

*КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ*

УДК 514.182.7:519.651

DOI: 10.31388/2078-0877-19-2-237-247

**ДИСКРЕТНЕ ІНТЕГРУВАННЯ ДПК ДОВІЛЬНОЇ  
КОНФІГУРАЦІЇ НА ОСНОВІ ВИРАХУВАННЯ СУМ**

Івженко О. В., к. т. н.,

Шрамко О. В.

*Таврійський державний агротехнологічний університет імені Дмитра Моторного*

Тел. (0619) 42-68-62, 42-68-44

**Анотація** – дану роботу виконано в рамках дослідження питань дискретного геометричного диференціювання, коли значення похідних вибирається за умови відсутності осциляції. Зазначено, що погоджене згущення побудованих дискретно представлених кривих (ДПК) на основі інтегрально - диференціальних зв'язків та побудова точок згущення на наступному та вихідному графіку інтегралу за умови відсутності осциляції має велике значення при розв'язання задач дискретного геометричного моделювання.

Пропонований метод дозволяє оцінювати змінну складову при аналізі і прогнозуванні природних явищ і процесів. Це сприяє проведенню якісного геометричного моделювання явищ і процесів на основі побудови адекватних математичних моделей.

**Ключові слова** – дискретно представлена крива (ДПК), таблиця сум, подвійний інтеграл, екстремум, інтегрально – диференціальний зв'язок, осциляція.

*Постанова проблеми, аналіз останніх досліджень та формулювання цілей статті.* У попередніх дослідженнях [1-3] розглядалися питання дискретного диференціювання, коли значення похідних не розраховуються, а вибираються за умови відсутності осциляції. Але погоджене згущення побудованих ДПК на основі інтегрально - диференціальних зв'язків та побудова точок згущення на наступному та вихідному графіку інтегралу за умови відсутності осциляції має велике значення при розв'язання задач дискретного геометричного моделювання [1]. Метою статті є викладення способу дискретного інтегрування шляхом складання таблиці сум на основі ординат вихідних ДПК.

*Основна частина.* Як відомо [4,5], якщо продовжити таблицю скінчених різниць (а це дискретні аналоги похідних) уліво, то

одержимо таблицю сум. Ця таблиця буде зворотною до диференціювання - інтегруванням. Надалі ми її будемо називати таблицею сум.

Таблиця 1 – Приклад побудови інтегрованої ДПК за допомогою таблиці сум.

$X$	$Y$	$\Sigma Y$	$\Sigma\Sigma Y$
0	-8	0	0
1	-5	-5	-5
2	-2	-7	-12
3	0	-7	-19
4	1	-6	-25
5	4	-2	-27
6	9	7	-20
7	15	22	2
8	17	39	41
9	20	59	100
10	19	78	178

Звернемо увагу на розрахункові формули табл. 1. Очевидно, що

$$\overline{y_{i+1}} - \overline{y_i} = \overline{y_{i+1}} \cdot h, \quad (1)$$

де  $\overline{y_{i+1}}$ ,  $\overline{y_i}$  – ординати точок ДПК 1-го інтегралу;

$\overline{y_{i+1}}$  – ордината точки вихідної ДПК;

$h$  – крок сітки.

Як бачимо, формула (1) є формулою правих прямокутників чисельного інтегрування, а табл. 1 побудована на основі цієї формули при  $h=1$  і початкових значеннях  $\overline{y_0} = \overline{y_0} = 0$ , де  $\overline{y_j}$  – ординати точок 2-го інтегралу,  $j = \overline{0;n}$ .

Графік вихідної ДПК (рис.1). Графік, першого інтегралу від вихідної ДПК (рис. 2), побудований на основі таблиці 1 вирахування сум (початкова точка інтегрування по осі  $Y=0$ ).

Графік, подвійного інтегралу від вихідної ДПК (рис. 3), побудований на основі таблиці сум.

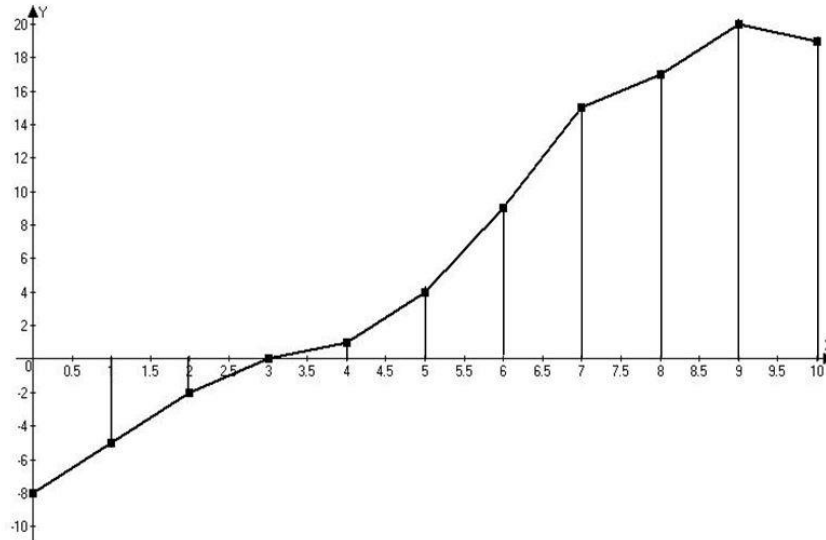


Рис. 1. Графік вихідної ДПК.

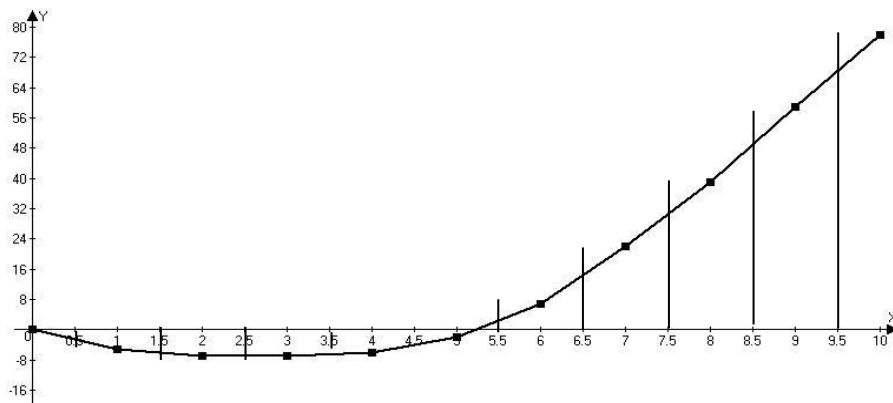


Рис. 2. Графік першого інтегралу від вихідної ДПК.

Ділянка вихідної ДПК, де  $y_i < 0$ , відповідає опуклій догори ДПК подвійного інтегралу; де  $y_i > 0$  – там ДПК подвійного інтегралу опукла донизу. Точці  $y = 0$  відповідає точка перегину ДПК подвійного інтегралу. На ДПК першого інтегралу їй відповідає точка екстремуму (у цьому випадку - мінімуму).

Як видно на графіках, якщо вихідна ДПК зростає, то перший інтеграл від неї має ввігнутість (опуклість донизу). Точка екстремуму цієї ввігнутості визначається точкою перетину вихідної ДПК із віссю  $OX$  (біля  $x = 3$ ). Другий інтеграл теж має ввігнутість (його екстремум буде в тій точці, де графік першого інтегралу перетнув вісь  $OX$  (біля  $x = 5$ ). Похибка у розбіжності точок на обох графіках пояснюється великим кроком по  $x$ , а також тим, що точки з'єднані ламаною лінією. З першого інтегралу ми маємо зростаючу вихідну ДПК із точкою перетину вісі  $OX$  в точці екстремуму першого інтегралу. Тобто, маючи вихідну ДПК, ми можемо сказати як “поведе” себе другий інтеграл, і навпаки.

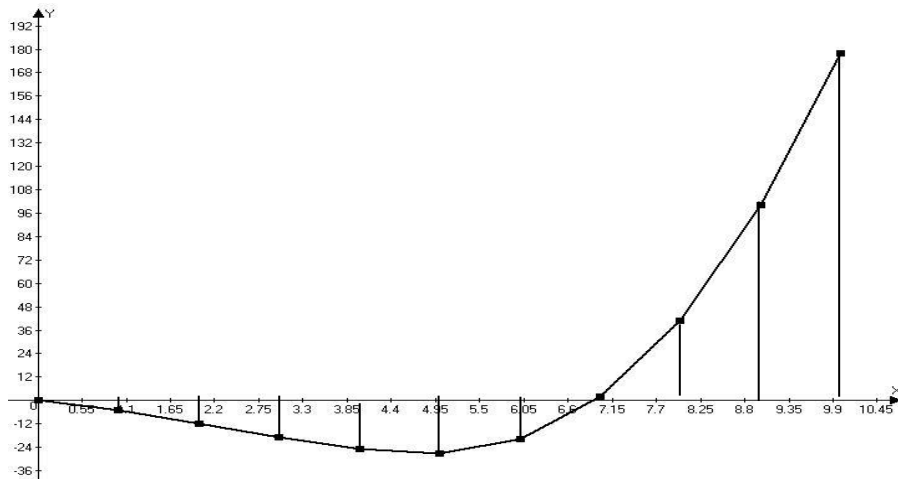


Рис. 3. Графік, подвійного інтегралу від вихідної ДПК.

Ще одна властивість інтегрованих ДПК полягає в тому, що різниця між двома сусідніми значеннями вісі  $OY$  інтегрованої ДПК є значенням площі під вихідними відрізками, на основі яких побудовані дані різниці. У цьому легко переконатися. Візьмемо з вищенаведеного прикладу вихідну ДПК і її інтеграли. Для знаходження площі під сегментами скористаємося формулою правих прямокутників, за якою побудована табл. 1, та знайдемо площу під другим сегментом вихідної ДПК (рис. 4):

$$S = h \cdot y_2 = 1 \cdot (-2) = -2.$$

Якщо нас цікавить абсолютне значення (тобто модуль), то площа під відрізком дорівнює 2.

Тепер обчислимо різницю між двома значеннями вісі  $OY$  другого інтегрованого сегменту:

$$\Delta = \bar{y}_2 - \bar{y}_1 = -7 - (-5) = -2.$$

Знак  $(-)$  свідчить про те, що ДПК  $\bar{y}_i$  – убутна.

Нижче наведені схематичні графіки:

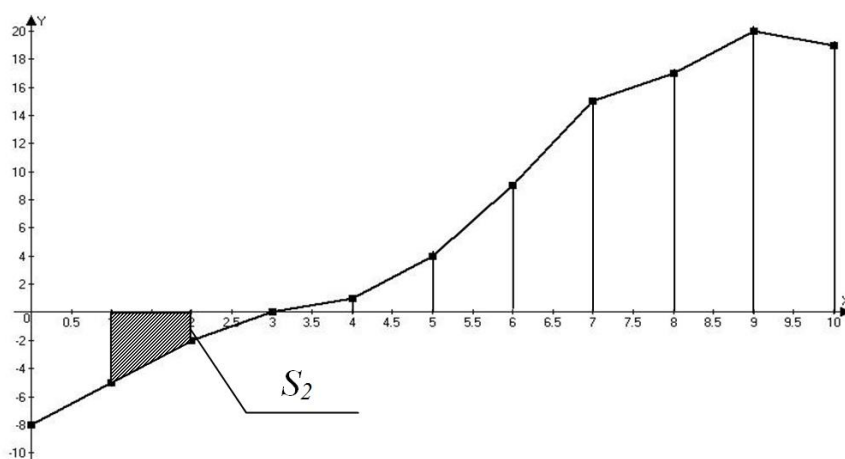


Рис. 4. Діаграма знаходження площі під сегментами ДПК.

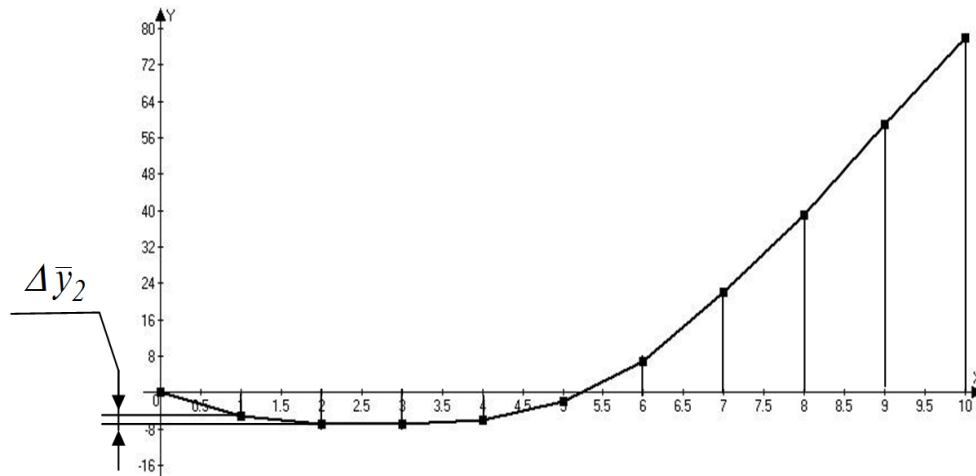


Рис. 5. Графік різниці між значеннями другого інтегрованого сегменту.

Для розв'язання задач дискретного геометричного моделювання велике значення має погоджене згущення побудованих ДПК на основі інтегрально - диференціальних зв'язків між ними.

Розглянемо згущення першого інтегралу ДПК. Згустимо ДПК  $y_i$  за допомогою 3-полінома на проміжку 6-7:

$$y_{6,5} = \frac{1}{16} (-(-2) + 9 \cdot 7 + 9 \cdot 22 - 39) = 14.$$

Побудуємо цю точку на інших графіках. Для побудови скористаємося залежністю різниці ординат й площі двох інтегрованих ДПК.

Різниця ( $\Delta y_{6,5}$ ) між точками № 6 і № 6,5 на графіку першого інтегралу дорівнює  $\Delta \bar{y}_{6,5} = 7$ , це означає, що площа під кривою на ділянці 6–6,5, вихідної ДПК, теж дорівнює 7. Звідси скориставшись формулою (1), знайдемо точку № 6,5 на вихідній ДПК:

$$S_{6,5} = y_{6,5} \cdot 0,5h = \Delta \bar{y}_{6,5},$$

$$y_{6,5} = \frac{1}{0,5h} \cdot \Delta \bar{y}_{6,5},$$

$$y_{6,5} = \frac{7}{0,5} = 14.$$

Отже, точка згущення на вихідній ДПК має координати  $(6,5; 14)$ .

Знайдемо точку згущення на другому інтегралі, для чого скористаємося властивостями інтегрованих ДПК.

Площа під відрізком 6–6,5 на першому інтегралі дорівнює різниці цих точок по  $\bar{y}_{6,5}$  на другому інтегралі.

Ця площа дорівнює

$$\begin{aligned}\bar{S}_{6,5} &= \bar{y}_{6,5} \cdot 0,5 \cdot h = \Delta \bar{y}_{6,5}; \\ \bar{S}_{6,5} &= 14 \cdot 0,5 \cdot 1 = 7,\end{aligned}$$

тобто різниця між ординатами точок 6 і 6,5 на графіку другого інтегралу дорівнює  $\Delta \bar{y}_{6,5} = 7$ .

Знайдемо точку згущення на другому інтегралі:

$$\bar{y}_{6,5} = y_6 + \Delta \bar{y}_{6,5} = -20 + 7 = -13.$$

Таблиця сум побудована на одиничній сітці на основі найпростішої квадратурної формули – правих прямокутників. Точність такого моделювання невисока і для її підвищення слід побудувати інші таблиці сум на основі більш точних квадратурних формул [6].

Таблиця 2 – Таблиця сум побудована за формулами трапецій і Симпсона.

x	y	ф-ла трапеції		Ф-ла Симпсона	
		$\Sigma \Sigma Y$	$\Sigma \Sigma Y$	$\Sigma \Sigma Y$	$\Sigma \Sigma Y$
0	-9	0	0	0	0
1	-5	-7	-3,5	-6,9167	-3,7917
2	-2	-10,5	-12,5	-10,3334	-13,6042
3	0	-11,5	-23,25	-11,2500	-24,5574
4	1	-11	-34,5	-10,7917	-35,7137
5	4	-8,5	-44,25	-8,4584	-45,5853
6	9	-2	-49,5	-2,0834	-51,2607
7	15	10	-45,5	9,9583	-47,7746
8	19	27	-27,0	27,1666	-29,5333
9	20	46,5	9,75	46,9166	7,4232
10	18	65,5	65,75	66,1666	64,1332

Розглянемо побудову таблиці сум за квадратурною формулою трапецій, при  $\bar{y}_0 = \bar{y}_0 = 0$ .

$$\frac{y_i + y_{i+1}}{2} \cdot h = \bar{y}_{i+1} - \bar{y}_i, \quad (2)$$

звідси

$$\bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + \frac{y_i + y_{i+1}}{2} \cdot h. \quad (3)$$

Розрахуємо згущення ДПК 1-го інтегралу в т. 6,5 за формулою базисного 3-поліному

$$\bar{y}_{6,5} = \frac{1}{16}(-(-8,5) + 9(-2) + 9 \cdot 10 - 27) = 3,34375.$$

Обчислимо точку згущення на вихідній ДПК (крок  $0,5h$ ):

$$y_{i+1} = \frac{\bar{y}_{i+1} - \bar{y}_i}{0,5h} \cdot 2 - y_i, \quad (4)$$

$$y_{i+1} = \frac{3,34375 - (-2)}{0,5} \cdot 2 - 9 = 12,375.$$

Визначимо ординату точки згущення 6,5 на 2-му інтегралі. Площа сегменту (6; 6,5) на 1-му інтегралі дорівнює

$$= \frac{=}{y_{6,5} - y_6} = \frac{\bar{y}_6 + \bar{y}_{6,5}}{2} \cdot 0,5h = \frac{-2 + 3,34375}{2} \cdot 0,5 = 0,3359.$$

Ордината  $\bar{y}_{6,5}$  точки згущення дорівнює

$$\bar{y}_{6,5} = -49,5 + 0,3359 = -49,164.$$

У порівнянні з формулою правих прямокутників результати точніші, осциляції немає.

Розглянемо можливості формули Симпсона. Оскільки вона спирається на три точки, то для реалізації диференціально-інтегральних зв'язків між інтегрованими ДПК перед застосуванням формули проведемо згущення вихідної ДПК за допомогою 3-полінома:

$$y_{0,5} = \frac{1}{16}(5y_0 + 15y_1 - 5y_2 + y_3);$$

$$y_{i+0,5} = \frac{1}{16}(-y_{i-0,5} + 9y_i + 9y_{i+1} - y_{i+2}), \quad i = \overline{1; n-2}; \quad (5)$$

$$y_{n-0,5} = \frac{1}{16}(y_{n-3} - 5y_{n-2} + 15y_{n-1} + 5y_n).$$

Точка згущення разом з двома сусідніми вузловими точками складають трійку точок, на які розповсюджується дія локальної формули Симпсона. Враховуючи, що крок сітки після згущення дорівнює  $0,5h$  маємо:

$$\frac{h}{6}(y_{i-1} + 4y_{i-0,5} + y_i) = \bar{y}_i - \bar{y}_{i-1}, \quad i = \overline{1; n}. \quad (6)$$

Враховуючи (5), маємо формули для обчислення ординат точок ДПК 1-го інтегралу.

$$\begin{aligned} \bar{y}_1 &= \bar{y}_0 + \frac{h}{24}(9y_0 + 19y_1 - 5y_2 + y_3), \\ \bar{y}_{i+1} &= \bar{y}_i + \frac{h}{24}(-y_{i-1} + 13y_i + 13y_{i+1} - y_{i+2}), \quad i = \overline{1; n-2}, \\ \bar{y}_n &= \bar{y}_{n-1} + \frac{h}{24}(y_{n-3} - 5y_{n-2} + 19y_{n-1} + 9y_n). \end{aligned} \quad (7)$$

За цими формулами розраховуються точки ДПК 2-го інтегралу на основі ординат точок 1-го інтегралу. В табл. 2 надані результати розрахунків при  $\bar{y}_0 = \bar{y}_0 = 0$ .

Розглянемо згущення інтегрованих ДПК.

Якщо відомі точки  $\bar{y}_i$  ДПК 1-го інтегралу, то згущення вихідної ДПК можна розрахувати за формулою (6).

$$y_{i-0,5} = \frac{1}{4} \left[ \frac{6}{h}(\bar{y}_i - \bar{y}_{i-1}) - (y_i + y_{i-1}) \right]; \quad i = \overline{1; n}. \quad (8)$$

Аналогічно розраховуються ординати  $\bar{y}_{i-0,5}$  точок згущення ДПК 1-го інтегралу, якщо відомі точки  $\bar{y}_i$  2-го інтегралу.

Для визначення ординати  $\bar{y}_{i-0,5}$  точки згущення ДПК другого інтегралу візьмемо до уваги, що точки  $\bar{y}_{i-1}$ ,  $\bar{y}_{i-0,5}$ ,  $\bar{y}_i$  1-го інтегралу визначають 2-параболу, для якої:



$$\bar{y}_{i-1} - 2\bar{y}_{i-0.5} + \bar{y}_i = a, \quad (9)$$

тоді

$$\bar{y}_i - 2\bar{y}_{i-0.75} + \bar{y}_{i-0.5} = \frac{a}{4}.$$

Звідси, враховуючи  $a$  із (9), маємо

$$\bar{y}_{i-0.75} = \frac{1}{8} [3\bar{y}_{i-1} + 6\bar{y}_{i-0.5} - \bar{y}_i], \quad (10)$$

тоді

$$\bar{y}_{i-0.5} = \bar{y}_{i-1} + \frac{h}{24} [5\bar{y}_{i-1} + 8\bar{y}_{i-0.5} - \bar{y}_i]. \quad (11)$$

За формулами (8) розраховуємо  $y_{6.5}$  і  $\bar{y}_{6.5}$ :

$$y_{6.5} = \frac{1}{4} \left[ \frac{6}{1} (9,9583 + 2,0834) - (9 + 15) \right] = 12,0625;$$

$$\bar{y}_{6.5} = \frac{1}{4} \left[ \frac{6}{1} (-47,7746 + 51,2607) - (9,9583 - 2,0834) \right] = 3,2604.$$

За формулою (11) визначаємо  $\bar{y}_{6.5}$ :

$$\bar{y}_{6.5} = -51,2607 + \frac{1}{24} [5 \cdot (-2,0834) + 8 \cdot 3,2604 - 9,9583] = -51,0229.$$

*Висновки.* Застосування квадратурних формул для побудови інтегральних ДПК і їх згущення сприяють ущільненню диференціально-інтегральних зв'язків між відповідними ДПК і підвищують точність моделювання.

Література:

1. *Верещага В. М.* Дискретно-параметрический метод геометрического моделирования кривых линий и поверхностей : дисс. ... д-ра техн. наук: 05.01.01. Мелітополь, 1996. 320 с.

2. *Щербина В. М.* Дискретне диференціювання спіралеподібних дискретно представлених кривих // Праці Таврійської державної агротехнічної академії. Мелітополь, 1997. Вип. 4, т. 1. С. 103-106.

3. *Найдиш В. М., Лебедєв В. О.* Дискретне диференціювання на основі кутових параметрів // Праці Таврійської державної агротехнічної академії. Мелітополь, 2004. Вип. 4, т. 24. С. 3-9.

4. *Ланцош К.* Практические методы прикладного анализа. Москва: Физматгиз, 1961. 524 с.

5. *Хемминг Р. В.* Численные методы. Москва: Наука, 1972. 400 с.

6. *Волков Е. А.* Численные методы. Москва: Наука, 1987. 248 с.

## **ДИСКРЕТНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДПК ПРОИЗВОЛЬНОЙ КОНФИГУРАЦИИ НА ОСНОВЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ СУММ**

Ивженко А. В., Шрамко А. В.

**Аннотация** – данная работа выполнена в рамках исследования вопросов дискретного геометрического дифференцирования, когда значения производных выбирается исходя из условия отсутствия осцилляции. Отмечено, что согласованное сгущение построенных дискретно представленных кривых (ДПК) на основе интегрально - дифференциальных связей и построение точек сгущения на следующем и исходном графике интеграла, при отсутствии осцилляции, имеет большое значение при решении задач дискретного геометрического моделирования.

Применение квадратурных формул для построения интегральных ДПК и их сгущения способствуют уплотнению дифференциально-интегральных связей между соответствующими ДПК и повышают точность моделирования.

Предлагаемый метод позволяет оценивать переменную составляющую при анализе и прогнозировании природных явлений и процессов. Это способствует проведению качественного геометрического моделирования явлений и процессов на основе построения адекватных математических моделей. Применение при этом информационных технологий дает проектировщику возможность экономии времени при проведении вычислений и позволяет усовершенствовать умение поиска информации для решения поставленной задачи.

## **DISCRETE INTEGRATION DSC OF AN ANY CONFIGURATION ON THE BASIS OF CALCULATION OF THE SUMS**

A. Ivzhenko, A. Shramko

### *Summary*

The given work is executed within the framework of research of questions of discrete geometrical differentiation when values of derivatives get out at absence oscillation. The coordinated condensation of constructed discretely submitted curves (DSC) on a

**basis integral - differential communications and construction of points of a condensation on the following and initial schedule of integral is marked, that, at absence oscillation, is of great importance at the decision of tasks of discrete geometrical modeling.**

**Application quadrate formulas for construction integrated DSC and their condensations promote condensation of differential-integrated communications between corresponding DSC and raise accuracy of modeling.**

**In work the way of discrete integration DSC of an any configuration is offered by drawing up of the table of the sums on the basis of ordinates initial DSC.**

**The proposed technique allows solving the problems of statistical data processing in different areas of activity. The developed method is based on the introduction of modern methods of analysis to solve the problem of data prediction, promotes the use of information technology. A specialist, at the same time, only research work remains setting the task, assessing the quality of the models obtained. For this, it is necessary to have appropriate training in the field of application of computer technology in the processing and analysis of statistical data.**

**The proposed method allows to estimate the variable component in the analysis and prediction of natural phenomena and processes. This contributes to the qualitative geometric modeling of phenomena and processes based on the construction of adequate mathematical models.**