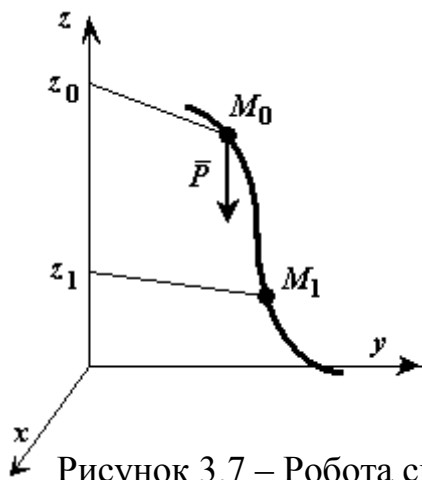


Рисунок 3.7 – Робота сили тяжіння

$$A_{(M_0, M_1)} = \int_{M_0}^{M_1} dA = \int_{z_0}^{z_1} (-F_G) dz = F_G \cdot (z_0 - z_1), \quad (3.46)$$

Робота сили тяжіння дорівнює взятому із знаком плюс або мінус добутку модуля сили на вертикальне переміщення точки її застосування.

Робота позитивна, якщо початкова точка вище кінцевої, і негативна - якщо початкова точка нижче кінцевої.

Приклад 3.2 Робота сили пружності

Розглянемо матеріальну точку, закріплену на пружному елементі жорсткості с, яка здійснює коливання вздовж осі x. Сила пружності (або оновлююча сила) $F_x = -c \cdot x$.

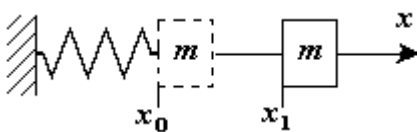


Рисунок 3.8 – Робота сили пружності

Хай точка M , на яку діє тільки сила пружності, переміщається з положення $M_0(x_0)$ в положення $M_1(x_1)$. ($F_y = 0$, $F_z = 0$).

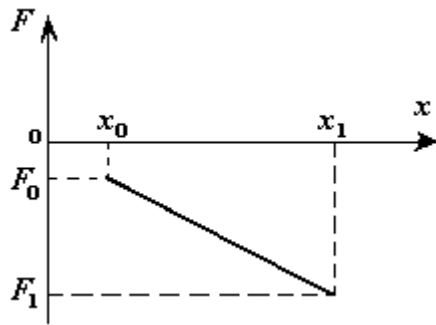


Рисунок 3.9 – Розрахункова схема

$$A_{(M_0M_1)} = \int_{M_0}^{M_1} dA = \int_{x_0}^{x_1} (-c \cdot x) dx = \frac{c}{2} \cdot (x_0^2 - x_1^2)$$

Робота сили пружності дорівнює половині добутку жорсткості пружного елемента на різницю квадратів початкового і кінцевого подовження (або стиснення) пружного елемента.

Робота сили пружності дорівнює площі фігури (трапеції), розташованої під кривою $F_x(x)$.

$$A_{(M_0M_1)} = \frac{c}{2} \cdot (x_0^2 - x_1^2) = -\frac{(F_1 + F_0)}{2} \cdot (x_1 - x_0) \quad (3.47)$$

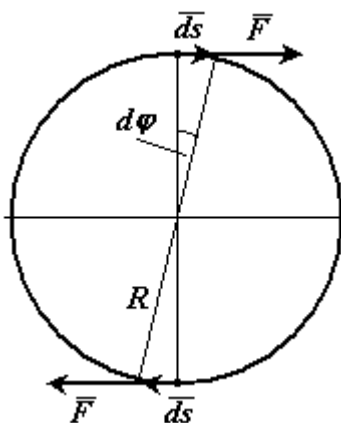


Рисунок 3.10 – Робота і потужність пари сил

Приклад 3.3 Робота і потужність пари сил

Хай пара сил прикладена до тіла, що обертається навколо нерухомої осі. Елементарна робота пари сил дорівнює:

$$dA = 2 \cdot F \cdot ds = 2 \cdot F \cdot R \cdot d\varphi, \quad (3.48)$$

Повна робота пари сил дорівнює:

$$A = 2 \cdot F \cdot R \cdot \varphi = M \cdot \varphi, \quad (3.49)$$

де φ - кут повороту тіла;

M - момент пари сил.

Потужність пари сил дорівнює

$$P = \frac{dA}{dt} = M \cdot \omega, \quad (3.50)$$

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ДО РОЗДІЛУ 3

- 1 Що вивчає динаміка?
- 2 Як формулюється перший закон Ньютона?
- 3 Які системи відліку називають інерційними?

- 4 Вкажіть силу тяжіння поблизу Земної поверхні.
- 5 Вкажіть силу пружності пружини.
- 6 Алгоритм (послідовність) рішення прямої задачі динаміки:
- 7 Алгоритм (послідовність) рішення зворотної задачі динаміки:
- 8 Коли робота сили дорівнює нулю?
- 9 Коли робота сили максимальна?
- 10 Коли робота позитивна?
- 11 Коли робота негативна?
- 12 Що таке потужність?
- 13 За якою формулою визначається потужність?
- 14 Від чого залежить робота сили тяжіння?
- 15 За якою формулою визначається сила інерції?
- 16 Яка загальна властивість усіх матеріальних об'єктів
- 17 При поступовому русі усі точки тіла мають...
- 18 При обертальному русі усі точки тіла мають...
- 19 При рівномірному обертальному русі усі точки тіла мають...
- 20 В основу класичної динаміки покладено...
- 21 Галілеєм встановлено, що поблизу Земної поверхні при вільному падіння усі тіла мають...
- 22 Виділіть постійні сили...
- 23 Виділіть змінні сили...
- 24 Робота сили тертя...
- 25 Сформулюйте закони Ньютона. В яких системах відліку вони справедливі
- 26 Як називається маса тіла, що фігурує в першому законі Ньютона, її розмірність?
- 27 Як формулюється другий закон Ньютона?
- 28 Як формулюється третій закон Ньютона?
- 29 Дайте математичне визначення роботи зовнішніх сил.
- 30 Що таке робота сили? В яких одиницях в СІ вона вимірюється ?
- 31 Елементарна потужність визначається виразом...

РОЗДІЛ 4 МЕХАНІКА МАТЕРІАЛІВ ТА КОНСТРУКЦІЙ

4.1 Основні поняття, допущення

Розробка будь-якої машини або механізму складається з двох етапів: конструювання і розрахунків. Конструювання передбачає створення проекту машини або механізму (конструктор проводить вибір матеріалу і його поперечних розмірів), а метою розрахунку є перевірка на міцність, жорсткість і стійкість. При виконанні розрахунків необхідно прагнути до максимальної економії матеріалів і достатньої надійності конструкції при тривалій експлуатації. А для цього машини повинні бути міцними, тобто не руйнуватися під впливом зовнішніх навантажень. Також необхідним може бути швидкість збудовування (наприклад, відновлення будівлі після руйнування), мінімальна вага конструкції (при конструюванні літаків).

Механіка матеріалів і конструкцій – наука про міцність елементів інженерних конструкцій і споруд. Ґрунтується на результатах дослідів і використовує математичні розрахунки при їх аналізі.

Завданням механіки матеріалів і конструкцій є вивчення поведінки матеріалів при дії на них силових чинників.

Основні поняття механіки конструкцій матеріалів та спираються на закони і теореми теоретичної механіки і, в першу чергу, на закони статички, без знання яких вивчення даного предмету стає практично неможливим, на закони фізики і на знання математики.

На відміну від теоретичної механіки механіка матеріалів та конструкцій розглядає завдання, де найбільш істотними є властивості тіл, що деформуються, а законами руху тіла нехтують.

Необхідно відзначити, що перші нотатки про міцність згадуються в записах відомого художника Леонардо Да Вінчі, а початок науки про опір матеріалів пов'язують з ім'ям знаменитого фізика, математика і астронома Галілео Галілея.

У 18 столітті необхідно відзначити роботи Л.Ейлера щодо стійкості конструкцій. 19-20 століття є часом найбільш інтенсивного розвитку науки у зв'язку із загальним зростанням будівництва і промислового виробництва при безумовно величезному внеску учених-механіків Росії.

Великий внесок у розвиток науки вніс Роберт Гук, найвидатніший учений, який прославився науковими дослідженнями в різних областях. На його рахунок більше 500 відкриттів і винаходів. Так, наприклад, закон газового стану, який увійшов до історії під ім'ям Бойля - Маріотта, відкрив Роберт Гук. Так само кардан, добре відомий вам, і який є невід'ємною частиною будь-якого автомобіля, винайшов Гук. Він вперше висловив ідею про те, що скам'янілості – це останки істот, що жили раніше, по яких можна вивчати історію Землі.

Його непримиренним суперником був Ісак Ньютон. У 1680 р. Гук написав йому лист, в якому сформулював і виклав свої припущення: сила тяжіння між двома тілами повинна бути зворотно пропорційною квадрату відстані між ними. На цей лист Ньютон не відповів, а сказав тільки те, що Гук має лише віддалене уявлення про всесвітнє тяжіння. І лише через 7 років Ньютон сформулював свій знаменитий закон всесвітнього тяжіння: тіла притягуються один до одного з силою, яка прямо пропорційна їх масам і зворотно пропорційна квадрату відстані між тілами.

А що стосується опору матеріалів, то можна сказати, що ніхто не придумав нічого нового, що б відрізнялося від створеного Гуком. У 1660 році Роберт Гук сформулював закон, що встановлює зв'язок між силою і деформацією: *«Яка сила – така і дія»*, який і був названий на честь найвидатнішого ученого – **законом Гуку**. Яким ми користуємося до цього дня.

Отже, ми займатимемося твердими деформованими тілами з вивченням їх фізичних властивостей. Таким чином наш курс складається з двох частин: теоретичної, де ми вивчатимемо методи розрахунку і експериментальної, в якому досліджуватимемо механічні властивості матеріалів.

Введемо основні поняття, що приймаються при вивченні дисципліни.

Міцність – це здатність матеріалу сприймати задані навантаження, не руйнуючись при цьому.

Жорсткість – здатність конструкції під впливом деформації зберігати первинні форму і розміри.

Стійкість – властивість конструкції зберігати при дії зовнішніх сил задану форму рівноваги.

Пружністю називається властивість тіла відновлювати свою форму після зняття зовнішніх навантажень.

Пластичністю називається властивість матеріалу зберігати після припинення дії навантаження, або частково отриману при навантаженні, деформацію.

Повзучістю називається властивість тіла збільшувати деформацію при постійних зовнішніх навантаженнях.

Основними **моделями форми** в механіці матеріалів та конструкцій є: стержні, пластини, оболонки і просторові тіла (масиви), рисунок 4.1.

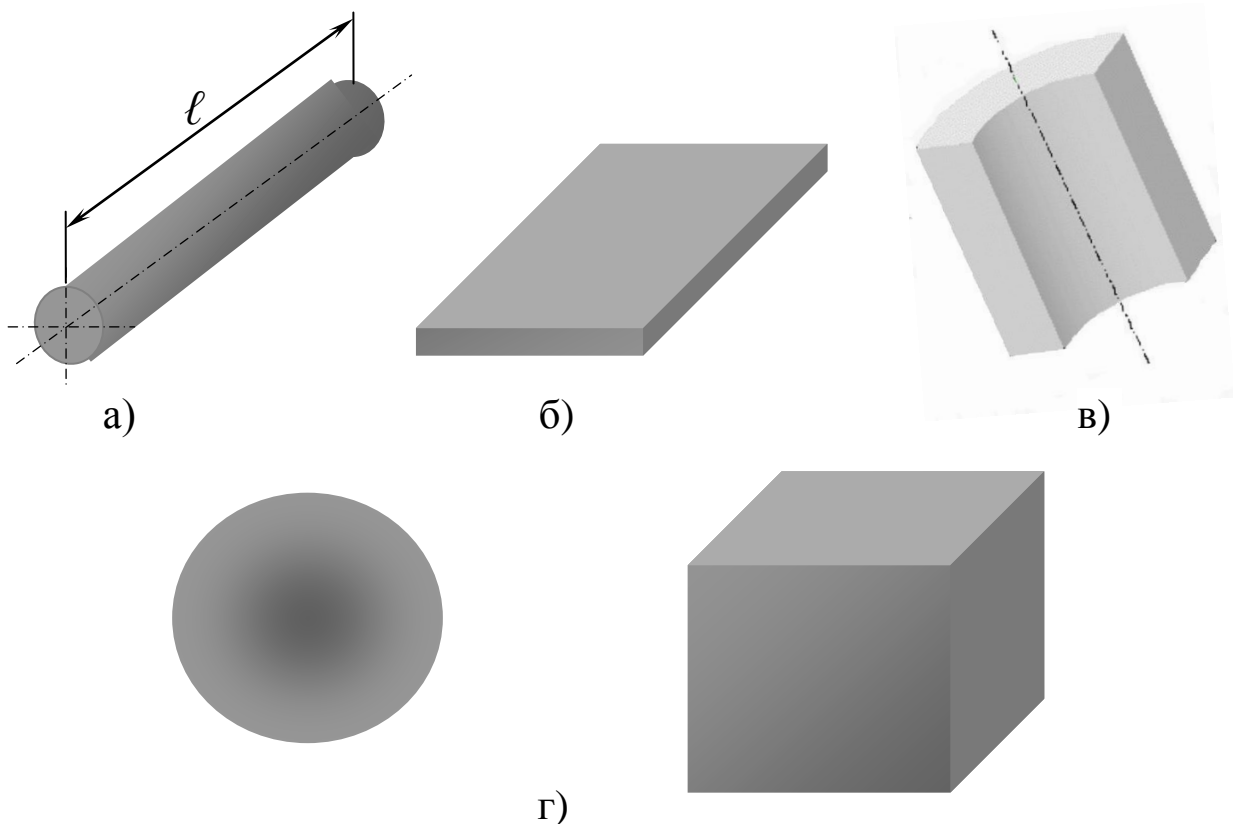


Рисунок 4.1 - Основні моделі форми в моделях міцносної надійності: а) стержень, б) пластина, в) оболонка, г) масив.

Основні припущення.

Метою механіки матеріалів та конструкцій є створити прості прийоми розрахунку типових елементів конструкцій, що часто зустрічаються. Необхідність довести рішення кожної практичної задачі до деякого числового результату примушує у ряді випадків удаватися до спрощуючих гіпотез – припущень, які виправдовуються надалі шляхом зіставлення розрахункових даних з експериментом.

І так, основними припущеннями (гіпотезами) прийнятими в механіці матеріалів та конструкцій є наступні:

1 Форма пружного тіла повністю заповнена матеріалом, тобто елемент конструкції суцільної;

2 Матеріал однорідний і ізотропний;

3 Матеріалу властива відносна жорсткість, тобто деформації тіла дуже малі в порівнянні з його розмірами;

4 Всі тіла є абсолютно пружними;

5 Між навантаженням, що діє, і деформацією існує лінійна залежність;

6 Плоскі перетини стержня перпендикулярні до його осі і такими ж залишаються після деформації.

Класифікація сил. Види навантажень

У механіці матеріалів та конструкцій прикладені сили прийнято називати навантаженнями, які підрозділяються на:

1) зовнішні

2) внутрішні – сили взаємодії між частинками, які перешкоджають руйнуванню.

Зовнішні сили підрозділяються на:

- зосереджені сили F , кН (тиск колеса на рейки);

- розподілене навантаження q , кН/м – показує інтенсивність навантаження на одиницю довжини (тиск повітря на крило літака);

- зосереджений момент M , кН·м – сила помножена на плече.

Також зовнішні сили підрозділяю по характеру дії у часі на:

- статичні – які поступово збільшуються від нуля до мах;
- динамічні – які зростають від нуля до мах за короткий період часу. Вони бувають трьох видів:

- раптово прикладені (колеса локомотива що входить на міст)
- ударні – які пов'язані з дією інерційних сил при великих прискореннях
- повторно-змінні, які змінюються в часі циклічно, тобто повторюються багато раз (шток поршня і шатун).

Поняття про деформацію і напруження

Реальні тіла не є абсолютно твердими, і під дією прикладених до них зовнішніх сил змінюють свою первинну форму і розміри, тобто деформуються.

Деформації бувають: пружними і залишковими.

Пружними називаються деформації, які мають властивість з'являтися при прикладенні навантаження і зникати після його зняття.

Залишковими або пластичними називаються ті деформації, які залишаються після зняття навантаження.

Для визначення пружних деформацій використовують закон Гука:

$$\Delta \ell = \frac{F \cdot \ell}{E \cdot A}, \quad (4.1)$$

де $\Delta \ell$ - абсолютна деформація,

F - сила,

ℓ - довжина прикладення сили,

A – площа перетину,

E – модуль пружності I – го роду (модуль Юнга).

Експериментально абсолютна деформація визначається:

$$\Delta \ell = \ell_1 - \ell_0, \quad (4.2)$$

де ℓ_1 – кінцева деформація після прикладення навантаження,

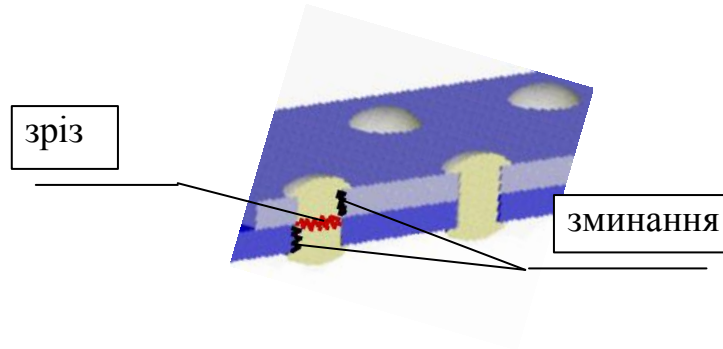
ℓ_0 – початкова деформація.

Основні види деформацій:

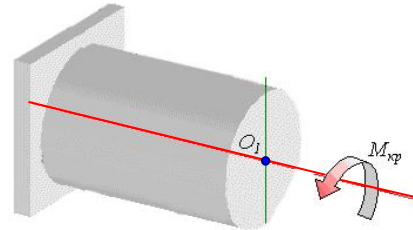
розтяг-стиск,



зріз-зминання,



кручення,



згин.

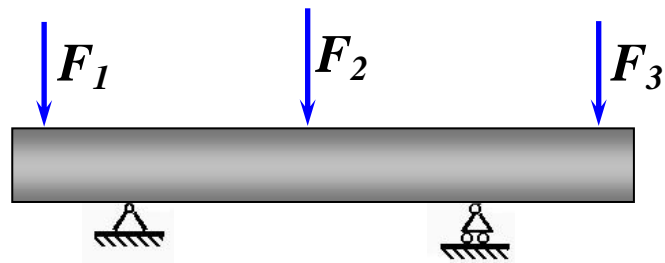


Рисунок 4.2 – Види деформацій

При дії зовнішніх навантажень виникають внутрішні сили, супроводжуючі деформацію матеріалу. Відношення внутрішньої сили на одиницю площі перерізу є **напруження** і вимірюється у МПа =

$\frac{Н}{мм^2}$. Напруження є мірою дії внутрішніх сил, які виникають в матеріалі як результат деформації, викликані зовнішньою силою (рисунок 4.3).

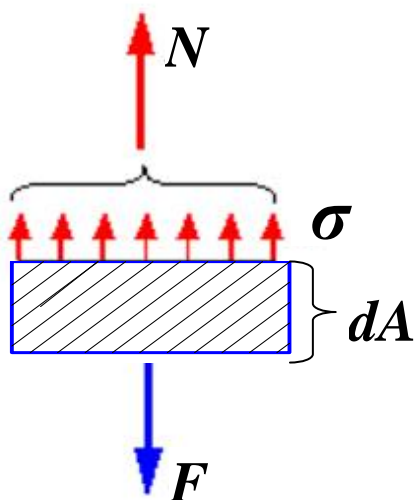


Рисунок 4.3 - Напруження

Розрізняють напруження:

- нормальні σ – діють по нормалі;
- дотичні τ – діють по дотичній до перетину.

$$N = \int_A \sigma \cdot dA, \quad (4.3)$$

де N – рівнодіюча всіх σ на елементарній площі A .

Оскільки $\sigma = \text{const}$, то отримаємо $N = \sigma \cdot A$, звідси

$$\sigma = \frac{N}{A}, \quad \tau = \frac{Q}{A}, \quad (4.4)$$

де N – внутрішня сила

dA – елемент площі поперечного перерізу.

Якщо на тіло діє лише одна внутрішня сила, то з умови рівноваги отримаємо що $N = F$.

Після вибору форми, матеріалу і виду вантаження елемента конструкції переходять до безпосередньої оцінки міцності.

Елемент повинен бути спроектований так, щоб найбільші напруження, що виникають у ньому при роботі, були менше тих, при яких матеріал руйнується.

Рівняння, що пов'язують параметри працездатності елемента конструкції у момент руйнування з параметрами, що забезпечують міцність називають умовою міцності.

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma], \quad (4.5)$$

де $[\sigma]$ - допустиме напруження,

σ_{\max} - максимальне напруження.

Щоб піти від ризику руйнування ми повинні допускати в елементах споруд напруження, які складатимуть лише частину границі міцності, при якій відбувається руйнування матеріалу.

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{k_T}, \quad (4.6)$$

де σ_T - границя текучості,

k_T – коефіцієнт запасу міцності (для сталі 1,5 – 2) – число, що показує у скільки разів допустимі нами в конструкції напруження менше границі міцності матеріалу.

Основні типи завдань при розрахунку на міцність

Запишемо умову міцності в розгорненому вигляді:

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} \leq [\sigma], \quad (4.7)$$

Користуючись цією умовою можна проводити наступні види розрахунків:

Перевірочний розрахунок, тобто перевіряти по заданому навантаженню і розмірам площі поперечного перетину фактичну напругу і порівнювати їх з тими, що допускаються. Фактична напруга не повинна відхилитися від тих, що допускаються більш ніж на $\pm 5\%$. Перенапруження більше цього значення неприпустимо з погляду міцності, а недонапруження свідчить про перевитрату матеріалу.

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma], \quad (4.8)$$

Проектний розрахунок або розрахунок на визначення розмірів поперечного перетину стрижня (по відомих навантаженню і напрузі, що допускається), потрібних по умові його міцності:

$$A \geq \frac{N}{[\sigma]}, \quad (4.9)$$

Розрахунок на визначення навантаження, що допускається, по заданих розмірах поперечного перетину стрижня і відомій напрузі, що допускається:

$$[N] = [\sigma] \cdot A, \quad (4.10)$$

4.2 Осьовий розтяг-стиск

Осьовим (центральним) розтягом – стиском називається такий вид навантаження, який виникає під впливом подовжніх сил, прикладених в центрі ваги перерізу і направлених уздовж осі стержня.

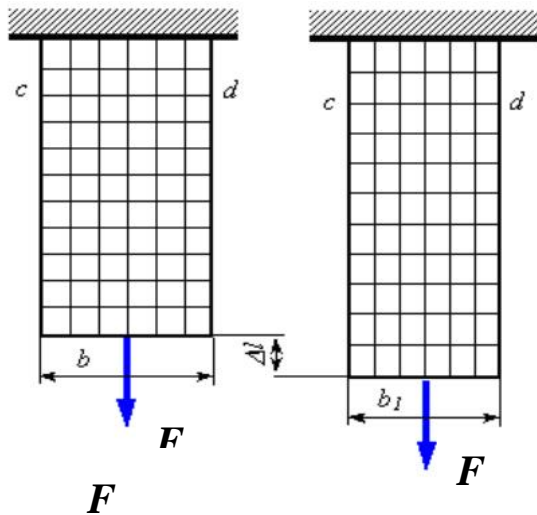


Рисунок 4.4 – Осьовий (центральный) розтяг

Як показують лабораторні дослідження, при центральному розтягу– стиску всі перерізи стержня після деформації залишаються плоскими і поступально переміщуються уздовж осі стержня. Тобто всі поперечні волокна випробовують однакові подовження або укорочення, а отже напруження по всьому перерізу має постійне значення $\sigma = const$

Так само можна припустити, що і усередині стержня всі горизонтальні лінії залишаються прямими і горизонтальними

після деформації, тобто поперечні перерізи стержня залишаються плоскими і нормальними (\perp до осі) після деформації. Цю важливу гіпотезу називають *гіпотезою плоских перерізів* або *гіпотезою Бернуллі*.

Така картина деформацій дає підставу вважати, що в поперечних перерізах стержня діє тільки нормальні напруження σ , а дотичні $\tau = 0$.

Зовнішніми силовими чинниками при розтягу – стиску є: зосереджені сили F і розподілені навантаження q .

Внутрішніми силовими чинниками є: внутрішні сили N і внутрішні нормальні напруження σ .

Напруження в поперечному перерізі. Умова міцності

При дії зовнішніх навантажень виникають внутрішні сили, супроводжуючі деформацію матеріалу. Відношення внутрішньої сили на одиницю площі перерізу є **напруження** і вимірюється в МПа.

Напруження є мірою дії внутрішніх сил в результаті деформації, викликану зовнішньою силою.

Розрізняють напруження :

- нормальні σ – діють по нормалі;
- дотичні τ – діють по дотичній до перетину.

Розглянемо визначення внутрішніх силових чинників при розтягу-стиску *методом перерізів*. Хай буде заданий прямий стержень, на який діє центральна розтягуюча сила F .

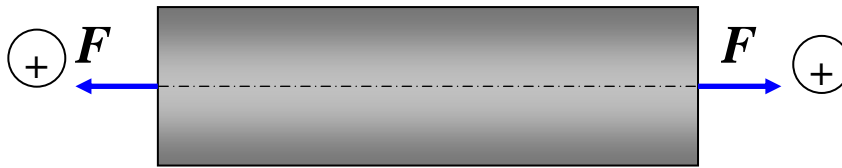


Рисунок 4.5 – Розрахункова схема

Розітнемо даний стержень площиною $m-m$ і відкинемо праву частину. Виділимо елемент площею dA .

Через гіпотезу про плоскі перетини, напруження по всьому перетину розподілені рівномірно.

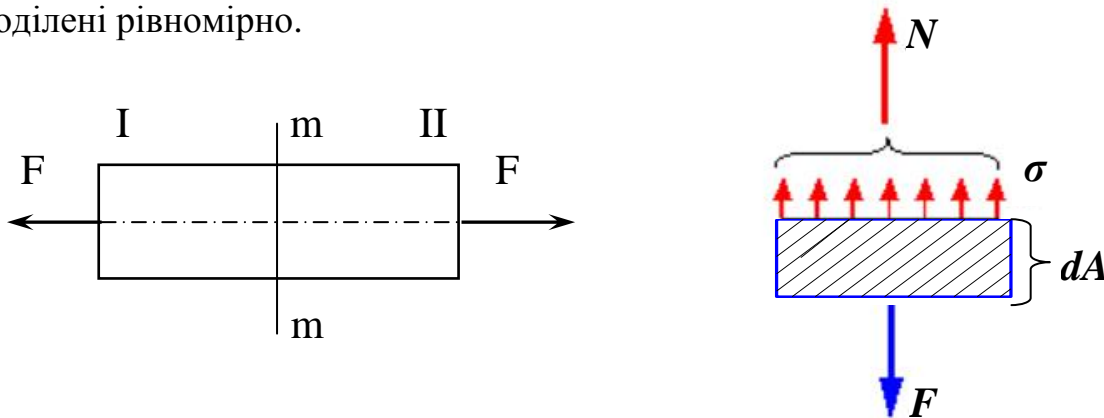


Рисунок 4.6 – Метод перерізів

З рівняння рівноваги:

$$\sum F_x = 0, \text{ получим } -N + F = 0. \Rightarrow N = F, \text{ или } N = \sum F = \sum \sigma dA$$

Графіком такого рівняння є пряма // осі.

Рівнодіючою всіх σ на елементарній площині dA є внутрішня сила N .

$$N = \int_A \sigma \cdot dA = \sigma \int_A dA, \quad (4.11)$$

Оскільки $\sigma = \text{const}$, то отримаємо $N = \sigma \cdot A$,

Якщо на тіло діє лише одна внутрішня сила, то з умови рівноваги $N = F$, а отже отримаємо:

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{F}{A}, \quad (4.12)$$

Після вибору форми, матеріалу і виду навантаження елемента конструкції переходять до безпосередньої оцінки міцності.

Елемент повинен бути спроектований так, щоб найбільші напруження, що виникають в ньому при роботі, були дещо меншими за допустимі.

Рівняння, що зв'язують параметри працездатності елемента конструкції з параметрами, що забезпечують міцність називають **умовами міцності**.

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} \leq [\sigma], \quad (4.13)$$

де $[\sigma]$ – допустимі напруження,

σ_{\max} – максимальні напруження.

Щоб не допустити руйнування ми повинні знизити напруження, при якому з'являються залишкові деформації. Таким напруженням є границя текучості σ_T . Знижуючи ці напруження, ми створюємо запас міцності, який характеризується коефіцієнтом запасу міцності k_T :

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{k_T}, \quad (4.14)$$

де σ_T – границя текучості,

k_T – коефіцієнт запасу міцності (для сталі 1,5 – 2) – число, що показує у скільки разів допущені нами в конструкції напруження менші границі міцності матеріалу.

Деформації при розтягу-стиску. Закон Гука

Реальні тіла не є абсолютно твердими, і під дією прикладених до них зовнішніх сил змінюють свою первинну форму і розміри, тобто деформуються.

Ми знаємо, що деформації бувають пружними і залишковими.

Пружними називаються деформації, які мають властивість з'являтися при прикладенні навантаження і зникати після його зняття.

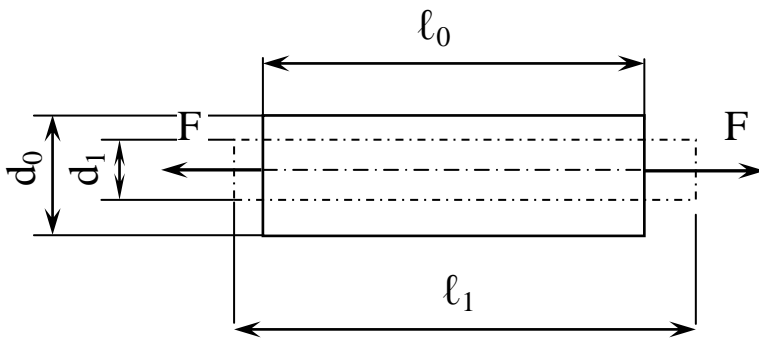


Рисунок 4.7 – Деформація стержня

При цьому Δl – абсолютне подовження

$$\Delta l = l_1 - l_0,$$

Δd – абсолютне звуження,

$$\Delta d = d_0 - d_1,$$

Відносна деформація ε , % – є якісною оцінкою деформації.

Буває поперечна і подовжня.

Відносна подовжня деформація показує на скільки розтягнувся стержень:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \cdot 100\%, \quad (4.15)$$

Відносна поперечна деформація показує на скільки звужився стержень:

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta d}{d_0} \cdot 100\%, \quad (4.16)$$

Коефіцієнт поперечної деформації пов'язує відносну поперечну і подовжню деформації і називається **коефіцієнтом Пуассона**:

$$\mu = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}, \quad (4.17)$$

У 1635 році Гук довів, що напруження прямопропорційне відносній деформації:

$$\Delta l = \frac{F \cdot l}{E \cdot A}, \quad \text{– закон Гука}$$

де Δl – абсолютна деформація

F – навантаження,

l – довжина прикладення сили

A – площа перерізу

E – модуль пружності I – го роду (модуль Юнга).

$$\Delta l = \frac{F \cdot l}{E \cdot A} \leq [\Delta l] \quad \text{– умова жорсткості}$$

Можна так само отримати закон Гука через відносну деформацію

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{F}{E \cdot A} \Rightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad \text{или} \quad \sigma = E \cdot \varepsilon \quad \text{– закон Гука}$$

4.3 Випробування матеріалів

Властивості матеріалів при деформації осьовий розтяг - стиск

Спостереження за поведінкою матеріалу і визначення його характеристик міцності і пластичності при розтягу - один із основних і найбільш розповсюджених видів випробувань. Отримані в результаті експерименту характеристики дозволяють робити висновки про міцність матеріалу при статичних навантаженнях, вибирати матеріал для проекрованої конструкції і вважаються основними при розрахунках деталей машин, елементів конструкцій і споруд на міцність.

Основні параметри визначають із діаграми розтягу $F - \Delta l$ (рисунок 4.8), яку отримують за допомогою пристрою, що записує на випробувальній машині.

Діаграма розтягу потрібна для того, що вивчити внутрішні властивості матеріалу, тобто вона є наочним представленням того, що відбувається з матеріалом усередині.

Для вивчення основних механічних характеристик міцності існує діаграма напружень (рисунок 4.9). Розглянемо обидві діаграми зіставляючи відповідні точки.

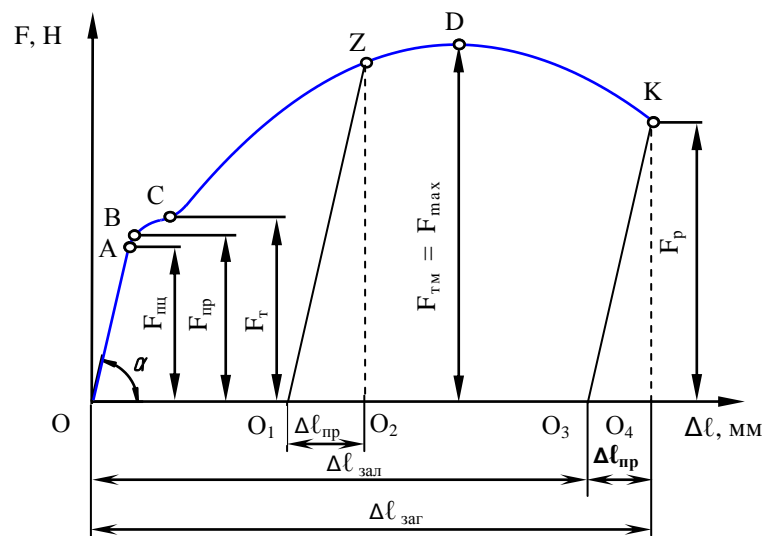


Рисунок 4.8 – Діаграма розтягу м'якої сталі

На етапі навантаження до деякої сили $F_{\text{пц}}$ (точка А) спостерігається пряма пропорційна залежність між видовженням зразка і силою F , що його викликала і зворотня пропорційна залежність площі поперечного перерізу A . Позначаючи через Δl приріст довжини від сили F , можемо записати формулу, що зв'яже ці данні, яка носить назву **закон Гука**:

$$\Delta l = \frac{F \cdot l}{E \cdot A}, \quad (4.18)$$

де E – коефіцієнт пропорційності, який характеризує жорсткість матеріалу, МПа;

Δl - величина абсолютного видовження стержня, мм;

$$\Delta l = l_1 - l_0, \quad (4.19)$$

де: l_1 – довжина зразка після руйнування, мм;

l_0 - довжина зразка до руйнування, мм;

A – площа поперечного перерізу, мм².

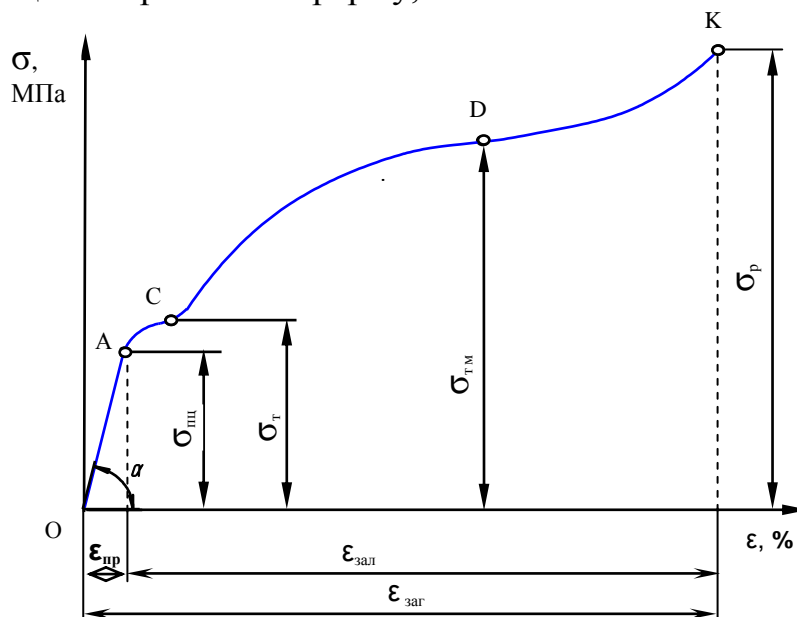


Рисунок 4.9 – Діаграма напружень м'якої сталі

Взагалі величина $E \cdot A$ характеризує жорсткість стержня при розтягу (стиску). Після розвантаження початкова довжина зразка відновлюється, тобто деформація зникає. Ця властивість називається пружністю. Відношення:

$$\sigma_{\text{пц}} = \frac{F_{\text{пц}}}{A_0}, \quad (4.20)$$

називають границею пропорційності. Це і є те напруження, вище якого матеріал перестає підкорятися закону Гука.

При подальшому навантаженні починається незначне відхилення від прямої лінії, після розвантаження деформація зникає не повністю, тобто з'являється залишкова деформація. Сила $F_{пр}$ (точка В) викликає у зразка залишкову деформацію 0,001-0,005%. Відношення:

$$\sigma_{пр} = \frac{F_{пр}}{A_0}, \quad (4.21)$$

називають границею пружності. Це те напруження, після якого з'являються залишкові деформації.

По досягненню навантаженням деякого значення F_T (точка С) зразок видовжується ("тече") без збільшення, а інколи і при зменшенні навантаження. На діаграмі з'являється так звана «площадка текучості». Після розвантаження є наявності значна залишкова деформація. Відношення:

$$\sigma_T = \frac{F_T}{A_0}, \quad (4.22)$$

називають границею текучості (фізичною). Наявність «площадки текучості» є свідомством того, матеріал має властивості текучості.

Щоб зразок деформувався дедалі більше, потрібно збільшувати навантаження, матеріал знову здатний чинити опір розтягу. Пояснюється це явище зміцненням матеріалу. Якщо із зразка повністю зняти навантаження F_T , то пружна деформація $\Delta \ell_{пр}$ зникне, а залишкова $\Delta \ell_{зал}$ залишиться, перо самописа прокреслить пряму лінію ZO_1 , яка буде паралельна пропорційній ділянці OA . При повторному навантаженні, яке буде зразу після розвантаження, перо спочатку накреслить лінію O_1Z , а із збільшенням навантаження переміститься далі по ділянці ZD . Властивості матеріалу змінюються: пластичні властивості погіршуються, а твердість підвищується. Відбуваються зміни в кристалічній решітці матеріалу, він зміцнює сам себе. Це призводить до появи явища поверхневого наклепа, тобто об'ємного зміцнення. В одних випадках ці зміни корисні, в інших шкідливі і їх усувають. Подальше збільшення навантаження призводить до появи

"шийки" на зразку і руйнування (рисунок 4). До моменту появи шийки навантаження на зразок досягає свого максимального значення $F_{\text{мц}}$ або $F_{\text{тм}}$ (точка Д). Відношення

$$\sigma_{\text{мц}} = \frac{F_{\text{мц}}}{A_0}, \quad (4.23)$$

називають границею міцності $\sigma_{\text{мц}}$ матеріалу або тимчасовим опором $\sigma_{\text{тм}}$.

Як тільки на зразку утворюються шийка (точка Д), навантаження зменшується і подальше деформування зразка проходить за рахунок видовження в зоні шийки (ділянка ДК). Відношення навантаження F_p в момент розриву до площі шийки $A_{\text{ш}}$ в місці розриву:

$$\sigma_p = \frac{F_p}{A_{\text{ш}}}, \quad (4.24)$$

називають істинним опором розриву.

До моменту розриву робоча частина зразка ℓ_0 видовжилась на величину загальної деформації $\Delta\ell_{\text{заг}}$. Після розриву пружна частина загальної деформації зникне, залишиться залишкова деформація $\Delta\ell_{\text{зал}}$.

Відношення приросту подовження зразка $\Delta\ell$ до його початкової довжини ℓ_0

$$\varepsilon = \frac{\Delta\ell}{\ell_0} \cdot 100\%, \quad (4.25)$$

називають відносним залишковим видовженням, або поздовжню деформацією.

На місці утворення шийки переріз зразка зменшується. Відношення зменшення площі поперечного перерізу в місці розриву $\Delta A = A_0 - A_{\text{ш}}$ до початкової площі A_0 поперечного перерізу зразка

$$\psi = \frac{\Delta A}{A_0} \cdot 100\%, \quad (4.26)$$

називають відносним залишковим звуженням, або поперечною деформацією.

По величинах ε і ψ оцінюють пластичні властивості матеріалу при випробуванні на розтяг.

Якщо обидві частини формули (4.18) розділити на ℓ , отримаємо

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{F \cdot l}{E \cdot A \cdot l}, \quad (4.27)$$

Зробимо необхідні перетворення: права частина це є відносне видовження ε , в лівій частині відношення F/A це є напруження σ , отримаємо інше вираження закону Гука:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}, \quad (4.28)$$

$$\sigma = \varepsilon \cdot E, \quad (4.29)$$

Таким чином нормальне напруження при розтягу (стиску) прямо пропорційне відносному видовженню з урахуванням коефіцієнта пропорційності E , який називається модулем пружності 1-го роду і характеризує опір матеріалу пружній деформації. Його значення залежить від кута нахилу пропорційної ділянки до горизонтальної осі діаграми. Чим більше це значення, тим менше розтягується (стискається) стержень.

Руйнування крихких матеріалів відрізняється тим, що воно відбувається вже при невеликих деформаціях. При розтягу чавунного зразка, до моменту розриву виникають невеликі деформації, руйнування відбувається раптово, величини відносного звуження і відносного подовження є дуже малими. Як правило, крихкі матеріали погано опираються розтягу, їх границя міцності має невелике значення в порівнянні із границею міцності пластичних матеріалів. Якщо розглядати діаграму розтягу крихких матеріалів, то можна відмітити, що вона не має чітко вираженої прямої лінії, яка є на частині пропорційності для пластичних матеріалів. Тому можна сказати, що крихкі матеріали не підкоряються закону Гука.

Згідно з ГОСТ 1497 – 84 при випробуванні на розтяг для забезпечення можливості порівняти результати застосовують пропорційні циліндричні зразки семи типів і плоскі зразки двох типів. Найбільш розповсюджені випробування на циліндричних зразках (рисунок 4.10). Після випробувань зразок видовжується на довжину l_1 і ми отримуємо зруйнований зразок, на якому є в наявності звужене місце, яке має назву «шийка». Воно може з'явитися в будь якій послаб-

леній точці по розрахунковій довжині l_0 зразка, це залежить від кількох факторів, які обумовлюють умови виробництва зразка та ін.

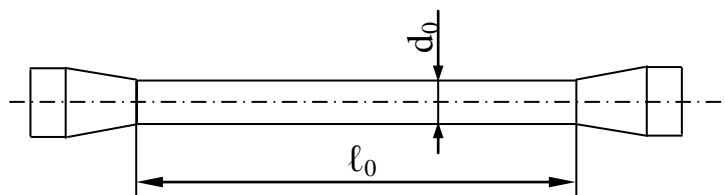


Рисунок 4.10 – Ескіз зразка до випробування

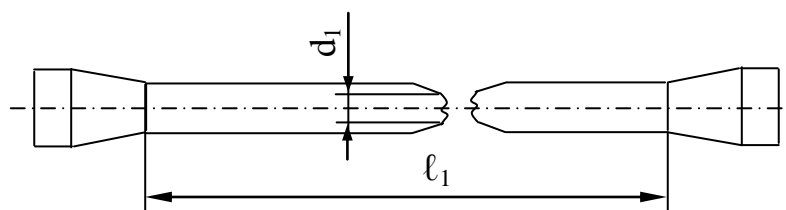


Рисунок 4.11 – Ескіз зразка після випробування

Випробування проводять на універсальній випробувальній машині УИМ – 50. На ній можливо випробувати зразки на розтяг, стиск, згин. Масштаб запису навантаження залежить від шкали, встановленої для проведення випробування. Машину можна налаштувати на максимальне навантаження 5, 10, 25 і 50 тон. Масштаб запису подовження складає 1 : 2.

4.4 Чистий зсув. Кручення

Напруження при зсуві. Закон Гука

Зсув - вид деформації, який виникає під дією поперечної сили Q .

Напружений стан, при якому на гранях виділеного елемента діє тільки дотична напруга, а нормальні дорівнюють 0, називається чистим зрушенням

Розглянемо деформацію при чистому зсуві (рисунок 4.12). Нехай на брус действует сила F , під дією якої точки B і Z переміщуються в точки B_1 і C_1 .

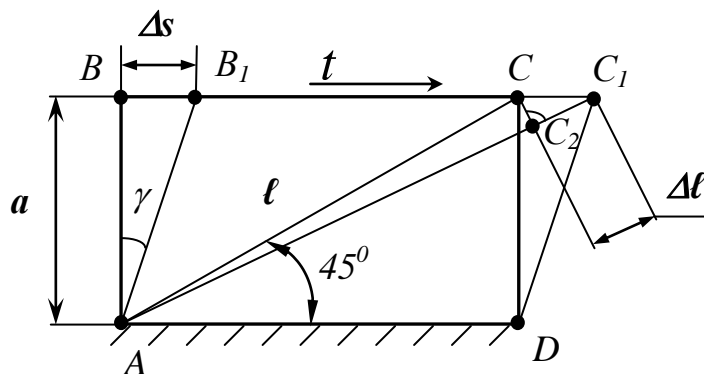


Рисунок 4.12 – Схема деформацій при чистому зсуві

При цьому, якщо на брус нанести сітку, то з прямокутної вона перетвориться на сітку, що складається з ромбів, що свідчить про наявність тільки до-
тичних напружень, які діють по бічних гранях, тобто $\tau = \sigma$.

На схемі позначені: Δs - абсолютний зсув; γ - кут зсуву або відносний залишковий зсув,

$$\gamma = \frac{\Delta s}{a}, \quad (4.30)$$

Встановимо залежність між напруженням та деформаціями при зсуві.

Відносна деформація діагоналі AC складе:

$$\epsilon_{AC} = \frac{\Delta \ell}{\ell}, \quad (4.31)$$

З трикутника ΔCC_1C_2 маємо: $C_1C_2 = CC_1 \cdot \cos 45^\circ$

Оскільки: $CC_1 = \Delta s$, а $C_1C_2 = \Delta \ell$

Тоді отримаємо:

$$\Delta \ell = \Delta s \cdot \cos 45^\circ, \quad (4.32)$$

З трикутника ΔACD :

$$\ell = \frac{a}{\sin 45^\circ}, \quad (4.33)$$

Підставимо отримані вирази (4.32) і (4.33) у формулу (4.31), отримаємо

$$\epsilon_{AC} = \frac{\Delta \ell}{\ell} = \frac{\Delta s \cdot \cos 45^\circ \cdot \sin 45^\circ}{a} = \frac{\Delta s}{a} \cdot \frac{\sin 90^\circ}{2}, \quad (4.34)$$

$$\cos 45^\circ \cdot \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \sin 2\alpha = \frac{\sin 90^\circ}{2}, \quad (4.35)$$

Позначимо $\frac{\Delta s}{a} = \gamma$, $\sin 90^\circ = 1$, отримаємо

$$\varepsilon_{AC} = \frac{\gamma}{2}, \quad (4.36)$$

Застосувавши до діагоналі AC узагальнений закон Гуку можна записати

$$\varepsilon = \frac{\tau}{E}(1 + \mu), \quad (4.37)$$

Прирівняємо вирази (4.36) і (4.37), отримаємо

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{\tau}{E}(1 + \mu), \quad (4.38)$$

Звідси виразимо τ

$$\tau = \gamma \frac{E}{2(1 + \mu)}, \quad (4.39)$$

Позначимо $\frac{E}{2(1 + \mu)} = G$ - модуль пружності другого роду, модулем зсуву,

залежить від властивостей матеріалу і зв'язує між собою три пружні сталі величини E , G і μ .

Тоді закон Гука при чистому зсуві матиме вигляд

$$\tau = \gamma \cdot G, \quad (4.40)$$

Якщо підставити у вираження $\tau = \frac{Q}{A}$ та $\gamma = \frac{\Delta s}{a}$, то отримаємо

$$\Delta s = \frac{Q \cdot \ell}{G \cdot A} \quad (4.41),$$

закон Гука при зсуві через абсолютну деформацію

Практичні розрахунки на зсув

На практиці цілий ряд деталей конструкцій працює на зсув, тому основного значення набуває перевірка їх міцності по дотичним напруженням.

У реальних конструкціях зсув зазвичай супроводжується тим, що відбувається змінання поверхні елемента. При цьому дотичне напруження в перерізах по площині зсуву розподіляється нерівномірно. Також нерівномірно розподіляється і напруження змінання. Але на практиці для спрощення розрахунків

цією нерівномірністю нехтують, а розрахунки називають умовними. Отже, необхідно мати досить прості і надійні методи розрахунків, які забезпечать міцність конструкції.

Простими прикладами деталей, що працюють на зсув являються: болтові і заклепувальні, шпонкові та шліцьові з'єднання, зварні шви і так далі.

Розглянемо приклади.

Приклад 4.1: Визначити силу F , яка викликає в стержні діаметром $d = 10$ мм напруження $\sigma_p = 100$ МПа, а також товщину t та діаметр D головки стержня, якщо $[\sigma]_{зм} = 40$ МПа, $[\tau] = 50$ МПа (рисунок 4.13).

Дані: $d = 10$ мм; $\sigma_p = 100$ МПа; $[\sigma_{зм}] = 40$ МПа; $[\tau] = 50$ МПа.

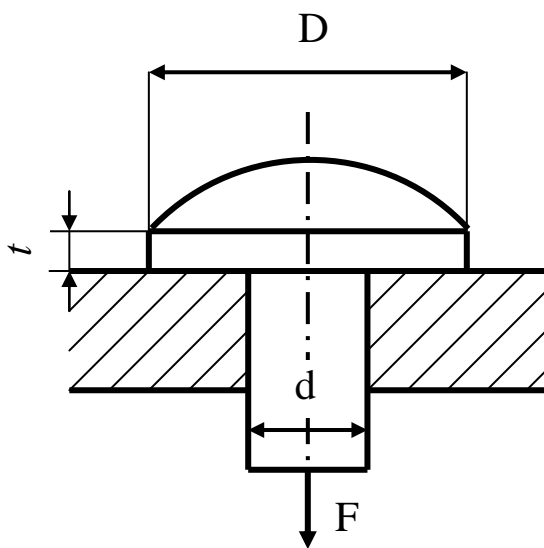


Рисунок 4.13 – Розрахункова схема

Розв'язання.

1 Умова міцності на розрив стержня:

$$\sigma_p = \frac{F}{A} \leq [\sigma], \quad (4.42)$$

де: $A = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$ - площа перерізу стержня;

Визначаємо силу F :

$$F = \sigma_p \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4},$$

$$F = 100 \cdot \frac{3.14 \cdot 10^2}{4} = 7850 \text{ Н};$$

2 Умова міцності на зріз головки стержня

$$\tau_{зр} = \frac{F}{A} \leq [\tau], \quad (4.43)$$

де: $F = \pi \cdot d \cdot t$ – площа зрізу;

$$t = \frac{F}{\pi \cdot d \cdot [\tau]},$$

$$t = \frac{7850}{3.14 \cdot 10 \cdot 50} = 5 \text{ мм}.$$

3 Умова міцності на зминання під головкою стержня

$$\sigma_{зм} = \frac{F}{A} \leq [\sigma]_{зм}, \quad (4.44)$$

де $A = \frac{\pi \cdot D^2}{4} - \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)$ – площа зминання.

$$D = \sqrt{\frac{4 \cdot F + \pi \cdot d^2 \cdot [\sigma_{зм}]}{\pi \cdot [\sigma_{зм}]}}$$

$$D = \sqrt{\frac{4 \cdot 7850 + 3,14 \cdot 10^2 \cdot 40}{3,14 \cdot 40}} = \sqrt{350} = 187 \text{ мм}$$

Призначаємо $D = 190$ мм.

Приклад 4.2. Перевірити шпонку на міцність, якщо вал передає крутильний момент $M = 2800$ Нм, допустимі напруження $[\tau] = 90$ МПа, $[\sigma]_{зм} = 280$ МПа (рисунок 4.14).

Дані: $M = 2800$ Нм, $[\tau] = 90$ МПа, $[\sigma]_{зм} = 280$ МПа, $d = 50$ мм, $\ell = 80$ мм, $b = 16$ мм, $h = 10$ мм.

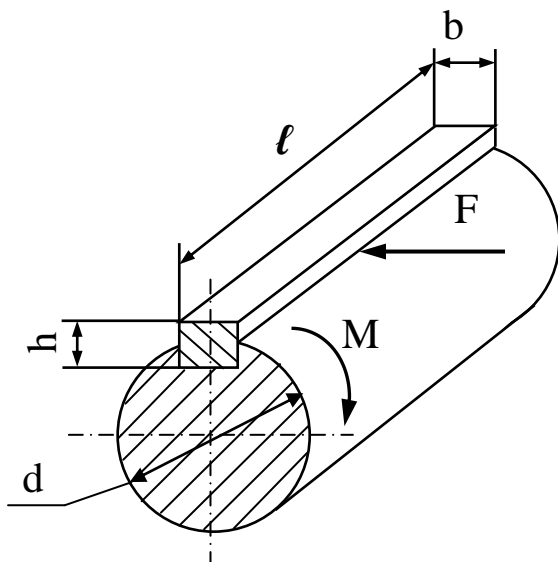


Рисунок 4.14 – Розрахункова схема

Розв'язання.

1 Визначаємо колове зусилля:

$$F = \frac{M}{r} = \frac{2 \cdot M}{d},$$

$$F = \frac{2 \cdot 2800}{0,05} = 112000 \text{ Н}$$

2 Умова міцності на зріз шпонки:

$$\tau = \frac{F}{A} \leq [\tau], \quad (4.45)$$

де: $A = b \cdot l$ – площа зрізу

Тоді:

$$\tau = \frac{112000}{16 \cdot 80} = 87,5 < [\tau] = 90 \text{ МПа}$$

Умова міцності виконується.

3 Умова міцності на зминання шпонки:

$$\sigma_{3M} = \frac{F}{A} \leq [\sigma]_{3M}, \quad (4.46)$$

де: $A = l \cdot 0.5 \cdot h$ – площа зминання,

Тоді:

$$\sigma_{3M} = \frac{112000}{80 \cdot 0,5 \cdot 10} = 280 = [\sigma]_{3M} = 280 \text{ МПа}$$

Міцність шпонки забезпечена.

Деформації та напруження в поперечних перерізах круглого бруса

Деформація кручення бруса буває тоді, коли на нього діють пари сил, розташованих у площинах, перпендикулярних до осі бруса (рисунок 4.15)

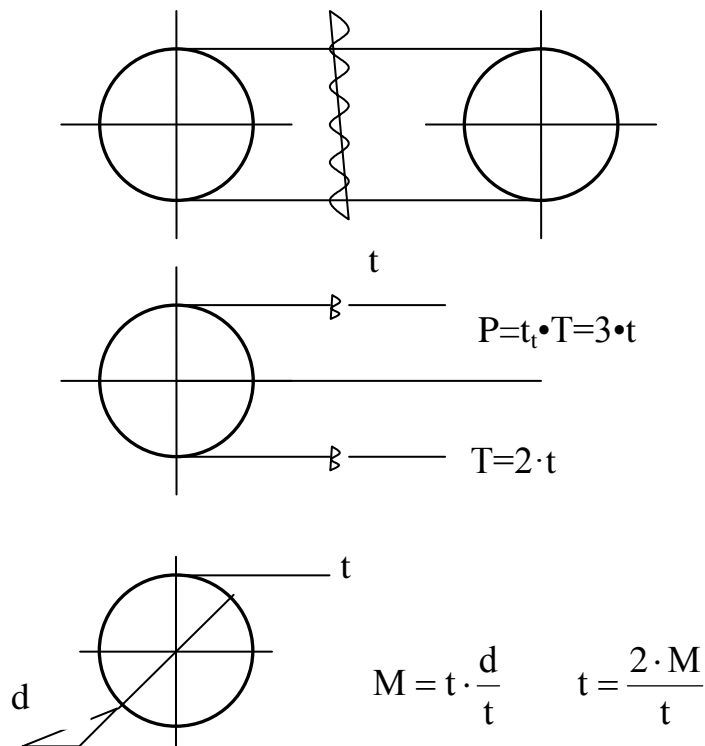


Рисунок 4.15 – До деформації кручення

Дані експериментів і результати точного розв'язання цієї задачі в теорії пружності дають підстави для прийняття таких гіпотез (припущень).

1 Плоскі поперечні перерізи циліндричного бруса залишаються плоскими і після деформації (гіпотеза плоских перерізів).

2 Радіуси поперечних перерізів при деформації залишаються прямими.

З В процесі деформації бруса відстані між різними поперечними перерізами залишаються незмінними.

Кут повороту двох крайніх перерізів, розташованих на відстані l один від одного, називають повним кутом закручування φ . Кут закручування, віднесений до одиниці довжини бруса, називається відносним кутом закручування.

Зовнішній момент, що прикладений до якого-небудь перерізу бруса і викликає деформацію кручення, називають скручувальним моментом $M_{ск}$.

Внутрішній силовий фактор називають крутним моментом M_k .

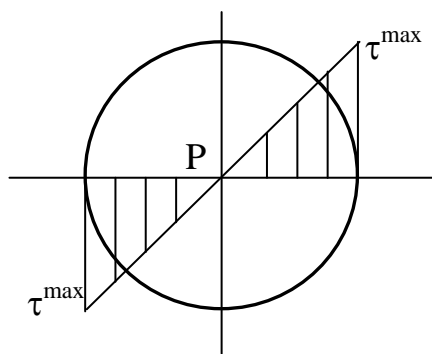
Абсолютний зсув ребра BB_1

$$BB_1 = \gamma dx \quad \gamma dx = r d\varphi$$

$$BB_1 = r d\varphi \quad \gamma = r \frac{d\varphi}{dx}$$

$$\gamma_\rho = \rho \frac{d\varphi}{dx}, \quad (4.47)$$

Використавши закон Гука при зсуві для дотичних напружень при крученні одержимо вираз



$$\tau_\rho = \gamma_\rho \cdot G = \rho \frac{d\varphi}{dx} \cdot G$$

Напруження τ_ρ змінюється прямо пропорційно відстані ρ від осі бруса. Розподіл дотичних напружень на перерізу бруса наведено на рисунку 4.15.

Виразимо дотичні напруження у поперечному перерізі через крутний момент M_k .

У площині поперечного перерізу на відстані ρ від осі бруса виділимо елементарну площадку dF

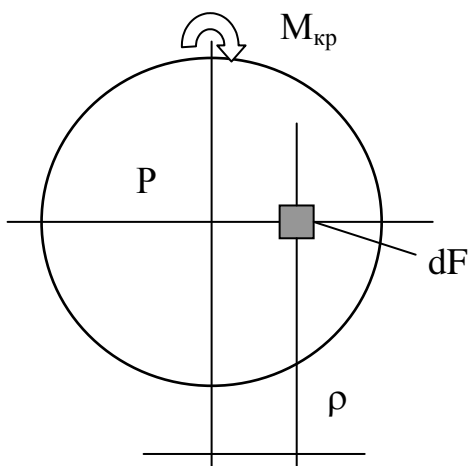
Рисунок 4.15 – Розподіл дотичних напружень на перерізу бруса

(рисунок 4.16).

Зусилля, що припадає на цю площадку, дорівнює $\tau_\rho \cdot dF$

Момент цього зусилля відносно осі бруса дорівнює:

$$\tau_\rho \cdot dF \cdot \rho, \quad (4.48)$$



Склавши силу моментів усіх внутрішніх усьль відносно осі бруса, одержимо величину крутного моменту

$$M_k = \int_F \tau_\rho \cdot dF \cdot \rho, \quad (4.49)$$

Підставивши значення τ_ρ

Рисунок 4.16 – Розрахункова схема

$$M_k = \int_F \rho \frac{d\varphi}{dx} \cdot G \cdot dF \cdot \rho = G \frac{d\varphi}{dx} \int_F \rho^2 dF, \quad (4.50)$$

де $\int_F \rho^2 dF = I_p$ - полярний момент інерції площі перерізу

$$M_k = G \frac{d\varphi}{dx} \cdot I_p; \quad \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_k}{G \cdot I_p}, \quad (4.51)$$

Підставивши це значення $\frac{d\varphi}{dx}$ у вираз, матимемо

$$\tau_\rho = \frac{M_k}{I_p} \cdot \rho, \quad (4.52)$$

Максимальні напруження діють у точках, для яких $\rho_{\max} = r$

$$\tau^{\max} = \frac{M_k}{I_p} \cdot r, \quad (4.53)$$

Замінивши $\frac{I_p}{r}$ полярним моментом опору W_p дістанемо

$$\tau^{\max} = \frac{M_k}{W_p}, \quad (4.54)$$

З виразу знаходимо кут закручування $d\varphi$ елемента бруса завдовжки dx :

$$d\varphi = \frac{M_k}{G \cdot I_p} \cdot dx, \quad (4.55)$$

Інтегруванням останнього виразу по довжині l знайдемо повний кут τ закручування бруса

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_k}{G \cdot I_p} dx = \frac{M_k \cdot l}{G \cdot I_p}, \quad (4.56)$$

Умова міцності вала

$$\tau^{\max} = \frac{M_k^{\max}}{W_p} \leq [\tau], \quad (4.57)$$

де $[\tau]$ – допустиме напруження кручення.

Користуючись умовою (4.57), можна розв'язувати задачі трьох типів:

1 Визначення необхідного діаметра вала, якщо відомі крутний момент та допустиме напруження (проектний розрахунок)

2 Перевірка напружень, якщо відомі діаметр вала і крутний момент (перевірний розрахунок)

3 Визначення допустимого моменту, який можна передати валом відомого діаметра при заданому допустимому напруженні

4.5 Плоский згин

Типи закрету, типи балок

Розглянемо призматичний брус з прямою віссю, на який діє ряд зрівноважених сил, направлених перпендикулярно до його осі і розташованих в одній площині, що проходить через вісь бруса (рисунок 4.17).

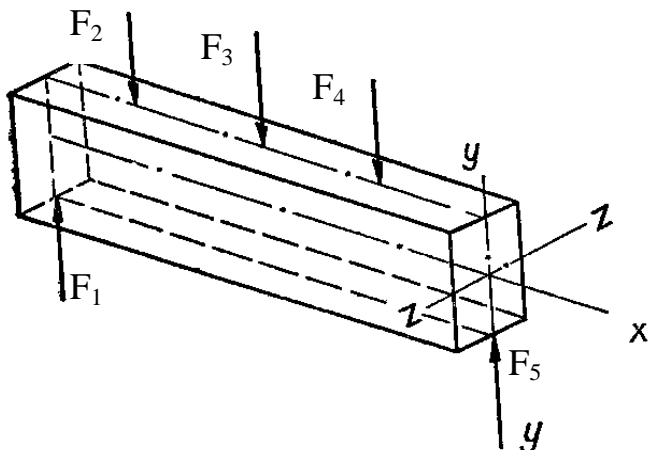


Рисунок 4.17 – Деформація згину

Площину, в якій розташовані сили, що викликають згин бруса, називають площиною дії згинаючих сил.

Якщо площина дії згинаючих сил збігається з головною площи-

ною, то згин бруса відбувається в цій же площині такий згин називається прямим або плоским згином.

Будь-який брус з прямолінійною віссю, що зазнає деформації згину, називається балкою.

Балка, жорстко закріплена одним кінцем, називається консоллю.

Відстань між двома суміжними опорами балок називають прольотом. Звисаючий кінець балки називається консольним кінцем.

Опори балок можна поділити на такі (рисунок 4.18):

- шарнірно-рухомі;
- шарнірно-нерухомі;
- жорстко-закріплені.

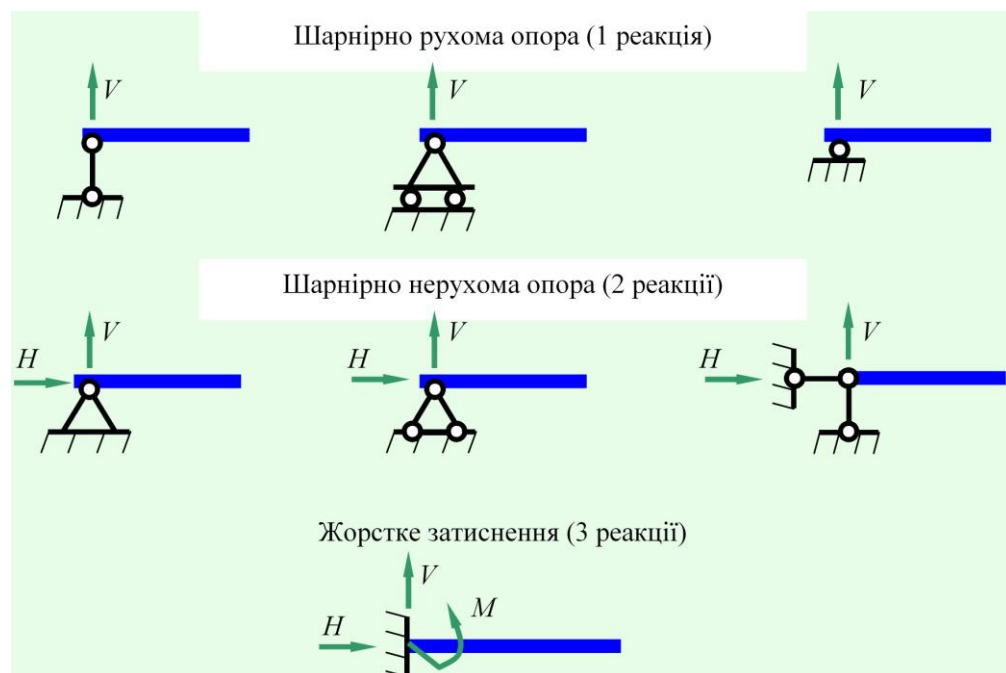


Рисунок 4.18 – Типи опор балок

Для визначення величини реакцій опор балок використовують рівняння рівноваги.

Балка може бути навантажена зосередженими силами F , рівномірно розподіленим навантаженням інтенсивністю q і парою сил M .

Внутрішні силові фактори при згині

При дослідженні внутрішніх сил користуємось методом перерізів (рисунок 4.19)

Розглянемо балку на двох опорах, навантажену вертикальним навантаженням і парою сил M_1 . Балка розрізана на дві частини перерізом $m-n$, взятим на відстані x від лівої опори. Із статyki (теоретичної механіки) відомо, що система паралельних сил і пара сил M_1 , які діють на ліву частину балки, можуть бути зведені до однієї вертикальної сили і пари сил. Отже внутрішні сили, що діють в перерізі $m-n$, також повинні зводитися до вертикальної рівнодіючої і до пари сил.

Сила Q_x називається **поперечною силою**, а момент M_x – **згинальним моментом** у довільному перерізі балки, взятому на відстані x від початку координат. Поперечна сила і згинальний момент є внутрішніми силовими факторами в поперечних перерізах балки.

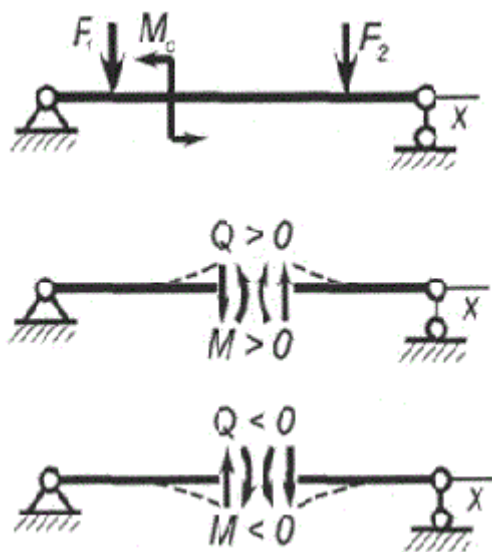


Рисунок 4.19 – Поперечне зусилля та згинальний момент

Правила для обчислення Q_x та M_x : поперечна сила в довільному поперечному перерізі балки дорівнює алгебраїчній сумі проекцій зовнішніх сил, що діють на відсічену частину балки, на нормаль до осі балки. Згинальний момент у довільному поперечному перерізі балки дорівнює алгебраїчній сумі моментів усіх зовнішніх сил, прикладених до відсіченої частини, відносно центра ваги розглядуваного перерізу.

Правила знаків для Q_x та M_x (рисунок 4.20 та рисунок 4.21)

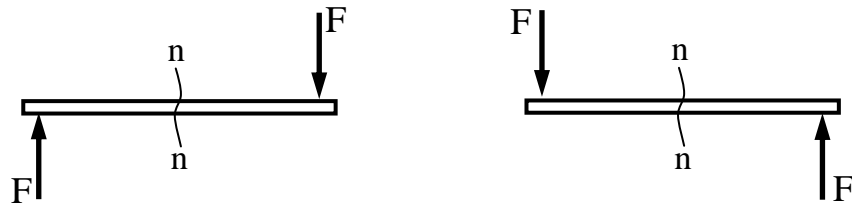


Рисунок 4.20 – Правило знаків для поперечної сили Q

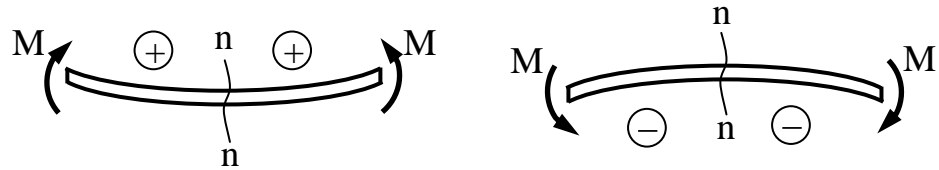


Рисунок 4.21 - Правило знаків для згинального моменту M

4.6 Диференціальні залежності між згинальним моментом, поперечною силою та інтенсивності розподіленого навантаження

Установимо між M , Q , q . Розглянемо балку, навантажену довільним навантаженням. Виріжмо двома нескінченно близькими перерізами $m - n$ і $m_1 - n_1$ елемент балки завдовжки dx (рисунок 4.22)

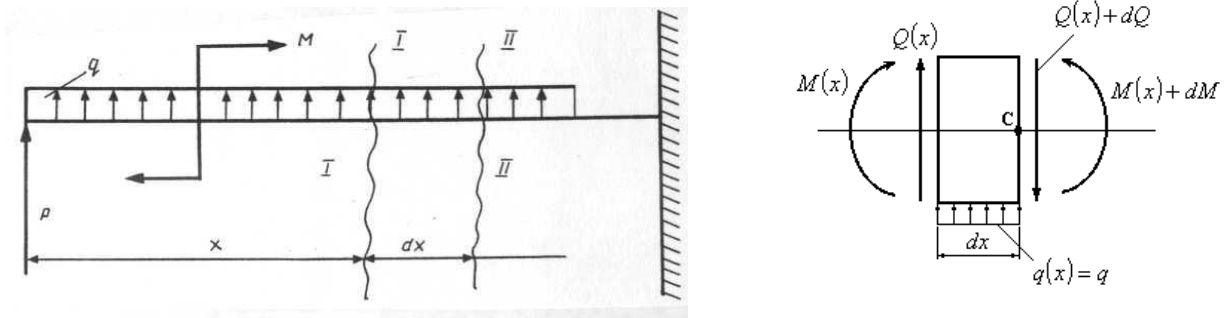


Рисунок 4.22 - Диференціальні залежності при згині

У перерізі діють поперечна сила і згинальний момент, справа вони повинні мати протилежні напрямки.

Складемо рівняння рівноваги виділеного елемента балки.

$$\sum F_y = 0 \quad Q + q \cdot dx - (Q + dQ) = 0$$

звідки $\frac{dQ}{dx} = q$

$$\sum M_A = 0 \quad M + Q \cdot dx + q \cdot \frac{(dx)^2}{2} - (M + dM) = 0$$

Відкидаючи $q \frac{(dx)^2}{2}$ як нескінченно малу величину другого порядку, ма-

тимемо: $\frac{dM}{dx} = Q$.

Таким чином, похідна від згинального моменту по абсцисі x перерізу балки дорівнює поперечній силі в тому самому перерізі.

Похідна від поперечної сили по абсцисі x перерізу балки дорівнює інтенсивності розподіленого навантаження в тому самому перерізі.

Так як $\frac{dQ}{dx} = q$ і $\frac{dM}{dx} = Q$, то $\frac{d^2 M}{dx^2} = \frac{dQ}{dx} = q$

Правила якісного побудування епюр балок

Для побудови епюр треба керуватися такими правилами:

1 Епюру моментів будують на очисному волокні, тобто додатні моменти (і додатні поперечні сили) відкладають вгору від осі, а від'ємні – вниз.

2 В перерізі, де прикладена зосереджена сила, значення поперечної сили змінюється стрибкоподібно, при чому стрибок дорівнює модулю цієї сили. На епюрі моментів – зміна напряму дотичної.

3 В перерізі, де прикладена пара сил (момент), значення згинаючого моменту змінюється стрибкоподібно, при чому стрибок дорівнює моменту пари.

Якщо $Q > 0$, то згинаючий момент на ділянці з ліва на право збільшується; якщо $Q < 0$ то згинаючий момент на ділянці зменшується (зліва на право).

4 Якщо на всій ділянці $Q = 0$, то $M = const$, тобто виникає чистий згин.

5 Якщо $Q = 0$ в одному перерізі, то згинаючий момент має екстремальне (максимальне або мінімальне) значення.

6 На ділянці, де нема розподіленого навантаження, епюра моментів є похилою прямою, а епюра поперечних сил – прямою паралельною осі.

7 На ділянці, де прикладене рівномірно розподілене навантаження, епюра моментів є параболою, а епюра поперечних сил – похилою прямою.

8 На кінці балки згинаючий момент дорівнює нулю, якщо там не прикладена пара сил

Чистий згин. Вивід формули для нормальних напружень

Розглянемо призматичний брус з вертикальною площиною симетрії. Брус згинається парами сил M , розташованими по його кінцях у площині симетрії. У будь-якому поперечному перерізі такого бруса діятиме тільки згинальний момент, що дорівнює M , поперечна сила дорівнює нулю ($M = const$). Такий згин є чистим згином (рисунок 4.23)

Після згину виявляється:

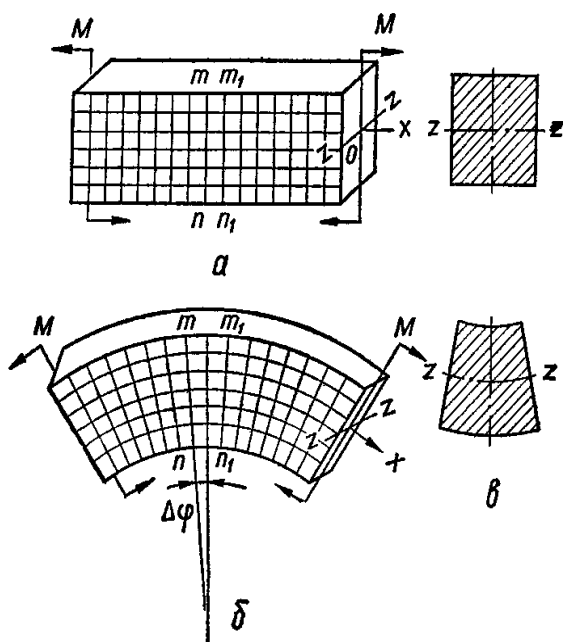


Рисунок 4.23 – Чистий згин

а) первісно паралельні прямі $m - n$, $m_1 - n_1$ і після деформації бруса залишаються прямими, але обертаються одна відносно одної на деякий кут $\Delta\varphi$;

б) у верхніх частинах бруса відстань між вертикальними лініями сітки збільшується, в той час як у нижніх частинах вона зменшується;

в) ширина перерізу бруса у верхній його частині дещо зменшується, а в нижній – збільшується.

Припущення, які покладені в основу елементарної теорії чистого згину:

згину:

1 При чистому первісні плоскі перерізи бруса не викривляються, залишаються плоскими і при деформації обертаються один відносно одного (гіпотеза плоских перерізів);

2 Поздовжні волокна бруса зазнають простого розтягування або стиску, не причиняючи взаємного бокового тиску.

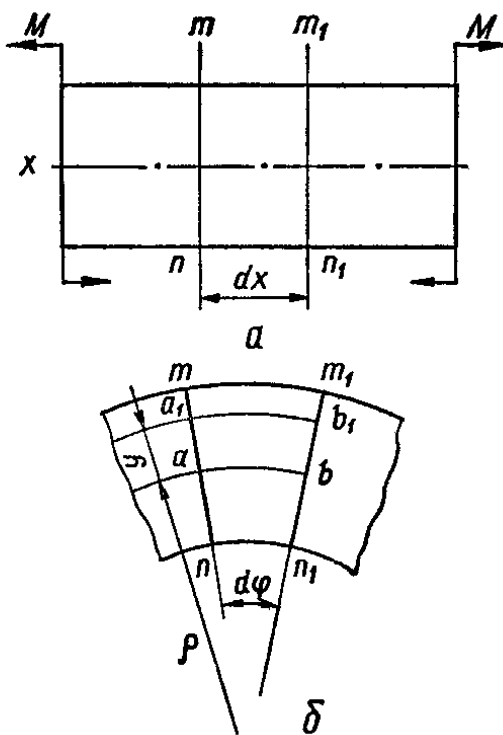


Рисунок 4.24 – Визначення нормальних напружень при згині

Визначимо величину нормальних напружень, що виникають при чистому згині бруса. Для цього розглянемо деформацію ділянки бруса вирізаної двома перерізами, розташованими на відстані dx (рисунок 4.24а).

Після деформації ця ділянка бруса має такий вигляд (рисунок 4.24б).

Нейтральний шар зображений лінією ab , $ab = dx$.

Нейтральний шар відділяє зону розтягу бруса від зони стиску, волокна нейтрального шару не зазнають ніякої деформації.

Лінія перетину нейтрального шару з площиною поперечного перерізу бруса називається **нейтральною**. Позначимо радіус кривизни нейтрального шару через ρ , а кут взаємного повороту перерізів через $d\varphi$.

Розглянемо деформацію довільного волокна a_1b_1 , розташованого на відстані y від нейтрального шару. до деформації довжина цього волокна

$$dx = \overset{\cup}{ab} = \rho \cdot d\varphi, \quad (4.58)$$

після деформації

$$a_1b_1 = (\rho + y) \cdot d\varphi, \quad (4.59)$$

Подовження волокна

$$\Delta l = \overset{\cup}{a_1b_1} - \overset{\cup}{ab} = (\rho + y) \cdot d\varphi - \rho \cdot d\varphi, \quad (4.60)$$

Відносне подовження

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{\Delta l}{\overset{\cup}{ab}} = \frac{y \cdot d\varphi}{\rho \cdot d\varphi} = \frac{y}{\rho}, \quad (4.61)$$

За законом Гука $\sigma = E \cdot \varepsilon = E \frac{y}{\rho}$;

В цьому виразі ρ - невідома ще величина. Мислено розсічемо брус перері-

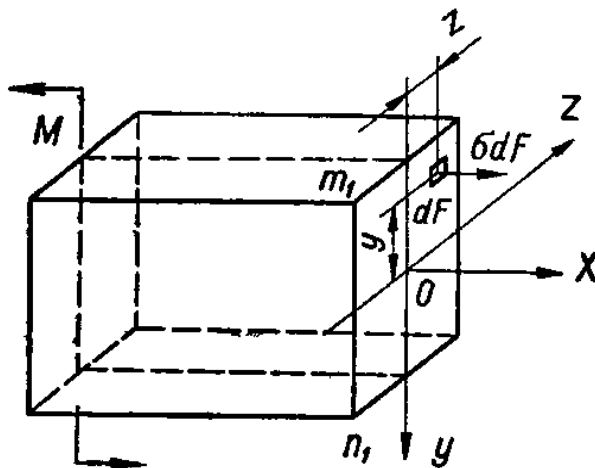


Рисунок 4.25 – Розрахункова схема

Сума проєкцій усіх сил на вісь x :

$$\int_{(A)} \sigma \cdot dA = 0, \quad (4.62)$$

Підставивши значення $\sigma = E \frac{y}{\rho}$, одержимо

$$\int_{(A)} E \cdot \frac{y}{\rho} \cdot dA = \frac{E}{\rho} \cdot \int_{(A)} y \cdot dA = 0, \quad (4.63)$$

При згині $\rho \neq \infty$, а $E \neq 0$, то і $\frac{E}{\rho} \neq 0$, отже $\int_{(A)} y \cdot dA = 0$, тобто

$$\int_{(A)} y \cdot dA = S_z = 0, \quad (4.64)$$

Статичний момент площі відносно осі дорівнює нулю тільки в тому випадку, якщо ця вісь проходить через центр ваги площі. Отже, нейтральна лінія при згині проходить через центр ваги поперечного перерізу.

Складемо друге рівняння рівноваги – суму моментів сил відносно нейтральної лінії:

$$-M + \int_{(A)} \sigma \cdot dA \cdot y = 0; \quad \int_{(A)} \sigma \cdot dA \cdot y = M, \quad (4.66)$$

Підставивши значення σ , одержимо

$$\int_{(A)} \frac{E}{\rho} \cdot y^2 \cdot dA = M; \quad \frac{E}{\rho} \cdot \int_{(A)} y^2 \cdot dA = M; \quad \frac{E}{\rho} \cdot I_Z = M, \quad (4.67)$$

$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E \cdot J_Z}$ - це залежність між згинальним моментом і кривизною осі бруса при згині. $E \cdot J_Z$ називається жорсткість бруса при згині. Підставляючи знай-

дене значення кривизни у формулу $\sigma = E \cdot \frac{y}{\rho}$, одержимо для нормальних напру-

жень при чистому згині вираз

$$\sigma = \frac{M}{J_Z} \cdot y, \quad (4.68)$$

Еюра нормальних напружень по висоті перерізу балки має вигляд (рисунок 4.26).

Найбільші напруження діють у точках найбільш віддалених від нейтральної лінії, для яких $y = y_{max}$.

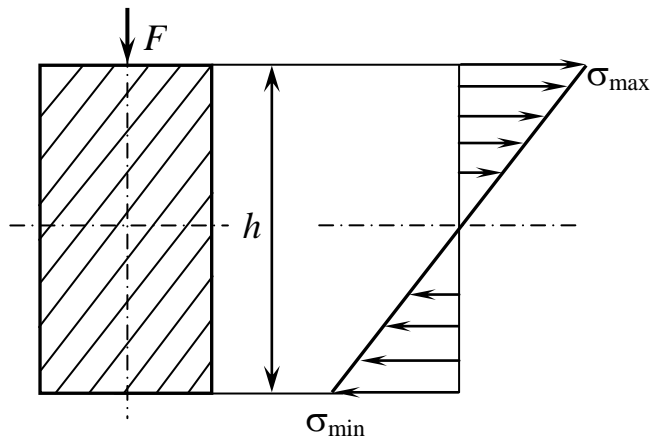


Рисунок 4.26 – Розподіл нормальних напружень по висоті перерізу балки

Умова міцності балки

Величину максимальних напружень у перерізі визначають за формулою:

$$\sigma_{max} = \frac{M}{J_Z} \cdot y_{max}, \quad (4.69)$$

Ввівши значення моменту опору $W_Z = \frac{J_Z}{y_{max}}$, матимемо

$$\sigma_{max} = \frac{M}{W_Z}, \quad (4.70)$$

Умова міцності балки

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_Z} \leq [\sigma], \quad (4.71)$$

де W_Z – осьовий момент опору перерізу, m^3 .

Для прямокутного перерізу розміром $b \times h$ матимемо:

$$W_z = \frac{J_z}{y_{\max}} = \frac{b \cdot h^3}{12 \cdot h/2} = \frac{b \cdot h^2}{6}; \quad W_z = \frac{h \cdot b^2}{6}, \quad (4.72)$$

Для круглого перерізу діаметром d :

$$W_z = \frac{J_z}{0,5 \cdot d} = \frac{\pi \cdot d^4}{64 \cdot 0,5 \cdot d} = \frac{\pi \cdot d^3}{32} \approx 0,1 \cdot d^3, \quad (4.73)$$

Для порожнистого перерізу діаметром d і D матимемо відповідно

$$W_z = \frac{J_z}{0,5 \cdot D} = \frac{\pi \cdot D^4 \cdot (1 - \alpha^4)}{64 \cdot 0,5 \cdot D} = \frac{\pi \cdot D^3}{32} \cdot (1 - \alpha^4) \approx 0,1 \cdot D^3 \cdot (1 - \alpha^4), \quad (4.74)$$

де $\alpha = d/D$ - співвідношення діаметрів.

Осьові моменти опору прокатних профілів швелера, двотавра – приведені в таблицях прокатних сортаментів.

Поперечний згин

При поперечному згині бруса в його перерізах, крім згинального моменту, діє поперечна сила, що намагається зсунути переріз один відносно одного. Тому, крім нормальних напружень від згинального моменту, у перерізах бруса виникають дотичні напруження, які приводять до кутових деформацій зсуву. Внаслідок цього поперечні перерізи бруса при згині його не залишаються плоскими. Однак, як показали теоретичні та експериментальні дослідження поперечного згину, викривлення поперечних перерізів істотно не впливають на величину нормальних напружень. Тому при поперечному згині користуються формулами для σ , одержаними для чистого згину.

4.7 Повна перевірка міцності балки

Незалежно від типу балок і їх навантаження розрахунок балки на міцність проводять по нормальним напруженням з умови міцності:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma], \quad (4.75)$$

Треба зазначити, що слід прагнути до того, щоб переріз балки був якомога раціональним за витратою матеріалів. Більш раціональним є такий переріз, для якого відношення моменту опору до цього площини має більше значення.

Для цього треба якомога більшу частину площі поперечного перерізу розміщувати далі від нейтральної лінії. При розрахунку балок на міцність доводиться зустрічатися з трьома видами задач, що розрізняються формою використання умови міцності при згині:

- 1 Підбір перерізу балки (проектний розрахунок);
- 2 Перевірка напружень у балці (перевірний розрахунок);
- 3 Визначення допустимого навантаження на балку.

При проектному розрахунку після, побудуванні епюри згинальних моментів, прийнявши допустиме напруження $[\sigma]$, визначають необхідний момент опору перерізу балки за формулою:

$$W_z \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]}, \quad (4.76)$$

Потім, вираховуючи прийняту або задану форму перерізу, підбирають його розміри так, щоб момент опору підбраного перерізу дорівнював необхідній величині. Користуючись таблицями сортаменту знаходять потрібний номер профілю. Або для круглих балок розраховують діаметр за формулою:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{M_{\max}}{0,1 \cdot [\sigma]}}, \quad (4.77)$$

При перевірочному розрахунку всі розміри і навантаження, які діють на неї, відомі. Треба тільки перевірити умову міцності:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma], \quad (4.78)$$

При визначенні допустимого навантаження на балку знаходять із умови міцності:

$$|M_{\max}| = [\sigma] \cdot W_z, \quad (4.79)$$

Потім знаходять положення найбільш небезпечного перерізу балки і виражають згинальний момент у цьому перерізі через невідоме навантаження і знаходять величину допустимого навантаження.

При перевірному розрахунку або при проектному треба перевірити міцність по дотичним напруженням:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_{\max}}{b \cdot J_z} \leq [\tau], \quad (4.80)$$

Головні напруження при згині

У довільній точці k виріжмо двома вертикальними і горизонтальними перерізами нескінченно малий паралелепіпед (рисунок 4.27). На гранях цього елемента будуть діяти нормальні (розтягуючі) напруження σ і дотичні напруження τ . Таким чином, у розглядуваній точці має місце плоский напружений стан.

Головні напруження σ_1 і σ_3 будуть дорівнювати:

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}, \quad (4.81)$$

Для балки двотаврового профілю в тому перерізі, де діють одночасно великий згинальний момент і велика поперечна сила, треба робити перевірку міцності під пс

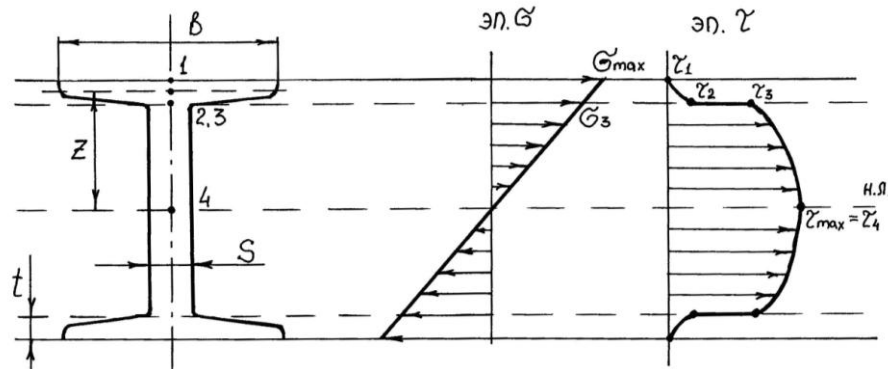


Рисунок 4.27 – Головні напруження при згині

Найбільше головне напруження:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} \cdot \left[\sigma_A + \sqrt{\sigma_A^2 + 4\tau_A^2} \right] \leq [\sigma], \quad (4.82)$$

де $\sigma_A = \frac{M}{J_z} \cdot y_A$; $\tau_A = \frac{Q \cdot S}{b \cdot J_z}$ відповідно нормальне та дотичне напруження в

точці А.

4.8 Розрахунок гнучких ниток

В інженерній практиці часто маємо справу з розрахунком гнучкої нитки. До гнучких ниток відносять електричні дроти, канати підвісних доріг.

Як правило, гнучка нитка працює на розтяг (рисунки 4.27). Нехай гнучка нитка, підвішена в точках А і В. Під дією власної ваги, провід провисне по деякій кривій АВ. Провисання проводу звичайно невелике в порівнянні з його

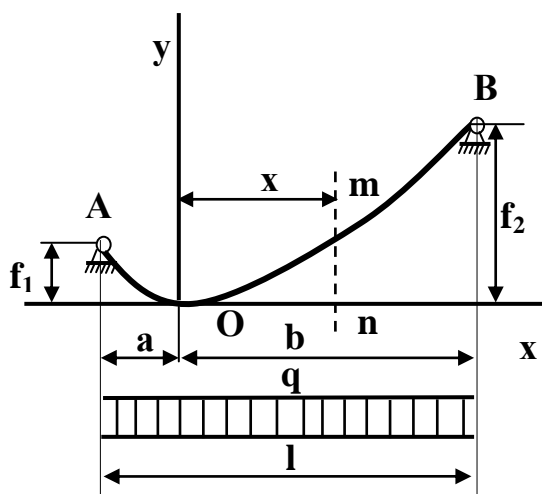


Рисунок 4.27 - Розрахунок гнучких ниток

прольотом l . Тому з достатнім ступенем точності можна вважати, що вага проводу рівномірно розподілена по довжині його горизонтальної проекції, тобто по довжині прольоту l .

Візьмемо початок координат у найнижчій точці проводу (дроту). Вирізуємо частину проводу двома перетинами віддаленими друг від друга на відстані x , і позначимо натяг у точці О через H , а в точці D

через T (рисунки 4.28). Проецируючи всі сили, що діють на частину проводу OD на осі координат, будемо мати: $\Sigma x=0$; $-H + T \cdot \cos \alpha = 0$;

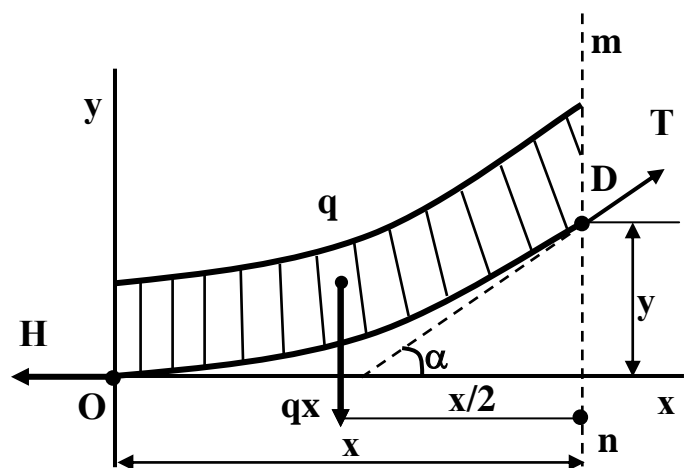


Рисунок 4.28 – Розрахункова схема

$$\Sigma y=0; -q \cdot x + T \cdot \sin \alpha = 0;$$

Знайдемо суму моментів усіх сил відносно точки D.

$$\Sigma m_D = 0; -Hy + qx \frac{x}{2} = 0,$$

відкіля
$$y = \frac{qx^2}{2H}$$

тобто крива провисання нитки є параболою.

Симетричне розташування опор

Якщо точки А і В будуть знаходитися на одному рівні, то $f_1 = f_2 = f$, де f - стріла провисання. Величину f можна визначити з отриманого рівняння, тому що нижча точка О при розташуванні на одному рівні А і В буде знаходитися

посередині: $f = \frac{q \cdot l^2}{8H}$, звідси $H = \frac{q \cdot l^2}{8f}$ - горизонтальний натяг нитки.

Такий чином при відомих q і H можна знайти f , а при q і f - H .

Скористаємося рівнянням суми проекцій усіх сил на вісь x . Із цього рівняння знайдемо силу натягу в довільній точці : $T = \frac{H}{\cos\alpha}$.

З цієї формули очевидно, що сила T збільшується від нижчої точки нитки до опор і буде найбільшою в точках підвісу, тобто там де дотична кривої провисання нитки складає найбільший кут з горизонталлю. При малому провисанні нитки α не досягає великих значень і його приймають $\alpha \approx 0$.

Тоді з достатнім ступенем точності можна вважати, що $T \approx H$.

Якщо необхідно виконати розрахунок на найбільшу силу в точках підвісу, то для симетричної нитки:

- визначають вертикальну складову реакцію в опорах: $R_a = R_b = ql/2$;

- визначають горизонтальну складову : $H = \frac{q \cdot l^2}{8f}$;

- сумарне зусилля: $T = \sqrt{\left(\frac{q \cdot l^2}{8f}\right)^2 + \left(\frac{q \cdot l}{2}\right)^2} = \frac{q \cdot l^2}{8f} \sqrt{1 + 16 \frac{f^2}{l^2}}$.

Максимальний натяг у довільній точці - $T_{\max} = H \sqrt{1 + 16 \frac{f^2}{l^2}}$

Умова міцності для гнучкої нитки має вид : $\sigma = \frac{H}{F} \leq [\sigma]$

Замінімо $H = \frac{q \cdot l^2}{8f}$; тоді $\sigma = \frac{q \cdot l^2}{8fF} \leq [\sigma]$.

З отриманого вираження при заданих q , l , F і $[\sigma]$ знайдемо стрілу провисання f , якщо при цьому враховувати тільки власну вагу, то $q = \gamma \cdot F$,

де γ - об'ємна маса; F - площа поперечного перетину. Тоді

$$f = \frac{\gamma \cdot F \cdot l^2}{8F \cdot [\sigma]} = \frac{\gamma \cdot l^2}{8[\sigma]}, \quad (4.83)$$

Різнорівневе розташування опор

При розташуванні опор на різних рівнях: $f_1 < f_2$, $f_1 = \frac{q \cdot a^2}{2H}$; $f_2 = \frac{q \cdot b^2}{2H}$;

із другого вираження : $H = \frac{q \cdot b^2}{2f_2}$. Розділимо $f_1: f_2$.

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{a^2}{b^2} \text{ або } a = b \sqrt{\frac{f_1}{f_2}}, \text{ знаючи що } a + b = l, \text{ одержимо } b \pm b \sqrt{\frac{f_1}{f_2}} = l,$$

Звідки $b = \frac{l}{1 \pm \sqrt{\frac{f_1}{f_2}}}$, тоді

$$H = \frac{q \cdot l^2}{2f_2^2 \left(1 \pm \sqrt{\frac{f_1}{f_2}}\right)^2} = \frac{q \cdot l^2}{2(\sqrt{f_2} \pm \sqrt{f_1})^2}, \quad (4.84)$$

Отримане вираження показує два можливих випадки провисання нитки (рисунок 4.29).

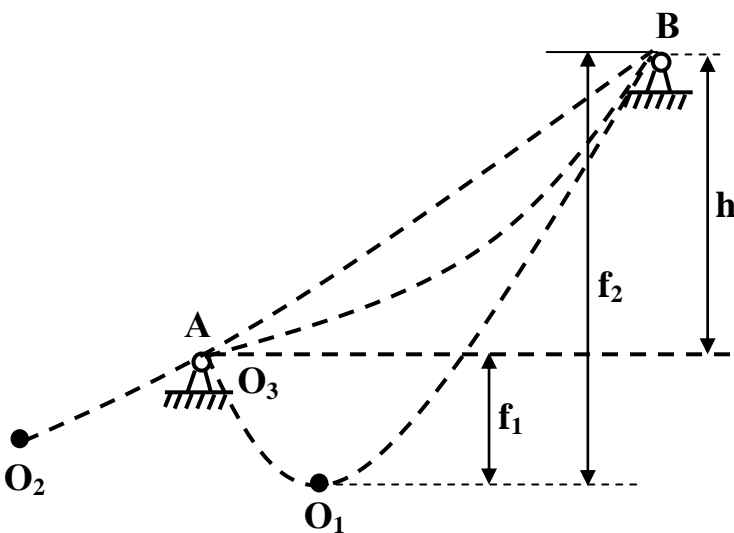


Рисунок 4.29 Провисання гнучких ниток

Перша форма дає вершину параболі знаходиться ліворуч від опори А (O_2).

Можлива і третя форма (проміжна), що відповідає умові $f_1=0$, при цьому початок координат O_3 поєднується з точкою А.

Підставивши значення а и b у формули f_1 і f_2 будемо мати

$$f_1 = \frac{q \cdot l^2}{8H} + \frac{Hh^2}{2q \cdot l^2} - \frac{h}{2}; \quad f_2 = \frac{q \cdot l^2}{8H} + \frac{Hh^2}{2q \cdot l^2} + \frac{h}{2}, \quad (4.85)$$

Перша форма:

$$H_1 = \frac{q \cdot l^2}{2(\sqrt{f_2} + \sqrt{f_1})^2}.$$

Друга форма:

$$H_2 = \frac{q \cdot l^2}{2(\sqrt{f_2} - \sqrt{f_1})^2}.$$

Значить $H_1 < H_2$.

Перша форма дає вершину параболі між опорами нитки (O_1). Друга форма - вер-

Симетрична нитка при перепадах температур

Роздивимося випадок, коли нитка, підвішена при температурі t_1 , має навантаження q_1 і нехай температура піднялася до t_2 , а навантаження за рахунок зледеніння стало q_2 . Нехай задана початкова стріла провисання f .

Для визначення деформації нитки, яка в порівнянні з довжиною є малою величиною введемо два допущення:

- довжина нитки дорівнює її прольоту;
- натяг постійний і дорівнює H .

Для пологих ниток ці допущення дають невеличку похибку.

Подовження нитки викликане збільшенням температури, буде дорівнювати:

$$\Delta S_1 = \alpha(t_2 - t_1) \cdot l, \quad (4.86)$$

де α - коефіцієнт лінійного температурного розширення.

При збільшенні температури нитка подовжується, отже f збільшується й отже H зменшується $H = \frac{q \cdot l^2}{8f}$, але з іншої сторони через збільшення q - (H) повинно збільшитися.

Нехай у кінцевому рахунку натяг H збільшився. Тоді подовження нитки, викликане збільшенням натягу, буде відповідно до закону Гука дорівнювати:

$$\Delta S_2 = \frac{(H_2 - H_1) \cdot l}{EF}, \quad (4.87)$$

Якщо H_2 буде менше H_1 , то ΔS_2 (-).

При зниженні температури $t_2 < t_1$ ΔS (-).

Довжина нитки при зміні t і q буде дорівнювати

$$\Delta S = S_1 + \Delta S_1 + \Delta S_2, \quad (4.88)$$

де ΔS_1 - температурна зміна довжини;

ΔS_2 - зміна довжини за рахунок зміни натягу H .

Після ряду перетворень маємо :

$$H_2^3 + \left[\frac{EF \cdot q_1^2 \cdot l^2}{24H_1^2} + EF \cdot \alpha(t_2 - t_1) - H_1 \right] H_2^2 - \frac{EF \cdot q_2^2 \cdot l^2}{24} = 0, \quad (4.89)$$

Отримані формули справедливі тільки для випадку малих значень f у порівнянні з 1 при $\frac{f}{1} < \frac{1}{20}$, $\delta \leq 0,3\%$; $\frac{f}{1} < \frac{1}{10}$, $\delta = 1,3\%$; $\frac{f}{1} < \frac{1}{5}$, $\delta = 5\%$.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ДО РОЗДІЛУ 4

- 1 Які деформації називаються пружними?
- 2 Які деформації називаються пластичними?
- 3 Що характеризують напруження в поперечному перерізі?
- 4 Яким символом позначається нормальні напруження?
- 5 У чому полягає суть методу перетинів?
- 6 Що характеризує модуль пружності I роду (E)?
- 7 За якою формулою знаходять абсолютну деформацію при розтягу – стиску?
- 8 Як визначаються нормальні допустимі напруження для пластичних матеріалів?
- 9 Від чого залежать допустимі напруження?
- 10 Як визначається зміна довжини стержня при розтягу - стиску?
- 11 Як визначається відносна деформація?
- 12 В якому випадку виникає деформація розтяг - стиск?
- 13 Як вираховується внутрішні силові фактори при згині?
- 14 Які правила обчислення поперечної сили та згинального моменту у довільному перерізі балки?
- 15 Які правила знаків поперечної сили та згинального моменту у довільному перерізі балки?
- 16 Правила побудування епюр поперечних сил і згинальних моментів для балок?
- 17 Що таке чистий згин?
- 18 Який вигляд має умова міцності для балки?

РОЗДІЛ 5 ДЕТАЛІ МАШИН

Загальні відомості

«Деталі машин» - наукова дисципліна по теорії, розрахунку і конструюванню деталей і вузлів загального машинобудівного застосування. У її завдання входять узагальнення інженерного досвіду створення машинобудівних конструкцій, розробка наукових основ розрахунку і проектування надійних елементів і вузлів конструкцій.

У навчальному курсі «Деталі машин» комплексно розглядають конструювання, розрахунки і технологію виготовлення окремих деталей і вузлів машин. Ця дисципліна наочно демонструє як інженерний задум перетворюється в реальну конструкцію. «Деталі машин» - наука про раціональне проектування - є базою для спеціальних дисциплін («Підйомно-транспортні машини», «Двигуни внутрішнього згорання», «Трактори й автомобілі», «Устаткування для переробних і харчових виробництв», «Ремонт машин» та ін.).

У розрахунках деталей і вузлів машин широко використовують результати досліджень у наукових лабораторіях і в умовах реальної експлуатації з застосуванням різноманітних методів проведення експериментів (тензометрії, голографії, фотопружності й ін.).

Курс «Деталі машин», є одним із головних і найстаріших курсів загальної інженерної підготовки, безупинно розвивається разом із прогресом науки і техніки (з'являються нові напрямки в техніці, нові матеріали і технології, що потребує нових конструктивних вирішень, удосконалювання методів розрахунку). Необхідність підвищення продуктивності, швидкохідності і надійності машин при зменшенні їхньої маси, а також створення машин нових поколінь потребує безупинного поглиблення теорії й уточнення розрахунків деталей і вузлів машин.

Механізмом називають систему твердих тіл, призначену для перетворення руху одного або кількох тіл у необхідний рух інших тіл (редуктор, коробка передач, варіатор і ін.).

Машиною називають механізм або пристрій, що виконує механічний рух і застосовується для перетворення енергії, матеріалів або інформації з метою полегшення або заміни фізичної чи розумової праці людини і підвищення її продуктивності.

Будь-яка машина складається з деталей. *Деталь* - частина машини, яку виготовляють без складальних операцій. Деталі можуть бути простими (гвинт, шпонка) або складними (колінчастий вал, станина верстата). Декілька деталей, які зібрано в одне ціле, утворюють *складальну одиницю* або *вузол*. Серед множини різноманітних деталей і вузлів можна виділити такі, що застосовують у різних машинах: кріпильні гвинти, зубчасті колеса, вали, підшипники кочення, муфти. Ці деталі (вузли) називають *деталлями (вузлами) загального призначення* і вивчають у курсі «Деталі машин». Інші деталі - поршні, шатуни, лопатки турбін та ін. - застосовують тільки в одному або кількох типах машин. Їх відносять до деталей спеціального призначення і вивчають у відповідних курсах.

Деталі і вузли загального призначення виготовляють щорічно у великих кількостях (лише в одному легковому автомобілі більш п'яти тисяч типових деталей, більш тридцяти типорозмірів підшипників), тому знання основних методів розрахунку, правил і норм проектування, які підтверджені експлуатацією, дуже важливе для конструкторської підготовки.

Серед загальних правил конструювання можна відзначити такі.

Перше. *При проектуванні розраховують на нормальні умови експлуатації*. Так, якщо розраховувати деталі велосипеда із сподіванням їх непошкодження при наїзді на непереборну перешкоду, то вийде перевантажена конструкція, яка буде важкою в експлуатації.

Друге. *Конструювання є пошук оптимального компромісного рішення*. Часто при проектуванні повинні бути задоволені суперечливі вимоги. Так, у бойового літака повинно бути забезпечене і достатнє бронювання кабіни пілота (що потребує збільшення маси) і одночасно необхідна дальність і швидкість польоту (що вимагає зниження маси).

Третє. *При конструюванні бажано виконати умову рівномірності*. Очевидно, що недоцільно конструювати окремі елементи машини із зайвими запасами несучої спроможності, які в повній мірі не можуть бути реалізовані в зв'язку з відмовою конструкції через руйнацію або ушкодження інших елементів.

Об'єкти вивчення в курсі «Деталі машин»

1) **Деталі передач.** У курсі розглядають механічні передачі: зубчасті, планетарні, хвильові, черв'ячні, фрикційні, пасові, ланцюгові, передачі гвинт - гайка.

2) **Деталі, що обслуговують обертальний рух:** вали й осі, підшипники кочення і ковзання, муфти приводів.

3) **З'єднання і деталі з'єднань.** З'єднання розділяють на роз'ємні і нероз'ємні. Роз'ємні з'єднання допускають багатократне збирання і розбирання. Їх основні типи: різьбові, шпонкові, шліцьові, клемові, на закріпних конічних втулках, тощо.

Нероз'ємні з'єднання не допускають багатократної перебірки. Для розбирання такого з'єднання його потрібно зруйнувати. Основні типи: зварні, клейові, паяні, заклепкові, з'єднання з натягом. Останні відносять до нероз'ємних умовно, тому що вони дозволяють проводити складання і розбирання, але не багаторазово.

При створенні деталей і машин повинні задовольнятися дві основні умови: надійність й економічність. Під економічністю розуміють мінімально необхідну вартість проектування, виготовлення й експлуатації деталей і машин.

Основні поняття і показники надійності

Надійність - властивість виробу зберігати в часі спроможність до виконання необхідних функцій у заданих режимах і умовах застосування, технічного обслуговування, збереження і транспортування. Надійність характеризують станами і подіями.

Працездатність - стан виробу, при якому він здатен нормально виконувати свої функції.

Відмова - подія, що полягає в повній або частковій утраті працездатності.

Показники якості виробу по надійності: ***безвідмовність, довговічність і ремонтпригодність.***

Безвідмовність - властивість виробу безупинно зберігати працездатність протягом заданого часу.

Довговічність - властивість виробу довгостроково зберігати працездатність до настання граничного стану при дотриманні норм експлуатації. Під граничним розуміють такий стан виробу, при котрому його подальша експлуатація неприпустима або недоцільна.

Ремонтпригодність - властивість виробу, що полягає в пристосованості до підтримки і відновлення працездатності шляхом технічного обслуговування і ремонту.

Часові поняття надійності: **наробіток, ресурс і термін служби**.

Наробіток - тривалість або обсяг роботи виробу (у годинах, кілометрах пробігу, числах циклів навантаження).

Ресурс - сумарний наробіток виробу від початку експлуатації до переходу у граничний стан (у годинах, кілометрах пробігу й ін.).

Термін служби - календарна тривалість експлуатації виробу від початку до переходу в граничний стан. Виражають звичайно в роках. Термін служби включає наробіток виробу і час простоїв.

Основними показниками надійності є:

по **безвідмовності** - ймовірність безвідмовної роботи й інтенсивність відмов,

по **довговічності** - середній і гама-процентний ресурс;

по **ремонтпригодності** - ймовірність відновлення.

Критерії працездатності і розрахунку деталей машин

Критерії працездатності: **міцність, жорсткість, зносостійкість, теплостійкість, вібростійкість**.

При конструюванні працездатність деталей забезпечують вибором матеріалу і розрахунком розмірів по основному критерію.

Вибір критерію для розрахунку обумовлено характером руйнування (видом відмови): для кріпильних гвинтів - міцність, для ходових гвинтів - зносостійкість, для валів - жорсткість.

Найважливішим критерієм працездатності є **міцність**, тобто спроможність деталі опиратися руйнації або виникненню неприпустимих пластичних

деформацій під дією прикладених до неї навантажень. Це абсолютний критерій. Йому повинні задовольняти всі деталі.

Жорсткість - спроможність деталі опиратися зміні форми і розмірів під дією навантаження. Роль цього критерію працездатності зростає в зв'язку з тим, що міцнісні характеристики матеріалів (наприклад, сталей) постійно покращують, що дозволяє зменшити розміри деталей, а пружні характеристики (модуль пружності) при цьому не змінюються.

Зносостійкість - властивість матеріалу чинити опір зношуванню. Під **зношуванням** розуміють процес руйнування і відділення матеріалу з поверхні твердого тіла внаслідок тертя, що виявляється в поступовій зміні розмірів або форми.

Зносостійкість залежить від фізико-механічних властивостей матеріалу, термообробки і шорсткості поверхонь, від значень тиску або контактних напружень, швидкості ковзання, наявності мастильного матеріалу, режиму роботи і т.д. **Знос** (результат зношування) змінює характер спряження, збільшує зазори в рухливих з'єднаннях, викликає шум, зменшує товщину покриття, знижує міцність деталей. Знос можна зменшити, якщо розділити поверхні деталей, мастильним матеріалом. У підшипниках ковзання за допомогою гідродинамічних розрахунків визначають необхідну товщину масляного прошарку. Для деталей, що порівняно повільно переміщуються, (направляючих верстатів, ходових гвинтів) використовують гідростатичні опори, у які мастило подають під тиском.

Заходи щодо зменшення зношування

1) Варто уникати застосування відкритих поверхонь тертя, що зазнають вплив абразивного середовища. Так, механічні передачі сучасних підйомних кранів, лебідок виконують у закритому виконанні. Закривають телескопічними кожухами направляючі верстатів. Застосовують підшипники кочення із захисними шайбами.

2) Удосконалювання ущільнювальних пристроїв. Введення лабіринтових ущільнень підшипників збільшило їхній ресурс у роликах конвеєрів у 3 - 4 рази.

3) Забезпечення рівномірного розподілу тиску по поверхні: підвищення поверхневої твердості (загартування знижує знос у 2 рази).

4) Забезпечення досконалих видів тертя (гідродинамічного, гідростатичного, тертя кочення, тощо).

5) Заміна зовнішнього тертя внутрішнім. При малих переміщеннях застосовують гумометалеві шарніри, у яких гума втулка привулканизована до металевих трубок.

Теплостійкість - спроможність конструкції працювати в границях заданих температур протягом заданого терміну служби.

Нагрів деталей у процесі роботи машини призводить до:

1 Зниження механічних характеристик матеріалу і до появи пластичних деформацій - повзучості. Сталеві деталі, що працюють при температурах нижче 300 С, на повзучість не розраховують.

2 Зменшення зазорів у рухливих спряженнях деталей і, як слідство, захоплення, заїдання, заклинювання.

3 Зниження в'язкості мастила і несучої спроможності масляних плівок. З підвищенням температури в'язкість мінеральних нафтових мастил знижується по кубічній параболі - дуже різко.

Для забезпечення нормального теплового режиму роботи проводять теплові розрахунки (розрахунки черв'ячних і хвильових редукторів, підшипників ковзання). При цьому складають рівняння теплового балансу (тепловиділення за одиницю часу дорівнює тепловіддачі) і визначають середню сталу температуру при роботі машини. З метою підвищення тепловіддачі передбачають охолоджуючі ребра, примусове охолодження або збільшують розміри корпусу.

Вібростійкість - спроможність конструкції працювати в діапазоні режимів, достатньо далеких від зони резонансу. Вібрації знижують якість роботи машин, збільшують шум, викликають додаткові напруження в деталях. Особливо небезпечні резонансні коливання.

У зв'язку з підвищенням швидкостей руху машин небезпека вібрацій зростає. Наприклад, за останні 50 років частота обертання двигунів внутрішнього

згоряння підвищилася майже на порядок. Тому розрахунки на вібростійкість набувають усе більшого значення. Періодична зміна зовнішніх сил у поршне-вих машинах або сил від неврівноваженості деталей, що обертаються, погріш-ностей виготовлення викликає вимушені коливання. При збігу або кратності частоти вимушених коливань і частоти власних коливань спостерігають явище резонансу. При резонансі амплітуда коливань досягає великих значень - відбу-вається руйнування. Працювати можна в до - або в післярезонансній зонах. Перехід через резонансну зону повинен бути здійснений достатньо швидко.

Розрахунки на вібростійкість виконують для машини в цілому. Вони зво-дяться до визначення частот власних коливань механічної системи і забезпе-ченню їх несовпадіння із частотою вимушених коливань.

До пристроїв для зниження коливань відносять маховики, пружно-демпфуючі елементи і демпфери, що розсіюють енергію коливань.

5.2 Механічні передачі

У загальному випадку в машині можна виділити три складові частини: двигун, передачу і виконавчий елемент (рисунок 5.1).



Рисунок 5.1 – Схема передачі

Механічна енергія, що приводить у рух машину, являє собою енергію обертального руху вала двигуна. У якості двигуна частіше усього використо-вують: електродвигун, двигун внутрішнього згоряння, турбіну. Передачу ме-ханічної енергії від двигуна до виконавчого елемента машини здійснюють за допомогою різноманітних передавальних механізмів (надалі просто передач): зубчастих, черв'ячних, пасових, ланцюгових, фрикційних. Приклади виконав-чих елементів машин: колеса автомобіля, шпindelь верстата, гвинт корабля.

Оптимальною була б машина без передачі. Прикладом може служити електрошпіндель: електродвигун, на вал якого встановлено шліфувальний круг - передавальний механізм відсутній. Відсутність передавального механізму обумовлено збігом необхідної при роботі частоти обертання шліфувального круга і частоти обертання вала електродвигуна. Проте такий збіг на практиці зустрічається рідко.

Для досягнення необхідних на виконавчому елементі за умовами роботи силових і кінематичних параметрів і застосовують передачі.

У залежності від принципу дії механічні передачі розділяють на:

- **передачі зачепленням** (зубчасті, черв'ячні, ланцюгові);
- **передачі тертям** (фрикційні, пасові).

Передаючи механічну енергію, передачі одночасно можуть виконувати одну або кілька з таких функцій.

а) **Зниження** (або ж підвищення) частоти обертання від вала двигуна до вала виконавчого елемента (рисунок 5.2).

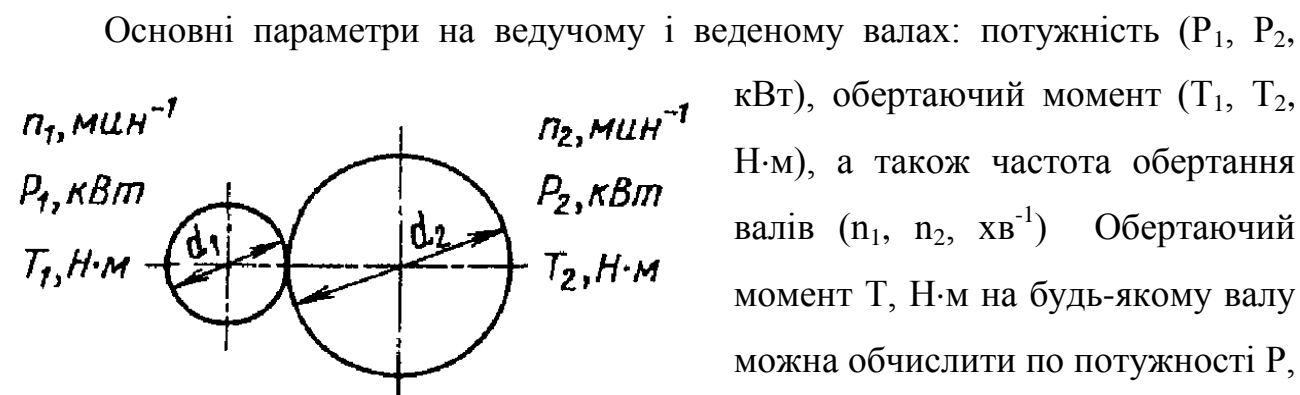


Рисунок 5.2 – Розрахункові параметри механічних передач

кВт), обертаючий момент ($T_1, T_2, \text{Н}\cdot\text{м}$), а також частота обертання валів ($n_1, n_2, \text{хв}^{-1}$) Обертаючий момент $T, \text{Н}\cdot\text{м}$ на будь-якому валу можна обчислити по потужності $P, \text{кВт}$ і частоті обертання $n, \text{хв}^{-1}$: $T = 9550 P/n$

Як видно, зниження частоти обертання приводить до підвищення обертаючого моменту, а підвищення частоти обертання - до зниження моменту.

Важливою характеристикою механічної передачі є її **передаточне число** U , обумовлене як відношення частот обертання n_1 ведучого і n_2 веденого валів або (без урахування ковзання в контакт) як відношення діаметрів d_2 , веденого і d_1 ведучого елементів передачі:

$$U = n_1/n_2 = d_2/d_1, \quad (5.1)$$

При цьому $U > 1$. Отже, частота обертання веденого вала менше частоти обертання ведучого вала в передаточне число разів:

$$n_2 = n_1 / U, \quad (5.2)$$

Зниження частоти обертання називають *редуцируванням*, а механізми, що містять закриті передачі, які знижують частоту обертання, - *редукторами*. Пристрої, що підвищують частоту обертання, називають прискорювачами або ж *мультиплікаторами*. Надалі будемо розглядати тільки понижуючі передачі, які мають переважне застосування.

У більшості випадків на практиці частота обертання вала двигуна набагато перевищує частоту обертання вала виконавчого елемента. Порівняйте: частота обертання вала ДВЗ автомобіля - 5000 хв^{-1} , а частота обертання колеса при швидкості руху автомобіля 100 км/год - 1000 хв^{-1} .

Співвідношення потужностей і моментів. Потужність P_2 на веденому валу менше, чим потужність P_1 на ведучому унаслідок втрат у передачі, оцінюваних коефіцієнтом корисної дії η : $P_2 = P_1 \cdot \eta$. Обертаючий момент на веденому валу зростає практично в передаточне число разів (відповідно до зменшення частоти його обертання): $T_2 = T_1 \cdot U \cdot \eta$.

б) **Зміна напрямку потоку потужності.** Прикладом може служити зуб-

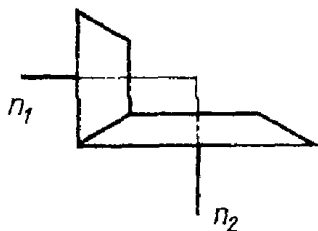


Рисунок 5.3 – Зміна напрямку потоку потужності

часта передача заднього моста автомобіля. Вісь обертання вала двигуна більшості автомобілів складає з віссю обертання коліс кут 90° . Для передачі механічної енергії між валами з осями, що пересікаються застосовують конічну передачу, за допомогою якої крім зміни напрямку потоку потужності звичайно реалізу-

ють *редуцирування* (рисунок 5.3).

в) **Регулювання частоти обертання** веденого вала. Зі зміною частоти обертання змінюють і значення обертаючого моменту: меншій частоті відповідає більший момент. Необхідність у більшому моменті виникає, наприклад коли автомобіль рушає з місця або рухається на крутому підйомі; для токарного

верстата - при зніманні стружки великої товщини. Для регулювання частоти обертання веденого вала застосовують коробки передач і варіатори.

г) *Перетворення одного виду руху в інший* (обертального в поступальний, рівномірного в переривчастий і т.д.).

д) *Реверсування руху* (прямий й зворотний хід).

е) *Розподіл енергії двигуна* між кількома виконавчими елементами машини.

5.2 Зубчасті передачі

У зубчастій передачі рух передається за допомогою зачеплення пари зубчастих коліс. Менше зубчасте колесо прийнято називати *шестернею*, більше - *колесом*. Термін "зубчасте колесо" відносять як до шестерні, так і до колеса.

Переваги зубчастих передач:

- відносно малі розміри і маса зубчастих коліс при високій навантажувальній спроможності і надійності;

- високий ККД (97-98 %);

- можливість використання зубчастих передач у великому діапазоні навантажень (колові сили від близьких до нуля в механізмах приладів до 1000 кВт у приводах прокатних станів);

- можливість застосування в широкому діапазоні швидкостей (колові швидкості від близьких до нуля в системах переміщення телескопів до 250 м/с у приводі несучого гвинта гелікоптера);

- порівняно малі навантаження на вали і підшипники;

- сталість середнього значення передаточного числа;

- простота обслуговування.

Недоліки:

- необхідність високої точності виготовлення і монтажу;

- шум при роботі передач. Шум обумовлено перемінним значенням миттєвого передаточного числа в межах одного оберту.

Зуби коліс одержують нарізуванням або накочуванням

Застосування. Зубчасті передачі застосовують у широкому діапазоні областей і умов роботи: годинники і прилади, коробки передач автомобілів, тракторів, інших транспортних і дорожньо-будівельних машин, механізми підйому і повороту кранів, коробки швидкостей верстатів, приводи прокатних станів, конвеєрів і т.п.

Зубчасті передачі підрозділяються по геометричних параметрах на циліндричні із зовнішнім або внутрішнім зачепленням і конічні.

Циліндричні передачі з зовнішнім зачепленням (рисунок 5.4). Шестерня в понижуючих передачах є ведучим елементом, і всім її параметрам присвоюють індекс "1". Наприклад, частота обертання n_1 , хв^{-1} , число зубів Z_1 . Параметри веденого елемента пари - колеса мають індекс "2" - n_2 , Z_2 .

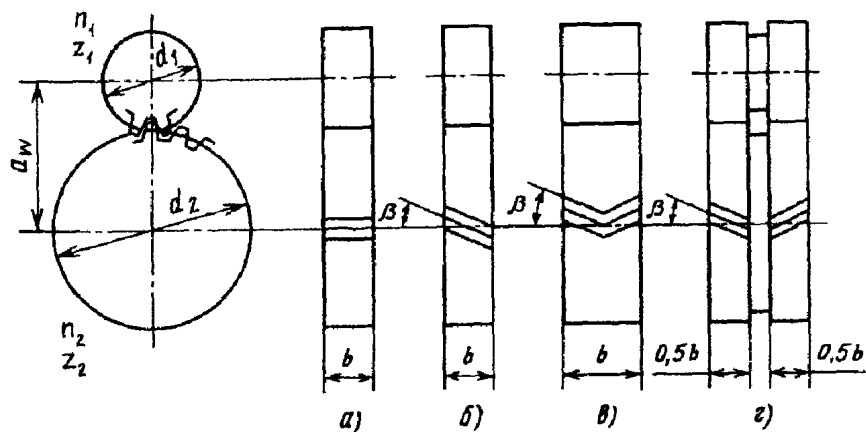


Рисунок 5.4 – Зубчасті передачі з паралельними осями

Лінії пересічення бічних поверхонь зубів із будь-якою круговою циліндричною поверхнею, яка співвісна з початковою, називають лініями зубів. Якщо лінії зубів паралельні осі зубчастого колеса, то його називають прямозубим (рисунок 5.4а). Якщо ці лінії гвинтові постійного кроку, то зубчасте колесо називають косозубим (рисунок 5.4б).

Зі збільшенням кута нахилу зуба β підвищується навантажувальна спроможність передачі, але зростає осьова сила, що діє на вали й опори. Звичайно кут $\beta = 8...20^\circ$.

Різновид косозубих зубчастих коліс - шевронні колеса: без канавки (рисунок 5.4в) і з канавкою для виходу інструменту (рисунок 5.4г). Внаслідок про-

тилежного напрямку зубів на півшевронах осьові сили взаємно зрівноважені на колесі і не навантажують опори. Звичайно для шевронних передач $\beta = 25 \dots 40^\circ$.

Точку w торкання початкових окружностей d_{w1} , шестерні і d_{w2} колеса називають полюсом зачеплення.

Для простоти будемо розглядати передачі без зміщення інструменту (не кориговані), для зубчастих коліс у яких діаметри d_w початкові і d ділильні збігаються, тобто $d_{w1} = d_1$ і $d_{w2} = d_2$. Проте в позначенні міжосьової відстані для спільності викладу індекс w збережемо: a_w .

Відстань між відповідними точками сусідніх зубів, яка обміряна в перетині, нормальному лініям зубів, називають нормальним кроком p . Відношення кроку до числа π називають модулем і позначають m .

$$m = p / \pi , \quad (5.3)$$

Модуль є основною характеристикою розмірів зубів. Модуль вимірюють у міліметрах і призначають із стандартного ряду: 1; 1,25; 1,5; 1,75; 2; 2,25; 2,5; 3; 4

Запишемо основні параметри зубчастої передачі через параметри зубчастих коліс:

передаточне число з урахуванням того, що $d = m Z$

$$U = n_1/n_2 = d_2/d_1 = Z_2/Z_1, \quad (5.4)$$

міжосьова відстань $a_w = 0,5(d_1+d_2)$.

Значення a_w приймають із нормального ряду чисел Ра 40.

Звичайно ширина b_2 зубчастого колеса менше ширини шестерні. У розрахунках використовують відношення $\psi_{ba} = b_2/a_w$ який називають коефіцієнтом ширини. Значення ψ_{ba} стандартизовані: 0,1; 0,125; 0,16; 0,2; 0,25; 0,315; 0,4; 0,5; 0,63; 0,8. Для коробок передач із метою зменшення розмірів у напрямку осей валів застосовують вузьке колесо $\psi_{ba} = 0,1 \dots 0,2$; для редукторів - широке колесо $\psi_{ba} = 0,315 \dots 0,63$.

Для деяких механізмів застосовують циліндричні передачі з внутрішнім зачепленням (рисунок 5.5). У цьому випадку міжосьова відстань дорівнює:

$$a_w = 0,5(d_2 - d_1), \quad (5.5)$$

Тоді в загальному виді можна записати

$$a_w = 0,5(d_2 \pm d_1), \quad (5.6)$$

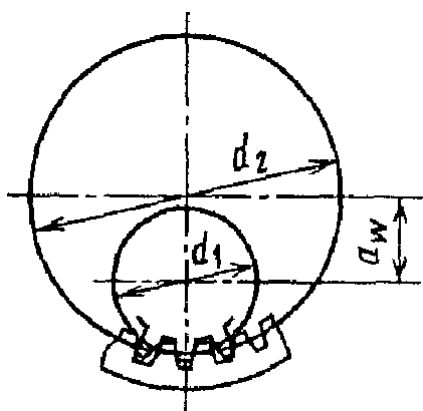


Рисунок 5.5 – Циліндричні передачі з внутрішнім зачепленням

відносячи знак плюс до передач зовнішнього, а знак мінус до передач внутрішнього зачеплення.

Конічні зубчасті передачі передають механічну енергію між валами з осями, що пересікаються. Звичайно $\Sigma = 90^\circ$ (рисунок 5.6а). Зачеплення конічних зубчастих коліс можна розглядати як кочення ділительних кругових конусів шестерні і колеса. Основні

характеристики: кути ділительних конусів δ_1 і δ_2

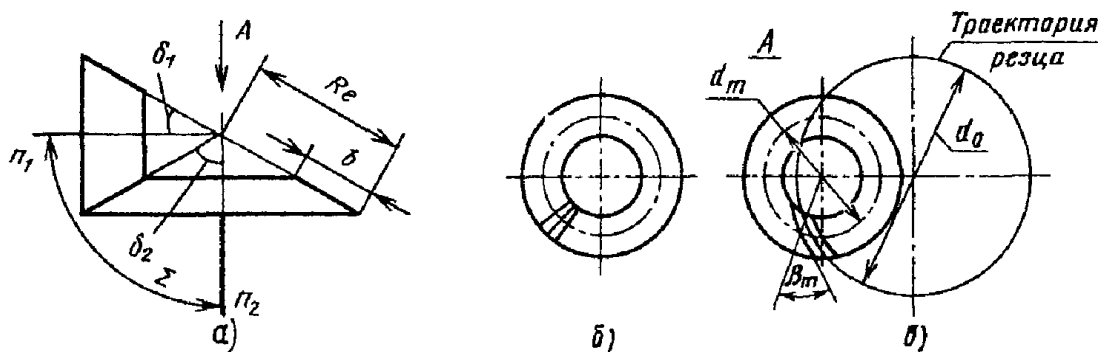


Рисунок 5.6 - Конічні зубчасті передачі

Лінії пересічення бічних поверхонь зубів із ділительною конічною поверхнею називають лініями зубів. У залежності від форми лінії зуба розрізняють передачі з прямими зубами (рисунок 5.6б), у яких лінії зубів проходять через вершину ділительного конуса, і з круговими зубами (рисунок 5.6в), лінії зубів яких є дугами кола d_0 .

Конічне колесо з круговими зубами характеризують нахилом лінії зуба в середньому перетині по ширині зубчастого вінця. Кут β_m нахилу - гострий кут між дотичною до лінії зуба в даній точці і утворюючого ділительного конуса (рисунок 5.6в).

Різновидом конічних передач є гіпоїдні передачі, у яких осі обертання зубчастих коліс не перетинаються, а перехрещуються.

Сили у зачепленні циліндричних зубчастих передач

Сили взаємодії зубів прийнято визначати в полюсі зачеплення. Розподілене по контактній площадці навантаження q у зачепленні замінюють рівнодіючою зосередженою силою F_n , спрямованою по лінії зачеплення.

Для розрахунку валів і опор силу F_n зручно уявити у виді складових (дивися рисунок 5.7):

$$\text{колова сила } F_t = 2 \cdot 10^3 \cdot T/d,$$

$$\text{осьова сила } F_a = F_n \cdot \operatorname{tg} \beta$$

На веденому колесі напрямок колової сили F_t збігається з напрямком обертання, на ведучому - протилежний напрямку обертання. Осьова сила паралельна осі колеса. Напрямок вектора сили F_a залежить від напрямку обертання колеса і напрямку лінії зуба.

Для визначення радіальної сили запишемо проміжне вираження $F_R = F_t / \cos \beta$, тоді радіальна сила

$$F_r = F_R \cdot \operatorname{tg} \alpha_w = F_t \cdot \operatorname{tg} \alpha_w / \cos \beta,$$

Вектори радіальних сил у коліс

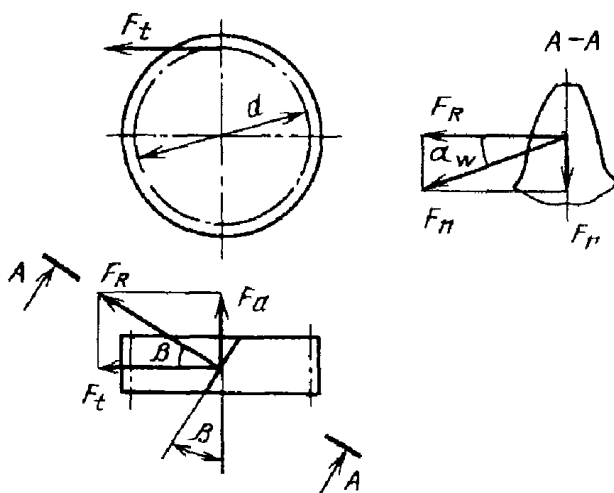


Рисунок 5.7 – Сили у зачепленні циліндричних зубчастих передач

із зовнішнім зачепленням спрямовані до осі.

Точність зубчастих передач

Працездатність зубчастих передач істотно залежить від точності виготовлення зубчастих коліс. Неминучі погрішності виготовлення: відхилення кроку, профілю, напрямку зуба, радіальне биття зубчастого вінця, відхилення від паралельності і перекіс осей коліс, коливання вимірювальної міжосьової відстані й ін. Ці погрішності призводять до підвищеного шуму під час роботи, втрати точності обертання веденого колеса, порушенню правильності і плавності заче-

плення, виникненню коливань, підвищенню динамічних навантажень і зниженню рівномірності розподілу по довжині контактних ліній діючого в зачепленні навантаження і до інших шкідливих ефектів.

Точність зубчастих коліс, а також циліндричних і конічних передач регламентують стандарти, у яких передбачено дванадцять ступенів точності, що позначаються в порядку зниження точності цифрами від 1 до 12. Найбільше часто застосовують 6, 7 і 8- у ступені точності: 6- а ступінь відповідає високоточним швидкісним передачам, 7- передачам нормальної точності, що працюють з підвищеними швидкостями і помірними навантаженнями або з помірними швидкостями і підвищеними навантаженнями, 8- передачам зниженої точності.

Для кожного ступеня точності встановлені три норми:

- норма кінематичної точності регламентує різницю між дійсним і номінальним кутами повороту веденого зубчастого колеса передачі. Показники кінематичної точності впливають на зовнішню динаміку передачі і точність орієнтування вихідного вала стосовно вхідного;

- норма плавності роботи регламентує за один оберт колеса коливання швидкості обертання, що викликають динамічні навантаження і шум;

- норма контакту зубів регламентує прилягання зубів у зібраній передачі, ступінь рівномірності розподілу навантаження по контактних лініях і визначає працездатність силових передач.

Регламентовано також бічний зазор між поверхнями, що не контактують, суміжних зубів при контакті їх робочих поверхонь. Бічний зазор слід витримувати для запобігання заклинювання зубів передачі внаслідок їх розширення при робочій температурі, для розміщення мастильного матеріалу і забезпечення вільного обертання коліс. Бічний зазор забезпечують допусками на товщину зубів і міжосьову відстань. Розмір зазору задають видом спряження зубчастих коліс у передачі: Н - нульовий зазор. Е- малий, С і D- зменшений, В - нормальний, А - збільшений. Частіше усього, застосовують спряження зубів виду В.

Для реверсивних передач, рекомендують застосовувати спряження зі зменшеними зазорами.

Матеріали зубчастих коліс

Вибір матеріалу зубчастих коліс обумовлено необхідністю забезпечення контактної міцності і міцності на згин зубів, призначенням передачі й умовами її роботи. Для силових передач частіше усього застосовують сталі, рідше чавуни і пластмаси. Найважливішими критеріями при виборі матеріалів є маса і габарити передачі.

Сталі. Передачі зі сталевими зубчастими колесами мають мінімальну масу і габарити. Причому маса і габарити тим менші, чим вища твердість робочих поверхонь зубів, що у свою чергу, залежить від марки сталі та термічної обробки.

Термообробку нормалізацію і поліпшення проводять до нарізування зубів. Матеріалами для коліс служать вуглецеві сталі марок 40, 45, 50Г, леговані сталі марок 40Х, 45Х, 40ХН і ін. Твердість серцевини зуба і його робочої поверхні однакова і складає для нормалізованих коліс 187...250 НВ, для поліпшених - 235...302 НВ. Зуби коліс із сталей, що покращуються, добре припрацьовуються і не схильні до ламкого руйнування, але мають обмежену навантажувальну спроможність. Застосовують у слабо- і середньонавантажених передачах. Застосування поліпшених зубчастих коліс у даний час скорочується.

Високу твердість ($H > 350$ НВ) поверхневого шару матеріалу при збереженні в'язкої серцевини досягають застосуванням поверхневого термічного або хіміко-термічного зміцнення: поверхневого загартування, цементації і нітроцементациї із загартуванням, азотування.

Поверхнєве загартування зубів із нагріванням струмом високої частоти (СВЧ) доцільне для зубчастих коліс із модулем більше 2 мм. При малих модулях дрібний зуб загартовується наскрізь, що приводить до коробління і робить зуб ламким. Для загартування із нагрівом СВЧ застосовують сталі марок 45, 40Х, 40ХН, 35ХМ. Твердість поверхневого шару 45...53 НRC₃. При $H > 350$ НВ твердість матеріалу вимірюють по шкалі C₃ - Роквела.

Цементация (поверхневе насичення вуглецем) із наступним загартуванням поряд із великою твердістю поверхневого шару забезпечує і високу міцність зубів на згин. Для цементации застосовують сталі марок 20Х, 12ХН3А, 18ХГТ (твердість на поверхні зуба 56...63 HRCэ).

Азотування (насичення азотом) забезпечує особливо високу твердість поверхневого шару зубів без наступного загартування. Воно супроводжується малим короблінням і дозволяє одержувати зуби високої точності без доводочних операцій. Азотоване колесо не застосовують при ударних навантаженнях (через небезпеку розтріскування тонкого зміцненого шару). Для азотованих коліс застосовують сталі марок 38Х2МЮА, 40ХНМА (твердість 58...65 HRCэ).

Зуби коліс із твердістю $H > 45$ HRCэ нарізають до термообробки. Кінцеву обробку зубів (шліфування й ін.) виконують після термообробки.

Передачі з твердими ($H > 45$ HRCэ) робочими поверхнями зубів погано припрацьовуються.

При поверхневій термічній або хіміко-термічній обробці зубів механічні характеристики серцевини зуба визначає попередня термічна обробка (нормалізація, поліпшення).

Несуча спроможність зубчастих передач по контактної міцності тим вище, чим вище поверхнева твердість зубів. Тому доцільне застосування поверхневого термічного або хіміко-термічного зміцнення. Ці види зміцнення дозволяють у декілька разів підвищити навантажувальну спроможність передачі в порівнянні з поліпшеними сталями. Наприклад, допустимі контактні напруження $[\sigma]_H$ цементованих зубчастих коліс у два рази перевищують значення $[\sigma]_H$ коліс, які піддано термічному поліпшенню, що дозволяє зменшити масу в чотири рази.

Проте при призначенні твердості робочих поверхонь зубів слід мати на увазі, що більшій твердості відповідає більш складна технологія виготовлення зубчастих коліс і малі розміри передачі (що може привести до труднощів при конструктивній розробці вузла).

Сталеве литво. Застосовують при виготовленні великих зубчастих коліс (діаметром більш 600 мм). Марки сталей -35Л... 55Л. Лите колесо піддають термообробці - нормалізації.

Чавуни. Застосовують при виготовленні зубчастих коліс тихохідних, великогабаритних і відкритих передач. Марки чавунів - СЧ20...СЧ35. Зуби чавунних коліс добре припрацьовуються, можуть працювати при мінімальному змащуванні. Мають знижену міцність на згин, тому габарити чавунних коліс значно більші, чим сталевих.

Пластмаси. Застосовують у швидкохідних слабконавантажених передачах для коліс, що працюють у парі зі сталевими або чавунними колесами (у зв'язку з низькою теплопровідністю пластмас і небезпекою заїдання).

Пластмасове колесо роблять вужчим, чим сполучені, щоб уникнути підвищеного зношування крайками сполучених коліс. Зубчасті колеса із пластмас відрізняє безшумність і плавність ходу; у високонавантажених передачах вони непрацездатні. Найбільше поширений матеріал: текстоліт (марки ПТ і ПТК), капролон, поліформальдегід, фенілон.

Характер і причини відмов зубчастих передач

Проходячи зону зачеплення при роботі передач, зуби піддаються циклічному навантаженню. При цьому на поверхнях зубів, що контактують діє нормальна до поверхні сила і сила тертя. Для кожного зуба напруження змінюються в часу по віднульовому циклу, що є причиною руйнування від втоми: викришування робочих поверхонь або поломки зубів. Ковзання і сили тертя в зачепленні викликають зношування і заїдання зубів.

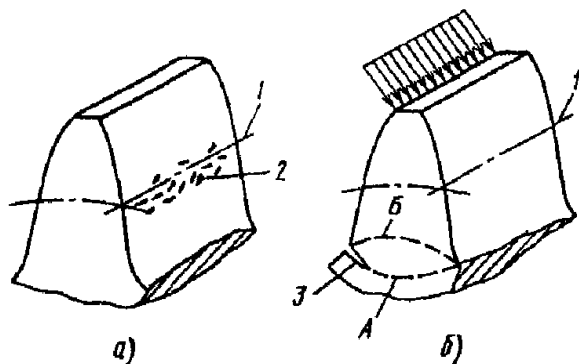


Рисунок 5.8 – Викришування від втоми робочих поверхонь зубів

Викришування від втоми робочих поверхонь зубів - основний вид руйнування зубів для більшості закритих передач що добре змащуються - є наслідком періодичної дії контактних напружень. Руйнування починається

поблизу полюсної лінії 1 (рисунок 5.8а), де діють найбільші навантаження (зона однопарного зачеплення) і максимальна сила тертя (поблизу полюса мінімальні швидкості ковзання), що сприяє утворенню і розвитку мікротріщин і виїмок 2 на поверхні зубів. У відкритих передачах (без змащування) викришування не спостерігають бо зношування поверхні зубів випереджає розвиток тріщин від втоми.

Зминання робочих поверхонь зубів відбувається при дії значних по розміру навантажень або при ударному прикладанні навантаження.

Поломка зубів. У порівнянні з uszkodженнями робочих поверхонь поломка зубів зустрічається значно рідше, проте є найбільше небезпечним видом руйнування, тому що призводить до повної втрати працездатності. Поломку зубів відносять до категорії раптових і повних відмов. Злам зубів є наслідком дії віднульового циклу напружень згину або перевантаження. Поломка від втоми пов'язана з розвитком тріщини 3 (рисунок 5.8б) біля основи зуба на тій стороні, де від згину виникають найбільші напруження розтягу. Прямі короткі зуби виламуються повністю по перетину біля основи зуба. При руйнуванні від втоми на тілі колеса після зламу залишається *увігнута* А, а при поломці внаслідок перевантаження - *опукла* Б поверхня.

Зношування зубів. Основний вид руйнування зубів відкритих передач і передач із твердозмащувальними покриттями. В міру зношування зуб потоншується, послабляється його ніжка, збільшуються зазори в зачепленні, що приводить до втрати кінематичної точності, а при великому зносі - до поломки зубів. Руйнуванню зубів передують підвищений шум при роботі передачі.

Заїдання зубів - молекулярне зчеплення (мікрозварювання) сполучених поверхонь зубів унаслідок руйнування мастильної плівки і місцевого підвищення температури при відносному ковзанні в зоні контакту. Нарости, що виникають при розриві містків мікрозварювання, на зубах задирають робочі поверхні сполучених зубів, борознячи їх у напрямку ковзання. Заїдання зубів попереджають підвищенням твердості, зниженням шорсткості робочих поверхонь

зубів, нарізуванням зубів із зміщенням інструменту, добором протизадирних мастил.

Критерії працездатності зубчастих передач

Для зубчастих передач, що добре змащуються і працюють у закритому корпусі, основними критеріями працездатності є контактна міцність і міцність при згині

Під ***контактною міцністю*** розуміють спроможність поверхонь зубів, що контактують, забезпечити необхідну безпеку проти прогресуючого викривлення від втоми.

Розрахунок на попередження руйнування від втоми зводиться до умови міцності:

$$\sigma_H \leq [\sigma]_H, \quad (5.7)$$

де σ_H - контактне напруження в полюсі зачеплення; $[\sigma]_H$ - допустиме контактне напруження.

Розрахунок на попередження зминання зводиться до виконання умови

$$\sigma_{H\max} \leq [\sigma]_{H\max}, \quad (5.8)$$

де $\sigma_{H\max}$ і $[\sigma]_{H\max}$ - відповідно фактичне і допустиме контактні напруження при дії пікового навантаження (наприклад, при пуску).

Міцність при згині - це спроможність зубів забезпечити необхідну безпеку проти зламу зуба від втоми. Розрахунок на попередження поломки зуба від втоми зводиться до умови міцності:

$$\sigma_F \leq [\sigma]_F, \quad (5.9)$$

де σ_F - напруження згину в небезпечному перетині; $[\sigma]_F$ - допустиме напруження згину зуба.

Розрахунок на попередження поломки від перевантаження зводиться до умови.

$$\sigma_{F\max} \leq [\sigma]_{F\max}, \quad (5.10)$$

де $\sigma_{F\max}$ і $[\sigma]_{F\max}$ - відповідно фактичне і допустиме напруження згину при дії пікового навантаження.

Ціль розрахунків зубчастих передач - забезпечення працездатності по всіх розглянутих критеріях. При проектному розрахунку визначають геометричні розміри зубчастої передачі по заданих умовах навантаження. При перевірочному розрахунку по відомих параметрах передачі визначають її навантажувальну спроможність або відповідність основним критеріям працездатності

Розрахунок на міцність сталевих евольвентних циліндричних зубчастих передач зовнішнього зачеплення із модулем $m > 1$ мм стандартизовано (ГОСТ 21354-87). У наступних лекціях приведено основи цього розрахунку із деякими спрощеннями, що мало впливають на результати для більшості випадків практики.

Частіше усього розміри закритої передачі визначають розрахунком на контактну міцність, а розрахунок зубів на згин є перевірочним із метою визначення мінімально можливого значення модуля зачеплення.

При дуже високій твердості ($HB > 56$ HRC) робочих поверхонь розміри передачі визначають розрахунком зубів на міцність при згині, а розрахунок на контактну міцність є перевірочним.

5.3 Пасові передачі

Загальні відомості

Пасові передачі - передачі тертям із гнучким зв'язком. Вони складаються зі шківів ведучого діаметром d_1 і веденого діаметром d_2 у паса 1, який надягнено на шківів з попереднім натягом (рисунок 5.9).

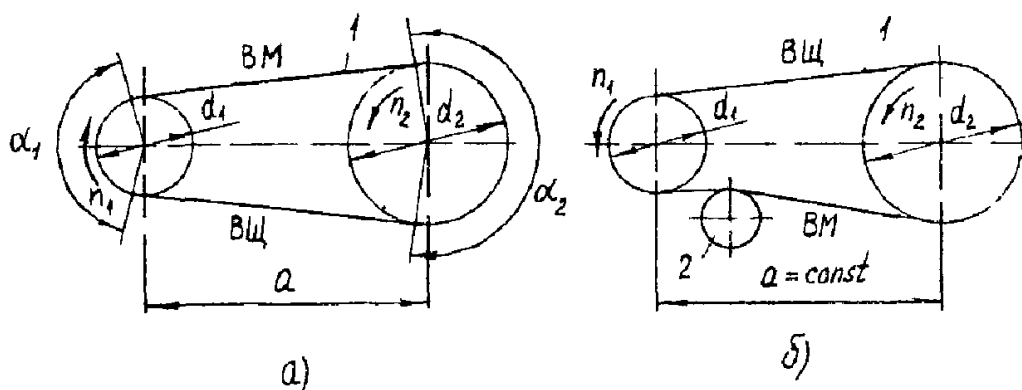


Рисунок 5.9 – Пасова передача

Навантаження передають сили тертя між шківів і пасом.

Після зубчастої передачі пасова є найбільш поширеною серед механічних передач

У залежності від форми поперечного перетину паса використовують передачі *плоским пасом* (рисунок 5.9а), *клиновим пасом* (рисунок 5.9б), *поліклиновим* (рисунок 5.9в), *круглим пасом* (рисунок 5.9 г) Найбільше застосування в машинобудуванні мають клинові та поліклинові паси.

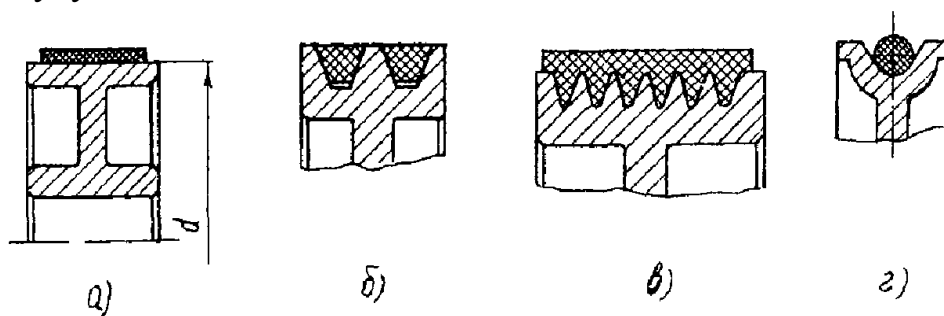


Рисунок 5.10 - Основні типи пасових передач

Пас виготовляють із прогумованих тканин або синтетичних матеріалів.

Передача *плоским пасом* має підвищену працездатність і довговічність (у зв'язку з меншими напруженнями згину в плоских пасах). Її рекомендують застосовувати при великих міжосьових відстанях (до 15 м) або високих швидкостях паса (до 100 м/с).

За рахунок клинового ефекту в передачах клиновим і поліклиновим пасами можна реалізувати великі сили тертя і зменшити габарити передачі.

Паси круглого перетину призначені для просторових передач малої потужності (обладнання поліграфічної та текстильної промисловості, настільні верстати, прилади, побутові машини). Швидкість паса до 30 м/с.

Різновидом пасової передачі є передача зубчастим пасом, що передає навантаження за рахунок зачеплення паса зі шківками.

Переваги пасових передач:

- простота конструкції, експлуатації і мала вартість;
- можливість передачі руху на значні відстані (до 15 м);
- можливість роботи з високими частотами обертання;
- плавність і безшумність роботи внаслідок еластичності паса;

- пом'якшення вібрацій і поштовхів унаслідок пружності паса;
- захист механізмів від перевантажень за рахунок можливого прослизання паса (до передач зубчастим пасом ця властивість не відноситься).

Недоліки:

- великі радіальні розміри особливо при передачі значних потужностей;
- мала довговічність паса у швидкохідних передачах;
- великі навантаження на вали і підшипники від натягу паса, необхідність пристроїв для натягу паса;
- мінливе передаточне число через неминуче пружне ковзання паса;
- залежність навантажувальної спроможності від парів, вологи і нафтопродуктів.

Застосування. Пасові передачі застосовують у приводах для передачі руху від електродвигуна або ДВЗ, коли з конструктивних міркувань міжосьова відстань повинна бути достатньо великою, а передаточне число може бути не строго постійним (приводи металорізальних верстатів, конвеєрів, транспортних, дорожніх, будівельних і сільськогосподарських машин та ін.) Передачі зубчастим пасом можна застосовувати також у приводах, що потребують постійного значення передаточного числа U (приладові та робототехнічні пристрої).

Потужність, яку передає пасова передача, становить звичайно до 50 кВт, хоча може досягати 2000 кВт і більше. Швидкість паса $V = 50$ м/с, а у високошвидкісних передачах може бути до 100 м/с і вище.

Міжосьову відстань a пасової передачі (рисунок 5.9) визначає в основному конструкція приводу машини. Якщо з метою підтримки постійного натягу паса передбачають переміщення одного зі шківів, то a - перемінне, якщо на ведену гілку (ВМ) установлюють натяжний ролик 2, то a - постійне (рисунок 5.9б).

Довжина паса

$$L = 2 \cdot a + \Delta_1 + \Delta_2/a, \quad (5.11)$$

де $\Delta_1 = 0,5 \cdot \pi \cdot (d_1 + d_2)$ і $\Delta_2 = 0,25 \cdot (d_2 - d_1)$.

Кут обхвату пасом малого шківа

$$\alpha_1 = 180^\circ - 57^\circ \cdot (d_2 - d_1)/a, \quad (5.12)$$

Для передачі з плоским пасом рекомендують $\alpha_1 \geq 150^\circ$, клиновим або поліклиновим $\alpha_1 \geq 110^\circ$.

Сили в передачі

Для створення тертя між пасом і шківом після установки паса на шків створюють попередній натяг силою F_0 . Чим більше F_0 , тим вища тягова спроможність передачі. У стані покою або холостого ходу передачі (обертання без передачі корисного навантаження) кожна гілка паса натягнута однаково із силою F_0 (рисунок 5.11а).

При прикладенні робочого обертаючого моменту T_1 відбувається перерозподіл сил натягу в гілках паса ведуча гілка (ВЩ) додатково натягується до сили F_1 а натяг веденої гілки (ВМ) зменшується до F_2 (рисунок 5.11б).

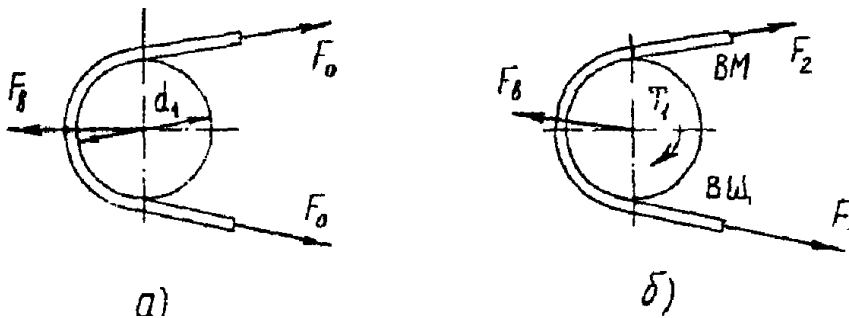


Рисунок 5.11 - Сили в передачі

З умови рівноваги моментів щодо осі обертання

$$T_1 + F_1 \cdot d_1/2 - F_2 \cdot d_2/2 = 0, \quad (5.13)$$

Одержимо

$$F_1 - F_2 = F_t, \quad (5.14)$$

де F_t - колова сила на шківі:

$$F_t = 2 \cdot 10^3 \cdot T_1/d_1, \quad (5.15)$$

Загальна геометрична довжина паса не залежить від навантаження і під час роботи передачі залишається незмінною. Додаткове пружне подовження ведучої гілки під дією сили $\Delta F = F_1 - F_0$ компенсує рівне скорочення веденої гілки під дією сили ($F = F_0 - F_2$). Отже, наскільки зростає сила натягу ведучої гілки паса, настільки ж знижується сила натягу веденої, тобто:

$$F_1 = F_0 + \Delta F; \quad F_2 = F_0 - \Delta F, \quad (5.16)$$

або

$$F_1 + F_2 = 2F_0, \quad (5.18)$$

Вирішуючи спільно рівняння (5.16) і (5.18), одержимо:

$$F_1 = F_0 + F_v/2 \quad \text{і} \quad F_1 = F_2 - F_v/2, \quad (5.19)$$

При оббіганні пасом шківів на нього діє відцентрова сила, $F_{ц}$, Н:

$$F_{ц} = 10^{-6} \cdot \rho \cdot A \cdot V^2, \quad (5.20)$$

де A - площа перетину паса, мм^2 ;

ρ - густина матеріалу паса, кг/м^3 ;

V - швидкість паса, м/с .

Сила $F_{ц}$, яка відкидає пас від шківів, зменшує силу F_0 попереднього натягу, знижуючи тим самим сили тертя і навантажувальну спроможність передачі.

Таким чином, сили натягу ведучої і веденої гілок паса при передачі корисного навантаження $(F_1 + F_{ц})$ і $(F_2 + F_{ц})$ відповідно, на холостому ходу $(F_0 + F_{ц})$.

Навантаження на вали і підшипники. Сили натягу гілок паса навантажують шківів, вали, на яких вони встановлені, і опори валів - підшипники.

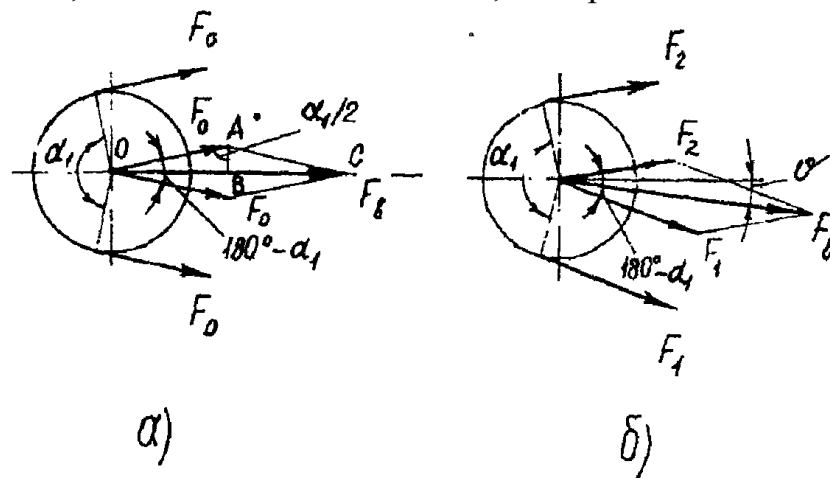


Рисунок 5.12 - Навантаження на вали і підшипники

У покої гілки паса навантажені силами F_0 попереднього натягу (рисунок 5.12а): кут між векторами $(180^\circ - \alpha_1)$. З розгляду трикутників рівнобедреного ОАС і прямокутного ОВА слідує:

$$OC = 2 \cdot OB = 2 \cdot OA \cdot \sin(\alpha_1/2), \quad (5.21)$$

Отже, сила, що діє на вали в непрацюючій передачі:

$$F_B = 2F_0 \sin(\alpha_1/2), \quad (5.22)$$

де α_1 - кут обхвату малого шківa. При передачі пасом корисного навантаження і без урахування відцентрової сили маємо (рисунок 5.12б):

$$F_B = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1 \cdot F_2 \cdot \sin \alpha_1}, \quad (5.23)$$

Вектор F_B відхилено на кут ϑ від лінії центрів на малому шківі у бік ведучої гілки, а на великому – у бік веденої гілки.

Звичайно, сила F_B , що діє на вали пасової передачі, у 2...3 рази більша за колову силу F_t , що є суттєвим недоліком пасових передач.

Напруження у пасі

При роботі пасової передачі напруження по довжині паса розподілено нерівномірно (рисунок 5.13). Розрізняють такі види напружень у пасі:

Напруження σ_0 від сили попереднього натягу. У стані покою або при

холостому ході (обертання без передачі корисного навантаження) кожна гілка паса натягнута силою F_0

$$\sigma_0 = F_0/A, \quad (5.24)$$

де A - площа поперечного перетину паса.

Корисне напруження σ_t .

Відношення колової сили (корисного навантаження) F_t у пе-

редачі до площі поперечного перетину A називають корисним напруженням:

$$\sigma_t = F_t/A, \quad (5.25)$$

Тому що $F_t = F_1 - F_2$, то корисне напруження σ_t є різницею напружень σ_1 у ведучій і σ_2 у веденій гілках паса при робочому ході на малій швидкості (поки не виявляється вплив відцентрових сил):

$$\sigma_t = \sigma_1 - \sigma_2, \quad (5.26)$$

Напруження (σ_1 у ведучій і σ_2 у веденій гілках від сил F_1 і F_2):

$$\sigma_1 = F_1/A = F_0/A + 0,5 \cdot F_t/A = \sigma_0 + \sigma_t/2, \quad (5.27)$$

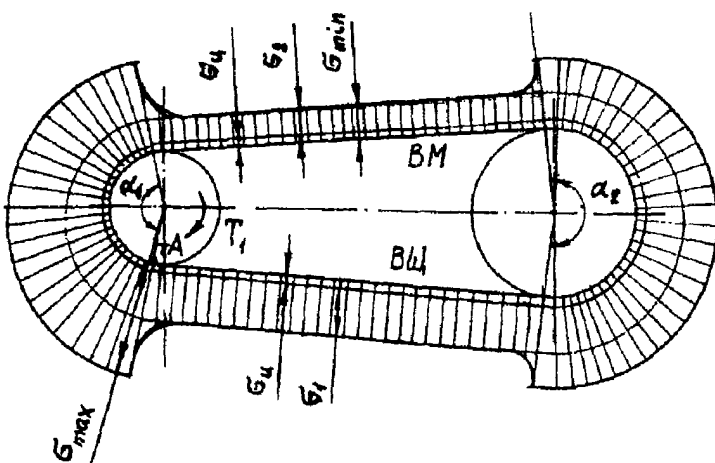


Рисунок 5.13 – Напруження у пасі

$$\sigma_2 = F_2/A = F_0/A - 0,5 \cdot F_t/A = \sigma_0 - \sigma_t/2, \quad (5.28)$$

Значенням σ_t оцінюють тягову спроможність пасової передачі.

Напруження згину σ_3 виникає в пасі при огинанні їм шківів (рисунок 5.13) За законом Гука $\sigma_1 = \varepsilon \cdot E$, де $\varepsilon = 2 \cdot Y_{\max}/d$ - відносне подовження волокон на зовнішній стороні паса при згині. Тоді:

$$\sigma_3 = 2 Y_{\max} E / d, \quad (5.29)$$

де E - модуль подовжньої пружності матеріалу паса;

Y_{\max} - відстань від нейтральної лінії до небезпечних волокон, із яких починається руйнування паса;

d - розрахунковий діаметр.

За розрахунковий діаметр d для передачі плоским пасом приймають діаметр зовнішньої поверхні шківа, для передачі клиновим, поліклиновим і круглим пасами - діаметр кола по нейтральній лінії паса.

Як впливає із формули, найбільше напруження згину в пасі виникає на шківі меншого діаметра d_1 . Звичайно, по міркуванням компактності передачі прагнуть приймати невеликі значення діаметра d_1 малого шківа. Проте при цьому виникають великі напруження згину σ_3 , що можуть у декілька разів перевищувати всі інші напруження.

На практиці значення σ_3 обмежують мінімально допустимим для кожного виду паса значенням d_1 .

Напруження згину, змінюючись по віднульовому циклу, є головною причиною руйнування паса від втоми. На тягову спроможність воно не впливає.

Напруження від відцентрової сили.

Вплив $\sigma_{\text{ц}}$ на працездатність пасової передачі при $V \leq 25$ м/с є несуттєвим.

Найбільше напруження (т. А на діаграмі, рисунок 10.5):

$$\sigma_{\max} = \sigma_{31} + \sigma_1 + \sigma_{\text{ц}} = \sigma_{31} + \sigma_0 + \sigma_t/2 + \sigma_{\text{ц}}. \quad (5.30)$$

Напруження згину звичайно значно перевищує всі інші складові найбільшого напруження.

Максимальне напруження діє в поперечному перетині паса в місці його набігання на малий шків і зберігає свою величину на всій дузі покою (рисунок 5.13).

Ковзання паса по шківках. Передаточне число

У пасовій передачі розділяють два види ковзання паса **пружне** і **буксування**.

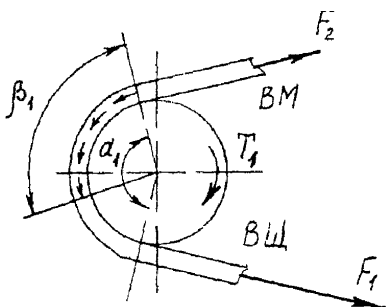
Пружне ковзання. У процесі оббігання пасом ведучого шківка сила його натягу зменшується від F_1 , до F_2 (рисунок 5.12б; 5.14). А тому що деформація паса пропорційна силі натягу, то при зменшенні сили натягу, пас під дією сили пружності укорочується, долаючи опір сили тертя, у контакті паса зі шківом. При цьому пас відстає від шківка - виникає пружне ковзання паса по шківу. На веденому шківі також відбувається ковзання, але тут сила натягу зростає від F_2 до F_1 пас подовжується і випереджає шків. Пружне ковзання відбувається не на всій дузі обхвату α а лише на частині її - дузі ковзання β_1 яка завжди розташована з боку збігання паса зі шківка.

Довжину дуги ковзання визначає умова рівноваги сил тертя на цій дузі та різниця сил натягу гілок, - колова сила:

$$F_t = F_1 - F_2, \quad (5.31)$$

При нормальній роботі $\beta_1 = (0,5 \dots 0,7) \cdot \alpha_1$.

Збоку набігання паса на шків є дуга покою $(\alpha - \beta_1)$, на якій сила в пасі не змінюється, залишаючись рівною силі натягу гілки, що набігає, а сам пас рухається



разом із шківом без ковзання.

Швидкості V_1 і V_2 прямолінійних гілок рівні коловим швидкостям шківів, на які вони набігають.

Втрату швидкості $V_1 - V_2$ визначає ковзання на ведучому шківі, де напрямком ковзання не збігається з напрямком

Рисунок 5.14 – Пружне ковзання

руху шківка (дивися стрілки на дузі β_1 , рисунок 5.14).

Пружне ковзання паса неминує в пасовій передачі, воно виникає в результаті різниці сил F_1 і F_2 , які навантажують ведучу і ведену гілки паса.

Пружне ковзання призводить до зниження швидкості і, отже, до втрати частини потужності, а також викликає електризацію, нагрівання і зношування паса, скорочуючи його довговічність.

Пружне ковзання паса характеризують коефіцієнтом ковзання ξ :

$$\xi = (V_1 - V_2)/V_1, \text{ або } V_2 = V_1(1 - \xi), \quad (5.32)$$

де V_1 і V_2 - колові швидкості ведучого і веденого шківів.

При нормальному режимі роботи звичайно $\xi = 0,01 \dots 0,02$.

Буксування. По мірі росту колової сили F_t зменшується дуга покою, отже, зменшується і запас сил тертя. При значному перевантаженні дуга ковзання β_1 досягає значення дуги обхвату α_1 і пас ковзає по всій поверхні торкання з ведучим шківом, тобто буксує. При буксуванні паса на ведучому шківі ведений шків зупиняється - передача непрацездатна.

Передаточне число. Колові швидкості шківів передачі:

$$V_1 = \pi \cdot d_1 \cdot n_1 / 60000; \quad V_2 = \pi \cdot d_2 \cdot n_2 / 60000, \quad (5.33)$$

де n_1 і n_2 - частоти обертання ведучого і веденого шківів, хв^{-1} ;

d_1 і d_2 - діаметри цих шківів, мм.

Передаточне число пасової передачі:

$$U = n_1 / n_2 = V_1 d_2 / (V_2 d_1) = d_2 / [d_1(1 - \xi)], \quad (5.34)$$

Пружне ковзання, що залежить від значення колової сили F_t , є причиною деякої мінливості передаточного числа пасових передач.

Рекомендують для передач **плоским пасом** $U \leq 5$, клиновим $U \leq 7$, поліклиновим $U \leq 8$, зубчастим $U \leq 12$.

Критерії працездатності і розрахунку пасової передачі

Основні критерії працездатності і розрахунку пасових передач: **тягова спроможність** (міцність зчеплення паса зі шківом) і **довговічність паса**.

Розрахунок по тяговій спроможності є основним розрахунком пасових передач, що забезпечують міцність пасів і передачу ними необхідного навантаження.

Тягову спроможність характеризує колова сила F_t або корисне напруження σ_t при даному натягу силою F_0 паса і ковзанні ξ . Тягова спроможність тим вища, чим більше кут обхвату α_1 , коефіцієнт тертя між пасом і шківом, сила F_0 попереднього натягу. Вона знижується зі збільшенням швидкості паса через дію відцентрових сил.

Розрахунок на довговічність виконують як перевірочний.

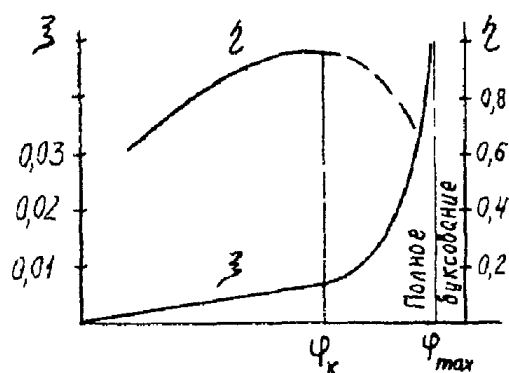


Рисунок 5.15 - Тягова спроможність

Тягова спроможність пасової передачі обумовлена зчепленням паса зі шківом. Експериментально досліджуючи, тягову спроможність, будують графіки - криві ковзання і ККД (рисунок 5.15); на їх базі розроблено метод розрахунку пасових передач.

При постійній силі F_0 попереднього натягу криві ковзання встановлюють зв'язок між коловою силою F_t (тягою) і відносним ковзанням ξ . При побудові графіка по осі абсцис відкладають відносне навантаження, виражене через коефіцієнт тяги φ .

$$\varphi = F_t / (F_1 + F_2) = F_t / (2F_0) = \sigma_t / (2\sigma_0), \quad (5.35)$$

по осі ординат - коефіцієнт ковзання ξ . При випробуванні поступово збільшують корисне навантаження F_t (коефіцієнт тяги φ), зберігаючи постійним попередній натяг $F_1 + F_2 = 2 \cdot F_0$ заміряють коллові швидкості шківів і обчислюють ковзання.

При зростанні коефіцієнта тяги від нуля до деякого значення φ_k , яке називають критичним, спостерігають тільки пружне ковзання паса по шківі. У цій зоні пружні деформації паса приблизно відповідають закону Гука, тому крива ковзання близька до прямої. Ця ділянка характеризує стійку роботу паса. При

подальшому збільшенні коефіцієнта тяги від φ_k до φ_{\max} спостерігають як пружне ковзання, так і часткове пробуксовування, що у міру збільшення φ росте. Робота передачі стає нестійкою. При φ_{\max} колова сила F_t досягає значення максимальної сили тертя, дуга покою цілком зникає, а дуга ковзання β_1 поширюється на весь кут обхвату α_1 (рисунок 10 б) - настає повне буксування паса на ведучому шківі.

Втрати в передачі і ККД. При роботі пасової передачі виникають втрати на: пружний гистерезис, ковзання паса по шківках, тертя в підшипниках опор і аеродинамічний опір. У клинопасовій передачі додатково виникають втрати на радіальне ковзання паса в канавці і на його поперечний стиск. Найбільша частка втрат припадає на гистерезис при згині, особливо для клинопасових передач. Втрати, пов'язані зі згином і аеродинамічним опором, не залежать від переданого навантаження. Тому ККД (η) передачі при малих навантаженнях невисокий і (відносні втрати великі). Він досягає максимуму η_{\max} у зоні критичного значення φ_k .

У діапазоні значень коефіцієнта тяги від φ_k до φ_{\max} до пружного ковзання додається часткове буксування, що викликає зношування і нагрівання паса, а також різке зниження ККД передачі внаслідок збільшення втрат на ковзання.

Відповідно до кривих ковзання і ККД передану силу F_t варто приймати поблизу значення φ_k , якому відповідає η_{\max} . При нормальних умовах роботи для передачі плоским пасом $\eta_{\max} = 0,95 \dots 0,97$, для передачі клиновим і поліклиновим пасом $\eta_{\max} = 0,92 \dots 0,96$. Роботу передачі при $\varphi > \varphi_k$ можна допускати тільки при короткочасних перевантаженнях, наприклад, у період пуску.

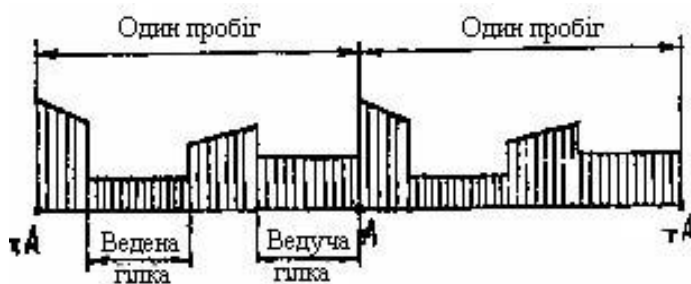
Критерієм раціональної роботи паса служить коефіцієнт тяги φ_k , значення якого визначає допустиму колову силу $[F]_t$.

З формули (5.35) випливає: $[F]_t = 2\varphi_k F_0$.

Значення φ_k встановлені експериментально для кожного типу паса. Для плоских пасів $\varphi_k = 0,4 \dots 0,5$, для клинових і поліклинових $\varphi_k = 0,7 \dots 0,8$.

Довговічність паса залежить не тільки від значень напружень, але і від характеру їх зміни за один цикл, а також від числа таких циклів. Оскільки напруження згину перевищують всі інші складові сумарного напруження в пасі, то довговічність у більшому ступені залежить від числа згинів паса на шківках. Потрібно мати на увазі, що за один пробіг паса в передачі з $U = 1$ у ньому двічі діють максимальні напруження (пас відчуває два згини на шківках рівного діаметра) Однією зі складових напружень є напруження від сили F_0 попереднього натягу паса. Чим більша сила F_0 , тим вища тягова спроможність передачі, але нижча довговічність паса.

Під впливом циклічного деформування в пасі виникають руйнування від втоми - тріщини, надриви, розшаровування паса Зниженню опору втомі сприяє також нагрівання паса від внутрішнього тертя і від ковзання його по шківках.



Повний цикл напружень відповідає одному пробігу паса по шківках, при якому рівень напружень у поперечному перетині паса змінюється відповідно до проходження їм кожного з чотирьох характерних ділянок: два шківки, ведена і ведуча гілки (рисунки 5.14).

Рисунок 5.16 - Повний цикл напружень
Число пробігів паса (число циклів навантаження) за весь термін роботи передачі пропорційне частоті пробігів:

$$v = V/L_p < [v], \quad (5.36)$$

де V - швидкість паса, м/с;

L_p - довжина паса, м;

$[v]$ - допустима частота пробігів, s^{-1} .

Частота пробігів є показником довговічності паса; чим більше v , тим більше число циклів при тому ж часі роботи або тем менше довговічність при тому ж рівні напружень.

Для досягнення середньої довговічності в 2000...3000 годин рекомендують обмежувати частоту пробігів, приймаючи для пасів:

- плоских (прогумованих, синтетичних) $[v] \leq 10 \dots 50 \text{ c}^{-1}$;
- клинових $[v] \leq 20 \text{ c}^{-1}$;
- поліклинових $[v] \leq 30 \text{ c}^{-1}$.

У основі уточнених методів розрахунку пасів на довговічність лежить рівняння кривої втоми:

$$\sigma_{\max}^q \cdot N_E = C, \quad (5.37)$$

де q та C - дослідні постійні,

σ_{\max} - найбільше напруження;

N_E - еквівалентне число циклів навантаження:

$$N_E = 3600 \cdot v \cdot z \cdot L_h / k_u, \quad (5.38)$$

де v - частота пробігів паса;

z - число шківів у передачі;

L_h - ресурс паса, год;

k_u - коефіцієнт, що враховує різний ступінь згину паса на меншому і більшому шківах.

При $U = 1$ $k_u = 1$, із збільшенням передаточного числа U вплив згину на більшому шківі зменшується, а значення k_u зростає, наближаючись до значення z .

5.4 Вали і осі

Загальні відомості

Зубчасті колеса, шківви, зірочки й інші деталі машин, які обертаються установлюють на валах і осях.

Вал призначено для передачі обертаючого моменту уздовж своєї осі, а також для утримання розташованих на ньому деталей і сприйняття діючих на ці деталі сил. Прикладом можуть служити вали редуктора. При роботі вал зазнає дії згину і кручення, а в деяких випадках додатково розтягу або стиску.

Вісь тільки утримує встановлені на ній деталі і сприймає діючі на ці деталі сили. Наприклад, вісь залізничного вагона (рисунок 5.17). На відміну від вала вісь не передає обертаючого моменту і, отже, не зазнає дії кручення. Осі можуть бути нерухомими або можуть обертатися разом із насадженими на них

деталі. Осі, що обертаються забезпечують кращі умови роботи підшипників, нерухомі - дешевші, але потребують встановлення підшипників безпосередньо в деталі, які обертаються на осях, що часто ускладнює конструкцію.

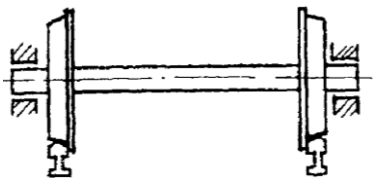


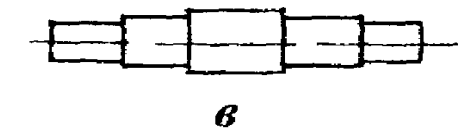
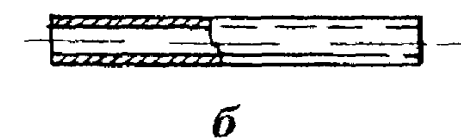
Рисунок 5.17 - Вісь залізничного вагона

Більшість валів має незмінну номінальну форму геометричної осі - так звані жорсткі вали.

За формою геометричної осі вали поділяють на **прямі** (рисунок 5.18) і **непрямі** - колінчасті, які служать для перетворення зворотно-поступального руху в обертальний або навпаки, а також ексцентрикові.

Осі, як правило, виготовляють прямими. По конструкції прямі вали й осі дуже мало відрізняються друг від друга.

Прямі вали й осі можуть бути постійного діаметра - **гладкі** (рисунок 5.18а, б) або **ступінчасті** (більшість валів, рисунок 5.18 в) також можна відмітити такі характерні конструкції як вали - черв'яки та вали - шестерні.



За формою поперечного перетину вали й осі бувають **суцільні** і **порожнисті** (з осьовим отвором, рисунок 5.18б). Порожнисті вали застосовують для зменшення маси, а також при необхідності пропускання крізь вали або розміщення усередині них інших деталей або матеріалів (мастила, газів або рідин).

По зовнішньому обрисі поперечного перетину вали розділяють на **шліцьові** і **шпонкові**, що мають на деякій довжині шліцьовий профіль або профіль з одним або кількома шпонковими пазами.

Рисунок 5.18 – Класифікація валів

Вали класифікують також по умовних ознаках, наприклад, по відносній швидкості обертання у вузлі (у редукторі): швидкохідний 1, середньошвидкісний 2, тихохідний 3, по розташуванню у вузлі: вхідній 1 (ведучий), проміжний 2, вихідний 3 (ведений).

Опорними частинами валів і осей служать **цапфи**. Проміжні цапфи називають **шийками** кінцеві - **шипамі** (звідси поняття - підшипник), торцева частина вала - **п`ята**.

Форма вала по довжині. За умовами рівномірності доцільно конструювати вали, що в поздовжньому перетині наближаються до форми тіла рівного опору згину - окреслюється кубічною параболою. До форми тіла рівного опору також наближаються **ступінчасті вали**. Ця форма спрощує виготовлення вала й установку деталей на вал.

Перехідні ділянки валів і осей між двома шийками різних діаметрів виконують, із **галтеллю постійного радіуса**, рисунок 5.19 а (галтель - поверхня плавного переходу від меншого перетину до більшого); із **галтеллю перемінного радіуса** (рисунок 5.19б); із **канавкою зі скругленням** для виходу шліфувального круга (рисунок 5.19в)

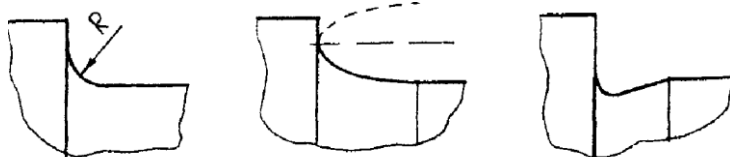


Рисунок 5.19 - Перехідні ділянки валів і осей

Перехідні ділянки являються концентраторами напружень. Ефективним засобом для зниження концентрації напружень у перехідних ділянках являється підвищення їх податливості

(наприклад, шляхом збільшення радіусів галтелей, виконання розвантажувальних канавок). Деформаційне зміцнення (наклеп) галтелей підвищує несучу спроможність валів і осей та їх довговічність.

По числу опор вали двохопорні, або багатоопорні (рідко).

По розташуванню опор класифікують консольні вали та вали з рознесеними опорами.

По формі цапф для підшипників ковзання розрізняють цапфи циліндричні, конічні, сферичні; для підшипників кочення, як правило, циліндричні цапфи, рідко - конічні з малою конусністю для регулювання зазорів у підшипниках за рахунок пружного деформування кілець.

Матеріали валів і осей

Основними матеріалами для валів і осей служать вуглецеві і леговані сталі через їх міцність, великий модуль пружності, доступність для різноманітних способів зміцнення і легкості одержання необхідних циліндричних заготовок шляхом прокатки.

Для валів, розміри яких визначають з умови жорсткості, переважно застосовують сталі марок Ст5 і Ст6, не піддаючи їх термічній обробці. Для більшості валів застосовують термічно оброблені середньовуглецеві і леговані сталі марок 45 і 40Х. Для високонапружених валів відповідальних машин - леговані сталі марок 40ХН, 30ХГСА; вали з цих сталей звичайно піддають поліпшенню, загартуванню з високим відпуском або поверхневому загартуванню СВЧ із низьким відпуском (шліцьові вали).

Швидкохідні вали, що обертаються в підшипниках ковзання, виготовляють із сталей марок 20Х, 12ХНЗА, 18ХГТ. Цапфи цих валів цементують для підвищення зносостійкості. Найбільшу зносостійкість мають хромовані вали.

Вали й осі обробляють на токарних верстатах із наступним шліфуванням цапф та посадкових поверхонь під деталі, що встановлюються на вал.

Способи передачі навантажень на вали

Передачу обертаючого моменту здійснюють з'єднаннями: із натягом, профільними, шліцьовими, шпонковими, фрикційними конічними кільцями й ін. У з'єднаннях із натягом переважно застосовують циліндричні деталі як більш прості у виготовленні. Конічні з'єднання застосовують: для полегшення постановки на вал і зняття з нього важких деталей, для швидкої зміни деталей типу змінних шестерень, для забезпечення необхідного натягу і для підвищення точності центрування деталей. Найбільш часто конічними виконують з'єднання на кінцевих ділянках валів. Обов'язкову для фіксації конічних з'єднань осьову силу звичайно створюють гайкою або гвинтом із торцевою шайбою.

Радіальні сили передають або безпосереднім контактом маточини, насадженої на вал (найбільш поширений випадок), або через підшипники (шатунні шийки колінчастих валів).

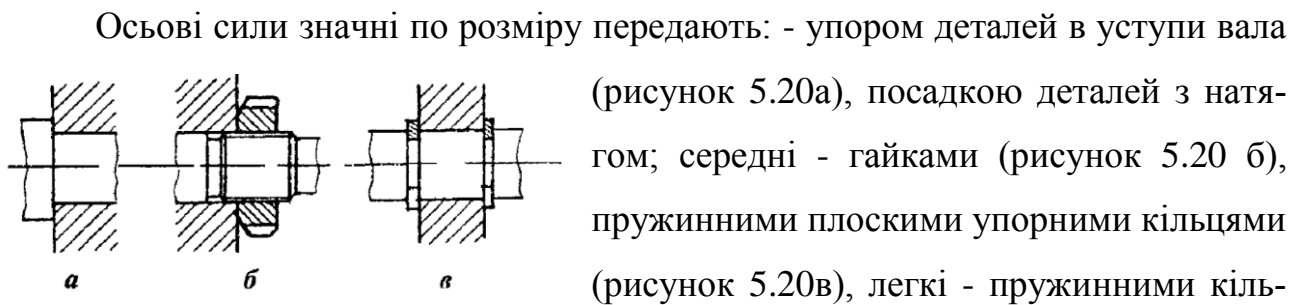


Рисунок 5.20 - Способи передачі навантажень на вали

Критерії працездатності валів і осей

Основними критеріями працездатності являються ***міцність*** і ***жорсткість***. В окремих випадках вали розраховують на коливання.

Практикою встановлено, що статичне руйнування валів та осей спостерігається дуже рідко (близько 10%) тому, що вали й осі, які обертаються при роботі підлягають дії напружень, які циклічно змінюються і руйнування валів та осей швидкохідних машин у більшості випадків носить втомний характер. Руйнування, як правило, відбувається у виді поперечного зламу, при цьому на торці деталі, яка вийшла з ладу можна бачити блискучу серповидну зону (так звану втомну тріщину). Звичайно злам виникає в місці концентраторів напружень (ступені, шпонкові пази, поперечні отвори, напресовані маточини, тощо).

Для цапф, які служать у якості рухомих деталей підшипників ковзання, характерний вид виходу з ладу - знос від тертя ковзання.

Швидкохідні вали, що працюють у резонансній зоні, можуть руйнуватись внаслідок співпадіння вимушених та власних коливань.

Види розрахунків валів та осей на міцність

При розробці техніки різноманітного призначення доводиться виконувати як проектувальні так і перевірочні розрахунки валів і осей.

Основними розрахунковими силовими факторами являються обертаючі T і згинальні M моменти. Вплив сил, які розтягують і стискають вал чи ось, на міцність малий, і ці зусилля у більшості випадків не враховують. Розрахунок осей являється окремим випадком розрахунку валів при умові $T = 0$.

Звичайно розрахунки валів поділяють на три основних види: орієнтовний, наближений і уточнений. Перші два види можна проводити і як проектувальний і як перевірочний розрахунки, третій - тільки як перевірочний.

Орієнтовний розрахунок валів

Розрахунок валів виконують на статичну міцність із метою орієнтованого визначення діаметрів окремих ступіней. На початку розрахунку відомий тільки обертаючий момент T . Згинальні моменти M виявляється можливим визначити лише після розробки конструкції вала, коли відповідно до загального компонування виявляють його довжину і місця прикладення діючих навантажень. Тому проектувальний розрахунок вала виконують умовно тільки на кручення, а вплив на міцність вала згину, концентрації напружень і характеру навантаження компенсують зниженням значення допустимого напруження $[\tau]_k$ на кручення

При проектувальному розрахунку валів редуктора звичайно визначають діаметр перетину характерної ділянки, кінця вхідного 1 (вихідного 3) вала, місця розташування зубчастого колеса на проміжному валі (рисунок 16.1) Діаметри інших ділянок призначають конструктивно при розробці конструкції вала із урахуванням їх функціонального призначення, технології виготовлення і складання.

Діаметр d , мм, розрахункового перетину вала обчислюють по формулі, що відома з курсу механіки матеріалів:

$$d \geq 10 \cdot \sqrt[3]{T / (0,2 \cdot [\tau]_k)}, \quad (5.39)$$

де T - обертаючий момент, що діє в розрахунковому перетині вала, Н·м;

$[\tau]_k$ - допустиме напруження на кручення, МПа.

Для валів із сталей марок Ст5, Ст6, 45 приймають:

$[\tau]_k = 20 \dots 20$ МПа при визначенні діаметра кінця вхідного (вихідного) вала;

$[\tau]_k = 15 \dots 20$ МПа - діаметра ділянки проміжного вала в місці установки зубчастого колеса.

Отриманий діаметр вала округляють до найближчого значення з ряду нормальних лінійних розмірів. Округлення діаметрів шийок під підшипники ко-

чення слід робити до значень з ряду розмірів внутрішніх кілець підшипників (за звичай кратних 5).

При проектуванні приводів в яких редуктор одержує рух безпосередньо від електродвигуна, діаметр d кінця вхідного вала можна приймати також рівним $d = (0,8...1,0) \cdot d_E$, де d_E - діаметр вала електродвигуна, із котрим редуктор будуть з'єднувати муфтою.

Потім виконують ескізну розробку конструкції, уточнюючи форму і розміри валів після попереднього вибору підшипників, з'єднань, що беруть участь у передачі обертаючого моменту, виконання конструктивних елементів, які обумовлюються обраними засобами фіксації і регулювання осевого положення встановлених на валу деталей, самого вала в корпусі, а також технологією обробки окремих ділянок вала.

Перевірочний розрахунок вала проводиться по умові міцності:

$$\tau_k = \frac{T}{0,2 \cdot d^3} \leq [\tau]_k, \quad (5.40)$$

Значення допустимих напружень приймаються такими ж як і при проектувальному розрахунку вала.

Наближений розрахунок валів

Основними силами, що діють на вали, являються сили від передач. Сили на вали передаються через насаджені на них деталі: зубчасті або черв'ячні колеса, шків, зірочки, півмуфти та інші. Під впливом зовнішніх навантажень вали, що обертаються піддаються періодичному навантаженню.

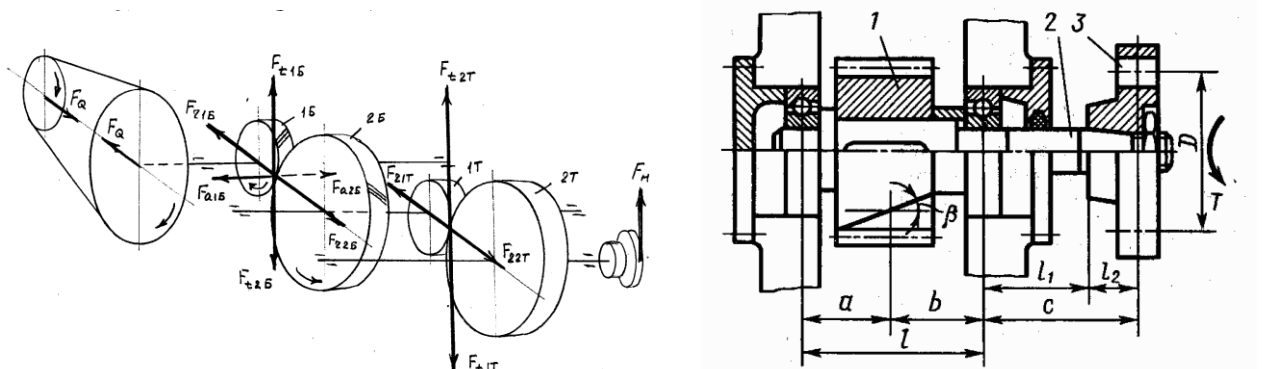


Рисунок 5.21 - Просторова схема сил

На рисунку 5.21 показана просторова схема сил, які навантажують елементи приводу з двохступінчастим циліндричним зубчастим редуктором з косозубим зачепленням.

З ескізного компоновання редуктора виділяють компоновку вала (рисунок 5.21), який буде розраховано і складають його розрахункову схему (рисунок 5.24).

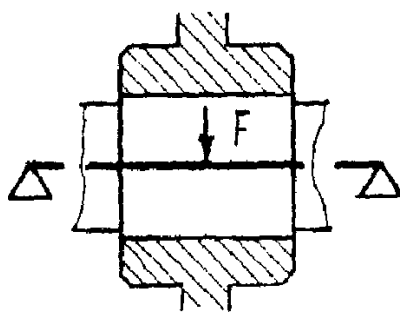


Рисунок 5.22 – Розрахункова схема

Вали при упорядкуванні розрахункової схеми розглядають як балки на жорстких шарнірних опорах. На розрахункових схемах ці сили, а також обертаючі моменти зображують як зосереджені, прикладені в середині маточин (рисунок 5.22).

Вплив сили ваги валів і встановлених на них деталей не враховують (за винятком важких маховиків і т.п.). Сили тертя в опорах також не приймають до уваги.

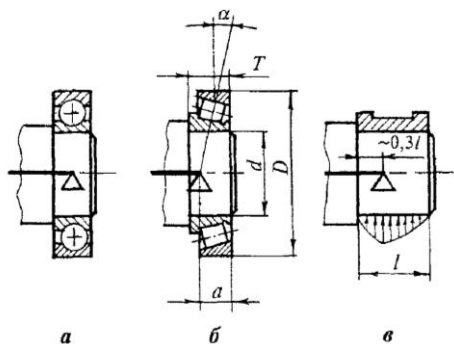


Рисунок 5.23 – Вибір типу опор

При виборі **типу опори** вважають, що деформації валів малі, і якщо підшипник допускає хоча б невеличкий нахил або переміщення цапфи (наприклад, у границях зазорів між тілами кочення і кільцями), то його вважають шарнірно - нерухомою або шарнірно - рухливою опорою. Підшипники кочення або ковзання, що сприймають одночасно радіальні й осьові сили, розглядають як шарнірно-нерухомі (фіксуючі) опори (рисунок 5.23а-в), а підшипники, що сприймають тільки радіальні сили, - як шарнірно-рухливі(плаваючі).

Умовну опору розташовують на середині ширини радіальних підшипників кочення (рисунок 5.23а) або зі зміщенням а від торця для радіально-упорних (рисунок 5.23б). Для конічних роликкових підшипників

$$a = 0,5 \cdot [T + (d + D) \cdot e/3], \quad (5.41)$$

де T - монтажна висота;

d - діаметр отвору внутрішньої кільця;

D - зовнішній діаметр;

e - коефіцієнт осевого навантаження.

У валів, які обертаються в підшипниках, що самовстановлюються, (підшипниках ковзання), тиск по довжині l підшипника внаслідок деформації вала розподілено нерівномірно. Тому шарнірну опору розташовують із зміщенням убік навантаженого прольоту (рисунок 5.23в).

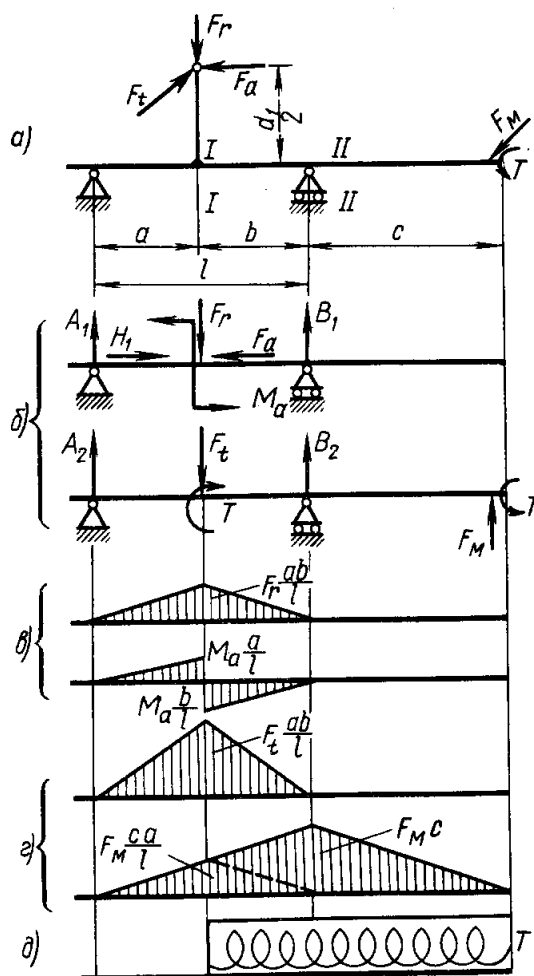


Рисунок 5.24 – Порядок розрахунку

Механічний привод звичайно компонують з окремих вузлів, кінці валів яких з'єднують за допомогою муфт. Внаслідок компенсації неминучої неспіввідповідності валів, що з'єднуються, муфта додатково навантажує вал радіальною силою F_m . Тому що напрямок сили F_m невідомий, то його можна прийняти збіжним із напрямком дії колової сили F_t у передачі. Відстань від точки прикладення сили F_m до найближчої опори призначають конструктивно.

Порядок розрахунку. Розрахунок проводять у такій послідовності: по кресленню складальної одиниці вала складають розрахункову схему, на якій наносять усі зовнішні сили, що навантажують вал, приводячи площини їхньої

дії до двох взаємно перпендикулярних площинам (горизонтальної X і вертикальної Y). Потім визначають реакції опор у горизонтальній і вертикальній площинах. Ці реакції у подальших розрахунках підшипників будуть враховано як радіальні навантаження на підшипники. У цих же площинах будують епюри

згинальних моментів M_x і M_y окремо епюру крутного моменту T . У місцях прикладення зовнішніх згинальних моментів, (від дії осьових сил у зачепленні), визначають розрахункові згинальні моменти справа і зліва від перетину.

Встановлюють небезпечні перетини виходячи з епюр моментів, розмірів і форми поперечних перетинів вала, наявності концентраторів напружень (звичайно навантажені моментами перетини, у яких прикладено зовнішні сили, моменти, реакції опор або місця змін форми по довжині вала).

Для небезпечних перетинів обчислюють значення сумарних згинальних та еквівалентних моментів:

$$M_{\Sigma} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}, \quad (5.42)$$

$$M_{\text{ЕКВ}} = \sqrt{M_{\Sigma}^2 + 0,75 \cdot T^2}, \quad (5.43)$$

Вчислюють діаметр вала в небезпечному перетині

$$d_B = \sqrt[3]{\frac{M_{\text{ЕКВ}}}{0,1 \cdot [\sigma]_3}}, \quad (5.44)$$

де $[\sigma]_3$ - допустимі напруження згину, для валів типу редукторних $[\sigma]_{3\text{г}} = 50 \dots 60 \text{ МПа}$.

При перевірочному розрахунку перевірку статичної міцності виконують із метою попередження пластичних деформацій у період дії короткочасних перевантажень (наприклад: при пуску, розгоні, реверсуванні, гальмуванні, спрацьовуванні захисного пристрою).

Розмір перевантаження знаходять з урахуванням специфіки роботи машини: по пусковому моменті електродвигуна; граничному моменту при наявності захисної муфти; інерційним моментам при раптовому гальмуванні і т.п.

У розрахунку використовують коефіцієнт перевантаження:

$$K_{\text{п}} = T_{\text{max}}/T, \quad (5.45)$$

де T_{max} - максимальний короткочасно діючий обертаючий момент (момент перевантаження);

T - номінальний (розрахунковий) обертаючий момент.

Наприклад, для більшості асинхронних електродвигунів $K_{\Pi} = 2,0 \dots 2,2$.

У розрахунку визначають нормальні σ (МПа) і дотичні τ (МПа) напруження в аналізованому перетині вала при дії максимальних навантажень:

$$\sigma = 10^3 \cdot M_{\max} / W + F_{\max} / A, \quad (5.46)$$

$$\tau = 10^3 \cdot T_{\max} / W_k, \quad (5.47)$$

де $M_{\max} = K_{\Pi} \cdot \sqrt{M_X^2 + M_Y^2}$ - сумарний згинальний момент, Н·м;

$T_{\max} = K_{\Pi} \cdot T$ - крутний момент, Н·м;

$F_{\max} = K_{\Pi} \cdot F$ - осьова сила, Н;

W і W_k - моменти опору перетину вала при розрахунку на згин і кручення, мм^3 ;

A - площа поперечного перетину, мм^2 .

Часткові коефіцієнти запасу міцності вала по нормальним і дотичним напруженням:

$$S_{T\sigma} = \sigma_T / \sigma; \quad S_{T\tau} = \tau_T / \tau, \quad (5.48)$$

де σ_T і τ_T - границі текучості матеріалу вала при згині і крученні, МПа.

Загальний коефіцієнт запасу міцності по границі текучості при спільній дії нормальних і дотичних напружень

$$S_T = S_{T\sigma} \cdot S_{T\tau} / \sqrt{S_{T\sigma}^2 + S_{T\tau}^2}, \quad (5.49)$$

Статична міцність забезпечена, якщо $S_T \geq [S_T]$, де $[S_T]$ - мінімально припустиме значення загального коефіцієнта запасу по границі текучості.

Значення $[S_T]$ приймають у діапазоні $[S_T] = 1,3 \dots 2,0$ у залежності від відповідальності конструкції і наслідків руйнування вала, точності визначення навантажень і напружень, рівня технології виготовлення і контролю, однорідності і стабільності властивостей матеріалу.

5.5 Опори валів

Підшипники кочення. Загальні відомості

Підшипником називають опору або направляючу, що визначає положення частин, які рухаються, стосовно інших частин механізму. Підшипники, що

працюють за принципом тертя кочення, називають підшипниками кочення, а за принципом тертя ковзання - підшипниками ковзання.

Переваги підшипників кочення:

- повна взаємозамінність, готовність до експлуатації без операцій додаткової підгонки або припасування;
- малі осьові розміри, простота монтажу й експлуатації;
- мала потреба в мастильному матеріалі. Підшипники з захисними шайбами заповнюють пластичним мастильним матеріалом при виготовленні. Цього запасу вистачає практично на весь строк роботи;
- малі втрати на тертя, особливо при початку руху з місця і невисоких частотах обертання, незначне нагрівання при роботі;
- мале використання дефіцитних кольорових металів при виготовленні;
- мала вартість виготовлення в зв'язку з масовим виробництвом.

Недоліки підшипників кочення:

- великі радіальні розміри;
- мала радіальна жорсткість;
- великий опір обертанню, шум і низька довговічність при високих частотах обертання;
- чутливість до ударних і вібраційних навантажень.

Застосування. Підшипники кочення являються основним видом опор у машинах: у легковому автомобілі більш 30 типорозмірів підшипників, у вантажному автомобілі - більш 120, у літаку - більш 1000 і т.д.

Класифікація підшипників кочення

Підшипники кочення передають сили між валом і корпусом при відносному їх обертанні. Діючі на підшипник сили підрозділяють на:

- радіальну, спрямовану по радіусу перпендикулярно осі вала;
- осьову, направлену уздовж осі вала.

Підшипники кочення класифікують по таких основних ознаках:

- ***за формою тіл кочення*** (рисунок 5.25): ***кулькові*** (а) і ***роликові***, причому останні можуть бути з роликами слідуючої форми: циліндричними короткими (б)

і довгими (в) і голчастими (г), бочкообразними (д), конічними (е), комбінованими (ж) із невеличкою (7-30 мкм на сторону) опуклістю поверхні кочення, витими (з) - пустотілими;

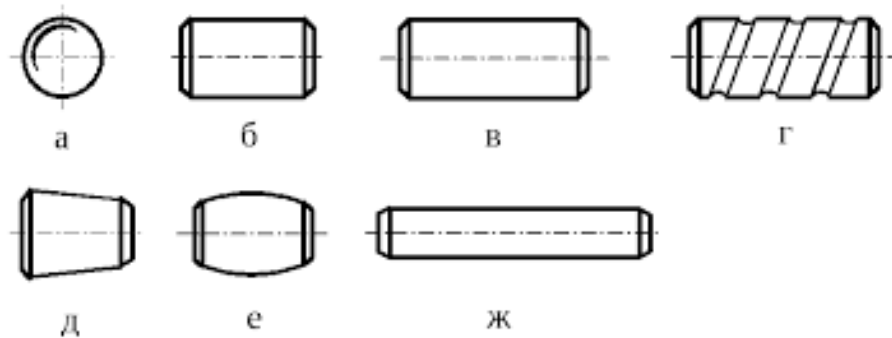


Рисунок 5.25 - Форма тіл кочення

- по напрямку навантаження, що сприймається підшипником:

радіальні, призначені для сприйняття радіальних сил; деякі типи можуть сприймати і осьові сили;

радіально-упорні - для сприйняття радіальних і осьових сил; (підшипники типів, що регулюються без осьової сили нормально працювати не можуть);

упорно-радіальні - для сприйняття осьових і невеликих радіальних сил;

упорні - для сприйняття осьових сил, радіальну силу не сприймають;

- по числу рядів тіл кочення: одно-, дво- і чотирирядні;

- по основних конструктивних ознаках: самовстановлювані (наприклад, сферичні, що самі встановлюються при неточному кутовому розташуванні осі вала і отвору в корпусі) із циліндричним або конусним отвором внутрішнього кільця й ін. та несамовстановлювані;

Поділ підшипників у залежності від напрямку дії навантаження, що сприймається носить у ряді випадків умовний характер. Наприклад, широко поширений кульковий радіальний однорядний підшипник успішно застосовують для сприйняття не тільки комбінованих (спільно діючих радіального й осьового), але і чисто осьових навантажень, а упорно-радіальні підшипники звичайно використовують тільки для сприйняття осьових навантажень.

Крім основних підшипників кожного типу випускають також їх різноманітні конструктивні різновиди.

19.3 Призначення основних деталей підшипника

На рисунку 5.26 показана будова кулькового радіального однорядного підшипника.

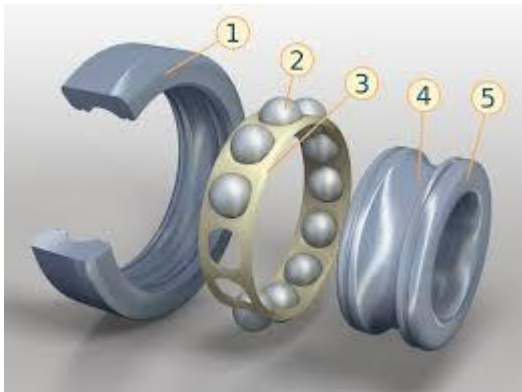


Рисунок 5.26 - Будова кульково-го радіального однорядного підшипника.

дшипника.

Основні деталі підшипника:

1 - внутрішнє кільце з діаметром d отвору;

2 - зовнішнє кільце; D - зовнішній діаметр підшипника;

3 - тіло кочення (кулька, ролик); D_w - діаметр тіла кочення;

4 - сепаратор, змійковий (штампований) або масивний.

Кільця підшипників мають жолоба (канавки), що служать направляючими для руху тіл кочення.

Сепаратори призначені для утримання тіл кочення в певному положенні (із метою забезпечення співвісності кілець), а також і для розділення тіл кочення від їх безпосереднього взаємного контакту (із метою зменшення зношування і втрат на тертя).

При невисоких частотах обертання і при качальному русі застосовують підшипники без сепараторів (наприклад, підшипники хрестовин карданних валів).

Основне застосування має змійковий сепаратор, що складається з двох сполучених між собою заклепками півсепараторів. У вузлах, що швидко обертаються, і підшипниках високої точності застосовують масивні сепаратори (сучільні або клепані), що забезпечують більш точне положення тіл кочення щодо кілець підшипників, а при виготовленні з антифрикційних матеріалів зменшують втрати на тертя.

Матеріали деталей підшипників

Кільця і тіла кочення виготовляють із спеціальних шарикопідшипникових високовуглецевих хромистих сталей марок ШХ15, ШХ20СГ, а також із цементованих легованих сталей марок 18ХГТ. 20Х2Н4А. Кільця мають твердість 61.

.65 HRC_Э, тіла кочення - 63...67 HRC_Э. Кільця і тіла кочення підшипників, що працюють при підвищених температурах (до 500⁰ С) або в агресивних середовищах, виготовляють відповідно з жароміцних або корозійностійких сталей. Для деяких конструкцій підшипників застосовують, також сталі підвищеної металургійної якості: електрошлакові й електровакуумні.

Сепаратори виготовляють, у більшості випадків із м'якої вуглецевої сталі. Сепаратори високошвидкісних підшипників виконують масивними з текстоліту, фторопласта, латуні, бронзи. Матеріали перераховані в порядку збільшення швидкохідності.

Система умовних позначень

Умовне позначення підшипника найчастіше наносять на торці кільця або на захисних шайбах (рисунок 5.27).

Основне умовне позначення може бути створене із семи цифр, що умовно позначають внутрішній діаметр підшипника, розмірну серію, тип, конструктивні особливості та ін. Нулі, що стоять лівіше останньої значущої цифри, не проставляють. У цьому випадку число цифр в умовному позначенні менше семи, наприклад: 7208.

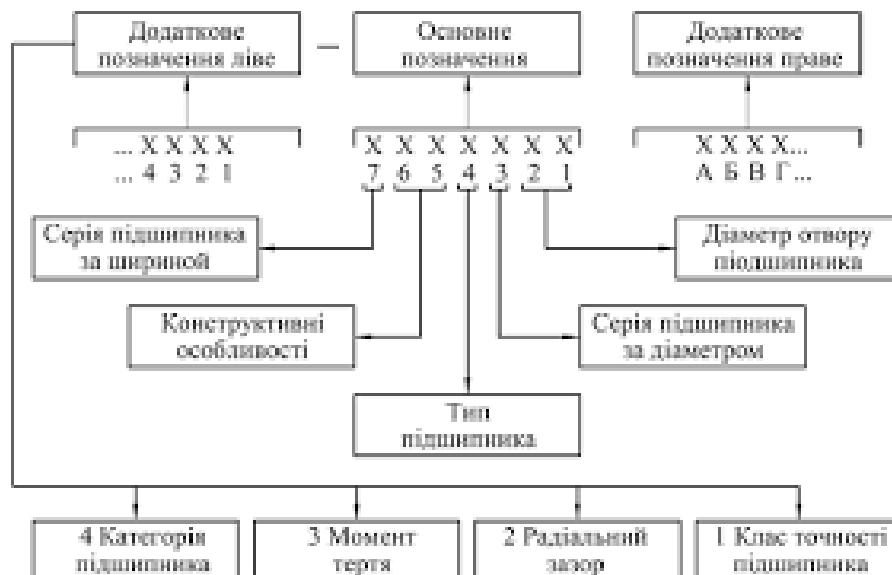


Рисунок 5.27 - Система умовних позначень

Дві перші цифри справа утворюють число, яке позначає діаметр d отвору внутрішнього кільця підшипника. Для підшипників із $d = 20... 495$ мм внутріш-

ній діаметр визначають множенням цього числа на 5. Так, підшипник 7208 має $d = 40$ мм.

Позначення внутрішніх діаметрів, що не входять у цей діапазон, слід визначати безпосередньо по ГОСТ 3189-89 «Підшипники кулькові і роликові. Система умовних позначень».

Третя цифра справа позначає серію діаметрів і разом із сьомою цифрою, що позначає серію ширин, визначає розмірну серію підшипника (рисунки 5.27).

У порядку збільшення зовнішнього діаметра підшипника (при тому ж самому внутрішньому діаметрі) серії бувають: особолегка - 1, легка - 2, середня - 3, важка - 4 і ін. Так, підшипник 7208 - легкої серії діаметрів 2.

Четверта цифра справа позначає тип підшипника:

Кульковий радіальний однорядний	0
Кульковий радіальний сферичний дворядний	1
Роликовий радіальний із короткими циліндричними роликами	2
Роликовий радіальний сферичний дворядний	3
Кульковий радіально-упорний однорядний	6
Роликовий конічний	7
Кульковий упорний, кульковий упорно-радіальний	8
Роликовий упорний, роликовий упорно-радіальний	9

Приведений, для прикладу підшипник 7208 є роликовим конічним.

П'ята або шоста цифри справа позначають конструктивний різновид підшипників (значення номінального кута контакту тіл кочення з зовнішнім кільцем у радіально-упорних підшипниках, наявність захисних шайб або канавок на кільцях під упорне кільце й ін.).

Сьома цифра справа позначає серію по ширині і разом із третьою цифрою, що позначає серію діаметрів, визначає розмірну серію підшипника. У порядку збільшення ширини підшипника (при тих самих зовнішньому і внутрішньому діаметрах) серії ширин бувають: 0, 1, 2, 3 і ін. (рисунки 5.27).

Підшипники різних типів і серій мають різноманітні розміри, масу m , вантажопідйомність C_r , і граничну частоту обертання $[n]$ (рисунки 5.27). Найбі-

льше швидкохідними є радіальні шарикопідшипники легкої (02) серії. Підшипники важких (04) серій менш швидкохідні, але вантажопідйомність їх вища. Роликові конічні підшипники характеризує більша, ніж у кулькових підшипників рівних розмірів, вантажопідйомність, але ж менша гранична частота обертання.

Крім цифр основного позначення зліва і справа від нього можуть бути додаткові літерні або цифрові знаки, що характеризують спеціальні умови виготовлення даного підшипника.

Так, *клас точності* підшипника маркірують цифрою зліва через тире від основного позначення. У порядку підвищення точності класи точності позначають: 0, 6, 5, 4, 2.

У загальному машинобудуванні застосовують підшипники класів 0 і 6. У виробках високої точності або працюючих із високою частотою обертання (шпиндельні вузли швидкохідних верстатів, високообертові електродвигуни й ін.) застосовують підшипники класів 5 і 4. Підшипники класу точності 2 використовують у гіроскопічних приладах.

У нашому прикладі підшипник 7208 - класу точності 0.

Крім наведених вище є і додаткові (більш високі і більш низькі) класи точності.

У залежності від наявності додаткових вимог до рівня вібрацій, відхилень форми і розташування поверхонь кочення, моменту тертя й ін. установлені **три категорії підшипників:**

A - підвищені регламентовані норми;

B - регламентовані норми;

C - без додаткових вимог.

Знак категорії вказують зліва від позначення класу точності.

Можливі знаки справа від основного позначення:

E - сепаратор виконаний із пластичних матеріалів;

R - деталі підшипника з теплостійких сталей;

S - підшипник закритого типу при заповненні мастильним матеріалом і ін.

Ще один приклад позначення підшипника:

311 - підшипник кульковий радіальний однорядний, середньої серії діаметрів 3, серії ширин 0, із внутрішнім діаметром $d = 55$ мм, основної конструкції, класу точності 0.

Характер і причини відмов підшипників кочення

1 Викришування від втоми робочих поверхонь кілець і тіл кочення у виді раковин або відшаровування під дією перемінних контактних напружень. Викришування від втоми є основним видом руйнування підшипників, що працюють при доброму змащенні і захисті від попадання абразивних часток. Його звичайно спостерігають після тривалої роботи. Супроводжується підвищеним шумом і вібраціями.

2 Зминання робочих поверхонь доріжок і тіл кочення (утворення лунок і вм'ятин) унаслідок місцевих пластичних деформацій під дією ударних або значних статичних навантажень.

3 Абразивне зношування внаслідок поганого захисту підшипника від попадання абразивних часток (будівельні, дорожні, сільськогосподарські машини, ткацькі верстати). Застосування досконалих конструкцій ущільнень підшипникових вузлів зменшує зношування робочих поверхонь підшипника.

4 Руйнування сепараторів від дії відцентрових сил і впливу на сепаратор тіл кочення, які мають відхилення у розмірах. Цей вид руйнування - основна причина втрати працездатності швидкохідних підшипників.

5 Руйнування кілець і тіл кочення через перекося кілець або дії великих динамічних навантажень (сколювання бортів, розколювання кілець і ін.). При якісному монтажі і правильній експлуатації руйнування елементів підшипників не повинно мати місця.

Зовнішніми ознаками порушення працездатності підшипників є втрата точності орієнтування вала, підвищений шум і вібрації, підвищення опору обертанню і температури.

5.5 Шпонкові і шліцьові з'єднання

Загальні відомості про шпонкові з'єднання

Призначення шпонкових з'єднань - закріплення деталей на валах і осях і передача обертаючого моменту між валом і маточиною.

Шпонкове з'єднання утворюють вал, шпонка і маточина деталі (колеса, шків, зірочки та ін.). Шпонка являє собою сталевий брус, який встановлено у пази вала і маточини.

Шпонкові з'єднання можуть бути розділені на дві групи:

1) ненапружені, що здійснюються призматичними або сегментними шпонками;

2) напружені - клиновими шпонками або штифтами.

Переваги шпонкових з'єднань:

- простота конструкції і порівняно невисока вартість виготовлення;
- легкість монтажу і демонтажу, унаслідок чого їх застосовують у всіх галузях машинобудування.

Недоліки: невисока навантажувальна спроможність.

У більшості випадків необхідна ручна підгонка при установці шпонки в паз вала; шпонкові пази послабляють вал і маточину деталі, що насаджується на вал. Ослаблення вала обумовлено не тільки зменшенням його перетину, але, головне, значною концентрацією напружень, що викликається шпонковим пазом.

Застосування. Шпонкові з'єднання застосовують для передачі обертаючого моменту між валами і встановленими на них зубчастими і черв'ячними колесами, шківками, зірочками, півмуфтами. У якості нерухомих найбільш раціональні шпонкові з'єднання, що сполучаються з посадкою маточини на вал із натягом, це забезпечує надійне центрування маточини на валу і виключає контактну корозію. Направляючі і ковзаючі шпонки іноді використовують у рухливих в осьовому напрямку з'єднаннях маточини з валом, (наприклад, пересувний блок шестерень коробки швидкостей). Внаслідок низької несучої спроможності ці з'єднання на наступних етапах проектування заміняють рухливими шліцьовими з'єднаннями.

З'єднання призматичними шпонками

Ці з'єднання відносять до групи ненапружених і широко поширені в техніці.

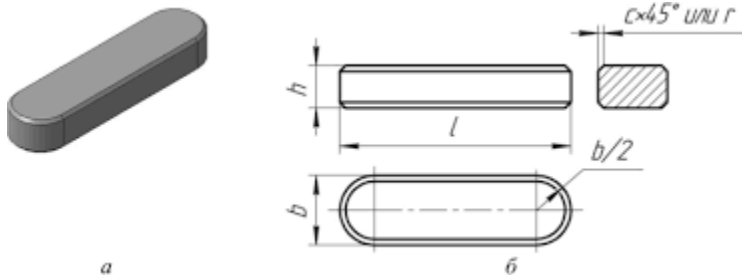


Рисунок 5.28 – Призматична шпонка

Призматична шпонка являє собою прямокутну призму (рисунок 5.28). Інші виконання мають заокруглення відповідно одного або двох торців (рисунок 5.28б). Закруглені торці

шпонки полегшують монтаж деталі на вал при незначній розбіжності бічних поверхонь шпонки і паза в отворі деталі.

Паз у маточині виконують протяжкою або довбляком. Паз під шпонку на валу виконують в одиничному і дрібносерійному виробництві кінцевою фрезою, у крупносерійному і масовому виробництві - дисковою фрезою. Для паза, виконаного кінцевою фрезою необхідне ручне припасування. Дискова фреза більш продуктивна, а точність виконання паза вища. Але паз має похилу ділянку, тому деталь, яка установлюється на вал може захопити шпонку і змістити її по похилій ділянці. Відбудеться заклинювання, тому шпонку необхідно кріпити в пазу, наприклад, гвинтами. Таке кріплення застосовують для направляючих шпонок, що мають велику довжину.

Установку шпонки в паз на валі виконують із натягом. Глибина паза складає 0,6 від висоти h шпонки. Виступаюча частина шпонки входить у паз маточини деталі, що установлюється на вал. Призматична шпонка не утримує деталь від осевого зміщення уздовж вала.

На рисунку 5.29 показаний поперечний перетин шпонкового з'єднання. Розміри призматичних шпонок стандартизовано. У стандарті зазначено для кожного діаметра d вала значення ширини b і висоти h шпонки, глибини t_1 і t_2 паза на валу і маточини, відповідно. Стандартизовано також довжини шпонок

Робочими являються бічні, більш вузькі грані шпонок висотою h . При передачі обертаючого моменту з вала на деталь бічні (робочі) поверхні шпонки відчувають дію напружень змінання $\sigma_{см}$, поздовжній перетин - напружень зрізу

τ_{cp} . При розрахунках на міцність приймають, що шпонка навантажена коловою

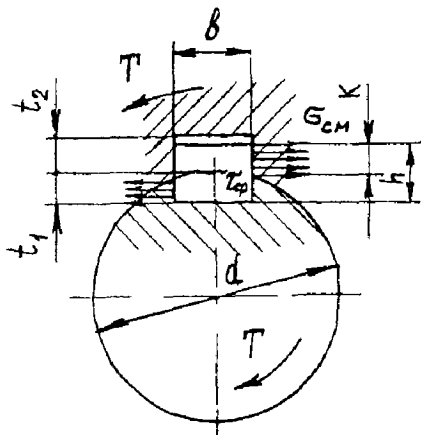


Рисунок 5.29 - Поперечний перетин шпонкового з'єднання

дібрано так, що міцність шпонок на зріз і згин забезпечена, якщо виконана умова міцності на зминання, тому основний розрахунок шпонкових з'єднань - розрахунок на зминання.

Режим роботи, міцність матеріалу деталей, характер їх сполучення враховують при виборі допустимих напружень

З'єднання з призматичними шпонками (рисунок 5.29) перевіряють за умовою міцності на зминання:

$$\sigma_{зм} = 2 \cdot 10^3 \cdot T / (d \cdot k \cdot l_p) \leq [\sigma]_{см}, \quad (5.50)$$

де T - обертаючий момент, Н·м;

d - діаметр вала, мм;

$k = (h - t_1)$ - виступаюча з вала частина шпонки (глибина врізання шпонки в маточину), мм;

l_p - розрахункова довжина шпонки, мм (рисунок 5.29);

$[\sigma]_{см}$ - допустимі напруження зминання, МПа.

При проектувальному розрахунку з приведеної умови міцності знаходять розрахункову довжину l_p мм шпонки:

$$l_p \geq 2 \cdot 10^3 \cdot T / (d \cdot k \cdot [\sigma]_{зм}), \quad (5.51)$$

потім повну довжину $l = l_p + b$ з округленням до найближчого значення по стандарту.

З метою, зменшення нерівномірності розподілу напружень по висоті і довжині шпонки довжину з'єднання обмежують $l \leq 1,5 \cdot d$.

Умова міцності по напруженнях зрізу:

$$\tau_{зр} = 2 \cdot 10^3 \cdot T / (d \cdot b \cdot l_p) \leq [\tau]_{зр}, \quad (5.52)$$

де b - ширина шпонки, мм;

$[\tau]_{зр}$ - допустимі напруження зрізу, МПа

З'єднання з сегментними шпонками

Сегментну шпонку одержують, відрізаючи від круглого прутка діаметром D диск товщиною b , який потім розрізають на два рівних сегменти. При цьому висота шпонки $h \approx 0,4 \cdot d$, довжина $l = D$ (рисунок 5.30 а).

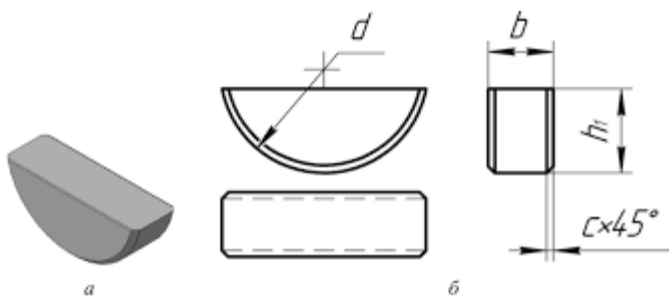


Рисунок 5.30 - Сегментну шпонка

Паз вала виконують дисковою фрезою, паз маточини - протяжкою або довбляком. Такий спосіб виготовлення забезпечує легкість установки і видалення шпонки, взаємозамінність сполучення.

Ручна підгонка звичайно не потрібна. Шпонка в пазу вала само встановлюється - не потрібне додаткове її кріплення.

Сегментні шпонки широко застосовують у масовому і крупносерійному виробництві. Внаслідок зазначених переваг зона їх застосування розширюється як на серійне, так і дрібносерійне виробництво

Недоліком з'єднання є ослаблення перетину вала глибоким пазом, це знижує опір утомі вала. Тому сегментні шпонки звичайно застосовують при передачі відносно невеликих обертаючих моментів і при установці деталей на малонавантажених ділянках вала (наприклад, на кінцях валів).

Сегментні шпонки, як і призматичні, працюють бічними гранями. Шпонки стандартизовані. Для кожного діаметра d вала в стандарті приведені значення b , h , t_1, t_2 , і l .

Шпонки перевіряють на міцність по напруженнях зминання $\sigma_{см}$ та зрізу $\tau_{ср}$ по формулах, які приведено для призматичних шпонок. При цьому висота k виступаючої з вала частини шпонки дорівнює $k = h - t_1$; $l_p = l$.

Клинові шпонки по ГОСТ 24068-80 являють собою клини звичайно з ухилом 1:100 (рисунок 5.31).

На відміну від призматичних, у клинових шпонок робочими являються

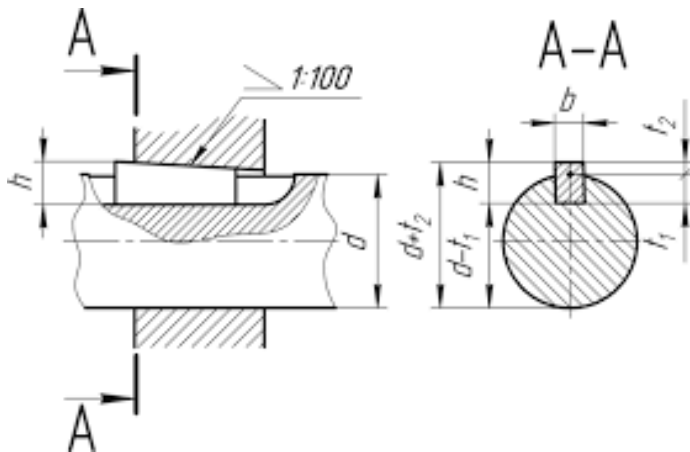


Рисунок 5.31 - Клинові шпонки

широкі грані, а на бічних гранях може бути зазор. Клинові шпонки створюють напружене сполучення, спроможне передавати обертаючий момент, осьову силу й ударні навантаження. Проте клинові шпонки викликають радіальне зміщення осі маточини відносно осі вала на розмір радіального посадкового зазору і контактних деформацій, а,

отже, збільшують биття деталі, яка насаджена на вал. Тому застосування клинових шпонок у даний час різко скоротилося. У точному машинобудуванні, а також у відповідальних з'єднаннях їх зовсім не використовують. Шпонки з головками, зручні при необхідності частого розбирання, але потребують застосування спеціальних огорожень.

Розміри перетинів стандартних клинових шпонок ті ж самі, що й у призматичних.

Паз у маточині для закладних клинових шпонок теж має ухил, який відповідає ухилу клина шпонки, тобто 1:100.

Допустима сила між шпонкою і валом визначається з розрахунку на зминання при трикутній по ширині шпонки епюрі тиску, який утворюється в результаті забивання шпонки і дії моменту. Допустимий момент складається з моменту тертя між валом і маточиною, валом і шпонкою, плюс момент від трикутної епюри тиску на шпонці.

Розрахункова формула

$$T \leq \frac{b \cdot l}{12} \left[b + 3 \left(1 + \frac{4}{\pi} \right) \cdot f \cdot d \right] \cdot [\sigma]_{3M}, \quad (5.53)$$

де f - коефіцієнт тертя між шпонкою і деталями, що з'єднуються.

Існують клинові шпонки на лисці, вони менше ослаблюють вал, а також фрикційні, які дозволяють скріплення вала і маточини у будь-якому положенні по куту і довжині. Застосування їх дуже обмежене.

Матеріали шпонок і вибір допустимих напружень

Матеріалом шпонок служать середньовуглецеві сталі з тимчасовим опором (границею міцності) $\sigma_b \geq 600$ МПа (наприклад, сталі марок Ст.6, сталь 45, сталь 50). Значення допустимих напружень $[\sigma]_{3M}$ вибирають у залежності від характеру навантаження й умов роботи з'єднання:

нерухоме, сталева маточина	130...200 МПа;
нерухоме, маточина з чавуну або сталевого литва	80...110 МПа;
рухливе без навантаження, сталева маточина	20...40 МПа.

Більші значення допустимих напружень приймають при постійному навантаженні, менші - при перемінному та роботі з ударами

При реверсивному навантаженні $[\sigma]_{3M}$ знижують у 1,5 рази Допустимі напруження на зріз шпонок $[\tau]_{зр} = 70...100$ МПа. Більші значення приймають при постійному навантаженні

Загальні відомості про шліцьові з'єднання

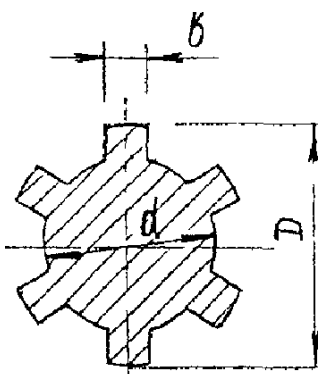


Рисунок 5.32 - Шліцьове з'єднання

Шліцьове з'єднання утворює виступи (зуби) на валу (рисунок 5.32), які входять у відповідні западини (шліци) у маточині. Робочими поверхнями являються бічні сторони виступів. Виступ на валу виконують фрезеруванням, струганням або накочуванням у холодному стані профільними роликками по методу поздовжньої накатки. Западини в отворі маточини виготовляють протяганням або довбанням.

Шліцьове з'єднання являє собою фактично багатощпонкове з'єднання, у якого шпонки виконано за одне ціле з валом

Шліцьові з'єднання стандартизовані і вони широко поширені в машинобудуванні.

Переваги шліцьових з'єднань у порівнянні зі шпонковими:

- здатність точно центрувати деталі, що з'єднуються або точно витримувати напрямок при їх відносному осьовому переміщенні;
- менше число деталей у з'єднанні: шліцьове з'єднання утворюють тільки дві деталі, а шпонкове - три;
- велика несуча здатність унаслідок більшої сумарної площі контакту;
- взаємозамінність (немає необхідності в ручному припасуванні деталей);
- більший опір утомі вала внаслідок меншої глибини западини і тому меншої концентрації напружень, особливо для евольвентних шліців.

Недоліки - більш складна технологія виготовлення, а отже, і більш висока вартість виготовлення деталей з'єднання.

Шліцьові з'єднання розрізняють:

- по характеру з'єднання: нерухомі для закріплення деталі на валу; рухливі, що допускають переміщення уздовж вала (наприклад, блока шестерень коробки передач; шпинделя свердлильного верстата, тощо);
- за формою виступів - прямобічні, евольвентні, трикутні.

З'єднання з прямобічним профілем (рисунок 5.32; 5.33). Застосовують у нерухомих і рухливих з'єднаннях. Вони мають постійну товщину виступів.

Стандарт передбачає три серії з'єднань із прямобічним профілем: легку, середню і важку, які розрізняються висотою і числом z виступів. Важка серія має більш високі виступи з більшим їх числом. Рекомендують для передачі великих обертаючих моментів

Центрування (забезпечення збігу геометричних осей) деталей, що з'єднуються виконують по зовнішньому D , внутрішньому d діаметрам або по бічних поверхнях b виступів. Вибір засобу центрування залежить від вимог до точнос-

ті центрування, твердості маточини і вала. Перші два способи забезпечують найбільше точне центрування.

Зазор у контакті поверхонь, що центрують - практично відсутній; поверхонь, що не центрують - значний.

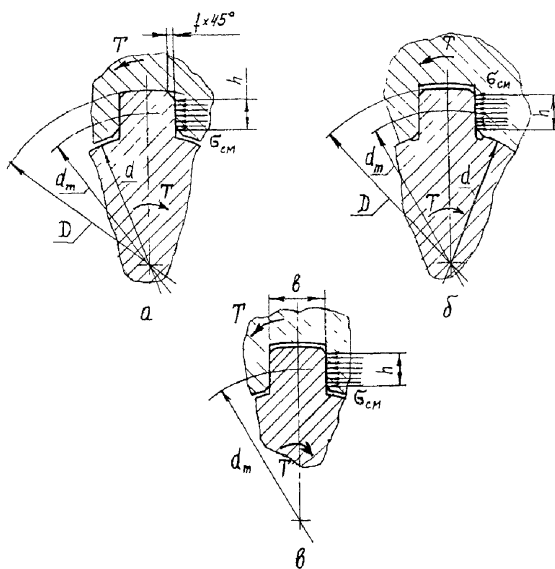


Рисунок 5.33 - З'єднання з прямобічним профілем контакту:

$$h = 0,5 \cdot (D - d) - 2f, \quad (5.54)$$

де f - розмір фаски при вершині виступу.

Вважають, що колова сила прикладена на середньому діаметрі виступів $d_m = 0,5 \cdot (D + d)$.

Відповідно до технології обробки центровочної поверхні в отворі (протягання), центрування по зовнішньому діаметру може бути застосоване тільки при невисокій твердості матеріалу маточини ($H \leq 350$ НВ).

Центрування по внутрішньому діаметру d (рисунок 5.33б) застосовують при високій твердості маточини ($H \geq 45$ HRC), наприклад, після її загартування, коли утруднене калібрування маточини протяжкою або дорном. Точність обробки поверхонь, що сполучаються забезпечують: в отворі - шліфуванням на внутрішньошліфувальному верстаті, на валу - шліфуванням западини профільованими кругами, у відповідності з чим на дні западини передбачають канавки для виходу шліфувального круга.

По діаметру d , що центрує, звичайно забезпечують сполучення по перехідній посадці. Розмір h площадки контакту визначають так само, як при centruванні по зовнішньому діаметру.

Центрування по D або d застосовують у з'єднаннях, що потребують високої співвісності вала і маточини (при установці на вали зубчастих або черв'ячних коліс у коробках передач автомобілів, верстатів, редукторів, а також шківів, зірочок, півмуфт на вхідних і вихідних кінцях валів).

Центрування по бічних поверхнях b (рисунок 5.33в). У сполученні деталей по бічних поверхнях зазор практично відсутній, а по діаметрах D і d має місце явний зазор. Це знижує точність центрування, але забезпечує найбільш рівномірний розподіл навантаження між виступами. Тому центрування по бічних поверхнях b застосовують для передачі значних і перемінних за значенням або напрямком обертаючих моментів, при жорстких вимогах до мертвого ходу і при відсутності високих вимог до точності центрування. наприклад, шліцьове з'єднання карданного вала автомобіля.

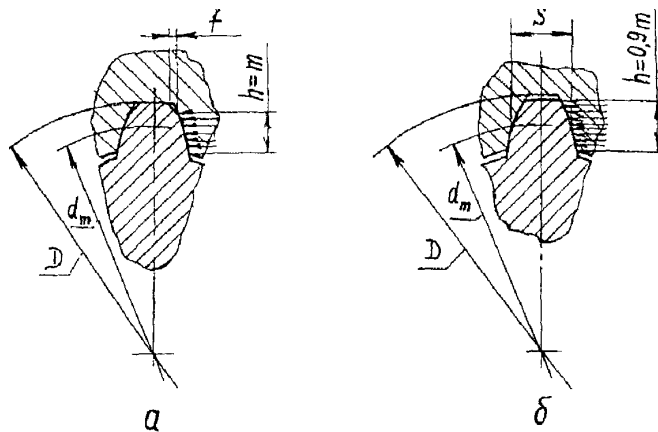


Рисунок 5.34 - З'єднання з евольвентним профілем

З'єднання з евольвентним профілем (рисунок 5.34).

Застосовують у нерухомих і рухливих з'єднаннях. Бічна поверхня виступу обкреслена по евольвенті. Евольвентний профіль відрізняє від прямобічного підвищену міцність у зв'язку зі стовщенням виступу до основи і плавним переходом в основі. При

виготовленні виступів застосовують добре налагоджену технологію виготовлення зубів зубчастих коліс. З'єднання забезпечують високу точність центрування; вони стандартизовані - за номінальний діаметр з'єднання прийнято зовнішній діаметр D .

Від зубів зубчастих коліс їх відрізняє більший кут зачеплення (тут 30°) і менша висота виступу ($h = m$), що пов'язано із відсутністю відносного перекошування.

У порівнянні з прямобічним, з'єднання з евольвентним профілем характеризує більша навантажувальна здатність унаслідок більшої площі контакту, великої кількості зубів і їх підвищеної міцності. Застосовують для передачі великих обертаючих моментів, область застосування поширюється.

У з'єднаннях з евольвентним профілем застосовують центрування по бічних поверхнях S зубів (рисунок 5.34б), рідше - по зовнішньому діаметру D (рисунок 5.34а). Так само, як у зубчастих колесах, параметри з'єднання записують через модуль m . Середній діаметр з'єднання $d_m = D - 1,1 \cdot m$. Висота площадки контакту при центруванні по S ; $h = 0,9 \cdot m$; при центруванні по D : $h = m$.

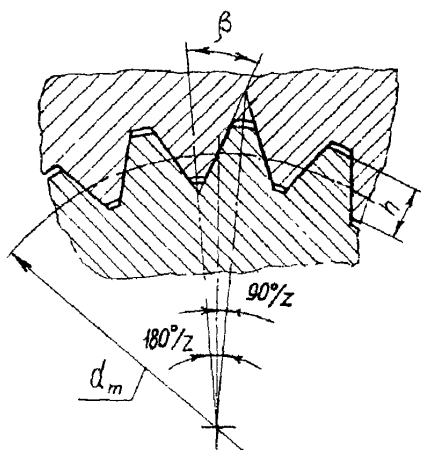


Рисунок 5.35 - З'єднання з трикутним профілем

З'єднання з трикутним профілем (рисунок 5.35) виготовляють по галузевих нормалях. Застосовують у нерухомих з'єднаннях. Мають велике число дрібних виступів-зубів ($z = 15 \dots 70$; $m = 0,5 \dots 1,5$). Кут β профілю зуба маточини складає 30° , 36° або 45° . Застосовують центрування тільки по бічних поверхнях, точність центрування невисока.

Виступи виконують як на циліндричних, так і на конічних поверхнях. Параметри з'єднання записують через модуль m : $d_m = m \cdot z$; $h = 1,3 \cdot m$. Застосовують для передачі невеликих

обертаючих моментів тонкостінними маточинами, пустотілими валами, а також у з'єднаннях торсіонних валів, сталевих валів із маточинами з легких сплавів, у приводах керування (наприклад, привод склоочисника автомобіля).

З'єднання з трикутним профілем застосовують також при необхідності малих відносних регульовальних поворотів деталей. Якщо для деталей, що потребують відносного кутового регулювання, застосувати два з'єднання з числами зубів z і $(z + 1)$, то деталі можна повернути одну щодо іншої на мінімальний кут,

рівний $1/[z \cdot (z + 1)]$ рад. Наприклад, якщо число зубів $z = 70$, то мінімальний кут повороту дорівнює $1/4970$ рад ($0,0115^\circ$ або $0,69'$).

Шліцьові вали і маточини виготовляють із середньовуглецевих і легованих сталей із тимчасовим опором $\sigma_B > 500$ МПа.

Розрахунок шліцьових з'єднань

Основними критеріями працездатності шліцьових з'єднань є опір робочих поверхонь зминанню і зношуванню. Зношування бічних поверхонь зубів обумовлене мікропереміщеннями деталей з'єднання, унаслідок пружних деформації при дії згинальних і обертаючих моментів або розбіжності осей обертання (через наявність зазорів, погрішностей виготовлення і монтажу).

Параметри з'єднання вибирають по таблицях стандарту в залежності від діаметра вала, а потім виконують розрахунок по критеріях працездатності.

Спрощений (наближений) розрахунок засновано на обмеженні напружень зминання $\sigma_{зм}$ допустимими значеннями $[\sigma]_{зм}$, що призначаються на основі досвіду експлуатації подібних конструкцій.

Зминання і зношування робочих поверхонь пов'язані з діючими на поверхнях, що контактують, напруженнями зминання $\sigma_{зм}$, які визначаються по формулі:

$$\sigma_{зм} = 2 \cdot 10^3 \cdot T \cdot K_3 / (d_m \cdot z \cdot h \cdot l_p) \leq [\sigma]_{зм}, \quad (5.55)$$

де T - розрахунковий обертаючий момент (найбільший із довгостроково діючих моментів при перемінному режимі навантаження), Н-м;

K_3 - коефіцієнт нерівномірності розподілу навантаження між виступами (залежить від точності виготовлення: погрішностей кутових кроків виступів і сполучених западин; розміри радіального зазору), $K_3 = 1,1 \dots 1,5$;

d_m - середній діаметр з'єднання, мм;

z - число виступів;

h - робоча висота виступу, мм;

l_p - робоча довжина з'єднання, мм;

$[\sigma]_{зм}$ - допустиме напруження зминання, МПа.

Допустимі напруження зминання $[\sigma]_{зм}$ для розрахунку шліцьових з'єднань при середніх умовах експлуатації $H \leq 350$ HB $H \geq 40$ HRC_Э

Нерухоме - 60...100 МПа; 100...140 МПа.

Рухливе без навантаження (блок шестерень коробки передач) - 20...30 МПа; 30...60 МПа.

Рухливе під навантаженням (з'єднання карданного вала) - 3...15 МПа.

Значення $[\sigma]_{зм}$ приведено для виробів загального машинобудування і підйомно-транспортних устроїв, розрахованих на тривалий термін служби. Більші значення приймають для легких режимів навантаження.

Якщо розрахункове напруження $\sigma_{зм}$ перевищує допустиме, то збільшують довжину маточини, змінюють розміри, термообробку або приймають інший вид з'єднання і повторюють перевірочний розрахунок.

При проектувальному, розрахунку шліцьових з'єднань після вибору по стандарту розмірів перетину визначають довжину виступів l_p .

Якщо одержують $l_p > 1,5 \cdot d$, то змінюють розміри, термообробку або приймають інший вид з'єднання. Довжину маточини приймають $l_{ст} = l_p + 4...6$ мм і більше у залежності від конструкції з'єднання.

Уточнені розрахунки на зминання і знос розроблено для прямобічних шліцьових з'єднань і враховують характер навантаження, конструктивні особливості з'єднання, припрацювання робочих поверхонь, необхідний ресурс і т.д.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ДО РОЗДІЛУ 5

- 1 Які основні переваги і недоліки зубчастих передач?
- 2 Назвіть критерії працездатності закритих зубчастих передач.
- 3 Які види пасових передач розрізняють за формою поперечного перетину паса?
- 4 Які переваги і недоліки мають пасові передачі в порівнянні з іншими видами передач?
- 5 Як визначають сили натягу в гілках паса при роботі передачі?

- 6 У чому сутність пружного ковзання паса по шківках? Чому воно виникає і чи можна його усунути?
- 7 Чому передаточне число пасової передачі мінливе?
- 8 Для чого в пасовій передачі створюють попередній натяг паса?
- 9 Дію яких деформацій зазнають вал і вісь при роботі?
- 10 Чому частіше застосовують ступінчасту форму вали?
- 11 Які основні критерії працездатності валів і осей і якими параметрами їх оцінюють?
- 12 Яка ціль проектувального розрахунку, який звичайно діаметр вала визначають і чому?
- 13 Яка ціль перевірного розрахунку? Який параметр при цьому визначають?
- 14 Як класифікують підшипники по напрямку навантаження, що сприймається?
- 15 Яке призначення основних деталей підшипника?
- 16 Яке призначення шпонкових з'єднань? Їх різновид.
- 17 Недоліки шпонкових з'єднань.
- 18 В яких випадках застосовують призматичні шпонки? Як виконують для них пази в маточині і на валу?
- 19 Які переваги мають з'єднання із сегментними шпонками й у яких випадках рекомендують застосовувати такі з'єднання?
- 20 Які основні критерії працездатності з'єднань із призматичними і із сегментними шпонками? Як установлюють розміри призматичних і сегментних шпонок?
- 21 Які з'єднання (із призматичними або із сегментними шпонками) можуть забезпечити передачу великих обертаючих моментів?
- 22 Які шпонки (призматичні, сегментні) можна застосовувати для з'єднання рухливого блока шестерень із валом коробки передач? Чому?
- 23 Яке призначення шліцьових з'єднань? Їх різновид.
- 24 Які переваги мають шліцьові з'єднання в порівнянні зі шпонковими?

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- 1 Добронравов В.В. Курс теоретической механики: учебное пособие для технических специальностей вузов / Добронравов В.В., Никитин Н.Н. – 2 издание - М.: Высшая школа, 1974.-630с.: ил.; - Библиогр.: с.622-626. – Пред. указ.: с. 627-630.
- 2 Корн Г. И. Справочник по математики: для научных работников и инженеров в 3 частях. - М.: «Наука», 1970.- 506с.: ил.; - Библиогр.: с.482-496. – Пред. указ.: с. 497-506.
- 3 Тарг С.М. Короткий курс теоретической механики: учебное пособие для технических специальностей вузов / под редакцией проф. С.М. Тарга – 3 издание - М.: Высшая школа, 2001.-580с.: ил.; - Библиогр.: с.572-578. – Пред. указ.: с. 579-580.
- 4 Яблонский А.А. Курс теоретической механики: учебное пособие для технических специальностей вузов / Добронравов В.В., Никитин Н.Н. – 2 издание - М.: Высшая школа, 1978.-725с.: ил.; - Библиогр.: с.712-721. – Пред. указ.: с. 722-725.
- 5 Иосилевич Г.Б., Строганов Г.Б., Маслов Г.С. Прикладная механика :Учеб.для вузов/ под ред. Г.Б. Иосилевича. – М.: Высш. шк., 1989. – 351 с.
- 6 Беляев Н.М. Соппротивление материалов. - М: Наука, 1976.-590 с.
- 7 Цурпал І.А. Механіка матеріалів і конструкцій: Навч. посібник. – К.: Вища освіта, 2005. – 367 с.: іл..
- 8 Писаренко Г.С. Опір матеріалів: Підручник/ Г.С. Писаренко, О.Л. Квіт, Е.С. Уманський; За ред. Г.С. Писаренка. –К.: Вища шк.1993.-655с.:іл.
- 9 Иванов М.Н. Детали машин / М.Н. Иванов. – М.:, Высш. шк., 1991.
- 10 Решетов Д.Н. Детали машин /Д.Н. Решетов. – М.: Машиностроение, 1989.

Навчальне видання

Антонова Галина Володимирівна
Бондаренко Лариса Юріївна
Вершков Олександр Олександрович

ПРИКЛАДНА МЕХАНІКА

Навчальний посібник

Підписано до видання 28.05.2019

Видано
у Таврійському державному агротехнологічному університеті
72318, м. Мелітополь, просп. Б. Хмельницького, 18.