ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИКА,
ЕЛЕКТРОТЕХНІКА ТА ЕЛЕКТРОМЕХАНІКА

УДК 621.316 DOI: 10.31388/2078-0877-19-2-200-207

РАЗРАБОТКА ИНТЕГРИРОВАННЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ОПИСАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИКИ

Диордиев В. Т., д. т. н.,
Кашкарёв А. А., к. т. н.,
Диордиев А. А. аспирант*
Таврический государственный агротехнологический университет имени Дмитрия Моторного
Тел. (0619) 42-57-97

***Аннотация* – приведена методика разработки и использования интегрированных математических моделей описания динамических объектов электроэнергетики. Данный подход позволяет решить задачу расчета оптимального управления динамическими дискретными объектами при значительном числе тактов управления, что является обычно ограничивающим условием с вычислительной точки зрения. В качестве существенного достоинства данного алгоритма следует отметить, что для окончательного формирования вектора сдвига используется исходная разреженная матрица коэффициентов. Учет структуры ограничений-равенств динамики управляемого процесса приводит к исключению из алгоритма промежуточных преобразований, а из рассматриваемой матрицы достаточно выделить только ненулевые элементы.**

***Ключевые слова* – обобщенная модель управления, вектор управляемых координат, интегрированная математическая модель, критерий энергоэффективности, матрица параметров управления, изображающая точка, проекционно-градиентный метод, коэффициент притяжения ограничений-неравенств, оператор сдвига, минимизируемая функция.**

Постановка проблемы. Анализ существующих методов математического описания статических и динамических параметров объектов электроэнергетики показал, что они реализуют в основном процедуру замены в процессе алгоритмических преобразований нулевых элементов на ненулевые, что требует значительного

Научный руководитель – д. т. н., проф. Назаренко И. П.

количества итераций для получения решения по алгоритму проекционно-градиентного метода оптимизации. В предлагаемой методике, для окончательного формирования вектора сдвига, используется исходная разреженная матрица коэффициентов, что позволяет освободиться от целого ряда дополнительных расчетов и приводит к упрощению процедуры получения математических моделей.

Анализ последних исследований. Для получения параметров модели, определяющих установившиеся значения параметров ее входа и выхода, используются рекуррентные алгоритмы оценок. В данной области выполнен целый ряд исследований [1, 2], однако во главу угла здесь ставились лишь общие математические модели автоматизации без учета вопросов оптимизации процедуры получения данных моделей.

Целью исследований является разработка интегрированных математических моделей описания динамических объектов, дающих возможность упрощения процедуры их вычисления, что является принципиальной особенностью рассматриваемого метода, который позволяет эффективно учитывать активность ограничений неравенств при движении к экстремуму оптимизируемой функции.

Основная часть. Для динамических электроэнергетических объектов обобщенная модель дискретного типа будет иметь вид

$$\vec{x}_k^0 = \left[A^0\right]\vec{x}_{k-1} + \left[B^0\right]\vec{u}_k;\ k = \overline{1, N_t};\ \dim \vec{x}^0 = \dim \vec{u}^0 = N_p, \qquad (1)$$

где $\left[A^0\right]$ – матрица параметров объекта;

$\left[B^0\right]$ – матрица параметров управления;

$\vec{x}$ – вектор управляемых координат;

$\vec{u}$ – вектор управляющих координат (величин);

$\dim \vec{x}$ – оператор сдвига;

N_t – число тактов управления,

при этом для дальнейшего анализа принято, что размерность вектора управляющих воздействий равна размерности вектора регулируемых величин. На указанные величины накладываются двусторонние ограничения

$$\vec{x}^{\min} \le \vec{x}_k^0 \le \vec{x}^{\max};\ \vec{u}^{\min} \le \vec{u}_k^0 \le \vec{u}^{\max};\ \forall k = \overline{1, N_t}, \qquad (2)$$

где ставится задача нахождения такой последовательности $\left\{\vec{u}_k^{/}, k = \overline{1, N_t}\right\}$ управляющих воздействий, которая доставляет минимум некоторому критерию качества функционирования системы (в рассматриваемом случае это интегральный критерий энергоэффективности)

$$\vec{f}^{\,0} = f^{\,0}(\vec{x}_1^0, \dots, \vec{x}_{N_t}^0, \vec{u}^0, \dots, \vec{u}_{N_t}^0) \qquad (3)$$

при заданном векторе начальных условий объекта. При соответствующих обозначениях [1] данная задача записывается в виде эквивалентной задачи математического программирования:

найти $\rightarrow$
$$\vec{x} \stackrel{\Delta}{=} \vec{x}^{opt} : f(\vec{x}) \rightarrow \min \| [h](\vec{x}) = 0;\ \vec{x}^{\min} \le \vec{x} \le \vec{x}^{\max}, \quad (4)$$

$$\text{где } [h]^T \stackrel{\Delta}{=} [h_1^T ... h_{N_t}];\ \dim h = N_t N_p \stackrel{\Delta}{=} m; \quad (5)$$

$$h_k \stackrel{\Delta}{=} [A^0]\vec{x}_{k-1}^0 + [B^0]\vec{u}_k^0 - \vec{x}_k^0; \quad (6)$$

$$\vec{x}^T \stackrel{\Delta}{=} [\vec{x}_0^{0T}, \vec{x}_1^{0T}, \vec{u}_1^{0T}, ..., \vec{x}_{N_t}^{0T}, \vec{u}_{N_t}^{0T}];\ \dim \vec{x} = (2N_t + 1)N_p \stackrel{\Delta}{=} n, \quad (7)$$

т.е. сложность алгоритма расчета параметров оптимального управления объектом определяется функциональной сложностью решения задачи математического программирования (4-7).

В данном случае искомый вектор определяется с помощью рекуррентной процедуры [1]:

$$\vec{x}_k = \vec{x}_{k-1} + \Delta t(\vec{x})\vec{u}_k;\ k = 1,2,...;\ \vec{x}_0 = \left(\vec{x}^{\min} + \vec{x}^{\max}\right)/2, \quad (8)$$

где Δt – шаг процедуры; k – номер итерации, а смысл и размерность введенных вектора переменных $\vec{x}$ и вектора сдвига $\vec{u}$ обусловлены формой задачи (4-7). Вектор сдвига является общим решением неопределенной системы линеаризованных алгебраических уравнений:

$$\vec{u} : [A]\vec{u} = \vec{b};\ \vec{b} \stackrel{\Delta}{=} -\vec{h};\ \|\vec{u} - \nabla\vec{f}\| \rightarrow \min, \quad (9)$$

$$[A^0] \stackrel{\Delta}{=} \begin{bmatrix} A^0 \vdots -E \vdots B^0 & & & \\ & A^0 \vdots O \vdots -E \vdots B^0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A^0 \vdots O \vdots -E \vdots B^0 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

где $[A^0]$ – якобиан ограничений-равенств;

$\nabla\vec{f}(x)$ – вектор градиента оптимизируемой функции,

при этом $\dim E = N_p \times N_p$. Данный вектор принят равным взвешенной сумме двух векторов – стабилизирующего вектора и вектора ортогональной проекции градиента минимизируемой функции

$$\vec{u} = \vec{u}_q + \gamma\vec{u}_p;\ \gamma \prec 0;\ |\gamma| \prec 1, \quad (11)$$

где параметр γ выбирается так, чтобы обеспечить устойчивое движение к допустимой области при одновременном достижении точки экстремума и эти векторы должны удовлетворять условиям:

$$\vec{u}_q : [A]\vec{u}_q = \vec{b};\ \vec{u}_p : [A]\vec{u}_p = 0;\ \left\| u_p - \nabla f \right\| \to \min; \tag{12}$$

$$\vec{u}_q = [R]\hat{u}_q;\ \vec{u}_p = [R]\hat{u}_p;\ [R] = diag\,\alpha_i(\vec{x});\ i = \overline{1,n}. \tag{13}$$

Векторы $\hat{u}_q, \hat{u}_p$ – соответствующие решения уравнения (9) в неевклидовой метрике, определяемой диагональной матрицей [R], причем величины элементов этой матрицы зависят от положения изображающей точки относительно двусторонних ограничений:

$$\alpha_i = 2d_i^{\min} d_i^{\max} / \left(d_i^{\min} + d_i^{\max} + 2d_i^{\min} d_i^{\max}\right);\ d_i^{\min} \overset{\Delta}{=} x_i - x_i^{mn};\ d_i^{\max} \overset{\Delta}{=} x_i^{\max} - x_i. \tag{14}$$

Разности векторов сдвига в принятой неевклидовой и евклидовой метриках являются коэффициентами притяжения ограничений-неравенств, равные разности множителей Лагранжа ограничений, соответствующих нижней и верхней границ допустимого изменения переменных [4, 5]:

$$\vec{S}_q \overset{\Delta}{=} \hat{u}_q - u_q = \lambda_q^{\min} - \lambda_q^{\max}; \tag{15}$$

$$\vec{S}_p \overset{\Delta}{=} \hat{u}_p - u_p = \lambda_p^{\min} - \lambda_p^{\max}. \tag{16}$$

Возможность такого простого вычисления указанных величин является принципиальной особенностью рассматриваемого метода, которая позволяет эффективно учитывать активность ограничений неравенств при движении к экстремуму оптимизируемой функции.

Следует отметить некоторые особенности алгоритма расчета вектора сдвига. В данном случае стабилизирующая и проективная составляющие вектора сдвига в неевклидовой метрике задаются в форме

$$\hat{u}_q = [A]^T \hat{\lambda}_q;\ \hat{u}_p = \nabla f - [A]^T \hat{\lambda}_p;\ \dim \hat{\lambda}_q = \dim \hat{\lambda}_p = m, \tag{17}$$

т. к. функции исходных градиентов ограничений-равенств линейные. Необходимые значения множителей Лагранжа – весовых коэффициентов указанных выше градиентов являются решениями систем уравнений с симметричной матрицей коэффициентов, но с различными правыми частями:

$$[G]\hat{\lambda}_q = \vec{b};\ [G]\hat{\lambda}_p = [A][R]\nabla\vec{f};\ [G] = [A][R][A]^T. \tag{18}$$

Решение (18) проводится на основе преобразования их в системы уравнений с верхней треугольной матрицей коэффициентов

$$\left[\tilde{G}\right]\hat{\lambda}_q = \vec{b};\ \left[\tilde{G}\right]\hat{\lambda}_p = \nabla\vec{f}. \tag{19}$$

Элементы матрицы коэффициентов этих уравнений вычисляются с помощью процедуры:

$$j = 1 : \tilde{g}_{11} = g_{11};\ g_{11} \overset{\Delta}{=} [a_1]^T [R][a_1]; \tag{20}$$

$$j = \overline{2,m} : \tilde{g}_{j1} = g_{j1};\ g_{j1} = g_{ji} - \sum_{\ell=1}^{i-1} \frac{g_{j\ell}^2}{\tilde{g}_{\ell\ell}} \overset{\Delta}{=} [a_j]^T [a_i]; \tag{21}$$

$$\tilde{g}_{jj} = g_{jj} - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{g_{ji}^2}{\tilde{g}_{ii}} \overset{\Delta}{=} [a_j]^T [R][a_j], \tag{22}$$

а их правые части вычисляются с помощью процедуры

$$\tilde{g}_{m+1,1} = g_{m+1,1};\ \tilde{g}_{m+1,i} = g_{m+1,} - \sum_{\ell=1}^{m} \frac{\tilde{g}_{m+1,\ell}^2}{\tilde{g}_{\ell\ell}};\ i = \overline{2,m}, \tag{23}$$

где $\vec{g}_{m+1} = \vec{b}$ при определении стабилизирующего вектора, а величина $\vec{g}_{m+1} = [A][R]\nabla\vec{f}$ – вектора проекции градиента. Координатные составляющие искомого вектора решения, обозначенного далее как $\lambda_{m+1,j}$, вычисляются, начиная с последней по нумерации составляющей при помощи процедуры:

$$j = m : \hat{\lambda}_{m+1,m} = \frac{\tilde{g}_{m+1,m}}{\tilde{g}_{mm}}; \tag{24}$$

$$j = \overline{m-1,1} : \hat{\lambda}_{m+1,j} = \left(\tilde{g}_{m+1,j} - \sum_{\ell=j+1}^{m} \hat{\lambda}_{m+1,\ell} \frac{g_{\ell j}}{\tilde{g}_{jj}} \right). \tag{25}$$

Отличие процедур (20) и (24) заключается [2, 4] в формальном отсутствии величин $\dfrac{\tilde{g}_{j\ell}}{\tilde{g}_{\ell\ell}} \overset{\Delta}{=} \hat{\lambda}_{j\ell}$ – коэффициентов ортогонализации Грамма-Шмидта, что позволяет уменьшить число вычислительных операций и не вводить новых переменных, хотя количество вычислений при этом несколько увеличивается и достигается учет структуры ограничений-равенств как уравнений динамики управляемого процесса. В данном случае главная вычислительная часть рассматриваемого алгоритма оптимизации-решения системы уравнений (20), которое надо проводить на каждой итерации рекуррентной процедуры (10). Для реализации этого решения необходимо сформировать матрицу коэффициентов уравнений (18) – матрицу Грамма векторов коэффициентов исходной недоопределенной системы уравнений (9), обусловленной уравнениями объекта моделирования. Учет структуры ограничений сводится к исключению из алгоритма преобразований, связанных с указанными элементами. Из рассматриваемой матрицы достаточно выделить только ненулевые элементы и в этом случае требуемая матрица коэффициентов представляется в виде функционально и структурно идентичных блоков размерности, число которых должно быть равно числу тактов управления, где каждый блок содержит две матрицы

$$\left[S_j\right]^T \stackrel{\Delta}{=} \left[\left[G_j^{/}\right] \vdots \left[G_{j,j+1}^{/}\right]\right];\ j = \overline{1, N_t}\ , \tag{26}$$

где матрица – матрица Грамма, т. е. скалярных произведений векторов коэффициентов уравнения объекта, сформированная для одного такта управления. С учетом принятой неевклидовой метрики, а также уравнений:

$$\left[G_j^{/}\right] = \left[R_j^x\right] + \left[A\right]\left[R_{j-1}^x\right]\left[A\right]^T = \left[B\right]\left[R_j^u\right]\left[B\right]^T; \tag{27}$$

$$\left[R_j^x\right] - diag\,\alpha_{ji}^x;\ \left[R_j^u\right] = diag\,\alpha_{ji}^u;\ i = \overline{1, N_p}. \tag{28}$$

Матрица – матрица скалярных произведений векторов коэффициентов уравнения объекта моделирования, записанного для j-го такта, и векторов коэффициентов этого же уравнения, записанного для (j+1)-го такта.

$$\left[G_{j,j+1}^{/}\right] = -\left[A\right]\left[R_j^x\right]. \tag{29}$$

Здесь на каждом блоке происходит преобразование по алгоритму (20), а правые части уравнений (18) – по алгоритму вида (23), после чего с помощью уравнений (24) вычисляются множители Лагранжа ограничений-равенств, а с помощью выражений (17) и (13) – искомые векторы сдвига для всех переменных.

Вывод. Изложенная методика позволяет решить задачу оптимального управления динамическими дискретными объектами при значительном уменьшении количества итераций, что способствует упрощению математических моделей при создании алгоритмического и программного обеспечения систем управления динамическими объектами электроэнергетики.

Литература:

1. *Ланкастер П.* Теория матриц / пер. с англ. Москва: Наука, 1988. 280 с.

2. *Лавров Є. А., Кошман О. В.* Інформаційна технологія ергономічного проектування автоматизованих технологічних комплектів // Вісник Сумського ДАУ. 1999. № 3. С. 84–90.

3. *Ладанюк А. П.* Автоматизація технологічних процесів виробництва харчової промисловості: підручник. Київ: Аграрна освіта, 2001. 222 с.

4. *Кунцевич В. М., Лычак М. М.* Синтез оптимальных и адаптивных систем управления: игровой подход. Київ: Наукова думка, 1985. 247 с.

5. *Киричков В. Н.* Идентификация объектов систем управления технологическими процессами. Киев: Высшая школа, 1990. 263 с.

РОЗРОБКА ІНТЕГРОВАНИХ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ОПИСУ ДИНАМІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИКИ

Діордієв В. Т., Кашкарьов А. О., Діордієв А. О.

Анотація **– наведено методику розробки і використання інтегрованих математичних моделей опису динамічних об'єктів електроенергетики. Даний підхід дозволяє вирішити задачу розрахунку оптимального управління динамічними дискретними об'єктами при значному числі тактів управління, що зазвичай обмежують умовою з обчислювальної точки зору. У якості істотної переваги даного алгоритму слід відмітити, що для остаточного формування вектора зсуву використовується вихідна розріджена матриця коефіцієнтів. Облік структури обмежень-рівностей динаміки керованого процесу призводить до виключення з алгоритму проміжних перетворень, а з матриці, яка розглядається, достатньо виокремити тільки не нульові елементи**

DEVELOPMENT OF THE INTEGRATED MATHEMATICAL MODELS FOR THE DESCRIPTION OF THE DYNAMIC ELECTRIC POWER PLANTS

V. Diordiev, A. Kachkarjov, A. Diordiev

Summary

The methodology of the development and use of integrated mathematical models for describing dynamic objects of electric power industry is given. This approach allows us to solve the problem of the optimal control calculating for the dynamic discrete objects with a significant number of control cycles, which usually is a limiting condition from a computational point of view. As a significant advantage of this algorithm, it should be noted that the original sparse matrix of coefficients is used for the final formation of the shift vector. I.e. the procedure of replacing zero elements with non-zero ones in the process of algorithmic transformations as a characteristic of well-known optimization methods is not used and the number of iterations is significantly reduced during the obtaining of a solution using the algorithm of the projection-gradient optimization method. This, in turn, simplifies the algorithmic and software optimal tasks for the operational management of dynamic objects. Moreover, it is assumed

for further analysis, that the dimension of the vector of control actions is equal to the dimension of the vector of adjustable values. Bilateral restrictions are imposed on these values with the task is to find such a sequence of control actions that delivers at least some criterion of the system quality, for example for the integral criterion of energy efficiency. Additionally, the shift vector differences for the adopted non-Euclidean and Euclidean metrics are the coefficients of attraction of the inequality constraints, equal to the difference of Lagrange multipliers of the constraints corresponding to the lower and upper limits of the allowable change of variables. The possibility of such a simple calculation of these quantities is a fundamental feature of the method under consideration. This makes it possible effectively take into account the activity of inequality constraints when moving to an extremum of an optimized function. The considering the structure of equality constraints of the controlled process dynamics leads to the exclusion of intermediate transformations from the algorithm, and from the matrix under consideration it is enough to select only nonzero elements. So, for this case the required coefficient matrix is represented as functionally and structurally identical units of dimensions and its number should be equal to the number of control cycles, where each block contains two matrices.