

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ В СФЕРИЧНИХ ТРИГРАННИКАХ

Токар Н.О., 1 курс

Науковий керівник: Іщенко О.А., ст. викладач

Таврійський державний агротехнологічний університет

Постановка проблеми. Сферичним трикутником називається частина поверхні сфери, що обмежена трьома попарно сполученими дугами великих кіл. У геометрії на сфері великі кола відіграють роль прямих на площині. Площини великих кіл перетинаються між собою у центрі сфери O та утворюють тригранник $OABC$. Кути сферичного трикутника рівні відповідним двограним кутам даного тригранника. Сторони трикутника, визначені у кутовій мірі, дорівнюють відповідним плоским кутам тригранника. Тобто, усі шість елементів сферичного трикутника дорівнюють відповідним елементам тригранника. Формулюється задача дослідження взаємозв'язку формул для обчислення сферичних трикутників.

Мета статті. Розглянути застосування тригонометричних перетворень при розв'язанні сферичних трикутників.

Основні матеріали дослідження. Розглянемо трикутник ABC на сфері з радіусом, що дорівнює одиниці, та центром у точці O . У вершині A проведені дотичні AE та AD до сторін b та c . Ці дотичні перетинаються у точках D і E з продовженням радіусів сфери, що проходять через вершини C і B (рис. 1).

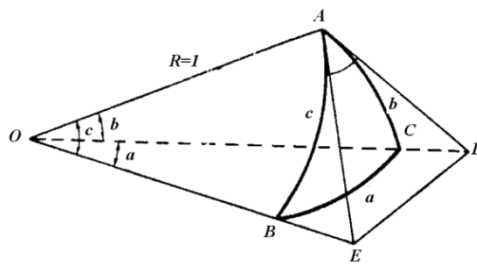


Рисунок 1

Застосуємо теорему косинусів тригонометрії на площині до трикутників AED та OED і запишемо її для сторони DE :

$$DE^2 = AE^2 + AD^2 - 2AE \cdot AD \cdot \cos A; DE^2 = OD^2 + OE^2 - 2OD \cdot OE \cdot \cos a.$$

Прирівняємо між собою праві частини отриманих рівнянь і знайдемо:

$$(OE^2 - AE^2) + (OD^2 - AD^2) - 2OD \cdot OE \cos a + 2AE \cdot AD \cdot \cos A = 0.$$

Зважаючи, що радіус сфери дорівнює одиниці, маємо:

$$(OE^2 - AE^2) + (OD^2 - AD^2) = 2; AD = \tan b; AE = \tan c; OE = \frac{1}{\cos c}; OD = \frac{1}{\cos b}.$$

$$\text{Далі одержуємо: } 1 - \frac{\cos a}{\cos b \cos c} + \tan b \tan c \cos A = 0.$$

Помножимо всі доданки на $\cos b \cos c$ та отримуємо:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

Висновки. Формули, отримані за допомогою тригонометричних співвідношень, які зв'язують чотири чи п'ять елементів сферичного трикутника, дають можливість за відомими трьома чи чотирма елементами визначити інші елементи.

Список використаних джерел.

1. Стороженко А. Ф. Инженерная геодезия / А. Ф. Стороженко, О. К. Некрасов. – М.: Недра, 2003 – 456 с.
2. Андронов И.К. Основной курс тригонометрии. Учебник для вузов / И.К. Андронов, А.К. Окунев. – М.: Наука, 1985 – 364 с.