МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ТАВРІЙСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ АГРОТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Малкіна В. М., Зінов’єва О. Г.

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ В ІНФОРМАТИЦІ

Посібник-практикум

Мелітополь

2019

УДК 519.61(072)

М18

Затверджено методичною комісією факультету інженерії та комп'ютерних технологій Таврійського державного агротехнологічного університету. Протокол № 7 від 28.02.2019р.

Рецензенти:

Єремєєв В.С. – доктор технічних наук, професор кафедри інформатики і кібернетики, Мелітопольский державний педагогічний університет ім. Б. Хмельницького

Прийма С.М. – доктор педагогічних наук, доцент кафедри комп'ютерних наук, Таврійський державний агротехнологічний університет

Малкіна В. М. Чисельні методи в інформатиці: навчально-методичний посібник / В. М. Малкіна, О. Г. Зінов'єва. – Мелітополь: Люкс, 2019. – 140 с.

В посібнику систематизовано матеріал з основних тем дисципліни: чисельні методи розв'язання нелінійних рівнянь, чисельні методи розв'язання систем лінійних та нелінійних рівнянь, методи інтерполяції, методи чисельного диференціювання та інтегрування. Наведені основні теоретичні відомості, необхідні для розв'язування задач, приклади таких задач та варіанти індивідуальних завдань для самостійної роботи.

Призначений для студентів, що навчаються за спеціальністю 122 «Комп'ютерні науки».

УДК 519.61(072)

ЗМІСТ

ВСТУП

Сучасний розвиток науки та обчислювальної техніки характеризується все більш зростаючим рівнем використання комп'ютерних моделей як для дослідження поведінки явищ та процесів, що оточують людину, так і для розв'язання практичних задач, пов'язаних з управлінням та прогнозуванням.

Вивчення навчальної дисципліни "Чисельні методи в інформатиці" дозволяє студентам оволодіти знаннями в галузі практичних методів рішення математичних проблем, що виникають у процесі інженерної діяльності та моделювання фізичних систем, засвоїти способи розрахунків на сучасних комп'ютерах із застосуванням пакетів спеціальних прикладних програм.

Об'єктом вивчення навчальної дисципліни є типові математичні задачі, до яких зводиться рішення практичних проблем, що виникають у ході розробки інформаційних систем та систем моделювання.

Предметом вивчення навчальної дисципліни є чисельні методи розв'язання типових математичних задач.

Мета даного навчально-методичного посібника – ознайомлення студентів із постановками основних математичних задач і чисельних методів їх розв'язання, набуття студентами навичок реалізації на комп'ютері чисельних методів, навичок роботи з відомими комп'ютерними математичними пакетами.

Навчально-методичний посібник складено для студентів спеціальності 122 «Комп’ютерні науки» та відповідає вимогам державного стандарту.

ТЕМА 1. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ. ГРАФІЧНИЙ МЕТОД ВІДДІЛЕННЯ КОРЕНЯ

1.1 Теоретичні відомості

Відділення кореня рівняння $f(x)=0$ - це визначення відрізка $[a;b]$ з області визначення функції $y=f(x)$, якому належить один і тільки один корінь рівняння.

Умови відділення кореня:

1) на кінцях відрізка $[a;b]$ функція $y=f(x)$ має різні знаки:

$$f(a)\cdot f(b)<0;$$

2) функція монотонна на $[a;b]$ ($f'(x)$ не змінює знак на $[a;b]$);

3) графік функції $y=(x)$ опуклий (ввігнутий) на $[a;b]$ ($f''(x)$ не змінює знак на $[a;b]$).

Алгоритм графічного методу відділення кореня:

1. У декартовій системі координат побудувати графік функції $y=f(x)$. Визначити на осі Ox інтервали, яким належать абсциси точок перетину графіка функції $y=f(x)$ з віссю Ox.
2. Перевірити умови відділення кореня на кожному з інтервалів.
3. Зробити висновок

1.2 Контрольний приклад

Задача. Графічно відокремити корінь рівняння: $x^3+3x^2-1=0$.

Розв'язання

1. У декартовій системі координат побудуємо графік функції $y = x^3 + 3x^2 - 1$ (рисунок 1.1).

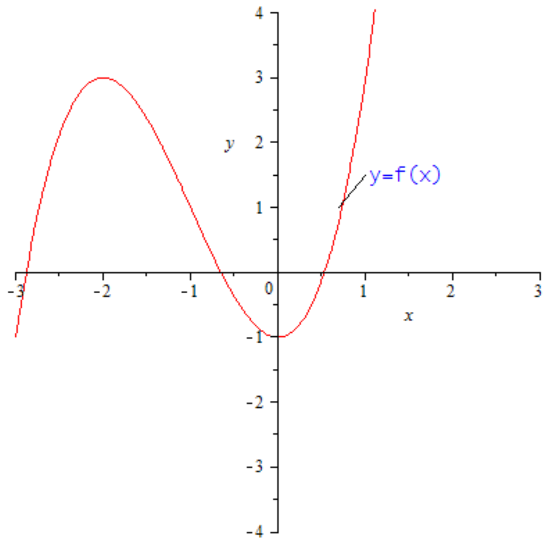


Рисунок 1.1 – Графік функції $y = x^3 + 3x^2 - 1$

Графік функції перетинається з віссю Ox у трьох точках, тому $x^* \in [-3;-2]$, $x^* \in [-1;0]$ та $x^* \in [0;1]$

2. Перевіримо умови відділення кореня на прикладі відрізку $[0;1]$, всі інші відрізки перевіряються аналогічно:

1) Визначимо знаки функції $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ на кінцях відрізку $[0;1]$: $f(0) = -1 < 0$ та $f(1) = 3 > 0$.

Перша умова відділення кореня виконується.

2) Визначимо знаки $f'(x)$ на $[0;1]$.

$f'(x) = 3x^2 + 6x$

Побудуємо графік функції $y = f'(x)$ (рисунок 1.2)

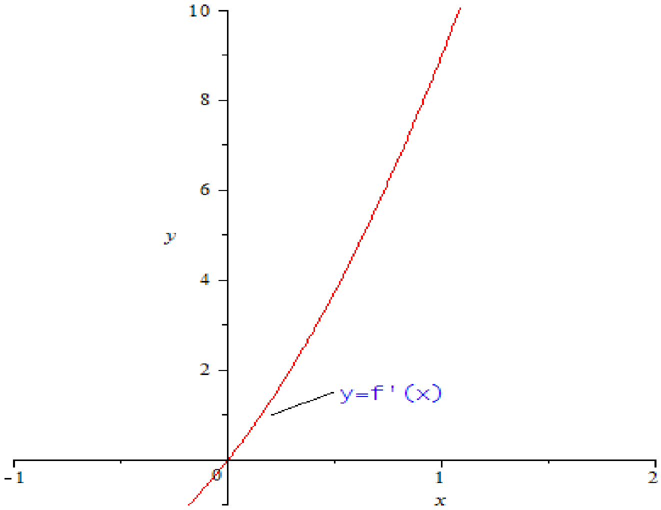


Рисунок 1.2 – Графік похідної $f'(x)=3x^2+6x$

З графіку можна побачити, що $f'(x)\geq 0$ на відрізку $[0;1]$, тобто функція $y=f(x)$ монотонна на відрізку $[0;1]$.

Друга умова відділення кореня виконується.

3) Визначимо знаки $f''(x)$ на відрізку $[0;1]$:

$f''(x)=6x+6$

Побудуємо графік функції $y=f''(x)$ (рисунок 1.3)

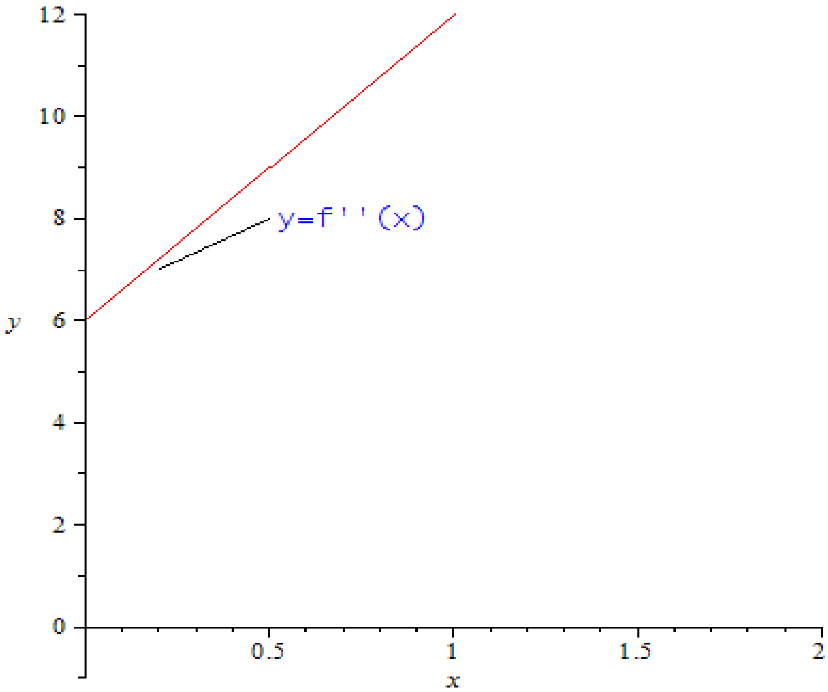


Рисунок 1.3 – Графік похідної $f''(x)=6x+6$

З графіку можна побачити, що $f''(x) > 0$ на відрізку $[0;1]$. Отже, функція $f(x)$ на відрізку $[0;1]$ не має точок перегину. Третя умова відділення кореня виконується.

Висновок: Корінь рівняння $x^3 + 3x^2 - 1 = 0$ належить відрізку $[0;1]$: $x* \in [0;1]$.

Завдання для самостійної роботи

Визначити всі відрізки відділення кореня графічним методом.

Дані для виконання завдання взяти з таблиці 1.1.

Таблиця 1.1 - Варіанти індивідуальних завдань

Номер варіанта	Завдання	Номер варіанта	Завдання
1	2	3	4
1	$2x^3 - 3x^2 - 12x - 5 = 0$	14	$2x^3 + 9x^2 - 4 = 0$
2	$x^3 - 3x^2 + 3 = 0$	15	$x^3 + 3x^2 - 1 = 0$
3	$x^3 + 3x^2 - 24x - 10 = 0$	16	$x^3 - 3x^2 - 24x - 3 = 0$
4	$2x^3 + 9x^2 - 21x = 0$	17	$x^3 - 12x + 6 = 0$
5	$x^3 + 3x^2 - 2 = 0$	18	$2x^3 - 3x^2 - 12x + 10 = 0$
6	$x^3 + 3x^2 - 24x + 10 = 0$	19	$x^3 - 3x^2 + 2,5 = 0$
7	$2x^3 + 9x^2 - 10 = 0$	20	$x^3 + 3x^2 - 3,5 = 0$
8	$x^3 + 3x^2 - 3 = 0$	21	$x^3 - 3x^2 - 24x - 8 = 0$
9	$x^3 - 3x^2 - 24x - 5 = 0$	22	$x^3 - 12x + 10 = 0$
10	$3x^3 - 12x^2 - 5 = 0$	23	$2x^3 - 3x^2 - 12x + 12 = 0$
11	$2x^3 - 3x^2 - 12x + 12 = 0$	24	$x^3 - 4x^2 + 2 = 0$
12	$x^3 - 3x^2 + 1,5 = 0$	25	$x^3 + 3x^2 - 24x + 1 = 0$
13	$x^3 + 3x^2 - 24x - 3 = 0$		

Контрольні питання

1) Що означає розв’язати рівняння?
2) Що називається коренем рівняння?
3) Поняття відділення кореня рівняння.
4) Дайте визначення відрізку відділення кореня рівняння.
5) Сформулюйте умови відділення кореня.
6) Алгоритм графічного методу відділення кореня.

ТЕМА 2. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ’ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ. МЕТОД ДИХОТОМІЇ

2.1 Теоретичні відомості

Алгоритм методу дихотомії

1) Визначити кількість ітерацій за формулою:

$$n=\left[\frac{\lg \frac{b-a}{\varepsilon}}{\lg 2}+1\right], \qquad (2.1)$$

де ε - задана точність.

2) Взяти $x_0=\dfrac{a+b}{2}$.

3) Знайти $f(x_0)$.

4) Якщо $f(x_0)=0,$ то $x=x_0$ - точний корінь рівняння $f(x)=0;$ якщо $f(x_0)\neq 0$, то $x=x_0$ - початкове наближення кореня.

5) Вибрати інтервал $[a;x_0]$, якщо $f(a)\cdot f(x_0)<0$, або $[x_0;b]$, якщо $f(x_0)\cdot f(b)<0$.

6) Взяти $x_1=\dfrac{a+x_0}{2}$ або $x_1=\dfrac{x_0+b}{2}$. Якщо номер ітерації менше ніж n, перейти до пункту 4. Якщо номер ітерації n, то x_n - наближене значення кореня рівняння.

2.2 Контрольний приклад

Задача. Методом дихотомії (половинного ділення) уточнити корінь рівняння $x^3+3x^2-1=0$ з точністю $\varepsilon=0{,}1$ на відрізку $[0;1]$.

Розв'язання

1) Визначимо кількість ітерацій за формулою:

$$n=\left[\frac{\lg\dfrac{b-a}{\varepsilon}}{\lg 2}+1\right].$$

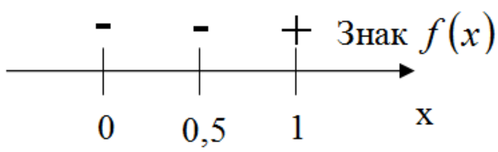
$$n=\left[\frac{\lg 1}{\lg 2}+1\right]=[4{,}32]=4.$$

2) Початкове наближення кореня: $x_0=\dfrac{0+1}{2}=0{,}5$

$f(0{,}5)=-0{,}125<0$

$f(0)=-1<0$

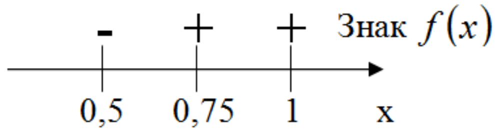
$f(1)=3>0$



Звідси маємо, $x_1\in[0{,}5;1]$

3) Перше наближення кореня: $x_1=\dfrac{1+0{,}5}{2}=0{,}75$

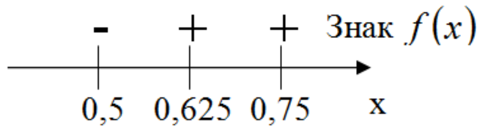
$f(0{,}75)=1{,}11>0$
$f(0{,}5)=-0{,}125<0$
$f(1)=3<0$



Звідси маємо, $x_2 \in [0{,}5;0{,}75]$

4) Друге наближення кореня: $x_2 = \dfrac{0{,}5+0{,}75}{2} = 0{,}625$

$f(0{,}625)=0{,}4160>0$
$f(0{,}5)=-0{,}125<0$
$f(0{,}75)=1{,}10937>0$



Звідси маємо, $x_3 \in [0{,}5;0{,}625]$.

5) Третє наближення кореня: $x_3 = \dfrac{0{,}5+0{,}625}{2} = 0{,}5625$

Результати обчислень занесемо до таблиці 2.1.

Таблиця 2.1 – Результати обчислень

№	Знак на кінцях інтервалу	x_n	Знак $f(x_n)$	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	$-[0;1]+$	0,5	+	-
1	$-[0{,}5;1]+$	0,75	+	0,25
2	$-[0{,}5;0{,}75]+$	0,625	+	0,125
3	$-[0{,}5;0{,}5625]+$	0,5625	+	0,0625

Відповідь: $x^* = 0{,}5625$

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити один із коренів рівняння $f(x)=0$ з точністю $\varepsilon = 10^{-6}$ методом дихотомії.

2. Виконати програмну реалізацію розв’язання рівняння методом дихотомії (Додаток А)

Дані для виконання завдання взяти з таблиці 2.2.

Таблиця 2.2 - Варіанти індивідуальних завдань

Номер варіанта	Завдання	Номер варіанта	Завдання
1	$2x^3-3x^2-12x-5=0$	14	$2x^3+9x^2-4=0$
2	$x^3-3x^2+3=0$	15	$x^3+3x^2-1=0$
3	$x^3+3x^2-24x-10=0$	16	$x^3-3x^2-24x-3=0$
4	$2x^3+9x^2-21x=0$	17	$x^3-12x+6=0$
5	$x^3+3x^2-2=0$	18	$2x^3-3x^2-12x+10=0$
6	$x^3+3x^2-24x+10=0$	19	$x^3-3x^2+2{,}5=0$
7	$2x^3+9x^2-10=0$	20	$x^3+3x^2-3{,}5=0$
8	$x^3+3x^2-3=0$	21	$x^3-3x^2-24x-8=0$
9	$x^3-3x^2-24x-5=0$	22	$x^3-12x+10=0$
10	$3x^3-12x^2-5=0$	23	$2x^3-3x^2-12x+12=0$
11	$2x^3-3x^2-12x+12=0$	24	$x^3-4x^2+2=0$
12	$x^3-3x^2+1{,}5=0$	25	$x^3+3x^2-24x+1=0$
13	$x^3+3x^2-24x-3=0$		

Контрольні питання

1) Що розуміється під уточненням кореня?
2) В чому полягає сутність методу дихотомії?

3) Від чого залежить необхідна кількість поділів відрізка навпіл?

4) Як обираються кінці відрізку наступного інтервалу в методі дихотомії?

5) В чому полягає перевага методу дихотомії?

ТЕМА 3. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ. МЕТОД ХОРД

3.1 Теоретичні відомості

Алгоритм методу хорд:

1. Визначити знак добутку $y'(x)\cdot y''(x)$ на $[a;b]$.
2. Якщо $y'(x)\cdot y''(x)>0$, то $c_0=a$, $A=b$ та
$$c_n=c_{n-1}-\frac{f(c_{n-1})\cdot(A-c_{n-1})}{f(A)-f(c_{n-1})}$$
3. Якщо $y'(x)\cdot y''(x)<0$, то $c_0=b$, $A=a$ та
$$c_n=c_{n-1}-\frac{f(c_{n-1})\cdot(A-c_{n-1})}{f(A)-f(c_{n-1})}$$
4. Ітераційний процес припиняється, якщо:

$|c_{n-1}-c_n|<\varepsilon$, де ε - задана точність.

3.2 Контрольний приклад

Задача. Методом хорд уточнити корінь рівняння $x^3+3x^2-1=0$ на відрізку відділення кореня $[0{,}1;1]$ з точністю $\varepsilon=0{,}01$.

Розв’язання

1) Визначимо знак добутку $f'(x)\cdot f''(x)$ на відрізку $[0{,}1;1]$:

Знайдемо першу похідну $f'(x)$ функції $f(x)$;

$f'(x)=3x^2+6x$,

Побудуємо графік функції $y=f'(x)$(рисунок 3.1)

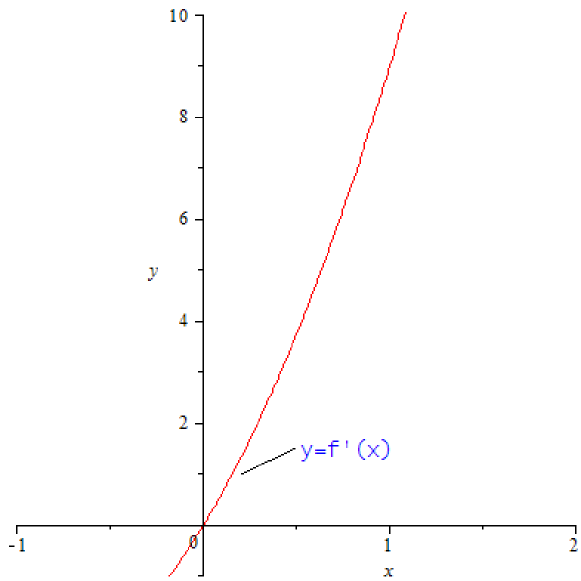


Рисунок 3.1 – Графік похідної $f'(x)=3x^2+6x$

Для $x\in[0{,}1;1]$ $f'(x)>0$.

Знайдемо другу похідну $f''(x)$ функції $f(x)$

$f''(x)=6x+6$

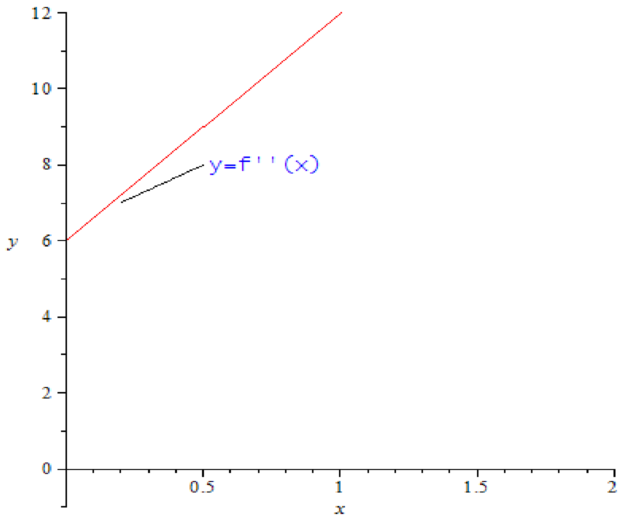


Рисунок 3.2 – Графік похідної $f''(x)=6x+6$

Для $x\in[0{,}1;1]$ $f''(x)>0$.

Отже, $f'(x)\cdot f''(x)>0$. В якості початкового наближення кореня візьмемо точку $c_0=0{,}1$ та $A=1$, а кожне наступне наближення визначатимемо за формулою:

$$c_n=c_{n-1}-\frac{f(c_{n-1})\cdot(A-c_{n-1})}{f(A)-f(c_{n-1})};$$

$$f(\mathrm{A})=3.$$

2) Результати обчислень занесемо до таблиці 3.1

Таблиця 3.1 – Результати обчислень

№	c_n	$f(c_n)$	$A-c_n$	$f(A)-f(c_n)$	c_{n+1}	$\lvert c_{n+1}-c_n\rvert$
0	0,1	-0,969	0,9	3,969	0,3197	0,2197
1	0,3157	-0,6607	0,6803	3,6607	0,4425	0,1228
2	0,4425	-0,3259	0,5575	3,3259	0,4971	0,0546
3	0,4971	-0,1358	0,5029	3,1358	0,5189	0,0218
4	0,5189	-0,0525	0,4811	3,0525	0,5272	0,0083

Відповідь: $x^*=0{,}5303$

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити всі корені рівняння $f(x)=0$ з точністю $\varepsilon=10^{-6}$ методом хорд.
2. Виконати програмну реалізацію розв'язання рівняння методом хорд (Додаток А)

Дані для виконання завдання взяти з таблиці 3.2.

Таблиця 3.2 - Варіанти індивідуальних завдань

Номер варіанта	Завдання	Номер варіанта	Завдання
1	2	3	4
1	$2x^3-3x^2-12x-5=0$	14	$2x^3+9x^2-4=0$
2	$x^3-3x^2+3=0$	15	$x^3+3x^2-1=0$
3	$x^3+3x^2-24x-10=0$	16	$x^3-3x^2-24x-3=0$
4	$2x^3+9x^2-21x=0$	17	$x^3-12x+6=0$
5	$x^3+3x^2-2=0$	18	$2x^3-3x^2-12x+10=0$
6	$x^3+3x^2-24x+10=0$	19	$x^3-3x^2+2{,}5=0$
7	$2x^3+9x^2-10=0$	20	$x^3+3x^2-3{,}5=0$
8	$x^3+3x^2-3=0$	21	$x^3-3x^2-24x-8=0$
9	$x^3-3x^2-24x-5=0$	22	$x^3-12x+10=0$
10	$3x^3-12x^2-5=0$	23	$2x^3-3x^2-12x+12=0$
11	$2x^3-3x^2-12x+12=0$	24	$x^3-4x^2+2=0$
12	$x^3-3x^2+1{,}5=0$	25	$x^3+3x^2-24x+1=0$
13	$x^3+3x^2-24x-3=0$		

Контрольні питання

1) В чому полягає сутність методу хорд?
2) За якою формулою визначається похибка методу хорд?
3) Яка умова закінчення ітераційного процесу в методі хорд?
4) У чому полягає геометричний зміст методу хорд?
5) Як вибираються кінці відрізка інтервалу в методі хорд?
6) Якими властивостями повинна володіти функція f(x) для того, щоб методом хорд можна вирішити рівняння $f(x)=0$

ТЕМА 4. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ. МЕТОД ДОТИЧНИХ

4.1 Теоретичні відомості

Алгоритм методу дотичних

1) Визначити знак добутку $y'(x)\cdot y''(x)$ на $[a;b]$.

2) Якщо $y'(x)\cdot y''(x)>0$, то $d_0=b$ та $d_n=d_{n-1}-\dfrac{f(d_{n-1})}{f'(d_{n-1})}$;

3) Якщо $y'(x)\cdot y''(x)<0$, то $d_0=a$ та $d_n=d_{n-1}-\dfrac{f(d_{n-1})}{f'(d_{n-1})}$.

4) Ітераційний процес припиняється, якщо $|d_{n-1}-d_n|<\varepsilon$, де ε - задана точність.

4.2 Контрольний приклад

Задача. Методом Ньютона (дотичних) уточнити корінь рівняння $x^3+3x^2-1=0$ з точністю $\varepsilon=0{,}01$ на відрізку $[0{,}1;1]$.

Розв'язання

1) Визначимо знак добутку: $f'(x)\cdot f''(x)$ на відрізку $[0{,}1;1]$.

Знайдемо першу похідну $f'(x)$ функції $f(x)$;

$$f'(x)=3x^2+6x,$$

Побудуємо графік функції $y=f'(x)$(рисунок 4.1)

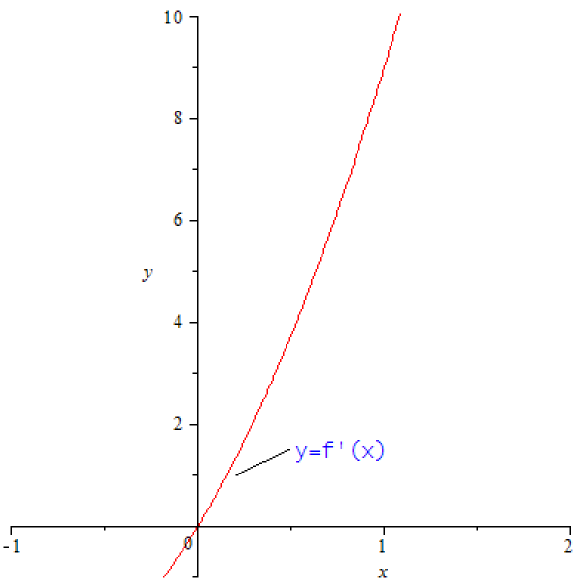


Рисунок 4.1 – Графік похідної $f'(x)=3x^2+6x$

Для $x\in[0{,}1;1]$ $f'(x)>0$.

Знайдемо другу похідну $f''(x)$ функції $f(x)$

$$f''(x)=6x+6$$

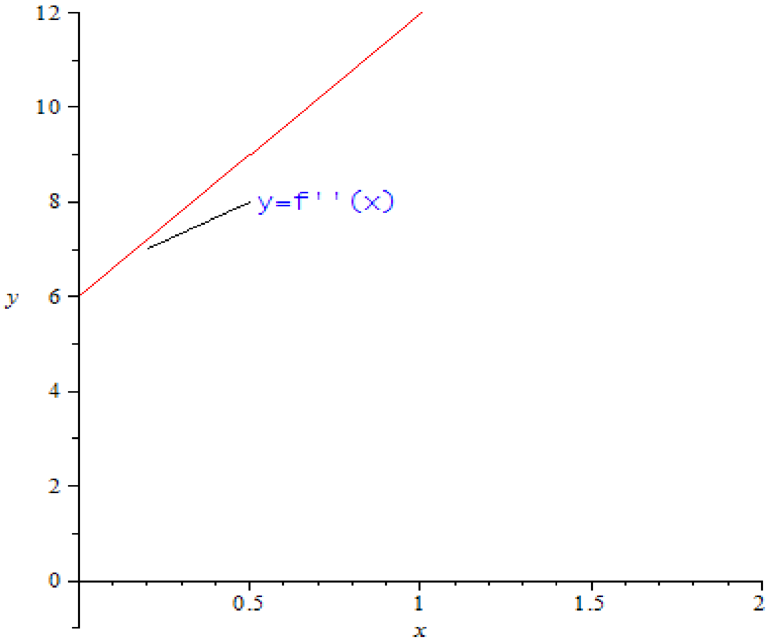


Рисунок 4.2 – Графік похідної $f''(x) = 6x + 6$

Для $x \in [0{,}1;1]$ $f''(x) > 0$.

$f''(x) > 0$, при $x \in [0{,}1;1]$.

Отже, $f'(x) \cdot f''(x) > 0$. В якості початкового наближення кореня приймемо точку $d_0 = 1$ й кожне наступне наближення розраховуватимемо за формулою:

$$d_n = d_{n-1} - \frac{f(d_{n-1})}{f'(d_{n-1})}.$$

2) Результати розрахунків заносимо до таблиці 4.1.

Таблиця 4.1 – Результати обчислень

№	d_n	$f(d_n)$	$f'(d_n)$	d_{n+1}	$\lvert d_{n+1} - d_n \rvert$
0	1	3	9	0,6667	0,3333
1	0,6667	0,6298	5,3337	0,5486	0,1181
2	0,5486	0,068	4,1945	0,5324	0,0162
3	0,5324	0,0013	4,0447	0,5321	0,0003

Відповідь: $x* = 0{,}5321$

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити один із коренів рівняння $f(x)=0$ з точністю $\varepsilon = 10^{-6}$ методом дотичних.
2. Виконати програмну реалізацію (Додаток А)

Дані для виконання завдання взяти з таблиці 4.2.

Таблиця 4.2 - Варіанти індивідуальних завдань

Номер варіанта	Завдання	Номер варіанта	Завдання
1	$2x^3-3x^2-12x-5=0$	14	$2x^3+9x^2-4=0$
2	$x^3-3x^2+3=0$	15	$x^3+3x^2-1=0$
3	$x^3+3x^2-24x-10=0$	16	$x^3-3x^2-24x-3=0$
4	$2x^3+9x^2-21x=0$	17	$x^3-12x+6=0$
5	$x^3+3x^2-2=0$	18	$2x^3-3x^2-12x+10=0$
6	$x^3+3x^2-24x+10=0$	19	$x^3-3x^2+2{,}5=0$
7	$2x^3+9x^2-10=0$	20	$x^3+3x^2-3{,}5=0$
8	$x^3+3x^2-3=0$	21	$x^3-3x^2-24x-8=0$
9	$x^3-3x^2-24x-5=0$	22	$x^3-12x+10=0$
10	$3x^3-12x^2-5=0$	23	$2x^3-3x^2-12x+12=0$
11	$2x^3-3x^2-12x+12=0$	24	$x^3-4x^2+2=0$
12	$x^3-3x^2+1{,}5=0$	25	$x^3+3x^2-24x+1=0$
13	$x^3+3x^2-24x-3=0$		

Контрольні питання

1) В чому полягає сутність методу дотичних?

2) Який критерій вибору нульового наближення в методі дотичних?

3) В чому полягає геометричний сенс методу дотичних?

4) По якій формулі визначається похибка у методі дотичних?

5) До яких пір потрібно продовжувати обчислення методом дотичних (методом простої ітерації), щоб отримати рішення із заданою точністю ε?

ТЕМА 5. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ. МЕТОД ІТЕРАЦІЙ

5.1 Теоретичні відомості

Алгоритм методу ітерацій (методу послідовних наближень)

1. Замінимо рівняння $f(x)$ рівносильним:

$$x = \varphi(x), \text{ де } x = \varphi(x) = x - \lambda \cdot f(x)$$

2. Необхідно підібрати постійну λ таким чином, щоб в середині відрізка $[a;b]$ кореня x виконувалася рівність:

$$\lambda = \frac{1}{M_1}, \text{ де } M_1 = \max_{[a;b]} |\varphi'(x)|$$

3. Якщо на відрізку $[a;b]$ виконується умова збіжності методу ітерацій $|\varphi'(x)| < 1$, то наступне наближення знайдемо за формулою:

$$x_{n+1} = x_n - \lambda \cdot f(x_n)$$

4. Процес ітерації припиняється, якщо $|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon$, де ε - задана точність.

5.2 Контрольний приклад

Задача. Методом ітерації уточнити корінь рівняння $x^3 + 3x^2 - 1 = 0$ з наперед заданою точністю $\varepsilon = 0{,}01$ на відрізку $[0{,}3;1]$.

Розв'язання

1) Замінимо рівняння $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ рівносильним $x = \varphi(x)$, де $\varphi(x) = x - \lambda \cdot f(x)$.

$$\varphi(x) = x + \lambda\left(x^3 + 3x^2 - 1\right)$$

2) Умова збіжності методу ітерацій має вигляд

$$|\varphi'(x)| < 1.$$

3) Обчислимо постійну λ

$\varphi'(x) = 1 + \lambda\left(3x^2 + 6x\right)$,

$\left|1 + \lambda\left(3x^2 + 6x\right)\right| < 1$,

$-1 < 1 + \lambda\left(3x^2 + 6x\right) < 1$,

$-2 < \lambda\left(3x^2 + 6x\right) < 0$.

Нехай $z(x) = \varphi'(x) = 3x^2 + 6x$.Функція $z(x) = 3x^2 + 6x$ зростає на відрізку $[0{,}3;1]$.Обчислимо:

$z(0{,}3) = 3 \cdot 0{,}3^2 + 6 \cdot 0{,}3 = 2{,}07$,

$z(1) = 3 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 = 9$.

$M_1 = \max\limits_{[a;b]} |\varphi'(x)| = \max\limits_{[a;b]} |z(x)| = 9$

Отже $-\frac{2}{9} < \lambda < 0$. Приймемо $\lambda = -0{,}1$

4) Кожне наступне наближення знайдемо по формулі:

$$x_n = x_{n-1} + \lambda f\left(x_{n-1}\right)$$

$$x_{n+1} = -0{,}1x_n^{\,3} - 0{,}3x_n^{\,2} + x_n + 0{,}1$$

5) Нехай $x_0 = 0{,}3$.

Складемо розрахункову таблицю (табл. 5.1).

Таблиця 5.1 – Результати обчислень

№	x_n	$f\left(x_n\right)$	x_{n+1}	$\left\lvert x_{n+1} - x_n \right\rvert$
0	0,3	-0,703	0,3703	0,0703
1	0,3703	-0,5379	0,4241	0,0538
2	0,4241	-0,3841	0,4625	0,0384
3	0,4625	-0,2593	0,4884	0,0259
4	0,4884	-0,1679	0,5052	0,0168
5	0,5052	-0,1054	0,5157	0,0105
6	0,5157	-0,065	0,5222	0,0065

Відповідь: $x* = 0{,}5222$.

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити один із коренів рівняння $f\left(x\right) = 0$ з точністю $\varepsilon = 10^{-6}$ методом простих ітерацій.

2. Виконати програмну реалізацію метода ітерацій (Додаток А)

Дані для виконання завдання взяти з таблиці 5.1.

Таблиця 5.1 - Варіанти індивідуальних завдань

Номер варіанта	Завдання	Номер варіанта	Завдання
1	$2x^3-3x^2-12x-5=0$	14	$2x^3+9x^2-4=0$
2	$x^3-3x^2+3=0$	15	$x^3+3x^2-1=0$
3	$x^3+3x^2-24x-10=0$	16	$x^3-3x^2-24x-3=0$
4	$2x^3+9x^2-21x=0$	17	$x^3-12x+6=0$
5	$x^3+3x^2-2=0$	18	$2x^3-3x^2-12x+10=0$
6	$x^3+3x^2-24x+10=0$	19	$x^3-3x^2+2{,}5=0$
7	$2x^3+9x^2-10=0$	20	$x^3+3x^2-3{,}5=0$
8	$x^3+3x^2-3=0$	21	$x^3-3x^2-24x-8=0$
9	$x^3-3x^2-24x-5=0$	22	$x^3-12x+10=0$
10	$3x^3-12x^2-5=0$	23	$2x^3-3x^2-12x+12=0$
11	$2x^3-3x^2-12x+12=0$	24	$x^3-4x^2+2=0$
12	$x^3-3x^2+1{,}5=0$	25	$x^3+3x^2-24x+1=0$
13	$x^3+3x^2-24x-3=0$		

Контрольні питання

1) В чому полягає сутність методу ітерацій?
2) До якого виду необхідно перетворити рівняння для методу ітерацій?
3) Який критерій вибору постійної λ в методі ітерацій?
4) Яка умова збіжності методу ітерацій?
5) По якій формулі визначається погрішність у методі ітерацій?

ТЕМА 6. РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

6.1 Теоретичні відомості

Алгоритм методу ітерацій.

Нехай задана система (6.1) і число $\varepsilon > 0$ ((ε не більше допустимої похибки наближеного рішення).

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = h_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = h_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nj}x_j + \ldots + a_{nn}x_n = h_n. \end{cases} \quad (6.1)$$

1) Перевіряємо достатню умову збіжності ітераційного процесу:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \; (i = 1, 2, \ldots, n).$$

2) Одержуємо приведену систему(наприклад для випадку $n = 3$)

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \dfrac{a_{13}}{a_{11}}x_3 + \dfrac{h_1}{a_{11}} = b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_1, \\ x_2 = -\dfrac{a_{21}}{a_{22}}x_1 - \dfrac{a_{23}}{a_{22}}x_3 + \dfrac{h_2}{a_{22}} = b_{21}x_1 + b_{23}x_3 + b_2, \\ x_3 = -\dfrac{a_{31}}{a_{33}}x_1 - \dfrac{a_{32}}{a_{33}}x_2 + \dfrac{h_3}{a_{33}} = b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + b_3. \end{cases}$$

Обираємо початкове наближення $x^{(0)} = \left(x_1^{(0)} = b_1;\, x_2^{(0)} = b_2,\, x_3^{(0)} = b_3\right).$

Нехай визначене $(k-1)$-е наближення $x^{(k-1)} = \left(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, x_3^{(k-1)}\right).$

3) Визначаємо n -е наближення за формулами

$x_1^{(k)} = b_{12}x_2^{(k-1)} + b_{13}x_3^{(k-1)} + b_1,$

$$x_2^{(k)} = b_{21}x_1^{(k-1)} + b_{23}x_3^{(k-1)} + b_2,$$

$$x_3^{(k)} = b_{31}x_1^{(k-1)} + b_{32}x_2^{(k-1)} + b_3.$$

4) Визначаємо різниці $\left|x_j^{(k-1)} - x_j^{(k)}\right| \ (j = 1,2,3)$ й

$$\varepsilon_k = \max_j \left|x_j^{(k-1)} - x_j^{(k)}\right|, \text{k} = 1,2,\dots,n.$$

Якщо $\varepsilon_k < \varepsilon$,k$= 1,2,\dots,n$, то ітераційний процес закінчено. Розв'язком системи вважаємо

$$x^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}\right).$$

Якщо ж $\varepsilon_k \geq \varepsilon$, то вертаємося до дії 3.

Алгоритм методу Зейделя

1) Перевіряємо достатню умову збіжності процесу ітерацій:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{n} \left|a_{ij}\right| < \left|a_{ii}\right|, \quad i = \overline{1,n}.$$

2) Одержимо приведену систему. Попередньо представимо діагональні коефіцієнти a_{ii} у вигляді різниці числа 10 і числа c_{ii}, що доповнює a_{ii} до 10, тобто $10 - c_{ii} = a_{ii}$:

$$\begin{cases} (10 - c_{11})x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + (10 - c_{22})x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + (10 - c_{nn})x_n = b_n, \end{cases}$$

Після перетворень одержимо систему:

$$\begin{cases} x_1 = b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + \ldots + b_{1n}x_n + \beta_1; \\ x_2 = b_{21}x_1 + b_{23}x_3 + \ldots + b_{2n}x_n + \beta_2; \\ \ldots \\ x_n = b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \ldots + b_{nn-1}x_{n-1} + \beta_n, \end{cases}$$

де $b_{ij} = \begin{cases} \dfrac{c_{ij}}{10}, & i = j \\ -\dfrac{a_{ij}}{10}, & i \neq j \end{cases}; \quad \beta_i = \dfrac{b_i}{10}; \quad i, j = \overline{1, n}.$

3) Перевіряємо достатню умову збіжності процесу ітерації для наведеної системи:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{n} \left| b_{ij} \right| < 1; \qquad i = \overline{1, n}.$$

4) За нульове наближення прийняти стовпець вільних членів:

$$x^{(0)} = \beta.$$

5) При знаходженні $(k+1)$-го наближення x_i враховувати вже обчислені раніше $(k+1)$-е наближення $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}$.

6) Визначаємо різниці $\left| x_j^{(k-1)} - x_j^{(k)} \right| \left(j = 1, 2, 3 \right)$ й

$\varepsilon_k = \max \left| x_j^{(k-1)} - x_j^{(k)} \right|$

Якщо $\varepsilon_k < \varepsilon$, то процес закінчено. Розв’язком системи вважаємо

$$x^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)} \right).$$

Якщо ж $\varepsilon_k \geq \varepsilon$, то вертаємося до дії 5.

6.2 Контрольний приклад

Задача 1

Розв’язати систему рівнянь методом ітерації з точністю $\varepsilon = 0{,}1$:

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 9 \\ -x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 2 \end{cases}$$

Розв'язання

1) Перевіримо необхідну умову збіжності ітераційного процесу:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{n} | a_{ij} | < | a_{ij} |, i = 1,2,...,n$$

$$1 + 1 = 2 < 4;$$
$$1 + 2 = 3 < 6;$$
$$1 + 2 = 3 < 5;$$

Необхідна умова збіжності ітераційного процесу виконується.

2) Запишемо систему в приведеному вигляді:

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}25x_2 - 0{,}25x_3 + 1; \\ x_2 = -0{,}17x_1 - 0{,}33x_3 + 1{,}5; \\ x_3 = 0{,}2x_1 + 0{,}4x_2 + 0{,}4 \end{cases}$$

3) Визначимо суму модулів коефіцієнтів кожного приведеного рівняння:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{n} | b_{ij} |, i = 1,2,...,n;$$

0,25+0,25=0,5

0,17+0,33=0,5

0,2+0,4=0,6

4) За початкове наближення системи візьмемо значення вільних членів:

$$\begin{cases} x_1^{(0)} = 1; \\ x_2^{(0)} = 1,5; \\ x_3^{(0)} = 0,4. \end{cases}$$

5) Перше наближення $x_i^{(1)}$ обчислимо через попереднє, підставивши значення в приведені рівняння:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 0,25 \cdot 1,5 - 0,25 \cdot 0,4 + 1 = 1,275; \\ x_2^{(1)} = -0,17 \cdot 1 - 0,33 \cdot 0,4 + 1,5 = 1,198; \\ x_3^{(1)} = 0,2 \cdot 1 + 0,4 \cdot 1,5 + 0,4 = 1,2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 1,275; \\ x_2^{(1)} = 1,198 \\ x_3^{(1)} = 1,2. \end{cases}$$

Перевіримо виконання нерівностей:

$$\left| x_i^{(1)} - x_i^{(0)} \right| \le 0,1, i = 1,2,3;$$

$$\left| 1,275 - 1 \right| = 0,275 > 0,1,$$

Продовжуємо ітераційний процес.

6) Друге наближення $x_i^{(2)}$:

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 0,25 \cdot 1,198 - 0,25 \cdot 1,2 + 1 = 0,999; \\ x_2^{(2)} = -0,17 \cdot 1,275 - 0,33 \cdot 1,2 + 1,5 = 0,88; \\ x_3^{(2)} = 0,2 \cdot 1,275 + 0,4 \cdot 1,198 + 0,4 = 1,13; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 0,999; \\ x_2^{(2)} = 0,88; \\ x_3^{(2)} = 1,13. \end{cases}$$

Перевіримо виконання нерівностей:

$$\left|x_i^{(2)} - x_i^{(1)}\right| \le 0{,}1, i = 1{,}2{,}3;$$

$$|0{,}999 - 1{,}275| = 0{,}276 \le 0{,}1.$$

Продовжуємо ітераційний процес.

7) Третє наближення $x_i^{(3)}$:

$$x_1^{(3)} = 0{,}25 \cdot 0{,}88 - 0{,}25 \cdot 1{,}13 + 1 = 0{,}94;$$
$$x_2^{(3)} = -0{,}17 \cdot 0{,}999 - 0{,}33 \cdot 1{,}13 + 1{,}5 = 0{,}96;$$
$$x_3^{(3)} = 0{,}2 \cdot 0{,}999 + 0{,}4 \cdot 0{,}88 + 0{,}4 = 0{,}95;$$

Перевіримо виконання нерівностей:

$$\left|x_i^{(3)} - x_i^{(2)}\right| \le 0{,}1, i = 1{,}2{,}3;$$

$$|0{,}94 - 0{,}999| = 0{,}059 < 0{,}1;$$

$$|0{,}96 - 0{,}88| = 0{,}08 < 0{,}1;$$

$$|0{,}95 - 1{,}13| = 0{,}18 > 0{,}1.$$

Продовжуємо ітераційний процес.

8) Четверте наближення $x_i^{(4)}$

$$\begin{cases} x_1^{(4)} = 0{,}25 \cdot 0{,}96 - 0{,}25 \cdot 0{,}95 + 1 = 1; \\ x_2^{(4)} = -0{,}17 \cdot 0{,}94 - 0{,}33 \cdot 0{,}95 + 1{,}5 = 1{,}03; \\ x_3^{(4)} = 0{,}2 \cdot 0{,}94 + 0{,}4 \cdot 0{,}96 + 0{,}4 = 0{,}97. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(4)} = 1; \\ x_2^{(4)} = 1{,}03; \\ x_3^{(4)} = 0{,}97. \end{cases}$$

Перевіримо виконання нерівностей: $\left|x_i^{(4)} - x_i^{(3)}\right| \le 0{,}1$

$|1 - 0{,}94| = 0{,}06 < 0{,}1,$

$|1{,}03 - 0{,}96| = 0{,}07 < 0{,}1,$

$|0{,}97 - 0{,}95| = 0{,}02 < 0{,}1.$

Ітераційний процес закінчено.

9) Результати обчислень запишемо в таблицю:

Таблиця 6.1 – Результати обчислень

n	$x_1^{(n)}$	$x_2^{(n)}$	$x_3^{(n)}$
0	1	1,5	0,4
1	1,275	1,198	1,2
2	0,999	0,88	1,13
3	0,94	0,96	0,95
4	1	1,03	0,97

Відповідь: $x_1^* = 1;\ x_2^* = 1{,}03;\ x_3^* = 0{,}97$

Задача 2

Розв'язати систему рівнянь методом Зейделя з точністю $\varepsilon = 0{,}1$:

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = 4; \\ x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 9 \\ -x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 2. \end{cases}$$

Розв'язання

1) Необхідна умова збіжності ітераційного процесу виконується.

2) Запишемо систему в приведеному вигляді:

$$\begin{cases} (10-6)\cdot x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + (10-4)x_2 + 2x_3 = 9 \\ -x_1 - 2x_2 + (10-5)x_3 = 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases}10x_1 - 6x_1 - x_2 + x_3 = 4\\ x_1 + 10x_2 - 4x_2 + 2x_3 = 9\\ -x_1 - 2x_2 + 10x_3 - 5x_3 = 2.\end{cases}$$

$$\begin{cases}10x_1 = 6x_1 + x_2 - x_3 + 4;\\ 10x_2 = -x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 9;\\ 10x_3 = x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2.\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_1 = 0{,}6x_1 + 0{,}1x_2 - 0{,}1x_3 + 0{,}4;\\ x_2 = -0{,}1x_1 + 0{,}4x_2 - 0{,}2x_3 + 0{,}9;\\ x_3 = 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}5x_3 + 0{,}2.\end{cases}$$

3) Початкове наближення $x_i^{(0)}, i = 1,2,3$

$$\begin{cases}x_1^{(0)} = 0{,}4\\ x_2^{(0)} = 0{,}9\\ x_3^{(0)} = 0{,}2.\end{cases}$$

4) Перше наближення: $x_i^{(0)},\ i = 1,2,3;$

$$\begin{cases}x_1^{(1)} = 0{,}6\cdot 0{,}4 + 0{,}1\cdot 0{,}9 - 0{,}1\cdot 0{,}2 + 0{,}4 = 0{,}71;\\ x_2^{(1)} = -0{,}1\cdot 0{,}71 + 0{,}4\cdot 0{,}9 - 0{,}2\cdot 0{,}2 + 0{,}9 = 1{,}15;\\ x_3^{(1)} = 0{,}1\cdot 0{,}71 + 0{,}2\cdot 1{,}15 + 0{,}5\cdot 0{,}2 + 0{,}2 = 0{,}6.\end{cases}$$

5) Перевіримо виконання нерівностей:

$$\left|x_i^{(1)} - x_i^{(0)}\right| \le 0{,}1;$$

$$|0{,}71 - 0{,}4| = 0{,}31 > 0{,}1.$$

Продовжуємо ітераційний процес.

6) Друге наближення $x_i^{(2)}, i = 1,2,3;$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 0{,}6 \cdot 0{,}71 + 0{,}1 \cdot 1{,}15 - 0{,}1 \cdot 0{,}6 + 0{,}4 = 0{,}88; \\ x_2^{(2)} = -0{,}1 \cdot 0{,}88 + 0{,}4 \cdot 1{,}15 - 0{,}2 \cdot 0{,}6 + 0{,}9 = 1{,}15; \\ x_3^{(2)} = 0{,}1 \cdot 0{,}88 + 0{,}2 \cdot 1{,}15 + 0{,}5 \cdot 0{,}6 + 0{,}2 = 0{,}82. \end{cases}$$

Перевіримо виконання нерівностей:

$$\left| x_i^{(2)} - x_i^{(1)} \right| \le 0{,}1;$$

$$\left| 0{,}85 - 0{,}71 \right| = 0{,}14 > 0{,}1.$$

Продовжуємо ітераційний процес.

7) Третє наближення $x_i^{(3)}, i = 1{,}2{,}3;$

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = 0{,}6 \cdot 0{,}88 + 0{,}1 \cdot 1{,}15 - 0{,}1 \cdot 0{,}82 + 0{,}4 = 0{,}96; \\ x_2^{(3)} = -0{,}1 \cdot 0{,}96 + 0{,}4 \cdot 1{,}15 - 0{,}2 \cdot 0{,}82 + 0{,}9 = 1{,}1; \\ x_3^{(3)} = 0{,}1 \cdot 0{,}96 + 0{,}2 \cdot 1{,}1 + 0{,}5 \cdot 0{,}82 + 0{,}2 = 0{,}93. \end{cases}$$

Перевіримо виконання нерівностей:

$$\left| x_i^{(3)} - x_i^{(2)} \right| \le 0{,}1;$$

$$\left| 0{,}96 - 0{,}88 \right| = 0{,}08 < 0{,}1;$$

$$\left| 1{,}1 - 1{,}15 \right| = 0{,}05 < 0{,}1;$$

$$\left| 0{,}93 - 0{,}82 \right| = 0{,}11 > 0{,}1.$$

Продовжуємо ітераційний процес.

8) Четверте наближення $x_i^{(4)}, i = 1{,}2{,}3;$

$$\begin{cases} x_1^{(4)} = 0{,}6 \cdot 0{,}96 + 0{,}1 \cdot 1{,}1 - 0{,}1 \cdot 0{,}93 + 0{,}4 = 0{,}99; \\ x_2^{(4)} = -0{,}1 \cdot 0{,}99 + 0{,}4 \cdot 1{,}1 - 0{,}2 \cdot 0{,}93 + 0{,}9 = 1{,}06; \\ x_3^{(4)} = 0{,}1 \cdot 0{,}99 + 0{,}2 \cdot 1{,}06 + 0{,}5 \cdot 0{,}93 + 0{,}2 = 0{,}98. \end{cases}$$

Перевіримо виконання нерівностей:

$$\left| x_i^{(4)} - x_i^{(3)} \right| \le 0{,}1; i = 1{,}2{,}3;$$

$$\left| 0{,}99 - 0{,}96 \right| = 0{,}03 < 0{,}1;$$

$$\left| 1{,}06 - 1{,}1 \right| = 0{,}06 < 0{,}1;$$

$$\left| 0{,}98 - 0{,}93 \right| = 0{,}05 < 0{,}1.$$

Ітераційний процес закінчено.

9) Результати запишемо в таблицю 6.2.

Таблиця 6.2 – Результати обчислень

n	$x_1^{(n)}$	$x_2^{(n)}$	$x_3^{(n)}$
0	0,4	0,9	0,2
1	0,71	1,15	0,6
2	0,88	1,15	0,82
3	0,96	1,1	0,93
4	0,99	1,06	0,98

Відповідь: $x_1^* = 0{,}99$; $x_2^* = 1{,}06$; $x_3^* = 0{,}98$.

Завдання для самостійної роботи

1) Методом ітерацій та методом Зейделя розв'язати систему лінійних рівнянь з точністю до 0,001.
2) Виконати програмну реалізацію задачі (Додаток А)

Варіант № 1
$$\begin{cases} x_1 = 0{,}21x_1 + 0{,}12x_2 - 0{,}34x_3 - 0{,}16x_4 - 0{,}64; \\ x_2 = 0{,}34x_1 - 0{,}08x_2 + 0{,}17x_3 - 0{,}18x_4 + 1{,}42; \\ x_3 = 0{,}16x_1 + 0{,}34x_2 + 0{,}15x_3 - 0{,}31x_4 - 0{,}42; \\ x_4 = 0{,}12x_1 - 0{,}26x_2 - 0{,}08x_3 + 0{,}25x_4 + 0{,}83. \end{cases}$$

Варіант № 2
$$\begin{cases} x_1 = 0{,}32x_1 - 0{,}18x_2 + 0{,}02x_3 + 0{,}21x_4 + 1{,}83; \\ x_2 = 0{,}16x_1 + 0{,}12x_2 - 0{,}14x_3 + 0{,}27x_4 - 1{,}65; \\ x_3 = 0{,}37x_1 + 0{,}27x_2 - 0{,}02x_3 - 0{,}24x_4 + 2{,}23; \\ x_4 = 0{,}12x_1 + 0{,}21x_2 - 0{,}18x_3 + 0{,}25x_4 - 1{,}13. \end{cases}$$

Варіант № 3 $\begin{cases} x_1 = 0{,}42x_1 - 0{,}52x_2 + 0{,}03x_3 + 0{,}44; \\ x_2 = 0{,}31x_1 - 0{,}26x_2 - 0{,}36x_3 + 1{,}42; \\ x_3 = 0{,}12x_1 + 0{,}08x_2 - 0{,}14x_3 - 0{,}24x_4 - 0{,}83; \\ x_4 = 0{,}15x_1 - 0{,}35x_2 - 0{,}18x_3 - 1{,}42. \end{cases}$

Варіант № 4 $\begin{cases} x_1 = 0{,}18x_1 - 0{,}34x_2 - 0{,}12x_3 + 0{,}15x_4 - 1{,}33; \\ x_2 = 0{,}11x_1 + 0{,}23x_2 - 0{,}45x_3 + 0{,}32x_4 + 0{,}84; \\ x_3 = 0{,}05x_1 - 0{,}12x_2 + 0{,}14x_3 - 0{,}18x_4 - 1{,}16; \\ x_4 = 0{,}12x_1 + 0{,}08x_2 + 0{,}06x_3 + 0{,}57. \end{cases}$

Варіант № 5 $\begin{cases} x_1 = 0{,}13x_1 + 0{,}23x_2 - 0{,}44x_3 + 0{,}05x_4 + 2{,}13; \\ x_2 = 0{,}24x_1 - 0{,}31x_3 + 0{,}15x_4 - 0{,}18; \\ x_3 = 0{,}06x_1 + 0{,}15x_2 - 0{,}24x_4 + 1{,}44; \\ x_4 = 0{,}72x_1 - 0{,}08x_2 + 0{,}05x_3 + 2{,}42. \end{cases}$

Варіант № 6 $\begin{cases} x_1 = 0{,}17x_1 + 0{,}31x_2 - 0{,}18x_3 + 0{,}22x_4 - 1{,}71; \\ x_2 = -0{,}21x_1 + 0{,}33x_3 + 0{,}22x_4 + 0{,}62; \\ x_3 = 0{,}32x_1 - 0{,}18x_2 + 0{,}05x_3 - 0{,}19x_4 - 0{,}89; \\ x_4 = 0{,}12x_1 + 0{,}28x_2 - 0{,}14x_3 + 0{,}94. \end{cases}$

Варіант № 7 $\begin{cases} x_1 = 0{,}13x_1 + 0{,}27x_2 - 0{,}22x_3 - 0{,}18x_4 + 1{,}21; \\ x_2 = -0{,}21x_1 - 0{,}45x_3 + 0{,}18x_4 - 0{,}33; \\ x_3 = 0{,}12x_1 + 0{,}13x_2 - 0{,}33x_3 + 0{,}18x_4 - 0{,}48; \\ x_4 = 0{,}33x_1 - 0{,}05x_2 + 0{,}06x_3 - 0{,}28x_4 - 0{,}17. \end{cases}$

Варіант № 8 $\begin{cases} x_1 = 0{,}19x_1 - 0{,}07x_2 + 0{,}38x_3 - 0{,}21x_4 - 0{,}81; \\ x_2 = -0{,}22x_1 + 0{,}08x_3 + 0{,}11x_3 + 0{,}33x_4 - 0{,}64; \\ x_3 = 0{,}51x_1 - 0{,}07x_2 + 0{,}09x_3 - 0{,}11x_4 + 1{,}71; \\ x_4 = 0{,}33x_1 - 0{,}41x_2 - 1{,}21. \end{cases}$

Варіант №9 $\begin{cases} x_1 = 0{,}22x_2 - 0{,}11x_3 + 0{,}31x_4 + 2{,}7; \\ x_2 = 0{,}38x_1 - 0{,}12x_3 + 0{,}24x_4 - 1{,}5; \\ x_3 = 0{,}11x_1 + 0{,}23x_2 - 0{,}51x_4 + 1{,}2; \\ x_4 = 0{,}17x_1 - 0{,}21x_2 + 0{,}31x_3 - 0{,}17. \end{cases}$

Варіант № 10 $\begin{cases} x_1 = 0{,}07x_1 - 0{,}08x_2 + 0{,}11x_3 - 0{,}18x_4 - 0{,}51; \\ x_2 = 0{,}18x_1 + 0{,}52x_2 + 0{,}21x_4 + 1{,}17; \\ x_3 = 0{,}13x_1 + 0{,}31x_2 - 0{,}21x_4 - 1{,}02; \\ x_4 = 0{,}08x_1 - 0{,}33x_3 + 0{,}28x_4 - 0{,}28. \end{cases}$

Варіант №11 $\begin{cases} x_1 = 0{,}05x_1 - 0{,}06x_2 - 0{,}12x_3 + 0{,}14x_4 - 2{,}17; \\ x_2 = 0{,}04x_1 - 0{,}12x_2 + 0{,}68x_3 + 0{,}11x_4 + 1{,}4; \\ x_3 = 0{,}34x_1 + 0{,}08x_2 - 0{,}06x_3 + 0{,}44x_4 - 2{,}1; \\ x_4 = 0{,}11x_1 + 0{,}12x_2 - 0{,}03x_4 - 0{,}8. \end{cases}$

Варіант № 12 $\begin{cases} x_1 = 0{,}08x_1 - 0{,}03x_2 - 0{,}04x_4 - 1{,}2; \\ x_2 = 0{,}51x_2 + 0{,}27x_3 - 0{,}08x_4 + 0{,}81; \\ x_3 = 0{,}33x_1 - 0{,}37x_3 + 0{,}21x_4 - 0{,}92; \\ x_4 = 0{,}11x_1 + 0{,}03x_3 + 0{,}58x_4 + 0{,}17. \end{cases}$

Варіант № 13 $\begin{cases} x_1 = 0{,}12x_1 - 0{,}23x_2 + 0{,}25x_3 - 0{,}16x_4 + 1{,}24; \\ x_2 = 0{,}14x_1 + 0{,}34x_2 - 0{,}18x_3 + 0{,}24x_4 - 0{,}89; \\ x_3 = 0{,}33x_1 + 0{,}03x_2 + 0{,}46x_3 - 0{,}32x_4 + 1{,}15; \\ x_4 = 0{,}12x_1 - 0{,}05x_2 + 0{,}15x_4 - 0{,}57. \end{cases}$

Варіант № 14 $\begin{cases} x_1 = 0{,}23x_1 - 0{,}14x_2 + 0{,}06x_3 - 0{,}12x_4 + 1{,}21; \\ x_2 = 0{,}12x_1 + 0{,}32x_3 - 0{,}18x_4 - 0{,}72; \\ x_3 = 0{,}08x_1 - 0{,}12x_2 + 0{,}23x_3 + 0{,}32x_4 - 0{,}58; \\ x_4 = 0{,}25x_1 + 0{,}22x_2 + 0{,}14x_3 + 1{,}56. \end{cases}$

Варіант № 15 $\begin{cases} x_1 = 0{,}14x_1 + 0{,}23x_2 + 0{,}18x_3 + 0{,}17x_4 - 1{,}42; \\ x_2 = 0{,}12x_1 - 0{,}14x_2 + 0{,}08x_3 + 0{,}09x_4 - 0{,}83; \\ x_3 = 0{,}16x_1 + 0{,}24x_2 - 0{,}35x_4 + 1{,}21; \\ x_4 = 0{,}23x_1 - 0{,}08x_2 + 0{,}55x_3 + 0{,}25x_4 + 0{,}65. \end{cases}$

Варіант № 16 $\begin{cases} x_1 = 0{,}24x_1 + 0{,}21x_2 + 0{,}06x_3 - 0{,}34x_4 + 1{,}42; \\ x_2 = 0{,}05x_1 + 0{,}32x_3 + 0{,}12x_4 - 0{,}57; \\ x_3 = 0{,}35x_1 - 0{,}27x_2 - 0{,}05x_4 + 0{,}68; \\ x_4 = 0{,}12x_1 - 0{,}43x_2 + 0{,}34x_3 - 0{,}21x_4 - 2{,}14. \end{cases}$

Варіант № 17 $\begin{cases} x_1 = 0{,}17x_1 + 0{,}27x_2 - 0{,}13x_3 - 0{,}11x_4 - 1{,}42; \\ x_2 = 0{,}13x_1 - 0{,}12x_2 + 0{,}09x_3 - 0{,}06x_4 + 0{,}48; \\ x_3 = 0{,}11x_1 + 0{,}05x_2 - 0{,}02x_3 + 0{,}12x_4 - 2{,}34; \\ x_4 = 0{,}13x_1 + 0{,}18x_2 + 0{,}24x_3 + 0{,}43x_4 + 0{,}72. \end{cases}$

Варіант № 18 $\begin{cases} x_1 = 0{,}15x_1 + 0{,}05x_2 - 0{,}08x_3 + 0{,}14x_4 - 0{,}48; \\ x_2 = 0{,}32x_1 - 0{,}43x_2 - 0{,}12x_3 - 0{,}11x_4 + 1{,}24; \\ x_3 = 0{,}17x_1 + 0{,}06x_2 - 0{,}08x_3 + 0{,}12x_4 + 1{,}15; \\ x_4 = 0{,}21x_1 - 0{,}16x_2 + 0{,}36x_3 - 0{,}88. \end{cases}$

Варіант № 19 $\begin{cases} x_1 = 0{,}28x_2 - 0{,}17x_3 + 0{,}06x_4 + 0{,}21; \\ x_2 = 0{,}52x_1 + 0{,}12x_3 + 0{,}17x_4 - 1{,}17; \\ x_3 = 0{,}17x_1 - 0{,}18x_2 + 0{,}21x_3 - 0{,}81; \\ x_4 = 0{,}11x_1 + 0{,}22x_2 + 0{,}03x_3 + 0{,}05x_4 + 0{,}72. \end{cases}$

Варіант № 20 $\begin{cases} x_1 = 0{,}52x_2 + 0{,}08x_3 + 0{,}13x_4 - 0{,}22; \\ x_2 = 0{,}07x_1 - 0{,}38x_2 - 0{,}05x_3 + 0{,}41x_4 + 1{,}8; \\ x_3 = 0{,}04x_1 + 0{,}42x_2 + 0{,}11x_3 - 0{,}07x_4 - 1{,}3; \\ x_4 = 0{,}17x_1 + 0{,}18x_2 - 0{,}13x_3 + 0{,}19x_4 + 0{,}33. \end{cases}$

Варіант № 21 $\begin{cases} x_1 = 0{,}01x_1 + 0{,}02x_2 - 0{,}62x_3 + 0{,}08x_4 - 1{,}3; \\ x_2 = 0{,}03x_1 + 0{,}28x_2 + 0{,}33x_3 - 0{,}07x_4 + 1{,}1; \\ x_3 = 0{,}09x_1 + 0{,}13x_2 + 0{,}42x_3 + 0{,}28x_4 - 1{,}7; \\ x_4 = 0{,}19x_1 - 0{,}23x_2 + 0{,}08x_3 + 0{,}37x_4 + 1{,}5. \end{cases}$

Варіант № 22 $\begin{cases} x_1 = 0{,}17x_2 - 0{,}33x_3 + 0{,}18x_4 - 1{,}2; \\ x_2 = 0{,}18x_2 + 0{,}43x_3 - 0{,}08x_4 + 0{,}33; \\ x_3 = 0{,}22x_1 + 0{,}18x_2 + 0{,}21x_3 + 0{,}07x_4 + 0{,}48; \\ x_4 = 0{,}08x_1 + 0{,}07x_2 + 0{,}71x_3 + 0{,}04x_4 - 1{,}2. \end{cases}$

Варіант № 23 $\begin{cases} x_1 = 0{,}03x_1 - 0{,}05x_2 + 0{,}22x_3 - 0{,}33x_4 + 0{,}43; \\ x_2 = 0{,}22x_1 + 0{,}55x_2 - 0{,}88x_3 + 0{,}07x_4 + 1{,}8; \\ x_3 = 0{,}33x_1 + 0{,}13x_2 - 0{,}08x_3 - 0{,}05x_4 - 0{,}8; \\ x_4 = 0{,}08x_1 + 0{,}17x_2 + 0{,}29x_3 + 0{,}33x_4 + 1{,}7. \end{cases}$

Варіант № 24 $\begin{cases} x_1 = 0{,}13x_1 + 0{,}22x_2 - 0{,}33x_3 + 0{,}07x_4 + 0{,}11; \\ x_2 = 0{,}45x_2 - 0{,}23x_3 + 0{,}07x_4 - 0{,}33; \\ x_3 = 0{,}11x_1 - 0{,}08x_3 + 0{,}78x_4 + 0{,}85; \\ x_4 = 0{,}08x_1 + 0{,}09x_2 + 0{,}33x_3 + 0{,}21x_4 - 1{,}7. \end{cases}$

Контрольні питання

1) Яка достатня умова збіжності ітераційного процесу?
2) Як одержати приведену систему рівнянь для розв'язання її методом ітерації?
3) Як одержати приведену систему рівнянь для розв'язання її методом Зейделя?
4) Як визначити початкове наближення системи, для розв'язання її наближеними методами?
5) Як визначити наступне наближення при розв'язанні системи методом ітерацій?
6) Як визначити наступне наближення при розв'язанні системи методом Зейделя?
7) Яка умова закінчення ітераційного процесу?

ТЕМА 7. РОЗВ'ЯЗАНННЯ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

7.1 Теоретичні відомості

Алгоритм методу ітерацій.

Систему двох рівнянь з двома невідомими

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0, \\ f_2(x, y) = 0 \end{cases} \tag{7.1}$$

представимо у вигляді

$$\begin{cases} x = g_1(x, y), \\ y = g_2(x, y) \end{cases} \tag{7.2}$$

Нехай один з розв'язків системи належить області D: $a \le x \le b$, $c \le y \le d$.

Перепишемо праві частини рівнянь (7.2) у вигляді

$$\begin{cases} g_1(x, y) = x + \lambda_{11} f_1(x, y) + \lambda_{12} f_2(x, y), \\ g_2(x, y) = y + \lambda_{21} f_1(x, y) + \lambda_{22} f_2(x, y) \end{cases} \tag{7.3}$$

Невідомі постійні коефіцієнти$\lambda_{ij}, i = 1,2; j = 1,2$визначаємо з достатніх умов збіжності ітераційного процесу:

$$\left|\frac{\partial g_1}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial g_2}{\partial x}\right| < 1, \tag{7.4}$$

$$\left|\frac{\partial g_1}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial g_2}{\partial y}\right| < 1.$$

або

$$\left|1 + \lambda_{11}\frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_{12}\frac{\partial f_2}{\partial x}\right| + \left|\lambda_{21}\frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_{22}\frac{\partial f_2}{\partial x}\right| < 1$$

$$\left|\lambda_{11}\frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_{12}\frac{\partial f_2}{\partial y}\right| + \left|1 + \lambda_{21}\frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_{22}\frac{\partial f_2}{\partial y}\right| < 1$$

Для визначення постійних λ_{ij} $(i = 1,2;\ j = 1,2)$ припустимо, що норма матриці Якобі дорівнює нулю в точці $\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)$. Тоді, в силу неперервності компонент матриці Якобі, знайдеться окіл точки

$\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)$, де $\|J(x)\| < 1$ і умови збіжності ітераційного процесу будуть виконані.

З рівняння $\|J(x)\| = 0$ випливає, що

$$\left.\frac{\partial g_1}{\partial x_1}\right|_{(x^{(0)};y^{(0)})} = \left.\frac{\partial g_1}{\partial x_2}\right|_{(x^{(0)};y^{(0)})} = \left.\frac{\partial g_2}{\partial x_1}\right|_{(x^{(0)};y^{(0)})} = \left.\frac{\partial g_2}{\partial x_2}\right|_{(x^{(0)};y^{(0)})} = 0$$

Таким чином, одержимо систему з чотирьох рівнянь з чотирма невідомими для визначення постійних λ_{ij} $(i = 1,2;\ j = 1,2)$:

$$\begin{cases} \begin{cases} 1 + \lambda_{11} \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial x}\right|_{\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)} + \lambda_{12} \left.\dfrac{\partial f_2}{\partial x}\right|_{\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)} = 0, \\ \lambda_{11} \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial y}\right|_{\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)} + \lambda_{12} \left.\dfrac{\partial f_2}{\partial y}\right|_{\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)} = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 1 + \lambda_{21} \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial x}\right|_{\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)} + \lambda_{22} \left.\dfrac{\partial f_2}{\partial x}\right|_{\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)} = 0, \\ \lambda_{21} \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial y}\right|_{\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)} + \lambda_{22} \left.\dfrac{\partial f_2}{\partial y}\right|_{\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)} = 0 \end{cases} \end{cases} \tag{7.5}$$

Щоб розв'язати систему потрібно задати начальне наближення $\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right) \in D$, обчислити значення похідних $\left.\dfrac{\partial f_i}{\partial x}\right|_{(x^{(0)}, y^{(0)})}$ та $\left.\dfrac{\partial f_i}{\partial y}\right|_{(x^{(0)}, y^{(0)})}$ в цій точці.

Точку $\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)$ визначаємо як координати точки перетину графіків функцій $f_1(x, y) = 0$ і $f_2(x, y) = 0$.

Наступне наближення знаходимо за формулами:

$$\begin{aligned} x^{(n+1)} &= x^{(n)} + \lambda_{11} f_1(x^{(n)}, y^{(n)}) + \lambda_{12} f_2(x^{(n)}, y^{(n)}), \\ y^{(n+1)} &= y^{(n)} + \lambda_{21} f_1(x^{(n)}, y^{(n)}) + \lambda_{22} f_2(x^{(n)}, y^{(n)}) \end{aligned} \tag{7.6}$$

Процес ітерації припиняється, якщо $\left|x^{(n)} - x^{(n-1)}\right| \le \varepsilon$, $\left|y^{(n)} - y^{(n-1)}\right| \le \varepsilon$, де ε - задана точність.

Метод Ньютона для розв'язання системи нелінійних рівнянь виду

$$\begin{cases} F(x, y) = 0, \\ G(x, y) = 0. \end{cases}$$

Значення x_0 й y_0 визначаються графічно. Для знаходження наступних наближень використовують співвідношення

$$\begin{cases} x^{(n+1)} = x^{(n)} + \dfrac{\Delta x^{(n)}}{\Delta h}, \\ y^{(n+1)} = y^{(n)} + \dfrac{\Delta y^{(n)}}{\Delta h}, \end{cases} \tag{7.7}$$

де

$$\Delta h = \begin{vmatrix} F_x\left(x^{(n)}, y^{(n)}\right) & F_y\left(x^{(n)}, y^{(n)}\right) \\ G_x\left(x^{(n)}, y^{(n)}\right) & G_y\left(x^{(n)}, y^{(n)}\right) \end{vmatrix},$$

$$\Delta x_n = \begin{vmatrix} F\left(x^{(n)}, y^{(n)}\right) & F_y\left(x^{(n)}, y^{(n)}\right) \\ G(x_n, y_n) & G_y(x_n, y_n) \end{vmatrix}; \; \Delta y_n = \begin{vmatrix} F(x_n, y_n) & F_x(x_n, y_n) \\ G(x_n, y_n) & G_x(x_n, y_n) \end{vmatrix}.$$

Процес ітерації припиняється, якщо $\left|x^{(n)} - x^{(n-1)}\right| \le \varepsilon$, $\left|y^{(n)} - y^{(n-1)}\right| \le \varepsilon$, де ε - задана точність.

7.2 Контрольний приклад

Задача 1

Дана система рівнянь

$$\begin{cases} y(x-1) - 1 = 0, \\ x^2 - y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Знайти з точністю $\varepsilon = 0{,}001$ розв'язок системи, розташований у першій чверті площини $0xy$.

Розв'язання

Відділення кореня проводимо графічним методом (рис. 7.1).

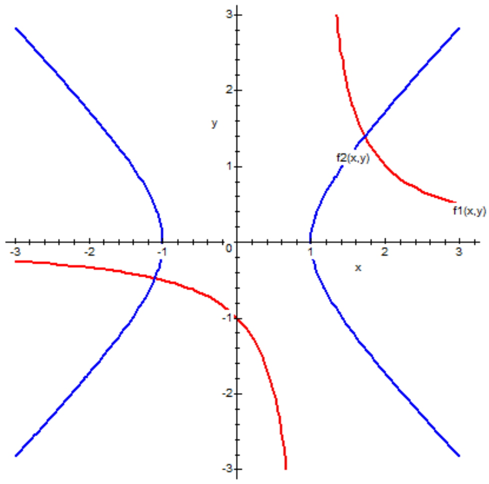


Рисунок 7.1 – Графік функцій $f_1(x,y)$ та $f_2(x,y)$

З графіку бачимо, що криві перетинаються в двох точках. Тобто система рівнянь має два корені. Розглянемо один з них.

За початкові наближення приймаємо $x^{(0)} = 1{,}5;\ y^{(0)} = 1{,}5$.

Для визначення коефіцієнтів $\lambda_{ij},\ (i = 1{,}2;\ j = 1{,}2)$ необхідно розв'язати систему рівнянь (7.5).

Обчислимо похідні функцій $f_1(x,y)$ та $f_2(x,y)$ в точці $x^{(0)} = 1{,}5;\ y^{(0)} = 1{,}5$:

$$\left.\frac{\partial f_1}{\partial x}\right|_{(x^{(0)}=1{,}5,\,y^{(0)}=1{,}5)} = y\Big|_{(x^{(0)}=1{,}5,\,y^{(0)}=1{,}5)} = 1{,}5;$$

$$\left.\frac{\partial f_2}{\partial x}\right|_{(x^{(0)}=1{,}5,\,y^{(0)}=1{,}5)} = 2x\Big|_{(x^{(0)}=1{,}5,\,y^{(0)}=1{,}5)} = 3;$$

$$\left.\frac{\partial f_1}{\partial y}\right|_{(x^{(0)}=1,5,\,y^{(0)}=1,5)} = (x-1)\Big|_{(x^{(0)}=1,5,\,y^{(0)}=1,5)} = 0,5;$$

$$\left.\frac{\partial f_2}{\partial y}\right|_{(x^{(0)}=1,5,\,y^{(0)}=1,5)} = -2y\Big|_{(x^{(0)}=1,5,\,y^{(0)}=1,5)} = -3.$$

Тоді

$$\begin{cases} \begin{cases} 1+1,5\lambda_{11}+3\lambda_{12}=0, \\ 0,5\lambda_{11}-3\lambda_{12}=0 \end{cases} \\ \begin{cases} 1,5\lambda_{21}+3\lambda_{22}=0, \\ 1+0.5\lambda_{21}-3\lambda_{22}=0 \end{cases} \end{cases}$$

З розв’язку системи знаходимо:

$$\lambda_{11}=-\frac{1}{2};\lambda_{12}=-\frac{1}{12};\ \lambda_{21}=-\frac{1}{2};\ \lambda_{22}=\frac{1}{4}.$$

Ітераційні обчислення проводимо по формулах:

$$\begin{cases} x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{1}{2}\left(y^{(n)}\left(x^{(n)}-1\right)-1\right) - \frac{1}{12}\left((x^{(n)})^2-(y^{(n)})^2-1\right); \\ y^{(n+1)} = y^{(n)} - \frac{1}{2}\left(y^{(n)}\left(x^{(n)}-1\right)-1\right) - \frac{1}{4}\left((x^{(n)})^2-(y^{(n)})^2-1\right). \end{cases}$$

Результати обчислень занесемо до таблиці (табл. 7.1)

Таблиця 7.1 – Результати обчислень

n	$x^{(n)}$	$y^{(n)}$	$f_1(x^{(n)},y^{(n)})$	$f_2(x^{(n)},y^{(n)})$	$\lvert x^{(n)}-x^{(n-1)}\rvert$	$\lvert y^{(n)}-y^{(n-1)}\rvert$
0	1,5	1,5	-0,25	-1	-	-
1	1,7083	1,3750	-0,026	0,0278	0,2083	0,125
2	1,719	1,3950	0,00303	0,00917	0,0107	0,01997
3	1,7168	1,3957	0,00041	-0,00083	0,00228	0,000775
4	1,7166	1,3953	-0,00008	-0,00014	0,00013	0,00041
5	1,7167	1,3953	-0,00001	-0,000022	0,00005	0,000002

Відповідь: $x^*=1,7167$; $y^*=1,3953$.

Задача 2

Використовуючи метод Ньютона, розв'язати систему нелінійних рівнянь із точністю $\varepsilon = 0{,}001$.

$$\begin{cases} x - 1 + \sin y = 0, \\ y - \sin x = 0. \end{cases}$$

Розв'язання

Визначаємо: $F = x - 1 + \sin y$, $G = y - \sin x$.

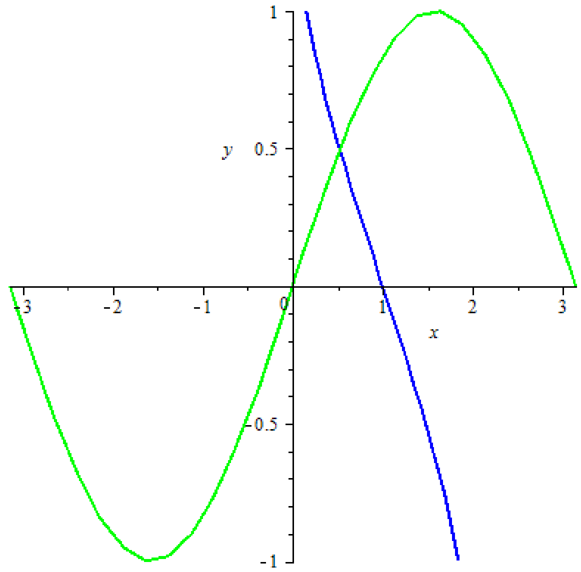


Рисунок 7.2 – Графік функцій $f_1(x, y)$ та $f_2(x, y)$

Визначаємо часткові похідні:

$F_x = 1$,

$G_x = -\cos x$,

$F_y = \cos y$,

$G_y = 1$.

З графіку бачимо, що розв'язок системи знаходиться в області $D=\{[0;1];[0;0{,}5]\}$.

Припустимо, $x^{(0)}=0{,}5,\ y^{(0)}=0{,}4$.

$$\Delta=\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & \cos y \\ -\cos x & 1 \end{vmatrix}=1+\cos x\cos y$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos y & x-1+\sin y \\ 1 & y-\sin x \end{vmatrix}=\cos y(y-\sin x)-x+1-\sin y$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} F & F_x \\ G & G_x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-1+\sin y & 1 \\ y-\sin x & 1 \end{vmatrix}=x-1+\sin y-y+\sin x$$

$$\begin{vmatrix} G_y & F_y \\ F & G \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & \cos y \\ 1+\sin y & y-\sin x \end{vmatrix}$$

$$x^{(n+1)}=x^{(n)}+\frac{\cos\left(y^{(n)}\right)\left(y_n-\sin\left(x^{(n)}\right)\right)-x^{(n)}+1-\sin\left(y^{(n)}\right)}{1+\cos\left(x^{(n)}\right)\cos\left(y^{(n)}\right)},$$

$$y^{(n+1)}=x^{(n)}+\frac{x^{(n)}-1+\sin\left(y^{(n)}\right)-y^{(n)}+\sin\left(x^{(n)}\right)}{1+\cos\left(x^{(n)}\right)\cos\left(y^{(n)}\right)}.$$

Результати обчислень заносимо до таблиці 7.2:

Таблиця 7.2 – Результати обчислень

n	$x^{(n)}$	$y^{(n)}$	$\lvert x^{(n)}-x^{(n-1)}\rvert$	$\lvert y^{(n)}-y^{(n-1)}\rvert$
0	0,5	0,4	-	-
1	0,05069	0,38277	0,02	-0,017
2	0,520964	0,387704	-0,0003	0,0049
3	0,520479	0,392095	0,000115	0,0043

Відповідь: $x^* = 0{,}520479$; $y^* = 0{,}392095$.

Завдання для самостійної роботи

Задача 1

1. Методом ітерацій розв'язати системи рівнянь з точністю $\varepsilon = 0{,}001$.
2. Виконати програмну реалізацію (Додаток А)
3. Дані для виконання завдання взяти з таблиці 7.3

Таблиця 7.3 - Варіанти індивідуальних завдань

Номер варіанта	Завдання	Номер варіанта	Завдання
1	2	3	4
1	$\begin{cases} x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4, \\ x^2 - 2y = 0 \end{cases}$ $(x > 0)$	14	$\begin{cases} x^2 - 2x + y^2 - 2y + 1 = 0, \\ y - \sqrt{x+1} = -1 \end{cases}$ $(x > 0)$
2	$\begin{cases} x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4, \\ x^2 - 2y = 0 \end{cases}$ $(x < 0)$	15	$\begin{cases} x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1, \\ x^2 + y^2 - 2x = 0 \end{cases}$ $(y > 0)$
3	$\begin{cases} y - \sqrt{x+1} = 0, \\ x^2 - y^2 - 2y = 0 \end{cases}$ $(x > 0)$	16	$\begin{cases} x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1, \\ x^2 + y^2 - 2x = 0 \end{cases}$ $(y < 0)$
4	$\begin{cases} x\cos x - y = 0, \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$ $(x > 0)$	17	$\begin{cases} x\sin x - y = 0, \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$ $(x > 0)$

Продовження таблиці 7.3

1	2	3	4
5	$\begin{cases} x\cos x - y = 0, \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$ $(x < 0)$	18	$\begin{cases} x\sin x - y = 0, \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$ $(x < 0)$
6	$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 1, \\ y - x^{\frac{2}{3}} = 0 \end{cases}$ $(y > 0)$	19	$\begin{cases} \dfrac{x}{1+x^2} - y = 0, \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$ $(x > 0)$
7	$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 1, \\ y + x^{\frac{2}{3}} = 0 \end{cases}$ $(y < 0)$	20	$\begin{cases} \dfrac{x}{1+x^2} - y = 0, \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$ $(x < 0)$
8	$\begin{cases} y - \sin x = 0, \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$ $(x > 0)$	21	$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2y = 0, \\ x^2 - \dfrac{1}{2}\ln(x+1) = 0 \end{cases}$ $(x > 0)$
9	$\begin{cases} y - \sin x = 0, \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$ $(x < 0)$	22	$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2y = 0, \\ x^2 - 2\ln(x+1) = 0 \end{cases}$ $(x > 0)$
10	$\begin{cases} y - \sin x = 0, \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$ $(x < 0)$	23	$\begin{cases} y - 2xe^{-x} = 0, \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$ $(x > 0)$
11	$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2y = 0, \\ y - e^{-x} = 0 \end{cases}$ $(x > 0)$	24	$\begin{cases} y - 2xe^{-x} = 0, \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$ $(x < 0)$

Продовження табл. 7.3

1	2	3	4
12	$\begin{cases} x^2-2x+y^2-2y+1=0, \\ y-\sqrt{x+1}=0 \end{cases}$ $(x>0)$	25	$\begin{cases} \left(x^2+y^2\right)^2=2(x^2-y^2), \\ x^2+y-1=0 \end{cases}$ $(x>0, y>0)$
13	$\begin{cases} x^2+y^2-2x=0, \\ y-\ln x=0 \end{cases}$ $(y>0)$	26	$\begin{cases} \left(x^2+y^2\right)^2=2(x^2-y^2), \\ x^2+y-1=0 \end{cases}$ $(x<0, y<0)$

Задача 2

1. Розв'язати систему нелінійних рівнянь методом Ньютона
2. Виконати програмну реалізацію (Додаток А)

   Дані для виконання завдання взяти з таблиці 7.4

Таблиця 7.4 – Варіанти індивідуальних завдань

Варіант	Система рівнянь	Варіант	Система рівнянь
1	2	3	4
1	$\begin{cases} x^2+y^2-1=0 \\ x^3-y=0 \end{cases}$ $M_0(0{,}8;0{,}55)$	13	$\begin{cases} e^x-e^y-1=0 \\ x^3+y^3-1=0 \end{cases}$ $M_0(1;0{,}5)$
2	$\begin{cases} 2x^3-y^2-1=0 \\ xy^3-y=0 \end{cases}$ $M_0(1{,}2;1{,}7)$	14	$\begin{cases} e^{-x}-y^2+1=0 \\ xy+1=0 \end{cases}$ $M_0(-2;2)$

Продовження таблиці 7.4

1	2	3	4
3	$\begin{cases} x^2 - y^2 - 1 = 0 \\ x(y-1) = 0 \end{cases}$ $M_0(2;1)$	15	$\begin{cases} \sin x - \sin y + 1 = 0 \\ x^2 - y^2 - 1 = 0 \end{cases}$ $M_0(-1;0)$
4	$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ xy - 4 = 0 \end{cases}$ $M_0(1{,}5;2{,}5)$	16	$\begin{cases} \sin y - \sin x + 1 = 0 \\ y^2 - x + 1 = 0 \end{cases}$ $M_0(6;-6)$
5	$\begin{cases} x - x^2 + y^2 + 0{,}1 = 0 \\ y - 2xy - 0{,}1 = 0 \end{cases}$ $M_0(0;0)$	17	$\begin{cases} \sin(x - 0{,}8) + 13 = y \\ x^2 - 2x + 8 = y \end{cases}$ $M_0(14;2{,}5)$
6	$\begin{cases} 2x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x^3 + 6x^2y - 1 = 0 \end{cases}$ $M_0(0{,}6;0{,}4)$	18	$\begin{cases} 3x + \sin y + 1 = 0 \\ x^2 - 2x + y = 0 \end{cases}$ $M_0(-1;2)$
7	$\begin{cases} e^x - y^2 + 1 = 0 \\ xy - 1 = 0 \end{cases}$ $M_0(2;2)$	19	$\begin{cases} \sin x + 2x - y = 0 \\ x^2 - 2x + 1 = y \end{cases}$ $M_0(4;6)$
8	$\begin{cases} x - y^2 + x^2 + 0{,}1 = 0 \\ 2xy + y - 0{,}1 = 0 \end{cases}$ $M_0(0;0)$	20	$\begin{cases} \cos(x - 0{,}8) + 4 = y \\ x^2 - 3x + 12 = y \end{cases}$ $M_0(3;24)$
9	$\begin{cases} x^2 + y^2 - x - 0{,}1 = 0 \\ 2xy - y + 0{,}1 = 0 \end{cases}$ $M_0(0;0)$	21	$\begin{cases} \sin(x + 0{,}6) + 2 = y \\ x^2 - 4x + 2 = y \end{cases}$ $M_0(3;2)$

Продовження таблиці 7.4

1	2	3	4
10	$\begin{cases} x^3+y^3-6x+3=0 \\ x^3-y^3-6y+2=0 \end{cases}$ $M_0(0{,}5;0{,}5)$	22	$\begin{cases} \sin(x-1{,}2)+1{,}5=y \\ x^2+8x+1=y \end{cases}$ $M_0(-1;1)$
11	$\begin{cases} x-0{,}5\sin(y/3)-1=0 \\ y-0{,}3\cos x=0 \end{cases}$ $M_0(1;0)$	23	$\begin{cases} e^y-e^x-2=0 \\ x^3+y^3-2=0 \end{cases}$ $M_0(0;1)$
12	$\begin{cases} x+e^{-x}\cos y-1=0 \\ y-e^{-x}\sin y-1=0 \end{cases}$ $M_0(0{,}9;1{,}4)$		

Контрольні питання

1) Що таке система нелінійних рівнянь?

2) Які ви знаєте методи розв’язання систем нелінійних рівнянь?

3) Сформулювати необхідні умови збіжності ітераційного процесу при розв’язанні системи методом ітерацій?

4) Сформулювати необхідні умови для збіжності ітераційного процесу при розв’язанні системи методом Ньютона?

5) Сформулювати алгоритм методу ітерацій.

6) Сформулювати алгоритм методу Ньютона

ТЕМА 8. ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИЙ БАГАТОЧЛЕН ЛАГРАНЖА. ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИЙ БАГАТОЧЛЕН НЬЮТОНА

8.1 Теоретичні відомості

Для побудови полінома Лагранжа необхідно побудувати допоміжні поліноми

$$L_n(x, x_i) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)} \qquad (8.1)$$

Інтерполяційний поліном Лагранжа буде мати вигляд:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_n(x, x_i) y_i = L_n(x, x_0) y_0 + L_n(x, x_1) y_1 + \ldots + L_n(x, x_n) y_n \qquad (8.2)$$

Оцінку похибки можна виконати за формулою:

$$|R_n(x)| \le M_{n+1} \frac{|(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)|}{(n+1)!}, \; x \in [x_0, x_n] \qquad (8.3)$$

де $M_{n+1} = \max\limits_{[x_0, x_n]} \left| f^{(n+1)}(x) \right|$.

Для побудови поліному Ньютона необхідно обчислити кінцеві різниці за формулами:

$$\begin{gathered} y_n - y_{n-1} = \Delta y_{n-1}, \\ \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2} = \Delta^2 y_{n-2}, \\ \Delta^{k-1} y_{n-(k-1)} - \Delta^{k-1} y_{n-k} = \Delta^k y_{n-k} \end{gathered} \qquad (8.4)$$

Інтерполяційний полином Ньютона має вигляд:

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \ldots +$$

$$+ \frac{\Delta^k y_0}{k!h^k}(x - x_0)\ldots(x - x_{k-1}) + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1}) = \qquad (8.5)$$

$$= y_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta^k y_0}{k!h^k}(x - x_0)\ldots(x - x_{k-1}).$$

де $h = |x_n - x_{n-1}|$.

8.2 Контрольний приклад

Задача

Функція $y = f(x)$ задана таблицею даних (табл. 8.1). Побудувати інтерполяційний багаточлен Лагранжа та знайти наближене значення функції в точці $x = -2$.

Таблиця 8.1 – Вихідні дані задачі

i	0	1	2	3
x_i	-3	-1	1	3
y_i	7	4	3	1

Розв'язання

Інтерполяційний поліном Лагранжа має вигляд

$$P_3(x) = \sum_{i=0}^{3} L(x, x_i) y_i$$

Знайдемо коефіцієнти Лагранжа

$$L(x,x_0)=\frac{(x+1)(x-1)(x-3)}{(-3+1)(-3-1)(-3-3)}=\frac{(x+1)(x-1)(x-3)}{(-2)(-4)(-6)}=$$

$$=-\frac{1}{48}x^3+\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{48}x-\frac{1}{16};$$

$$L(x,x_1)=\frac{(x+3)(x-1)(x-3)}{2\cdot(-2)\cdot(-4)}=\frac{1}{16}x^3-\frac{1}{16}x^2-\frac{9}{16}x+\frac{9}{16};$$

$$L(x,x_2)=\frac{(x+3)(x+1)(x-3)}{4\cdot 2\cdot(-2)}=-\frac{1}{16}x^3-\frac{1}{16}x^2+\frac{9}{16}x+\frac{9}{16};$$

$$L(x,x_3)=\frac{(x+3)(x+1)(x-1)}{16}=\frac{1}{48}x^3+\frac{1}{16}x^2-\frac{1}{48}x-\frac{1}{16};$$

Будуємо інтерполяційний багаточлен Лагранжа

$$P_3(x)=7\cdot L(x;x_0)+4\cdot L(x;x_1)+3\cdot L(x;x_2)+1\cdot L(x;x_3);$$

$$P_3(x)=-\frac{1}{16}x^3+\frac{1}{16}x^2-\frac{7}{16}x+\frac{55}{16}.$$

Знаходимо $f(-2)\approx P_3(-2)=\frac{81}{16}$

Відповідь: $f(-2)\approx\frac{81}{16}$

Задача 2

Для функції, заданої таблично (табл. 8.2), побудувати інтерполяційний поліном Ньютона, знайти наближене значення $f(-2)$.

Розв'язання

Будуємо таблицю кінцевих різниць

Таблиця 8.2 – Вихідні дані задачі 2

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
-3	7	-	-	-
-1	4	-3	-	-
1	3	-1	2	-
3	1	-2	-1	-3

Будуємо інтерполяційний багаточлен Ньютона

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \ldots +$$

$$+ \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$$

$$P_3(x) = 7 + \frac{-3}{2}(x+3) + \frac{2}{2 \cdot 2^2}(x+3)(x+1) + \frac{-3}{6 \cdot 2^3}(x+3)(x+1)(x-1) =$$

$$= -\frac{1}{16}x^3 + \frac{1}{16}x^2 - \frac{7}{16}x + \frac{55}{16};$$

$$P_3(2) = \frac{81}{16};$$

Відповідь: $f(2) \approx \frac{81}{16}$.

Задача 3

Функція $y = \sin(x)$ задана таблицею точок (табл. 8.3). Побудувати інтерполяційний багаточлен Ньютона та зробити оцінку похибки в точці $x = 0{,}5$

Таблиця 8.3 – Вихідні дані задачі 3

x	-2	-1	0	1
y	-0,9	-0,841	0	0,841

Розв'язання

Будуємо таблицю кінцевих різниць (табл. 8.4)

Таблиця 8.4 – Кінцеві різниці

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
-2	-0,909	-	-	-
-1	-0,841	0,068	-	-
0	0	0,841	0,773	-
1	0,841	0,841	0	-0,773

Будуємо інтерполяційний поліном

$$P_3(x) = -0{,}909 + 0{,}068(x+2) + \frac{0{,}773}{2 \cdot 1^2}(x+2)(x+1) +$$

$$+ \frac{-0{,}773}{6 \cdot 1^3}(x+2)(x+1)x = -0{,}0003 + 0{,}96983x - 0{,}12883x^3$$

Знаходимо $P_3(0{,}5) = 0{,}4685$.

Так як точне значення функції в точці 0,5 дорівнює $\sin 0{,}5 = 0{,}4794$ то похибка інтерполяції $|P_3(0{,}5) - \sin 0{,}5| = 0{,}0109$. Оцінимо похибку інтерполяції.

$$R_3(x) \le \frac{|(x+2)(x+1)(x)(x-1)|}{(3+1)!} M_4, \text{ де } M_4 = \max_{[-2;1]} \left| f^{(4)}(x) \right|.$$

Знаходимо похідні функції $y = \sin x$

$$\sin'(x) = \cos x; \sin''(x) = -\sin(x); \sin'''(x) = -\cos x; \sin^{(4)}(x) = \sin x.$$

$$M_4 = \max_{[-2;1]} \left| \sin^{(4)}(x) \right| = \max_{[-2;1]} |\sin x| = |\sin(-2)| = 0{,}909$$

Тоді,

$$R_3(0{,}5) \le \frac{\left|(0{,}5+2)(0{,}5+1)0{,}5(0{,}5-1)\right|}{2\cdot 3\cdot 4}0{,}9 = \frac{\left|-0{,}9375\right|}{24}\cdot 0{,}9 = 0{,}035$$

Відповідь: $P_3(0{,}5) = 0{,}4685$; $\left|R_3(0{,}5)\right| \le 0{,}035$

Завдання для самостійної роботи

1. Побудувати інтерполяційні поліноми Лагранжа та Ньютона для таблично заданої функції

2. Виконати програмну реалізацію (Додаток А)

Варіант 1

i	0	1	2	3	4	5
x_i	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0
y_i	-1,202	-1,724	-0,07	0,488	-0,65	-1,233

Варіант 2

i	0	1	2	3	4	5
xi	-0,55	0,05	0,65	1,25	1,85	2,45
yi	2,418	2,061	2,031	2,34	2,879	3,461

Варіант 3

i	0	1	2	3	4	5
xi	-1	-0,56	-0,12	0,32	0,76	1,2
yi	0,328	0,17	0,252	0,513	0,765	0,825

Варіант 4

i	0	1	2	3	4	5
xi	-1	0,2	1,4	2,6	3,8	5
yi	-1,336	-1,371	-1,066	-0,529	0,054	0,478

Варіант 5

i	0	1	2	3	4	5
xi	0	0,22	0,44	0,66	0,88	1,1
yi	1,003	1,419	2,257	2,909	2,901	2,239

Варіант 6

i	0	1	2	3	4	5
xi	-6	-4,7	-3,4	-2,1	-0,8	0,5
yi	-1,71	-1,318	-1,204	-1,415	-1,864	-2,369

Варіант 7

i	0	1	2	3	4	5
xi	-4	-3,1	-2,2	-1,3	-0,4	0,5
yi	-1,942	-1,756	-1,45	-1,031	-0,515	0,082s

Варіант 8

i	0	1	2	3	4	5
xi	-1	-0,7	-0,4	-0,1	0,2	0,5
yi	-2,758	-2,996	-2,859	-2,45	-2,079	-2,027

Варіант 9

i	0	1	2	3	4	5
xi	-2	-1,7	-1,4	-1,1	-0,8	-0,5
yi	5,688	4,208	2,571	2,016	2,961	4,693

Варіант 10

i	0	1	2	3	4	5
xi	-1	-0,7	-0,4	-0,1	0,2	0,5
yi	2,635	2,477	1,148	1,91	2,892	1,684

Варіант 11

i	0	1	2	3	4	5
xi	-5	-4	-3	-2	-1	0
yi	25	16	9	4	17	28

Варіант 12

i	0	1	2	3	4	5
xi	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5
yi	1	0,25	0	0,25	-1	-1,75

Варіант 13

i	0	1	2	3	4	5
xi	-7,5	-5	-2,5	0	2,5	5
yi	4	0,25	9	30,25	51,5	60,25

Вариант14

i	0	1	2	3	4	5
xi	-3,5	-2	-0,5	1	2,5	4
yi	11,25	3	-0,75	0	-2,25	0

Варіант 15

i	0	1	2	3	4	5
xi	-6,5	-4,5	-2,5	-0,5	1,5	3,5
yi	86	54	30	14	26	30

Варіант 16

i	0	1	2	3	4	5
xi	-6,5	-4,5	-2,5	-0,5	1,5	3,5
yi	130	94	66	46	38,0	38,0

Варіант 17

i	0	1	2	3	4	5
xi	-3,5	-2	-0,5	1	3,5	5
yi	53	37,25	26	23,25	23	37,25

Варіант 18

i	0	1	2	3	4	5
xi	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5
yi	9	6,25	4	2,25	3	4,25

Варіант 19

i	0	1	2	3	4	5
xi	-5	-4	-3	-2	-1	0
yi	-50	-31	-14	1	-12	-23

Варіант 20

i	0	1	2	3	4	5
xi	-7,5	-5	-2,5	0	2,5	5
yi	106,25	50	6,25	-25	6,25	50

Варіант 21

i	0	1	2	3	4	5
xi	3	4,5	6	7,5	9	10,5
yi	19,07	19,57	20,3	20,87	20,97	20,56

Варіант 22

i	0	1	2	3	4	5
xi	-1,5	0,5	2,5	4,5	6,5	8,5
yi	34	34,42	35,38	35,98	35,68	34,76

Варіант 23

i	0	1	2	3	4	5
x_i	-6,5	-4,5	-2,5	-0,5	1,5	3,5
y_i	130	94	66	46	38,0	38,0

Варіант 24

i	0	1	2	3	4	5
x_i	3	4,5	6	7,5	9	10,5
y_i	106,25	50	6,25	-25	6,25	50

Варіант 25

i	0	1	2	3	4	5
x_i	-1	-0,7	-0,4	-0,1	0,2	0,5
y_i	-1,942	-1,756	-1,45	-1,031	-0,515	0,082

Контрольні питання

1. Сформулюйте задачу інтерполяції.
2. Що таке інтерполяційна функція?
3. Як побудувати інтерполяційний багаточлен Лагранжа?
4. Як побудувати інтерполяційний багаточлен Ньютона?
5. Як оцінити похибку інтерполяції?

ТЕМА 9 ІНТЕРПОЛЮВАННЯ ФУНКЦІЇ ЗА ДОПОМОГОЮ КУБІЧНИХ СПЛАЙНІВ

9.1 Теоретичні відомості

Сплайном називається функція, яка разом з декількома похідними неперервна на всьому заданому відрізку $[a;b]$,а на кожному частковому відрізку $[x_i, x_{i+1}]$ окремо є деяким алгебраїчним многочленом.

На практиці найбільш широкого поширення набули сплайни третього ступеня, які мають на$[a;b]$ безперервну, принаймні, першу похідну. Ці сплайни називаються кубічними і позначаються через $S_3(x)$. Величина $m_i = S_3'(x_i)$називається **нахилом сплайна** в точці (вузлі) x_i.

Нехай відрізок $[\alpha,\beta]$ розбитий на n рівних частин і в точках $x_i\left(i=0,1,2....,n; x_0=\alpha, x_n=\beta\right)$ деяка функція приймає значення γ_i. Для змінної x_i, що належить частині розбиття $\left[x_{i-1},x_i\right]$ $\left(i=1,...,n\right)$, визначена функція (кубічний багаточлен)

$$S_i(x)=y_{i-1}\frac{(x-x_i)^2\left(2(x-x_{i-1})+h\right)}{h^3}+y_i\frac{(x-x_{i-1})^2\left(2(x_i-x)+h\right)}{h^3}+$$
$$+m_{i-1}\frac{(x-x_i)^2(x-x_{i-1})}{h^2}+m_i\frac{(x-x_{i-1})^2(x-x_i)}{h^2} \qquad (9.1)$$

Тут $h=\dfrac{b-a}{n}$ - крок розбиття відрізку. Невідомі m_i визначаються рекурентними співвідношеннями

$$m_0=A; m_n=B; m_i=L_i m_{i+1}+M_i; i=n-1,n-2,...,0 \qquad (9.2)$$

Після попереднього обчислення допоміжних величин M_i, L_i за рекурентними формулами

$$L_0=0,\ M_0=m_0$$
$$L_i=\frac{-1}{L_{i-1}+4}, \qquad (9.3)$$
$$M_i=L_i(M_{i-1}-b_i);\quad i=n-1,n-2,...,0,$$

де $b_i=\dfrac{3(y_{i+1}-y_{i-1})}{h}$

Величини A і B повинні бути заданими. При побудові кубічного сплайну, який інтерполює диференційовану функцію $y=f(x)$ при системі точок, вважають $A=f'(a),\ B=f'(b)$ (крайові умови I типу).

9.2 Контрольний приклад

Задача. Для функції, заданої у табличному вигляді (табл. 9.1), побудувати кубічний сплайн. Обчислити значення функції в точці $x = 0{,}2$ за допомогою кубічних сплайнів.

Таблиця 9.1 – Вихідні дані задачі

i	x_i	f_i
0	0.1	0.09
1	0.5	0.47
2	0.9	0.71
3	1.3	0.96
4	1.7	0.97
5	2.1	0.51

Розв'язання

1. Визначимо крок $h = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{0.51-0.09}{5} = 0.4$

2. Знаходимо допоміжні коефіцієнти L_i, M_i за формулою (9.3)

$L_0 = 0$

$M_0 = 0$

$$L_1 = \frac{-1}{L_0 + 4} = -\frac{1}{4};$$

$$L_2 = \frac{-1}{L_1 + 4} = -\frac{4}{15};$$

$$L_3 = \frac{-1}{L_2 + 4} = -\frac{15}{56};$$

$$L_4 = \frac{-1}{L_3 + 4} = -\frac{56}{209};$$

$$L_5 = \frac{-1}{L_4 + 4} = -\frac{209}{780};$$

Для визначення M_i необхідно знайти коефіцієнти b_i:

$$b_1 = \frac{3(y_2 - y_0)}{h} = \frac{3(0,71 - 0,09)}{0.4} = 4,65;$$

$$b_2 = \frac{3(y_3 - y_1)}{h} = \frac{3(0,96 - 0,47)}{0.4} = 3.675;$$

$$b_3 = \frac{3(y_4 - y_2)}{h} = \frac{3(0,97 - 0,71)}{0,4} = 1,95;$$

$$b_4 = \frac{3(y_5 - y_3)}{h} = \frac{3(0,51 - 0,96)}{0,4} = -3,375;$$

Тоді

$$M_1 = L_1(M_0 + b_1) = 1,1625;$$

$$M_2 = L_2(M_1 + b_2) = 0,67;$$

$$M_3 = L_3(M_2 + b_3) = 0,343;$$

$$M_4 = L_4(M_3 + b_4) = -0,996;$$

3) Знаходимо невідомі m_i за формуло (9.2):

$$m_0 = 0;$$

$$m_5 = 0$$

$$m_4 = L_4 m_5 + M_4 = -0.996$$

$$m_3 = L_3 m_4 + M_3 = 0.61$$

$$m_2 = L_2 m_3 + M_2 = 0.507$$

$$m_1 = L_1 m_2 + M_1 = 1.036$$

4) Будуємо кубічний сплайн на відрізку $[0{,}1;0{,}5]$ за формулою:

$$S_i(x) = y_{i-1}\frac{(x-x_i)^2(2(x-x_{i-1})+h)}{h^3} + y_i\frac{(x-x_{i-1})^2(2(x_i-x)+h)}{h^3} +$$

$$+ m_{i-1}\frac{(x-x_i)^2(x-x_{i-1})}{h^2} + m_i\frac{(x-x_{i-1})^2(x-x_i)}{h^2}$$

$$S_1(x) = y_0\frac{(x-x_1)^2(2(x-x_0)+h)}{h^3} + y_1\frac{(x-x_0)^2(2(x_1-x)+h)}{h^3} +$$

$$+ m_0\frac{(x-x_1)^2(x-x_0)}{h^2} + m_1\frac{(x-x_0)^2(x-x_1)}{h^2} =$$

$$= 0{,}09\frac{(x-0{,}5)^2(2(x-0{,}1)+0{,}4)}{0{,}4^3} + 0{,}47\frac{(x-0{,}1)^2(2(0{,}5-x)+0{,}4)}{0{,}4^3} +$$

$$+ 1{,}036\frac{(x-0{,}1)^2(x-0{,}5)}{0{,}4^2} = -5{,}402x^3 + 6{,}16x^2 - 1{,}069x + 0{,}14$$

5) Будуємо кубічний сплайн на відрізку $[0{,}5;0{,}9]$

$$S_2(x) = 0{,}47\frac{(x-0{,}9)^2(2\cdot(x-0{,}5)+0{,}4)}{0{,}4^3} + 0{,}71\frac{(x-0{,}5)^2(2\cdot(0{,}9-x)+0{,}4)}{0{,}4^3} +$$

$$+ 1{,}036\frac{(x-0{,}9)^2(x-0{,}5)}{0{,}4^2} + 0{,}507\frac{(x-0{,}5)^2(x-0{,}9)}{0{,}4^2} =$$

$$= 2{,}144x^3 - 5{,}163x^2 + 4{,}59x - 0{,}803$$

6)Будуємо кубічний сплайн на відрізку $[0{,}9;1{,}3]$

$$S_3(x) = 0{,}71\frac{(x-1{,}3)^2(2\cdot(x-0{,}9)+0{,}4)}{0{,}4^3} + 0{,}96\frac{(x-0{,}9)^2(2\cdot(1{,}3-x)+0{,}4)}{0{,}4^3} +$$

$$+ 0{,}507\frac{(x-1{,}3)^2(x-0{,}9)}{0{,}4^2} + 0{,}61\frac{(x-0{,}9)^2(x-1{,}3)}{0{,}4^2} =$$

$$= -0{,}83x^3 + 2{,}87x^2 - 2{,}638x + 1{,}366$$

7) Будуємо кубічний сплайн на відрізку $[1{,}3;1{,}7]$

$$S_4(x)=0{,}96\frac{(x-1{,}7)^2(2\cdot(x-1{,}3)+0{,}4)}{0{,}4^3}+0{,}97\frac{(x-1{,}3)^2(2\cdot(x-1{,}7)+0{,}4)}{0{,}4^3}+$$

$$+0{,}61\frac{(x-1{,}7)^2(x-1{,}3)}{0{,}4^2}+0{,}996\frac{(x-1{,}3)^2(x-1{,}7)}{0{,}4^2}=$$

$$=-2{,}728x^3+10{,}269x^2-12{,}23x+5{,}53$$

8) Будуємо кубічний сплайн на відрізку $[1{,}7;2{,}1]$

$$S_5(x)=0{,}97\frac{(x-2{,}1)^2(2\cdot(x-1{,}7)+0{,}4)}{0{,}4^3}+0{,}51\frac{(x-1{,}7)^2(2\cdot(x-2{,}1)+0{,}4)}{0{,}4^3}+$$

$$+0{,}61\frac{(x-1{,}7)^2(x-1{,}3)}{0{,}4^2}+-0{,}996\frac{(x-2{,}1)^2(x-1{,}7)}{0{,}4^2}=$$

$$=8{,}15x^3+45{,}204x^2+82{,}045x-47{,}904$$

9) Будуємо графік сплайну

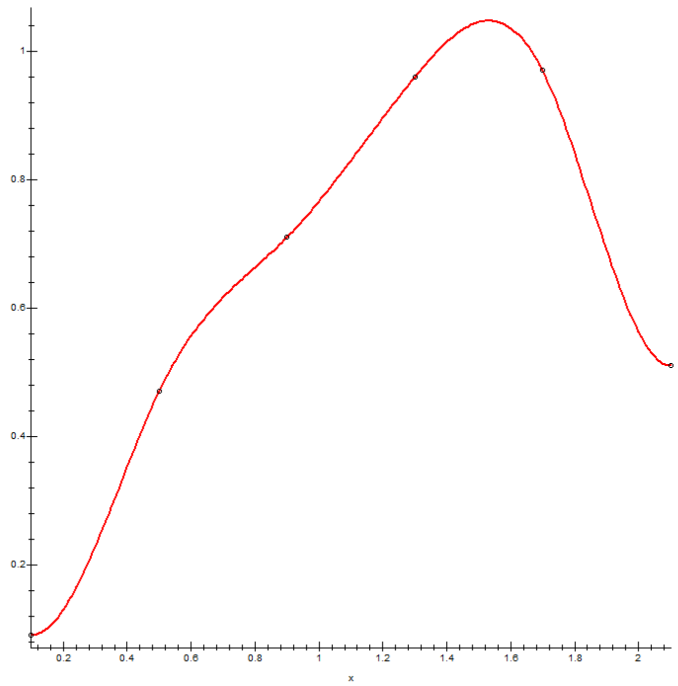


Рисунок 9.1 – Результат інтерполяції за допомогою кубічного сплайна

10) Знаходимо значення сплайну в точці $x = 0{,}2$

Відповідь: $S_1(0{,}2) = 0{,}13$

Завдання для самостійної роботи

1. Для функції, заданої у табличному вигляді з кроком h, побудувати кубічний сплайн

2. Виконати програмну реалізацію (Додаток А)

Варіант 1

i	0	1	2	3	4	5
x_i	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0
y_i	-1,202	-1,724	-0,07	0,488	-0,65	-1,233

Варіант 2

i	0	1	2	3	4	5
xi	-0,55	0,05	0,65	1,25	1,85	2,45
yi	2,418	2,061	2,031	2,34	2,879	3,461

Варіант 3

i	0	1	2	3	4	5
xi	-1	-0,56	-0,12	0,32	0,76	1,2
yi	0,328	0,17	0,252	0,513	0,765	0,825

Варіант4

i	0	1	2	3	4	5
xi	-1	0,2	1,4	2,6	3,8	5
yi	-1,336	-1,371	-1,066	-0,529	0,054	0,478

Варіант 5

i	0	1	2	3	4	5
xi	0	0,22	0,44	0,66	0,88	1,1
yi	1,003	1,419	2,257	2,909	2,901	2,239

Варіант 6

i	0	1	2	3	4	5
xi	-6	-4,7	-3,4	-2,1	-0,8	0,5
yi	-1,71	-1,318	-1,204	-1,415	-1,864	-2,369

Варіант 7

i	0	1	2	3	4	5
xi	-4	-3,1	-2,2	-1,3	-0,4	0,5
yi	-1,942	-1,756	-1,45	-1,031	-0,515	0,082

Варіант 8

i	0	1	2	3	4	5
xi	-1	-0,7	-0,4	-0,1	0,2	0,5
yi	-2,758	-2,996	-2,859	-2,45	-2,079	-2,027

Варіант 9

i	0	1	2	3	4	5
xi	-2	-1,7	-1,4	-1,1	-0,8	-0,5
yi	5,688	4,208	2,571	2,016	2,961	4,693

Варіант10

i	0	1	2	3	4	5
xi	-1	-0,7	-0,4	-0,1	0,2	0,5
yi	2,635	2,477	1,148	1,91	2,892	1,684

Варіант 11

i	0	1	2	3	4	5
xi	-5	-4	-3	-2	-1	0
yi	25	16	9	4	17	28

Варіант 12

i	0	1	2	3	4	5
xi	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5
yi	1	0,25	0	0,25	-1	-1,75

Варіант13

i	0	1	2	3	4	5
xi	-7,5	-5	-2,5	0	2,5	5
yi	4	0,25	9	30,25	51,5	60,25

Варіант14

i	0	1	2	3	4	5
xi	-3,5	-2	-0,5	1	2,5	4
yi	11,25	3	-0,75	0	-2,25	0

Варіант15

i	0	1	2	3	4	5
xi	-6,5	-4,5	-2,5	-0,5	1,5	3,5
yi	86	54	30	14	26	30

Варіант 16

i	0	1	2	3	4	5
xi	-6,5	-4,5	-2,5	-0,5	1,5	3,5
yi	130	94	66	46	38,0	38,0

Варіант 17

i	0	1	2	3	4	5
xi	-3,5	-2	-0,5	1	3,5	5
yi	53	37,25	26	23,25	23	37,25

Варіант 18

i	0	1	2	3	4	5
xi	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5
yi	9	6,25	4	2,25	3	4,25

Варіант 19

i	0	1	2	3	4	5
xi	-5	-4	-3	-2	-1	0
yi	-50	-31	-14	1	-12	-23

Варіант 20

i	0	1	2	3	4	5
xi	-7,5	-5	-2,5	0	2,5	5
yi	106,25	50	6,25	-25	6,25	50

Варіант 21

i	0	1	2	3	4	5
xi	3	4,5	6	7,5	9	10,5
yi	19,07	19,57	20,3	20,87	20,97	20,56

Варіант 22

i	0	1	2	3	4	5
xi	-1,5	0,5	2,5	4,5	6,5	8,5
yi	34	34,42	35,38	35,98	35,68	34,76

Варіант 23

i	0	1	2	3	4	5
x_i	-6,5	-4,5	-2,5	-0,5	1,5	3,5
y_i	130	94	66	46	38,0	38,0

Варіант24

i	0	1	2	3	4	5
x_i	-1	-0,7	-0,4	-0,1	0,2	0,5
y_i	-1,942	-1,756	-1,45	-1,031	-0,515	0,082

Варіант 25

i	0	1	2	3	4	5
xi	3	4,5	6	7,5	9	10,5
yi	106,25	50	6,25	-25	6,25	50

Контрольні питання

1. Що називається сплайном?
2. Що називається ступенем сплайна?
3. Як розв’язується задача інтерполяції за допомогою сплайнів?
4. Що таке кубічний сплайн?
5. Алгоритм побудови кубічного сплайну?
6. У чому переваги сплайн-інтерполяції в порівнянні з інтерполяційними поліномами?

ТЕМА 10 НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ЗА ДОПОМОГОЮ ПОЛІНОМІВ ФУР'Є

10.1 Теоретичні відомості

Багаточлен Фур'є має вигляд

$$F_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right), \tag{10.1}$$

де коефіцієнти a_k, b_k визначаються за формулами:

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx; \tag{10.2}$$

$$a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx,\quad (k=0,1,2,\ldots) \tag{10.3}$$

$$b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx,\quad (k=0,1,2,\ldots) \tag{10.4}$$

Середньоквадратичне відхилення апроксимуючого багаточлена від функції $f(x)$ визначається:

$$d(f,k_n)=\sqrt{\int_{-l}^{l}f^2(x)dx-l\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right)\right)} \tag{10.5}$$

Якщо функція $f(x)$ парна на відрізку $[-l;l]$, то

$$F_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}a_k\cos\frac{k\pi x}{l}, \tag{10.6}$$

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx;\qquad a_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx\,(k=0,1,2,\ldots). \tag{10.7}$$

Якщо $f(x)$ непарна на відрізку $[-l;l]$, то

$$F_n(x)=\sum_{k=1}^{n} b_k \sin\frac{k\pi x}{l}, \quad b_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx. \qquad (10.8)$$

10.4 Контрольний приклад

Задача. Побудувати поліном Фур'є для функції

$$f(x)=|x|, -\pi < x < \pi.$$

Розв'язання

Графік цієї функції, періодично продовжений на всю числову вісь, зображено на рисунку (10.1).

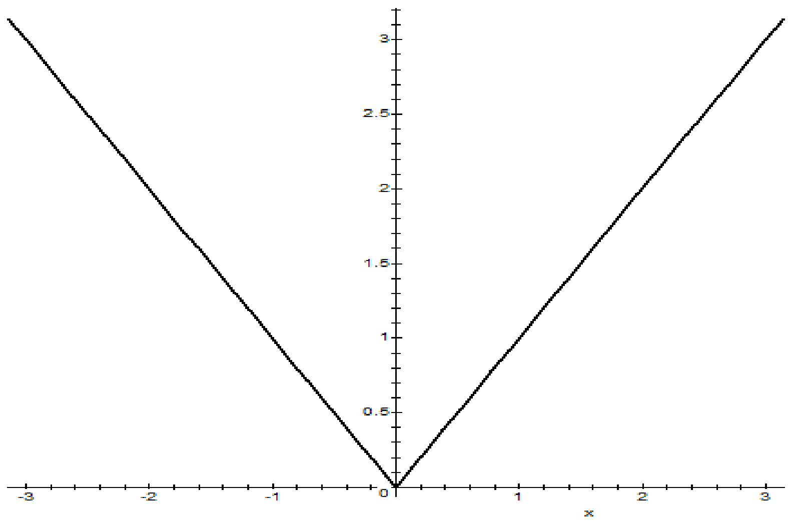


Рисунок 10.1 – Графік функції $f(x)$

$$F_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right).$$

Оскільки функція *f(x)*парна, то всі коефіцієнти $b_n=0$, $l=\pi$.

Одержимо

$$F_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{\pi}\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx),$$

де

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}xdx=\frac{2}{\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi}=\pi,$$

$$a_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos xdx=\frac{2}{\pi}\left(x\sin x\big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin xdx\right)=\frac{2}{\pi}\left[(\pi\sin\pi-0)+\cos x\big|_0^{\pi}\right]=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\cos\frac{2}{\pi}-\cos 0\right)=\frac{2}{\pi}(-1-1)=-\frac{4}{\pi},$$

$$a_2=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos 2xdx=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2}x\sin 2x\big|_0^{\pi}-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin 2xdx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\left[(\pi\sin\pi-0)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^{\pi}\right]=\frac{1}{\pi}(\cos 2\pi-\cos 0)=\frac{1}{4\pi}(1-1)=0,$$

$$a_3=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos 3xdx=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{3}x\sin 3x\big|_0^{\pi}-\frac{1}{3}\int_0^{\pi}\sin 3xdx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{3}\pi\sin\pi-0+\frac{1}{9}\cos 3x\Big|_0^{\pi}\right]=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{9}(\cos 3\pi-\cos 0)=\frac{2}{9\pi}(-1-1)=-\frac{4}{9\pi},$$

Отже, $F_1(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\cos x$,

$$F_3(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\cos x-\frac{4}{9\pi}\cos 3x.$$

Результати обчислень заносимо в таблицю 10.1.

Таблиця 10.1 – Результати обчислень

x	$f(x)$	$F_1(x)$	$F_3(x)$
-3,1416	3,1416	2,844	2,9855
-2,5	2,5	2,5908	2,5418
-2	2	2,1007	1,9648
-1,5	1,5	1,4807	1,5106
-1	1	0,8829	1,0229
-0,5	0,5	0,4534	0,4434
0	0	0,2976	0,1561
0,5	0,5	0,4534	0,4434
1	1	0,8829	1,0229
1,5	1,5	1,4807	1,5106
2	2	2,1007	1,9648
2,5	2,5	2,5908	2,5418
3,1416	3,1416	2,844	2,9855

Графік поліному представлений на рис. 10.2

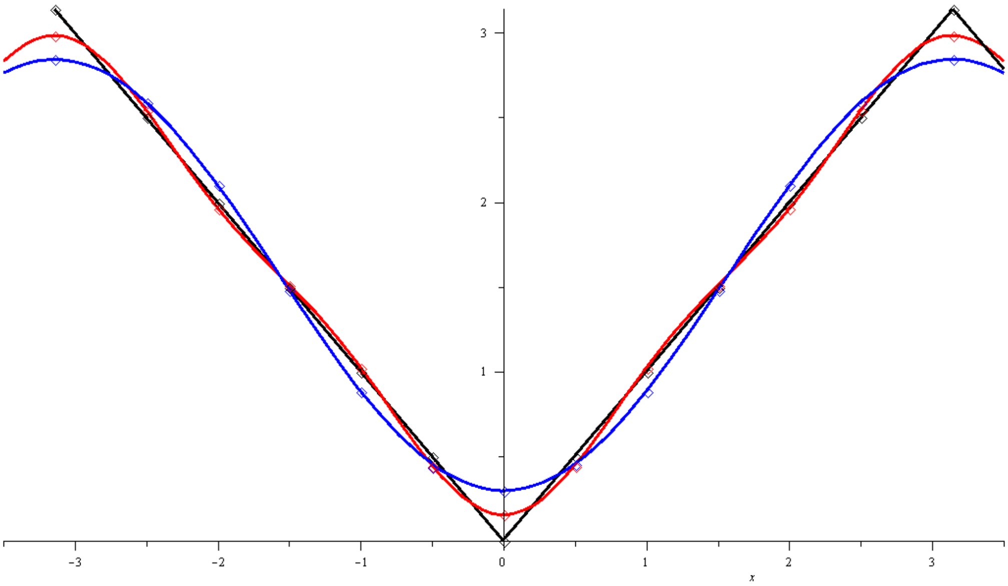


Рисунок 10.2 – Поліном Фур’є

Знайдемо середньоквадратичні відхилення апроксимуючих багаточленів $F_1(x)$ і $F_3(x)$ від функції $f(x)$:

$$d(f,k_n)=\sqrt{\int_{-l}^{l} f^2(x)dx-l\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right)\right)}$$

$$d(f,F_1)=\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx-\pi\left(\frac{a_0^2}{2}+a_1^2\right)}=$$

$$=\sqrt{\int_{0}^{\pi} x^2dx+\int_{-\pi}^{0}(-x)^2dx-\pi\left(\frac{\pi^2}{2}+\left(-\frac{4}{\pi}\right)^2\right)}=$$

$$=\sqrt{\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^{\pi}+\left.\frac{x^3}{3}\right|_{-\pi}^{0}-\pi\left(\frac{\pi^2}{2}+\frac{16}{\pi^2}\right)}=$$

$$=\sqrt{\frac{\pi^3}{3}+\frac{\pi^3}{3}-\pi\left(\frac{\pi^2}{2}+\frac{16}{\pi^2}\right)}=0{,}2734,$$

$$d(f,F_3)=\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx-\pi\left(\frac{a_0^2}{2}+a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)}=$$

$$=\sqrt{\int_{-\pi}^{0}(-x)^2dx+\int_{0}^{\pi}x^2dx-\pi\left(\frac{\pi^2}{2}+\frac{16}{\pi^2}+\frac{16}{81\pi^2}\right)}=$$

$$=\sqrt{\left.\frac{x^3}{3}\right|_{-\pi}^{0}+\left.\frac{x^3}{3}\right|_{0}^{\pi}-\frac{\pi^3}{2}-\frac{16}{\pi}-\frac{16}{81\pi}}=0{,}1734.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Побудувати поліном Фур'є для функції $f(x)$, представити графічно наближення цієї функції за допомогою тригонометричних

багаточленів ступенів n_1, n_2. Оцінити похибку середньоквадратичного наближення $\delta\left(f, Q_{n_1}\right)$, $\delta\left(f, Q_{n_2}\right)$.

2. Виконати програмну реалізацію (Додаток А)

Варіант 1

$$f(x)=\begin{cases}1, & -1\le x<0;\\ 2, & 0<x\le 1\end{cases}$$

$(n_1=3,\ n_2=5)$.

Варіант 2

$f(x)=1-x,\quad x\in[0,1]$ (розкласти по косинусах)

$(n_1=1,\ n_2=3)$.

Варіант 3

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le 1;\\ 2-x, & 1\le x\le 2\end{cases}$$ (розкласти по косинусах)

$(n_1=1,\ n_2=3,\ n_3=5)$.

Варіант 4

$$f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi\le x<0;\\ 0, & 0\le x\le \pi\end{cases}$$

$(n_1=1,\ n_2=3,\ n_3=5)$.

Варіант 5

$$f(x)=\begin{cases}-2x, & -\pi\le x\le 0;\\ 3x, & 0\le x\le \pi\end{cases}$$

$(n_1=1,\ n_2=3)$.

Варіант 6

$$f(x)=\begin{cases}-2, & -\pi\le x<0;\\ 2, & 0<x\le\pi\end{cases}$$

$(n_1=3,\ n_2=5).$

Варіант 7

$f(x)=\pi-2x,\quad 0\le x\le\pi$ (розкласти по косинусах)

$(n_1=1,\ n_2=3).$

Варіант 8

$f(x)=\pi-2x,\quad 0<x\le\pi$ (розкласти по синусах)

$(n_1=2,\ n_2=4).$

Варіант 9

$f(x)=\pi+x,\quad -\pi\le x\le\pi$

$(n_1=3,\ n_2=5).$

Варіант 10

$$f(x)=\begin{cases}2, & -\pi\le x<0;\\ -2, & 0<x\le\pi\end{cases}$$

$(n_1=3,\ n_2=5).$

Варіант 11

$$f(x)=\begin{cases}1, & -\pi\le x<0;\\ -2, & 0<x\le\pi\end{cases}$$

$(n_1=3,\ n_2=5).$

Варіант 12

$$f(x)=\begin{cases}\pi, & -\pi\le x\le 0;\\ \pi-x, & 0\le x\le\pi\end{cases}$$

$(n_1=1,\ n_2=3).$

Варіант 13

$$f(x)=\begin{cases}x, & -\pi\le x\le 0;\\ 2x, & 0\le x\le\pi\end{cases}$$

$(n_1=1,\ n_2=3).$

Варіант 14

$f(x)=2x,\quad 0\le x\le 1$ (розкласти по косинусах)

$(n_1=1,\ n_2=3).$

Варіант 15

$f(x)=2+|x|,\quad -2\le x\le 2$

$(n_1=1,\ n_2=3).$

Варіант 16

$f(x)=2-|x|,\quad -2\le x\le 2$

$(n_1=1,\ n_2=3).$

Варіант 17

$$f(x)=\begin{cases}2x, & -\pi\le x\le 0;\\ -3x, & 0\le x\le\pi\end{cases}$$

$(n_1=1,\ n_2=3).$

Варіант 18

$$f(x)=\begin{cases}0, & -2 \le x \le 0;\\ x, & 0 \le x \le 2\end{cases}$$

$(n_1 = 1,\ n_2 = 3)$.

Варіант 19

$$f(x)=\begin{cases}x, & -4 \le x \le 0;\\ 2x, & 0 \le x \le 4\end{cases}$$

$(n_1 = 1,\ n_2 = 3)$.

Варіант 20

$$f(x)=\begin{cases}-x, & -2 \le x \le 0;\\ 0, & 0 \le x \le 2\end{cases}$$

$(n_1 = 2,\ n_2 = 3)$.

Варіант 21

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -1 \le x < 0;\\ 3, & 0 < x \le 1\end{cases}$$

$(n_1 = 3,\ n_2 = 5)$.

Варіант 22

$$f(x)=\begin{cases}0, & -2 \le x < 0;\\ -2, & 0 < x \le 2\end{cases}$$

$(n_1 = 3,\ n_2 = 5)$.

Варіант 23

$$f(x)=\begin{cases}1, & -1 \le x \le 0;\\ 1+x, & 0 \le x \le 1\end{cases}$$

$(n_1 = 2,\ n_2 = 3).$

Варіант 24

$$f(x)=\begin{cases}1+x, & -1\le x\le 0;\\ 1, & 0\le x\le 1\end{cases}$$

$(n_1 = 2,\ n_2 = 3).$

Варіант 25

$$f(x)=\begin{cases}0, & -2\le x< 0;\\ 2-x, & 0< x\le 2\end{cases}$$

$(n_1 = 3,\ n_2 = 4).$

10.4 Контрольні питання

1) Яка функція є парною?
2) Яка функція є непарною?
3) Які особливості побудови поліному Фур'є для парної функції?
4) Які особливості побудови поліному Фур'є для непарної функції?

ТЕМА 11 МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

11.2 Теоретичні відомості

При побудові рівняння $y = ax + b$, що описує залежність між експериментальними даними *X* і *Y*, методом найменших квадратів коефіцієнти *a* й *b* визначаються за наступними формулами:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2}; \qquad (11.1)$$

$$b = \bar{y} - a \cdot \bar{x}, \qquad (11.2)$$

де $\bar{x}$ - середнє значення змінної x_i

При побудові методом найменших квадратів параболи, яка апроксимує експериментальні дані, необхідно знайти коефіцієнти a, b і c, розв'язавши наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot y_i; \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i; \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i + n \cdot c = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases} \qquad (11.3)$$

Метод лінеаризації функції полягає в тому, щоб застосовуючи штучні прийоми й заміни змінних привести рівняння залежності Y від X $y = f(x)$ до лінійного виду $y = ax + b$, потім застосовуючи МНК знайти параметри a й b і через зворотні перетворення одержати залежність $y = f(x)$.

Таблиця 11.1 – Приведення залежності до лінійного виду

Вид залежності	Перетворення	Заміни змінних	Лінійний вид
$y = ax + b$	–	$x' = x$	$y = ax' + b$
$y = \sqrt{ax + b}$	$y^2 = ax + b$	$y' = y^2$	$y' = ax + b$
$y = a\frac{1}{x} + b$	–	$x' = \frac{1}{x}$	$y = ax' + b$
$y = \frac{1}{ax + b}$	$\frac{1}{y} = ax + b$	$y' = \frac{1}{y}$	$y' = ax + b$
$y = \frac{1}{ax^2 + b}$	$\frac{1}{y} = ax^2 + b$	$y' = \frac{1}{y}; x' = x^2$	$y' = ax' + b$
$y = bx^a$	$\ln y = \ln b + a \ln x$	$y' = \ln y; b' = \ln b$ $x' = \ln x$	$y' = ax' + b'$

11.2 Контрольний приклад

Задача 1

В результаті експерименту відомі залежності між витратами праці на виробництво *1ц* молока (*Y,* людино-днів) і рівнем механізації очищення тваринницьких приміщень (*X)* отримана таблиця(табл. 11.2):

Таблиця 11.2 – Результати експерименту

x_i	0,3	0,7	1,0	1,3	1,5
y_i	2,4	2,2	1,6	1,2	0,7

Побудувати рівняння, що описує залежність між *Y і X.*

Розв’язання

Нанесемо точки з координатами $(x_i\,;y_i)$на координатну площину:

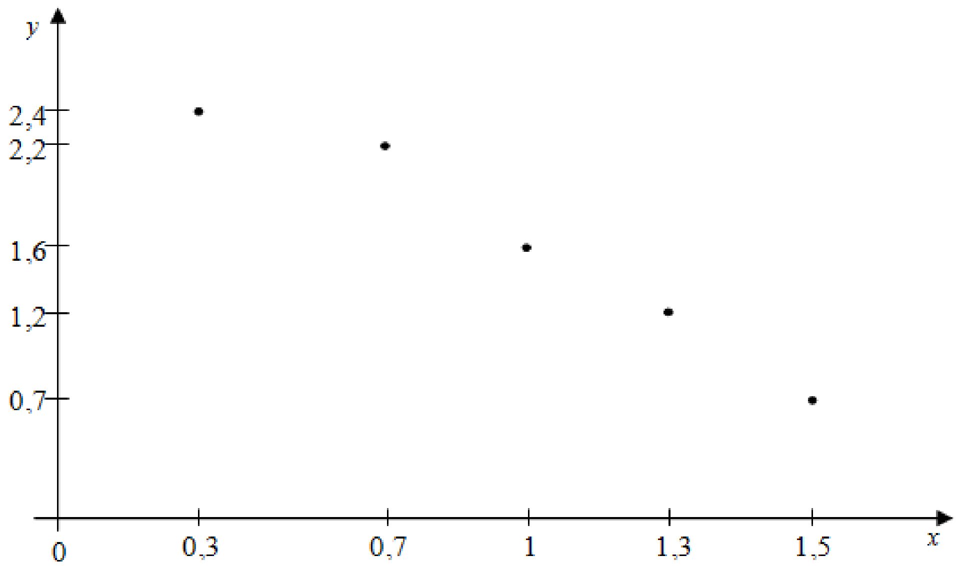


Рисунок 11.1 – Графічне представлення експериментальних даних

Приблизно, експериментальні дані можна згладити прямою $y = a \cdot x + b$.

Для зручності обчислень складемо таблицю (табл. 11.3):

Таблиця 11.3 – Розрахункова таблиця

№	x_i	y_i	x_i^2	$x_i\,y_i$
1	0,3	2,4	0,09	0,72
2	0,7	2,2	0,49	1,54
3	1,0	1,6	1	1,6
4	1,3	1,2	1,69	1,56
5	1,5	0,7	2,25	1,05
$\sum\limits_{i=1}^{n}$	4,8	8,1	5,52	6,47

Знаходимо середні значення змінних $\overline{x}$ й $\overline{y}$:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{4,8}{5} = 0,96; \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = \frac{8,1}{5} = 1,62.$$

Визначимо a і b:

$$a = \frac{6,47 - 5 \cdot 0,96 \cdot 1,62}{5,52 - 5 \cdot 0,96^2} = -1,43;$$

$$b = 1,62 + 1,43 \cdot 0,96 = 2,99$$

Отже, рівняння прямої, що згладжує експериментальні дані має вигляд:

$$y = -1,43 \cdot x + 2,99$$

Побудуємо графік отриманої прямої (рисунок 11.2):

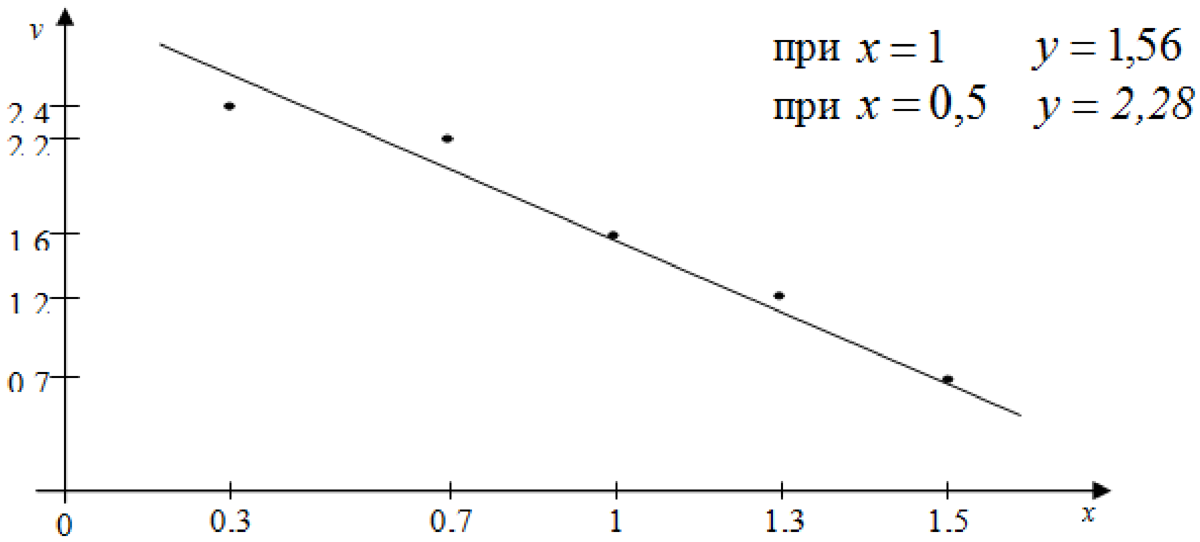


Рисунок 11.2 – Графік апроксимуючої прямої $y = -1,43 \cdot x + 2,99$

Задача 2

Для функції, заданої таблично (табл. 11.4) знайти апроксимуючу залежність.

Таблиця 11.4 – Дослідні дані

x_i	1,1	1	1,3	1,9	1,8
y_i	8,5	6,9	5	2,6	3,6

Розв'язання

Зображуємо в координатній площині дослідні точки $(x_i; y_i)$ (рисунок 11.3):

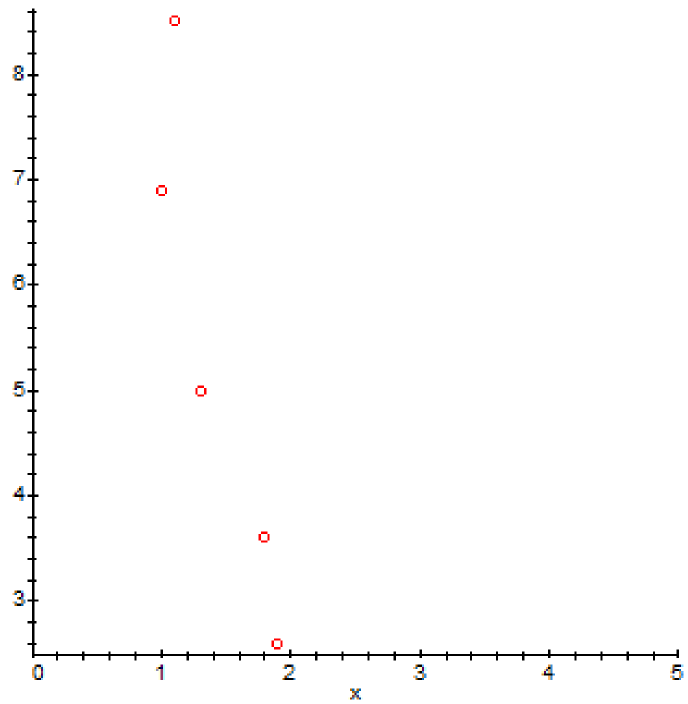


Рисунок 11.3 – Графік експериментальної залежності між Y і X

По виду експериментальної залежності допускаємо, що дослідні дані можуть бути згладжені функціями:

1) $y_1 = ax + b$

2) $y_2 = a\dfrac{1}{x} + b$

Допоміжні розрахунки приведені в таблиці 11.5.

Таблиця 11.5 – Розрахункова таблиця

	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	x_i'	$x_i' y_i$	$(x_i')^2$	$\hat{y}_{1i}$	$\hat{y}_{2i}$	e_{1i}^2	e_{2i}^2
	1,1	8,5	1,21	9,35	0,91	7,73	0,83	7,04	6,96	2,13	2,37
	1	6,9	1	6,9	1,00	6,90	1,00	7,58	7,91	0,46	1,02
	1,3	5	1,69	6,5	0,77	3,85	0,59	5,96	5,50	0,92	0,25
	1,9	2,6	3,61	4,94	0,53	1,37	0,28	2,73	2,96	0,02	0,13
	1,8	3,6	3,24	6,48	0,56	2,00	0,31	3,27	3,27	0,11	0,11
$\sum_{i=1}^{n}$	7,1	26,6	10,75	34,17	3,76	21,84	3,00			3,64	3,88

1) Згладимо експериментальні дані функцією $y_1 = ax + b$.

Знайдемо середні значення

$$\bar{x} = \frac{7{,}1}{5} = 1{,}42; \quad \bar{y} = \frac{26{,}6}{5} = 5{,}32.$$

Обчислимо коефіцієнти a і b:

$$a = \frac{34{,}17 - 5 \cdot 1{,}42 \cdot 5{,}32}{10{,}75 - 5 \cdot 1{,}42^2} = -5{,}39;$$

$$b = 5{,}32 + 5{,}39 \cdot 1{,}42 = 12{,}97$$

Рівняння лінійної залежності має вигляд: $\hat{y}_1 = 12{,}97 - 5{,}39x$.

Обчислимо теоретичні значення $\hat{y}_{1i} = 12{,}97 - 5{,}39x_i$ й отримані результати внесемо в таблицю 11.2.

Визначимо квадрати помилок $e_{1i}^2 = \left(y_i - \hat{y}_{1i}\right)^2$. Отримані дані занесемо в таблицю 11.2.

2) Згладимо дослідні дані гіперболою $\hat{y}_2 = b_0 + b_1 \frac{1}{x}$. Для визначення параметрів регресії, необхідно, використовуючи метод підстановок, привести залежність $y_2 = a\frac{1}{x} + b$ до лінійного виду. Для цього зробимо заміну $x_i' = \frac{1}{x_i}$. Одержимо рівняння $y_2 = ax' + b$.

Знайдемо середнє значення x'

$$\bar{x}' = \frac{3{,}76}{5} = 0{,}752.$$

Обчислимо коефіцієнти a і b

$$a = \frac{21{,}84 - 5 \cdot 0{,}752 \cdot 5{,}32}{3 - 5 \cdot 0{,}752^2} = 10{,}44;$$

$$b = 5{,}32 - 10{,}44 \cdot 0{,}752.$$

Рівняння залежності має вигляд $\hat{y}_2 = \frac{10{,}44}{x} - 2{,}53$.

Обчислимо теоретичні значення $\hat{y}_{2i} = \frac{10{,}44}{x_i} - 2{,}53$ і визначимо квадрати помилок $e_{2i}^2 = \left(y_i - \hat{y}_{2i}\right)^2$. Отримані результати внесемо в таблицю 11. 2.

Висновок: Тому що $\sum_{i=1}^{n} e_{1i}^2 < \sum_{i=1}^{n} e_{2i}^2$, робимо висновок, що пряма $\hat{y} = 12{,}97 - 5{,}39x$ краще згладжує дослідні дані, ніж гіпербола $\hat{y} = \frac{10{,}44}{x} - 2{,}53.$

Завдання для самостійної роботи

1) Для таблично заданої функції методом найменших квадратів знайти апроксимуючі функції $y = ax + b$, $y = ax^b$, $y = ax^2 + bx + c$.

2) За результатами обчислень вибрати функцію, яка є найбільш наближеною до табличних даних

3) Виконати програмну реалізацію (Додаток А)

Дані для виконання завдання взяти з таблиць 11.6 – 11.8

Таблиця 11.6 – Варіанти індивідуальних завдань

№ варіанта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
№ варіанта	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
x	14	15	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2
y	14	15	6	7	8	9	10	1	2	3	4	5	6

Таблиця 11.7 – Значення X

№	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X10	X11	X12
1	2,06	2,53	2,17	3,65	3,22	2,16	4,57	2,25	6,15	1,86	2,07	3,11
2	2,58	3,54	2,90	3,82	3,87	2,65	5,42	2,98	5,66	1,91	3,22	3,15
3	3,14	3,84	3,29	3,76	4,95	3,49	5,29	2,15	7,50	2,14	3,04	3,85
4	3,54	3,84	4,13	5,24	5,10	3,16	6,33	2,71	6,90	3,39	3,42	4,84
5	4,18	4,22	5,25	5,03	5,98	3,85	7,63	3,70	8,31	3,95	5,23	4,62
6	4,78	4,81	4,92	5,52	7,28	4,58	7,53	4,59	8,25	4,30	5,70	4,87
7	5,11	6,53	5,79	5,62	6,90	5,33	7,73	4,77	9,39	5,10	6,53	6,09
8	5,67	5,82	5,87	6,98	7,54	5,89	8,44	5,34	9,73	5,47	6,41	7,06
9	6,02	6,43	6,99	6,91	7,91	6,20	9,49	5,45	9,33	5,97	6,68	6,23
10	6,65	7,73	7,04	7,95	8,40	6,39	9,18	6,00	10,50	6,16	7,46	6,83
11	7,05	8,19	8,14	7,24	8,14	6,95	10,14	6,25	11,10	6,46	6,83	8,01
12	7,52	7,65	8,06	9,27	8,76	7,25	9,94	6,79	11,51	6,07	6,34	8,26
13	8,03	9,31	8,57	8,46	9,67	7,80	10,92	8,24	12,42	6,71	8,19	9,37
14	8,56	9,26	9,45	10,30	10,28	8,47	11,89	8,51	12,40	7,16	7,19	9,02
15	9,03	9,86	9,06	10,72	10,59	9,22	11,14	9,15	13,14	8,81	9,72	9,76

Таблиця 11.8 – Значення Y

№	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6	Y7	Y8	Y9	Y10	Y11	Y12
1	7,24	10,89	16,21	12,11	15,21	16,62	10,22	12,50	19,66	14,87	22,68	10,65
2	8,02	11,92	17,75	12,30	15,42	17,63	10,58	13,88	20,53	15,78	23,89	11,87
3	9,28	12,45	18,39	13,82	16,44	19,22	12,01	15,16	21,31	16,79	24,32	12,96
4	10,12	13,27	18,87	14,84	17,93	19,36	12,84	16,06	22,59	18,03	25,97	13,40
5	11,12	14,12	19,60	15,86	18,52	20,52	13,28	16,66	23,27	18,29	26,23	15,12
6	12,19	15,23	21,21	16,41	19,80	21,95	15,13	17,65	24,44	19,93	27,60	16,03
7	13,01	16,07	21,84	17,80	20,76	22,45	15,84	18,46	25,85	20,32	28,13	16,29
8	14,12	17,40	23,00	18,61	21,30	23,56	17,08	19,54	26,74	21,18	29,84	18,07
9	15,21	18,68	24,44	19,57	22,25	24,90	17,99	20,58	27,36	22,47	30,31	18,40
10	16,29	19,46	25,36	21,26	24,14	25,53	18,32	21,77	28,37	23,47	31,52	19,53
11	17,01	20,52	25,54	21,08	24,17	26,11	19,49	22,15	29,22	24,07	32,27	20,48
12	18,03	21,32	27,14	22,99	25,66	28,02	20,59	23,80	30,50	25,57	33,77	21,72
13	19,19	22,58	27,95	23,43	26,50	28,37	21,35	24,79	31,21	27,07	34,68	23,17
14	20,21	23,73	28,99	24,63	27,46	29,46	23,20	25,57	32,56	27,62	35,93	23,57
15	21,22	25,02	30,80	25,41	29,02	30,42	24,21	27,18	33,66	28,42	36,97	24,41

11.3 Контрольні питання

1. У чому складається суть методу найменших квадратів?
2. Як побудувати лінійне рівняння залежності між експериментальними даними?
3. Чи можна застосувати метод найменших квадратів у випадку, коли експериментальні дані згладжуються кривою?

ТЕМА 12 ЧИСЕЛЬНЕ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

12.1 Теоретичні відомості

Задача чисельного диференціювання полягає у знаходженні значень похідних функції y= f(x) у заданих точках у випадку, коли аналітичний запис функції f(x) невідомий або дуже складний чи функція задана таблично. Привабливість чисельного підходу здебільшого пояснюється наявністю простих залежностей, за допомогою яких похідні в заданих точках можна апроксимувати декількома значеннями функції в цих і близьких до них точках.

Для таблично заданої функції перша похідна для значення x чисельно обчислюється за формулою:

$$y'(x) \approx \frac{1}{h}\left(\Delta y_n - \frac{1}{2!}(2t-1)\Delta^2 y_n + \left(3t^3 - 6t + 2\right)\frac{\Delta^3 y_n}{3!} + \dots \right), \qquad (12.1)$$

де $t = \dfrac{x - x_n}{h}$, x_n – найближчий найменший вузол до x.

Друга похідна для таблично заданої функції для значення xчисельно обчислюється за формулою:

$$y''(x) = \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_n + (t-1)\Delta^3 y_n + \ldots\right) \qquad (12.2)$$

12.2 Контрольний приклад

Задача 1

Для функції, заданої таблично (табл.12.1) визначити першу й другу похідні в точках $x_0 = 1{,}2$ та $x_0 = 2{,}23$

Таблиця 12.1 – Таблично задана функція

i	0	1	2	3	4	5	6	7
x_i	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4	2,8	3,2	3,6
y_i	2,857	3,946	4,938	5,801	6,503	7,010	7,288	7,301

Розв'язання

Будуємо таблицю кінцевих різниць (табл. 12.2)

Таблиця 12.2 – Кінцеві різниці

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
0,8	2,855	–	–	–
1,2	**3,946**	1,089	–	–
1,6	4,938	**0,992**	-0,097	–
2,0	**5,801**	0,863	**-0,129**	-0,032
2,4	6,503	**0,702**	-0,161	**-0,032**
2,8	7,010	0,507	**-0,195**	-0,034
3,2	7,288	0,278	-0,229	**-0,034**
3,6	7,301	0,013	-0,265	-0,036

а) Знаходимо похідні функції при $x_0 = 1{,}2$

$$y'(x_0) \approx \frac{1}{h}\left(\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 + \ldots \right);$$

$$y''(x_0) = \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \ldots\right)$$

Визначаємо крок $h = 0{,}4$

Так як $t = \dfrac{1{,}2 - 1{,}2}{0{,}4} = 0$, то

$$y'(x_0) \approx \frac{1}{h}\left(\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 + \ldots \right);$$

$$y''(x_0) = \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \ldots\right)$$

$h = 0{,}4$

$$y'(1{,}2) \approx \frac{1}{0{,}4}\left(0{,}992 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}129 - \frac{1}{3}\cdot 0{,}032 \right) = 2{,}615$$

$$y''(1{,}2) \approx \frac{1}{0{,}4^2}\left(-0{,}129 + 0{,}032\right) = -0{,}606$$

б) Знаходимо похідні функції при $x_0 = 2{,}23;\ \ x = 2,\ t = \dfrac{x - x_k}{h}$.

$$y'(x_0) = \frac{1}{h}\left(\Delta y_k + (2t-1)\frac{\Delta^2 y_k}{2!} + \left(3t^2 - 6t + 2\right)\frac{\Delta^3 y_k}{3!} + \ldots \right);$$

$$y''(x_0) = \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_k + (t-1)\Delta^3 y_k + \ldots\right)$$

$$t = \frac{2{,}23 - 2}{0{,}4} = 0{,}575$$

$$y'(2{,}23) = \frac{1}{0{,}4}\left(0{,}702 + (2\cdot 0{,}575 - 1)\frac{-0{,}195}{2} + \right.$$

$$\left. + \left(3\cdot 0{,}575^3 - 6\cdot 0{,}575 + 2\right)\cdot \frac{-0{,}034}{6}\right) = 1{,}73$$

$$y''(2{,}23) = \frac{1}{0{,}4^2}\left(-0{,}195 + (0{,}575 - 1)(-0{,}034)\right) = -1{,}128$$

Завдання для самостійної роботи

1. Для функції, заданої таблично, визначити першу та другу похідні в точці X
2. Виконати програмну реалізацію (Додаток А)

Варіант 1 X=0.55

i	0	1	2	3	4	5
x_i	-0,5	-0,4	0,5	0,6	1,5	1,6
y_i	-1,202	-1,724	-0,07	0,488	-0,65	-1,233

Варіант 2 X =0,6

i	0	1	2	3	4	5
x_i	-0,55	0,05	0,65	1,25	1,85	2,45
y_i	2,418	2,061	2,031	2,34	2,879	3,461

Варіант 3 X =0,4

i	0	1	2	3	4	5
x_i	-1	-0,56	-0,12	0,32	0,76	1,2
y_i	0,328	0,17	0,252	0,513	0,765	0,825

Варіант 4 X =1,2

i	0	1	2	3	4	5
x_i	-1	0,2	1,4	2,6	3,8	5
y_i	-1,336	-1,371	-1,066	-0,529	0,054	0,478

Варіант 5 X =0,2

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	0,22	0,44	0,66	0,88	1,1
y_i	1,003	1,419	2,257	2,909	2,901	2,239

Варіант 6 X =-1,3

i	0	1	2	3	4	5
x_i	-6	-4,7	-3,4	-2,1	-0,8	0,5
y_i	-1,71	-1,318	-1,204	-1,415	-1,864	-2,369

Варіант 7 X=-0,9

i	0	1	2	3	4	5
x_i	-4	-3,1	-2,2	-1,3	-0,4	0,5
y_i	-1,942	-1,756	-1,45	-1,031	-0,515	0,082

Варіант 8 X=0,3

i	0	1	2	3	4	5
x_i	-1	-0,7	-0,4	-0,1	0,2	0,5
y_i	-2,758	-2,996	-2,859	-2,45	-2,079	-2,027

Варіант 9 X=-0,3

i	0	1	2	3	4	5
x_i	-2	-1,7	-1,4	-1,1	-0,8	-0,5
y_i	5,688	4,208	2,571	2,016	2,961	4,693

Варіант 10 X=0,3

i	0	1	2	3	4	5
x_i	-1	-0,7	-0,4	-0,1	0,2	0,5
y_i	2,635	2,477	1,148	1,91	2,892	1,684

Варіант 11 X=0.5

i	0	1	2	3	4	5
x_i	-5	-4	-3	-2	-1	0
y_i	25	16	9	4	17	28

Варіант 12 X=0,2

i	0	1	2	3	4	5
x_i	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5
y_i	1	0,25	0	0,25	-1	-1,75

Варіант 13 X=2,7

i	0	1	2	3	4	5
x_i	-7,5	-5	-2,5	0	2,5	5
y_i	4	0,25	9	30,25	51,5	60,25

Варіант 14 X=1,5

i	0	1	2	3	4	5
x_i	-3,5	-2	-0,5	1	2,5	4
y_i	11,25	3	-0,75	0	-2,25	0

Варіант 15 X=2

i	0	1	2	3	4	5
x_i	-6,5	-4,5	-2,5	-0,5	1,5	3,5
y_i	86	54	30	14	26	30

Варіант 16 X=2

i	0	1	2	3	4	5
x_i	-6,5	-4,5	-2,5	-0,5	1,5	3,5
y_i	130	94	66	46	38,0	38,0

Варіант 17 X=1,6

i	0	1	2	3	4	5
x_i	-3,5	-2	-0,5		1,5	3
y_i	53	37,25	26	23,25	23	37,25

Варіант 18 X=0,2

i	0	1	2	3	4	5
x_i	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5
y_i	9	6,25	4	2,25	3	4,25

Варіант 19 X=0.1

i	0	1	2	3	4	5
x_i	-5	-4	-3	-2	-1	0
y_i	-50	-31	-14	1	-12	-23

Варіант 20 X=2,6

i	0	1	2	3	4	5
x_i	-7,5	-5	-2,5	0	2,5	5
y_i	106,25	50	6,25	-25	6,25	50

Варіант 21 X=5,5

i	0	1	2	3	4	5
x_i	3	4,5	6	7,5	9	10,5
y_i	19,07	19,57	20,3	20,87	20,97	20,56

Варіант 22 X=2

i	0	1	2	3	4	5
x_i	-1,5	0,5	2,5	4,5	6,5	8,5
y_i	34	34,42	35,38	35,98	35,68	34,76

Контрольні питання:

1) Що таке чисельне диференціювання?
2) Сформулюйте постановку задачі диференціювання функцій.
3) Як обчислити похідну функції, заданої таблично?
4) Як оцінити похибку обчислення?
5) Який інтерполяційний багаточлен є найбільш зручним для чисельного диференціювання?

ТЕМА 13 ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

13.1 Теоретичні відомості

Щоб обчислити наближене значення інтеграла

$$\mathrm{I} = \int_a^b f(x)dx$$

де $f(x) \in C_2[a,b]$, необхідно відрізок $[a,b]$ розділити на n рівних відрізків завдовжки $h = \dfrac{b-a}{n}$.

Формула «лівих» прямокутників має вигляд:

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_n = h\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}); \tag{13.1}$$

Формула «правих» прямокутників має вигляд:

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_n = h\sum_{i=1}^{n} f(x_i); \tag{13.2}$$

Формула «середніх» прямокутників має вигляд:

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_n = h\sum_{i=1}^{n} f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right).$$

Для оцінки похибки формули прямокутників Δ_{np} застосовується формула

$$|R(f)| \le \frac{(b-a)^3}{24n^2} M_2 = \frac{h^2 M_2}{24}(b-a),$$

де $M_2 = \max\limits_{a \le x \le b} |f''(x)|$, $f(x)$– підінтегральна функція,

$[a;b]$– відрізок інтегрування,

h – крок інтегрування ($h = \dfrac{b-a}{n}$).

Формула трапецій має вигляд:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{f_0}{2} + f_1 + ... + f_{n-1} + \frac{f_n}{2}\right) \tag{13.3}$$

Абсолютну похибку формули трапецій обчислюємо за формулою

$$|R(f)| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2 = \frac{h^2 M_2}{12}(b-a) \tag{13.4}$$

де $M_2 = \max\limits_{a \le x \le b} |f''(x)|$.

Узагальнена формула Сімпсона (парабол) має вигляд:

$$S_n = \frac{h}{3}(v_0 + 4v_1 + 2v_2),$$

де $v_0 = f(x_0) + f(x_n) = f(a) + f(b)$,

$$v_1 = f(x_1) + f(x_3) + \ldots + f(x_{2k-1}) + \ldots + f(x_{n-1}) = \sum_{k=1}^{m} f(x_{2k-1})$$

(значення функції в точках з непарними номерами);

$$v_2 = f(x_2) + f(x_4) + \ldots + f(x_{2k}) + \ldots + f(x_{n-2}) = \sum_{k=1}^{m-1} f(x_{2k})$$

(значення функції в точках з парними номерами).

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_n = \frac{h}{3}\left(f(a) + f(b) + 4\sum_{k=1}^{m} f(x_{2k-1}) + 2\sum_{k=1}^{m-1} f(x_{2k})\right) \tag{13.5}$$

Залишковий член узагальненої формули Сімпсона обчислюється за формулою

$$|R(f)| \le \frac{h^4}{180}(b-a)M_4 = \frac{(b-a)^5}{2880m^4} M_4 \tag{13.6}$$

де $M_4 \max\limits_{[a,b]}\left| f^{(IV)}(x)\right|$.

На практиці, зазвичай, за абсолютну похибку значення інтеграла $S(h)$, приймають число

$$\Delta_h = \frac{|S(h) - S(2h)|}{3}$$

13.2 Контрольний приклад

Задача 1

За допомогою формул «правих прямокутників», трапецій і Сімпсона обчислити інтеграл

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^3}$$

з розбиттям відрізка інтегрування $[0;1]$ на 5 рівних частин і оцінити значення абсолютної похибки.

Розв'язання

Побудуємо таблицю значень функції $f_i = \dfrac{1}{1 + x_i^3}$, з кроком $h = 0{,}2$

Таблиця 13.1 – Розрахункові дані

i	x_i	f_i
0	0	1
1	0,2	0,99206
2	0,4	0,93985
3	0,6	0,82237
4	0,8	0,66137
5	1	0,5

Формула «правих прямокутників» має вигляд:

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_n = h\sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$

Обчислюємо

$$S_5 = 0.2 \cdot (0{,}99206 + 0{,}93985 + 0{,}82237 + 0{,}66137 + 0{,}5) = 0{,}821401$$

Побудуємо таблицю значень функції $f_i = \dfrac{1}{1+x_i^3}$, з кроком $h = 0{,}1$

(табл. 13.2)

.Таблиця 13.2 – Розрахункові дані

i	x_i	f_i
0	0	1
1	0,1	0,99900
2	0,2	0,99206
3	0,3	0,97371
4	0,4	0,93985
5	0,5	0,88889
6	0,6	0,82237
7	0,7	0,74460
8	0,8	0,66137
9	0,9	0,57837
10	1	0,5

Формула «правих прямокутників» має вигляд:

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_n = h\sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$

Обчислюємо

$$S_{10} = 0{,}1\cdot(0{,}99900+0{,}99206+0{,}97371+0{,}93985+0{,}88889+0{,}82237+$$
$$+0{,}74460+0{,}66137+0{,}57837+0{,}5) = 0{,}830023.$$

Визначимо оцінку похибки

$$\Delta_h = \frac{|S(0{,}1)-S(0{,}2)|}{3},$$

$$\Delta_h = \frac{|0{,}830023-0{,}821401|}{3} = 0{,}0029.$$

Обчислимо інтеграл за формулою трапецій:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{f_0}{2} + f_1 + \ldots + f_{n-1} + \frac{f_n}{2}\right).$$

Обчислюємо

$$S_5 = 0{,}2\cdot(\frac{1}{2}+0{,}99206+0{,}93985+0{,}82237+0{,}66137+\frac{0{,}5}{2}) = 0{,}833132.$$

$$S_{10} = 0{,}1\cdot(\frac{1}{2}+0{,}999+0{,}99206+0{,}97371+0{,}93985+0{,}88889+0{,}82237+$$
$$+0{,}74460+0{,}66137+0{,}57837+\frac{0{,}5}{2}) = 0{,}835022.$$

Визначимо оцінку похибки

$$\Delta_h = \frac{|0{,}835022-0{,}833132|}{3} = 0{,}00063.$$

Обчислимо інтеграл за формулою Сімпсона:

$$S_n = \frac{h}{3}\left(v_0 + 4v_1 + 2v_2\right).$$

Знаходимо:

$$v_0 = f(a) + f(b) = 1 + 0{,}5 = 1{,}5,$$

$$v_1 = f(x_1) + f(x_3) = 0{,}99206 + 0{,}82237 = 1{,}81443,$$

$$v_2 = f(x_2) + f(x_4) = 0{,}93985 + 0{,}66137 = 1{,}60122,$$

$$S_5 = \frac{0{,}2}{3} \cdot (1{,}5 + 4 \cdot 1{,}81443 + 2 \cdot 1{,}60122) = 0{,}79735.$$

Знаходимо:

$$v_0 = f(a) + f(b) = 1 + 0{,}5 = 1{,}5,$$

$$v_1 = f(x_1) + f(x_3) + f(x_5) + f(x_7) + f(x_9) = 0{,}999 + 0{,}97371 +$$
$$+ 0{,}88889 + 0{,}74460 + 0{,}57837 = 4{,}18457$$

$$v_2 = f(x_2) + f(x_4) + f(x_6) + f(x_8) = 0{,}99206 + 0{,}93985 + 0{,}82237 +$$
$$+ 0{,}66137 = 3{,}41565$$

$$S_{10} = \frac{0{,}1}{3} \cdot (1{,}5 + 4 \cdot 4{,}18457 + 2 \cdot 3{,}41565) = 0{,}83565.$$

Визначимо оцінку похибки

$$\Delta_h = \frac{|0{,}83565 - 0{,}79735|}{3} = 0{,}013.$$

Завдання для самостійної роботи

1) Обчислити інтеграл за формулою трапецій з розбиттям відрізка інтегрування на 8 рівних частин і оцінити значення абсолютної похибки.

2) Обчислити інтеграл за формулою Сімпсона з розбиттям відрізка інтегрування на 8 рівних частин і оцінити значення абсолютної похибки.

3) Виконати програмну реалізацію (Додаток А)

Варіант 1

1) $\int\limits_{0,8}^{1,6} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+1}}$ 2) $\int\limits_{1,2}^{2} \frac{\lg(x+2)}{x}dx$

Варіант 2

1) $\int\limits_{1,2}^{2,7} \frac{dx}{\sqrt{x^2+3,2}}$ 2) $\int\limits_{1,6}^{2,4} (x+1)\sin x dx$

Варіант 3

1) $\int\limits_{1,2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+1,3}}$ 2) $\int\limits_{0,2}^{1} \frac{tg(x^2)}{x^2+1}dx$

Варіант 4

1) $\int\limits_{0,2}^{1,2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ 2) $\int\limits_{0,6}^{1,4} \frac{\cos x}{x+1}dx$

Варіант 5

1) $\int\limits_{0,8}^{1,4} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+3}}$ 2) $\int\limits_{0,4}^{1,2} \sqrt{x}\cos(x^2)dx$

Варіант 6

1) $\int\limits_{0,4}^{1,2} \frac{dx}{\sqrt{2+0,5x^2}}$ 2) $\int\limits_{0,8}^{1,2} \frac{\sin(2x)}{x^2}dx$

Варіант 7

1) $\int\limits_{1,4}^{2,1} \frac{dx}{\sqrt{3x^2-1}}$ 2) $\int\limits_{0,8}^{1,6} \frac{\lg(x^2+1)}{x}dx$

Варіант 8

1) $\int\limits_{1,2}^{2,4} \frac{dx}{\sqrt{0,5+x^2}}$ 2) $\int\limits_{0,4}^{1,2} \frac{\cos x}{x+2}dx$

Варіант 9

1) $\int\limits_{0,4}^{1,2} \frac{dx}{\sqrt{3+x^2}}$ 2) $\int\limits_{0,4}^{1,2} (2x+0,5)\sin dx$

Варіант 10

1) $\int\limits_{0,6}^{1,5} \frac{dx}{\sqrt{1+2x^2}}$ 2) $\int\limits_{0,4}^{0,8} \frac{tg\left(x^2+0,5\right)}{1+2x^2}dx$

Варіант 11

1) $\int\limits_{2}^{3,5} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$ 2) $\int\limits_{0,18}^{0,98} \frac{\sin x}{x+1}dx$

Варіант 12

1) $\int\limits_{0,5}^{1,3} \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$ 2) $\int\limits_{0,2}^{0,18} \sqrt{x+1}\cos\left(x^2\right)dx$

Варіант 13

1) $\int\limits_{2,2}^{2,6} \frac{dx}{\sqrt{x^2+0,6}}$ 2) $\int\limits_{1,4}^{3} x^2 \lg x dx$

Варіант 14

1) $\int\limits_{1,4}^{2,2} \frac{dx}{\sqrt{3x^2+1}}$ 2) $\int\limits_{1,4}^{2,2} \frac{\lg\left(x^2+2\right)}{x+1}dx$

Варіант 15

1) $\int\limits_{0,8}^{1,8} \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$ 2) $\int\limits_{0,4}^{1,2} \frac{\cos(x^2)}{x+1}dx$

Варіант 16

1) $\int\limits_{1,6}^{2,2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+2,5}}$ 2) $\int\limits_{0,8}^{1,6} (x^2+1)\sin(x-0,5)dx$

Варіант 17

1) $\int\limits_{0,6}^{1,6} \frac{dx}{\sqrt{x^2+0,8}}$ 2) $\int\limits_{0,6}^{1,4} x^2 \cos x dx$

Варіант 18

1) $\int\limits_{1,2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1,2}}$ 2) $\int\limits_{1,2}^{2} \frac{\lg(x^2+3)}{2x}dx$

Варіант 19

1) $\int\limits_{1,4}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+0,7}}$ 2) $\int\limits_{2,5}^{3,3} \frac{\lg(x^2+0,8)}{x-1}dx$

Варіант 20

1) $\int\limits_{3,2}^{4} \frac{dx}{\sqrt{0,5x^2+1}}$ 2) $\int\limits_{0,5}^{1,2} \frac{tg(x^2)}{x+1}dx$

Варіант 21

1) $\int\limits_{0,8}^{1,7} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+3}}$ 2) $\int\limits_{1,3}^{2,1} \frac{\sin\left(x^2-1\right)}{2\sqrt{x}}dx$

Варіант 22

1) $\int\limits_{1,2}^{2,0} \frac{dx}{\sqrt{0,5x^2+15}}$ 2) $\int\limits_{0,2}^{1,0} (x+1)\cos\left(x^2\right)dx$

Варіант 23

1) $\int\limits_{2,1}^{3,6} \frac{dx}{\sqrt{x^2-3}}$ 2) $\int\limits_{0,8}^{1,2} \frac{\sin\left(x^2-0,4\right)}{x+2}dx$

Варіант 24

1) $\int\limits_{1,3}^{2,5} \frac{dx}{\sqrt{0,2x^2+1}}$ 2) $\int\limits_{0,15}^{0,63} \sqrt{x+1}\lg(x+3)dx$

Варіант 25

1) $\int\limits_{0,8}^{1,4} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+0,5}}$ 2) $\int\limits_{1,2}^{2,8} \frac{\lg\left(1+x^2\right)}{2x-1}dx$

Контрольні питання

1) Що таке чисельне інтегрування?
2) Як визначити певний інтеграл по формулі трапецій?
3) Як визначити певний інтеграл по формулі Симпсона?
4) Як визначити певний інтеграл по формулі прямокутників?
5) Як оцінити погрішність обчислень?

ТЕМА 14 ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ

14.1 Теоретичні відомості

При розв'язанні задачі Коші аналітичним методом розв'язок необхідно представити у вигляді ряду Тейлора:

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots$$

Якщо задача розв'язується на відрізку $[x_1; x_2]$ із заданою точністю, то коефіцієнти ряду знаходять доти, доки не буде виконуватися наступна умова:

$$\left| \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \right| < \varepsilon \text{ для всіх } x \in [x_1; x_2].$$

Алгоритм методу ітерацій

1. Обираємо нульове наближення $y_0(x)$, яке задовольняє початковій умові.

2. Наступні наближення визначаємо за формулою:

$$\varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \varphi_{n-1}(x))dx.$$

3. Якщо різниця в околиці точки x_0 $|\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)| < \varepsilon$, то процес закінчено та $y(x) = \varphi_n(x)$приймається за розв'язок задачі Коші. В іншому випадку повертаємося до пункт 2.

Алгоритм методу Ейлера

1. Задаємо число точок число n точок розбиття відрізка $[x_0; x_0 + a]$ та обчислюємо крок $h = \frac{a}{n}$. Вважаємо відомими x_0, y_0.

2. Нехай визначено x_k, y_k. Знаходимо:

$$y'(x_k) = f(x_k, y_k), y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k)h, x_{k+1} = x_k + h$$

Алгоритм модифікованого методу Ейлера

1. Задаємо число точок число n точок розбиття відрізка $[x_0; x_0 + a]$ та обчислюємо крок $h = \frac{a}{n}$. Вважаємо відомими x_0, y_0.

2. Нехай визначено x_k, y_k. Знаходимо:

$$x_{k+\frac{1}{2}} = x_k + \frac{h}{2}, y_{k+\frac{1}{2}} = y_k + f(x_k, y_k)\frac{h}{2},$$

$$\alpha_k = f\left(x_{k+\frac{1}{2}}, y_{k+\frac{1}{2}}\right),$$

$$x_{k+1} = x_k + h, \qquad y_{k+1} = y_k + a_k h.$$

Алгоритм методу Рунге-Кутта

1. Задаємо число точок число n точок розбиття відрізка $[x_0; x_0 + a]$ та обчислюємо крок $h = \frac{a}{n}$. Вважаємо відомими x_0, y_0.

2. Нехай визначено x_k, y_k. Знаходимо:

$$\alpha_{1k} = f(x_k, y_k), \alpha_{2k} = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \alpha_{1k}\frac{h}{2}\right),$$

$$\alpha_{3k} = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \alpha_{2k}\frac{h}{2}\right), \alpha_{4k} = f(x_k + h, y_k + \alpha_{3k}h),$$

$$\alpha_k = \frac{1}{6}\left(a_{1k} + 2\alpha_{2k} + 2\alpha_{3k} + \alpha_{4k}\right)$$

$$y_{k+1} = y_k + \alpha_k h, x_{k+1} = x_k + h.$$

14.2 Контрольний приклад

Задача 1

Аналітичним методом розв’язати задачу Коші

$$y' = x^2 - y^2, \quad y(0) = 2.$$

Зробити оцінку похибки, якщо $x \in [0;0,5]$.

Розв’язання

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \ldots$$

$$y(0) = 2$$

$$y'(x) = x^2 - y^2 \qquad y'(0) = 2 \cdot 0 - 2^2 = -4$$

$$y''(x) = 2x - 2yy' \qquad y''(0) = 2 \cdot 0 - 2 \cdot 2 \cdot (-4) = 16$$

$$y'''(x) = 2 - 2y' \cdot y' - 2yy'' \qquad y'''(0) = 2 - 2 \cdot (-4)^2 - 2 \cdot (2) \cdot 16 = -94$$

$$y^{(4)}(x) = -2 - 2y'y'' - 2y'y'' - 2yy''' = -6y'y'' - 2yy'''$$

$$y^{(4)}(0) = -2 \cdot 2 \cdot (-4) \cdot 16 - 2 \cdot (-4) \cdot 16 - 2 \cdot 2 \cdot (-94) = 25,6 + 128 + 376 = 760$$

$$y^{(5)}(x) = -6\left((y'')^2 + y'y'''\right) - 2\left(y'y''' + y \cdot y^{(4)}\right) = -6\left(y^4\right)^2 - 8y'y''' - 2yy^{(4)}$$

;

$$y(x)\approx 2-4x+8x^2-\frac{47}{3}x^3+\frac{760}{4!}x^4-\frac{7584}{5!}x^5+\ldots$$

$$y^{(5)}(0)=-6\cdot 16^2-8\cdot(-4)(-94)-2\cdot 2\cdot 760=-1536-3008-3040=-7584$$

$$|y'(x_0)x|=|-4x_0|\le|-4\cdot 0{,}5|=2$$

$$\left|\frac{y''(x_0){x_0}^2}{2}\right|=\left|\frac{16\cdot x^2}{2}\right|\le|8\cdot 0{,}25|=2$$

$$\left|\frac{y'''(x_0){x_0}^3}{2\cdot 3}\right|=\left|\frac{94}{6}\cdot x^3\right|\le\left|\frac{94}{6}\cdot 0{,}5^3\right|=1{,}9583$$

$$\left|\frac{y^{(4)}(x_0){x_0}^4}{2\cdot 3\cdot 4}\right|=\left|\frac{760}{24}\cdot x^4\right|\le\left|31{,}66\cdot 0{,}5^4\right|=1{,}97916$$

$$\left|\frac{y^{(5)}(x_0)x^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\right|=\left|\frac{7584\cdot x^5}{120}\right|\le\left|\frac{7584\cdot 0{,}5^5}{120}\right|=1{,}975$$

Відповідь: $y(x)\approx 2-4x+8x^2-\frac{47}{3}x^3+\frac{760}{4!}x^4-\frac{7584}{5!}x^5+\ldots,$ $\Delta\le 1{,}975$

Задача 2

Розв’язати задачу Коші методом ітерацій.

$$y'=x^2-y^2,\quad y(0)=2.$$

Розв’язання

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,y)dx;$$

$$y_0=2;$$

$$y_1 = 2 + \int_0^x \left(x^2 - 4\right)dx = 2 - 4x + \frac{x^3}{3};$$

$$y_2 = 2 + \int_0^x \left(x^2 - \left(2 - 4x + \frac{x^3}{3} \right) \right) dx =$$

$$= 2 + \int_0^x \left(-4 + 16x - 15x^2 - \frac{4}{3}x^3 - \frac{8}{3}x^4 - \frac{1}{9}x^6 \right) dx =$$

$$= 2 - 4x + 8x^2 - 5x^3 - \frac{x^4}{3} + \frac{8}{15}x^5 - \frac{1}{63}x^7;$$

$$|y_2 - y_1| = \left| 8x^2 - 5x^3 - \frac{x^4}{3} + \frac{8}{15}x^5 - \frac{1}{63}x^7 \right|;$$

$$\max_{[0;0,5]} |y_2 - y_1| = |y_2 - y_1|_{x=0,5} = 1,329$$

Задача 3

Розв'язати задачу Коші методом Ейлера

$$y' = x^2 - y^2, \quad y(0) = 2.$$

Зробити оцінку похибки, якщо $x \in [0;0,5]$.

Розв'язання

$$y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}; y_{n-1})h$$

$$h = \frac{0,5}{5} = 0,1 \qquad n = 5$$

$$x_0 = 0; x_1 = 0,1; x_3 = 0,2; x_3 = 0,3; x_4 = 0,4; x_5 = 0,5$$

Таблиця 14.1 – Розрахункові дані

i	x_i	y_i	$f(x_i;y_i)$	$2h$ x_i	y_i	$f(x_i;y_i)$
0	0	2	-4	0	2	-4
1	0,1	1,6	-2,55			
2	0,2	1,345	-1,769	0,2	1,2	-1,4
3	0,3	1,168	-1,277			
4	0,4	1,041	-0,924	0,4	0,92	-0,686
5	0,5	0,949	-0,651			

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h = 2 + (-4)\cdot 0{,}1 = 2 - 0{,}4 = 1{,}6$$

$$\Delta(y_2) = |1{,}2 - 1{,}345| = 0{,}145$$

$$\Delta(y_1) = |1{,}041 - 0{,}92| = 0{,}121$$

Оцінка похибки

$$\Delta(y_n) = |y_n(h) - y_n(2h)|$$

$$\max|\Delta y_n| = 0{,}145$$

Порівняємо результати з попередньою задачею.

Таблиця 14.2 – Порівняння розрахунків

x_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$y_i(2)$ метод Ейлера	2	1,6	1,345	1,168	1,041	-0,924
$y_i(3)$ метод ітерацій	2	1,675	1,48	1,384	1,357	1,371

Задача 4

Розв’язати задачу Коші модифікованим методом Ейлера

$$y' = x^2 - y^2, \quad y(0) = 2.$$

Зробити оцінку похибки, якщо $x \in [0;0{,}5]$.

Розв’язання

$$h = 0{,}1; \frac{h}{2} = 0{,}05$$

Таблиця 14.3 – Розрахункові дані

i	x_i	$x_{i+0,5}$	$y_{i+0,5}$	y_i	$f(x_i; y_i)$	$\alpha_i = f(x_{i+0,5}; y_{i+0,5})$
0	0	0,05	1,8	2	-4	-3,238
1	0,1	0,15	1,536	1,676	-2,799	-2,337
2	0,2	0,25	1,34	1,442	-2,039	-1,733
3	0,3	0,35	1,193	1,269	-1,52	-1,301
4	0,4	0,45	1,082	1,139	-1,137	-0,968
5	0,5			1,042		

Оцінка похибки:

$$h = 0{,}2 \qquad \frac{h}{2} = 0{,}1$$

Таблиця 14.4 – Розрахункові дані

i	x_i	$x_{i+0,5}$	$y_{i+0,5}$	y_i	$f(x_i; y_i)$	α_i
0	0	0,1	1,601	2	-4	-2,553
1	0,2	0,3	1,271	1,489	-2,177	-1,525
2	0,4	0,5		1,184		

$$\Delta(y_2) = \frac{1}{3}|1{,}489 - 1{,}442| = \frac{0{,}047}{3} = 0{,}0157$$

$$\Delta(y_4) = \frac{1}{3}|1{,}184 - 1{,}139| = \frac{0{,}042}{3} = 0{,}015$$

Задача 5

Розв'язати задачу Коші методом Рунге-Кутта

$$y' = x^2 - y^2, \quad y(0) = 2.$$

Зробити оцінку похибки, якщо $x \in [0;0{,}5]$.

Розв'язання

Обчислюємо крок $h = \dfrac{0{,}5 - 0}{5} = 0{,}1$.

Складаємо допоміжну таблицю (табл. 14.5)

Таблиця 14.5 – Допоміжні розрахунки

i	x_i	y_i	α_{1i}	α_{2i}	α_{3i}	α_{4i}	α_i
0	0	2	-4	-3,2375	-3,3762	-2,7535	-3,3302
1	0,1	1,667	-2,7689	-2,314	-2,384	-2,0009	-2,361
2	0,2	1,4309	-2,0075	-1,7078	-1,7479	-1,4878	-1,7345
3	0,3	1,2575	-1,4913	-1,2768	-1,3023	-1,1107	-1,2934
4	0,4	1,1282	-1,1128	-0,9479	-0,9656	-0,8143	-0,959
5	0,5	1,0323					

$$\alpha_{10} = 0^2 - 2^2 = -4,$$

$$\alpha_{20} = 0{,}05^2 - \left(2 + (-4)\cdot\frac{0{,}1}{2}\right)^2 = -3{,}2375,$$

$$\alpha_{30} = 0{,}05^2 - \left(2 + (-3{,}2375)\cdot\frac{0{,}1}{2}\right)^2 = -3{,}3762,$$

$$\alpha_{40} = 0{,}1^2 - \left(2 + (-3{,}3762)\cdot 0{,}1\right)^2 = -2{,}7535,$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{6}\left(-4 + 2(-3{,}2375) + 2(-3{,}3762) + (-2{,}7535)\right) = -3{,}3302,$$

$$y_1 = 2 + (-3{,}3302)\cdot 0{,}1 = 1{,}667.$$

Оцінка похибки:

Подвоюємо крок $h = 0{,}2$.

Складаємо таблицю:

Таблиця 14.6 – Допоміжні розрахунки

i	x_i	y_i	α_{1i}	α_{2i}	α_{3i}	α_{4i}	α_i
0	0	2	-4	-2,55	-3,035	-1,9004	-2,8451
1	0,2	1,431	-2,0078	-1,4234	-1,5706	-1,0874	-1,5139
2	0,4	1,1282	-1,1128				

Робимо оцінку похибки

$$\Delta(y_n) = \frac{1}{5}\left|y_n(h) - y_n(2h)\right|.$$

Отримаємо

$$\Delta(y_2) = \frac{1}{5}\left|1{,}4309 - 1{,}431\right| = \frac{0{,}0001}{5} = 0{,}00002,$$

$$\Delta(y_4) = \frac{1}{5}\left|1{,}1282 - 1{,}1282\right| = \frac{0}{5} = 0.$$

Завдання для самостійної роботи

1) Розв’язати задачу Коші аналітичним методом.
2) Розв’язати задачу Коші методом ітерацій (зробити 1-у та 2-у ітерації).
3) Виконати програмну реалізацію (Додаток А)

Варіант 1

$y' = x + y^2; \quad y(1{,}8) = 0{,}5; \quad x \in [1{,}8; 2{,}8]; \quad h = 0{,}2$

Варіант 2

$y' = x + \cos\dfrac{y}{\sqrt{5}}, \quad y_0(1{,}8) = 2{,}6; \quad x \in [1{,}8; 2{,}8]; \quad h = 0{,}2$

Варіант 3

$y' = x + 2y^2; \quad y(0) = 1{,}4, \quad x \in [0; 1]; \quad h = 0{,}2$

Варіант 4

$y' = 2x + y^2; y(-1) = 0{,}5 \ , \ x \in [-1; 1]; \quad h = 0{,}4$

Варіант 5

$y' = x - \cos y, \quad y_0(-1{,}6) = 6; \quad x \in [-1{,}6; -0{,}6]; \quad h = 0{,}2$

Варіант 6

$y' = x^2 - 2y; \ y(-1) = 5 \ x \in [-1; 1]; \quad h = 0{,}4$

Варіант 7

$2y' = x + 2y^2; \ y(2{,}8) = 1{,}4, \ x \in [2{,}8; 3{,}8]; \quad h = 0{,}2$

Варіант 8

$2y' = 2x + y^2; y(2{,}8) = 0{,}5 \ , \ x \in [2{,}8; 3{,}8]; \quad h = 0{,}2$

Варіант 9

$$y' = x - \cos 2y, \quad y_0(-1) = 6; \quad x \in [-1;1]; \quad h = 0,4$$

Варіант 10

$$2y' = x + \cos\frac{y}{3}, \quad y_0(-1,6) = 2,6; \quad x \in [-1,6;-0,6]; \quad h = 0,2$$

Варіант 11

$$2y' = x + 2y^2; \; y(2,8) = 1,4, \; x \in [2,8;3,8]; \quad h = 0,2$$

Варіант 12

$$y' = x + 2y^2; \; y(0) = 1,4, \; x \in [0;1]; \quad h = 0,2$$

Варіант 13

$$y' = x^2 - 2y; \; y(-1) = 5 \; x \in [-1;1]; \quad h = 0,4$$

Варіант 14

$$y' = x - \cos 2y, \quad y_0(1) = 6; \quad x \in [-1;1]; \quad h = 0,4$$

Варіант 15

$$y' = x + y^2; \; y(1,8) = 0,5; \quad x \in [1,8;2,8]; \quad h = 0,2$$

Варіант 16

$$y' = 2x + y^2 \; ; y(-1) = 0,5 \; , \; x \in [-1;1]; \quad h = 0,4$$

Контрольні питання

1) Як формується задача Коші?
2) Перелічіть наближені методи розв’язання задачі Коші?
3) Сформулювати ідею методу ітерацій для рішення задачі Коші.
4) Сформулювати ідею методу Эйлера, модифікованого методу Эйлера, методу Рунге-Кутта.
5) Як оцінити похибку рішення при розв’язанні задачі Коші чисельними методами?

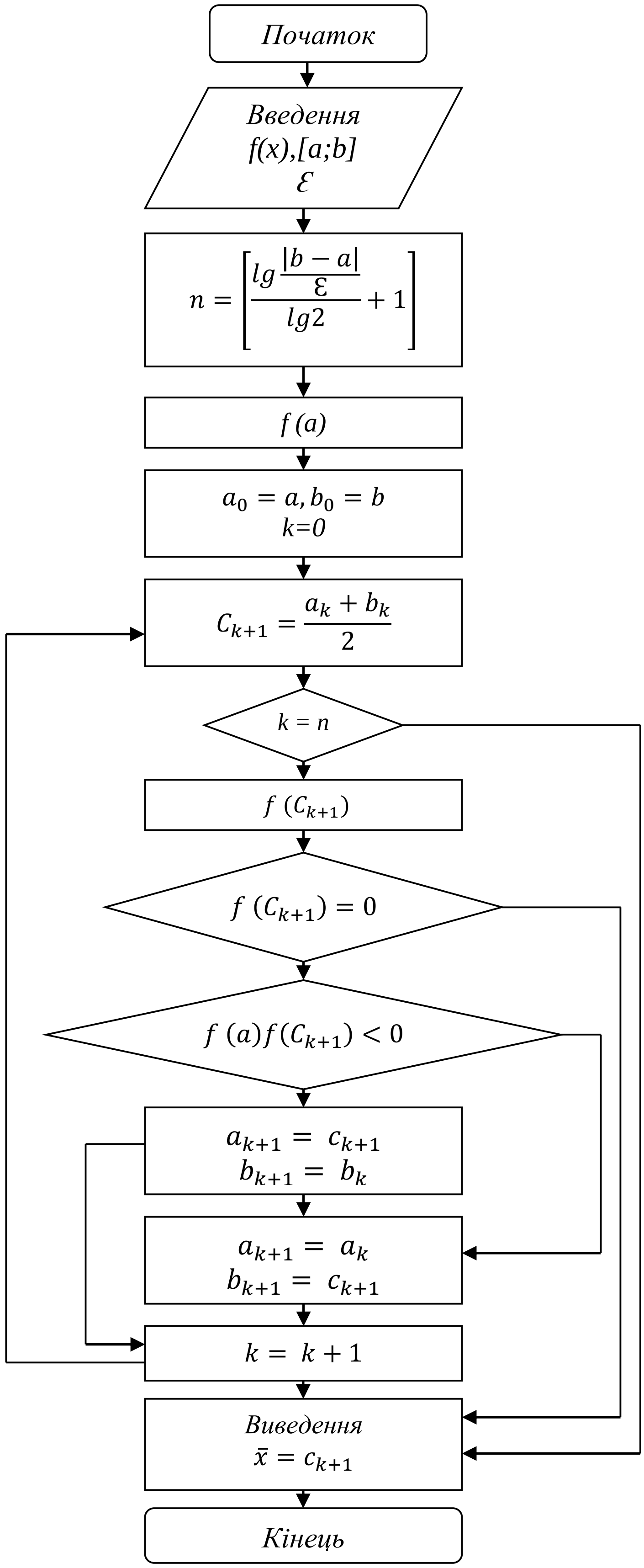
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Амосов А. А. Вычислительные методы для инженеров : учебн. пособ. / А. А. Амосов, Ю. А. Дубинський, Н. В. Копченова. – М. : Высшая школа, 1994. – 544 с.
2. Барахнин В. Б. Введение в численный анализ / В. Б. Барахнин, В. П. Шапеев. – Новосибирск, 1997. – 112 с.
3. Бахвалов Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – М. : Бином, 2007. – 636 с.
4. Боглаев Ю. П. Вычислительная математика и программирование / Ю. П. Боглаев. – М. : Высшая школа, 1990. – 544 с.
5. Волков Е. А. Численные методы / Е. А. Волков. – М. : Высшая школа, 1987. – 312 с.
6. Демидович Б. П. Основы вычислительной математики / Б. П. Демидович. – М. : Наука, 1994. – 664 с.
7. Дэннис Дж. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений / Дж. Дэннис, Р. Шнабель – М. : Мир, 1988. – 40с.
8. Заварыкин В. М. Численные методы / В. М. Заварыкин, В. Г. Житомирский, М. П. Лапчик. – М. : Просвещение, 1990. – 176 с.
9. Калиткин Н. Н. Численные методы / Н. Н. Калиткин. – М. : Наука, 1978. – 512 с.
10. Копченова Н. В. Вычислительная математика в примерах и задачах / Н. В. Копченова, И. А. Марон. – М. : Наука, 1972. – 368 с.
11. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики / Г. И. Марчук. – М. : Наука,1989. – 608 с.
12. Ортега Дж. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений / Дж. Ортега, У. Пул. – М. : Наука, 1986. – 56 с.

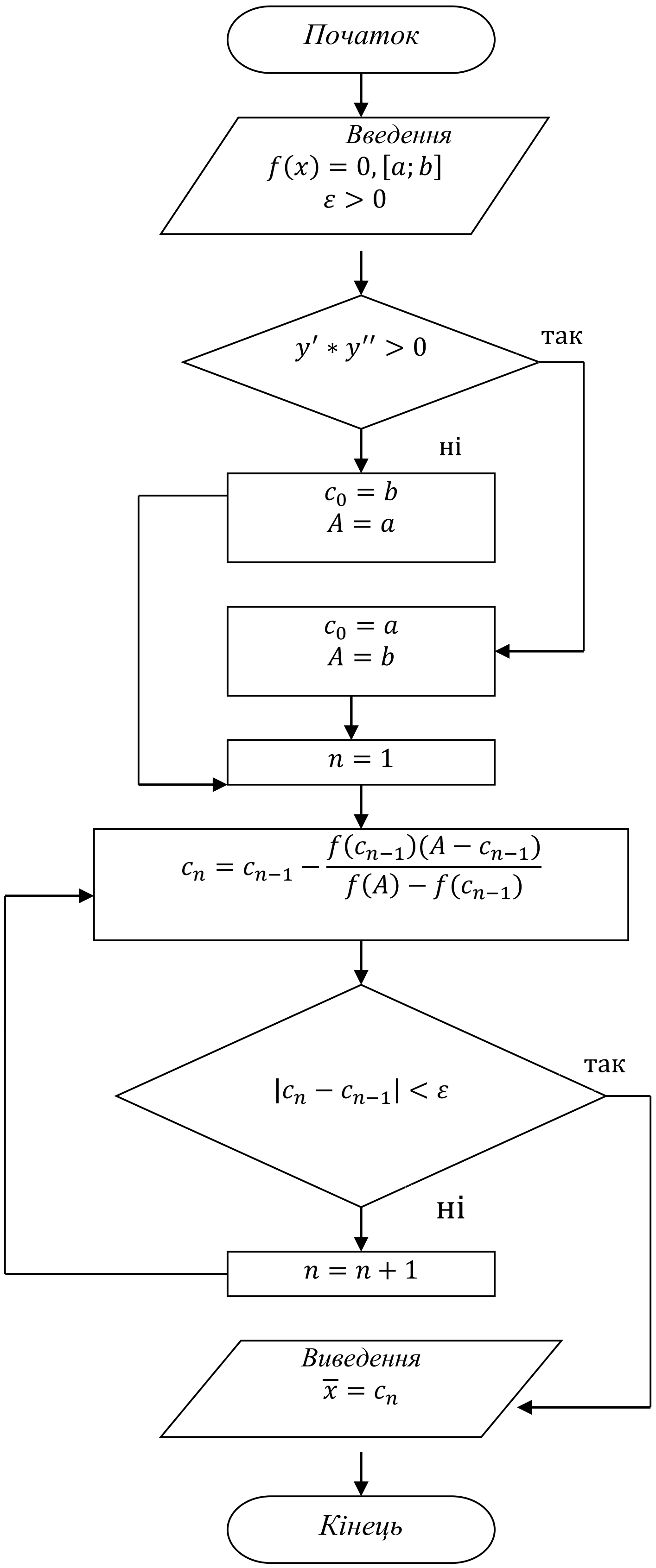
13. Ракитин В. И. Практическое руководство по методам вычислений с приложением программ для персональных компьютеров / В. И. Ракитин, В. Е. Первушин. – М. : Высшая школа, 1998. – 384 с.
14. Самарский А. А. Введение в численные методы / А. А. Самарский. – М. : Наука, 1997. – 240 с.
15. Самарский А. А. Численные методы / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М. : Наука, 1989. – 432 с.
16. Фельдман Л. П. Чисельні методи в інформатиці [Текст] : підручник / Л.П. Фельдман, А.І. Петренко, О.А. Дмитр ієва. – К. : Видавнича група BHV, 2006. – 480 с

ДОДАТОК А

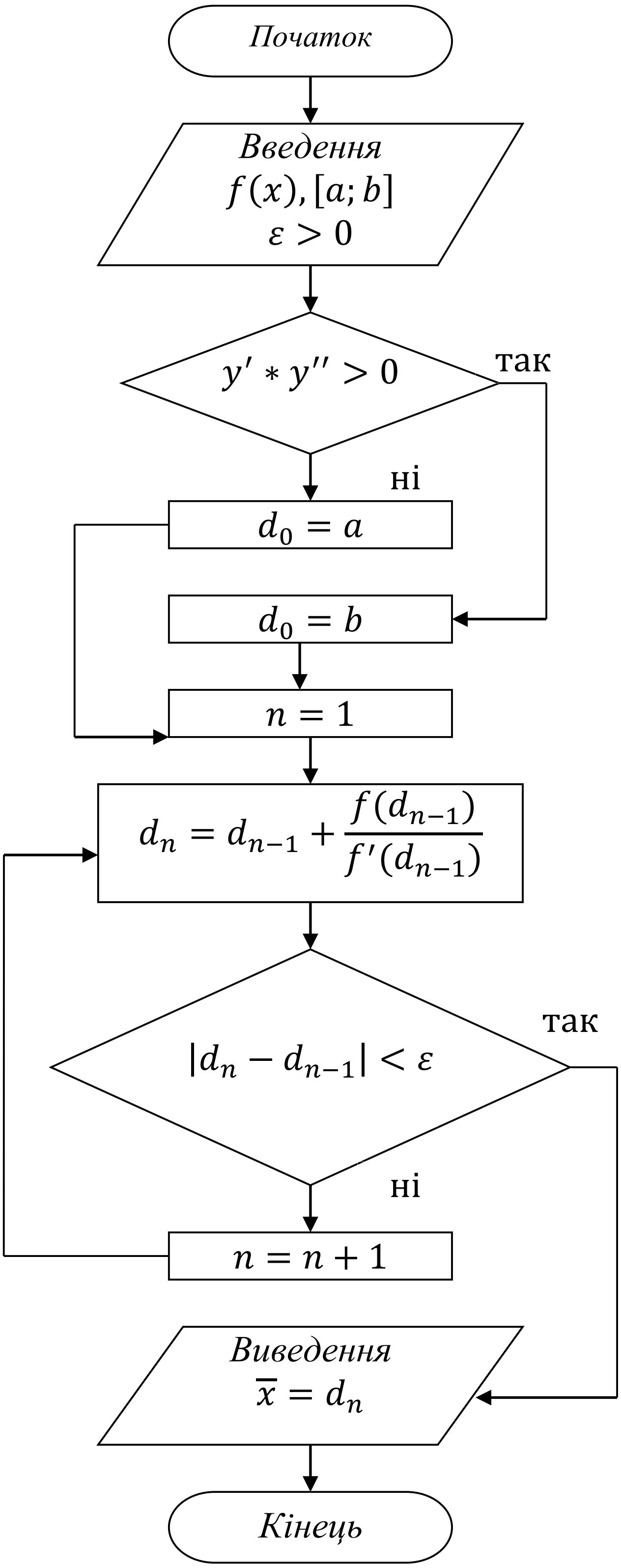
Блок-схема методу дихотомії



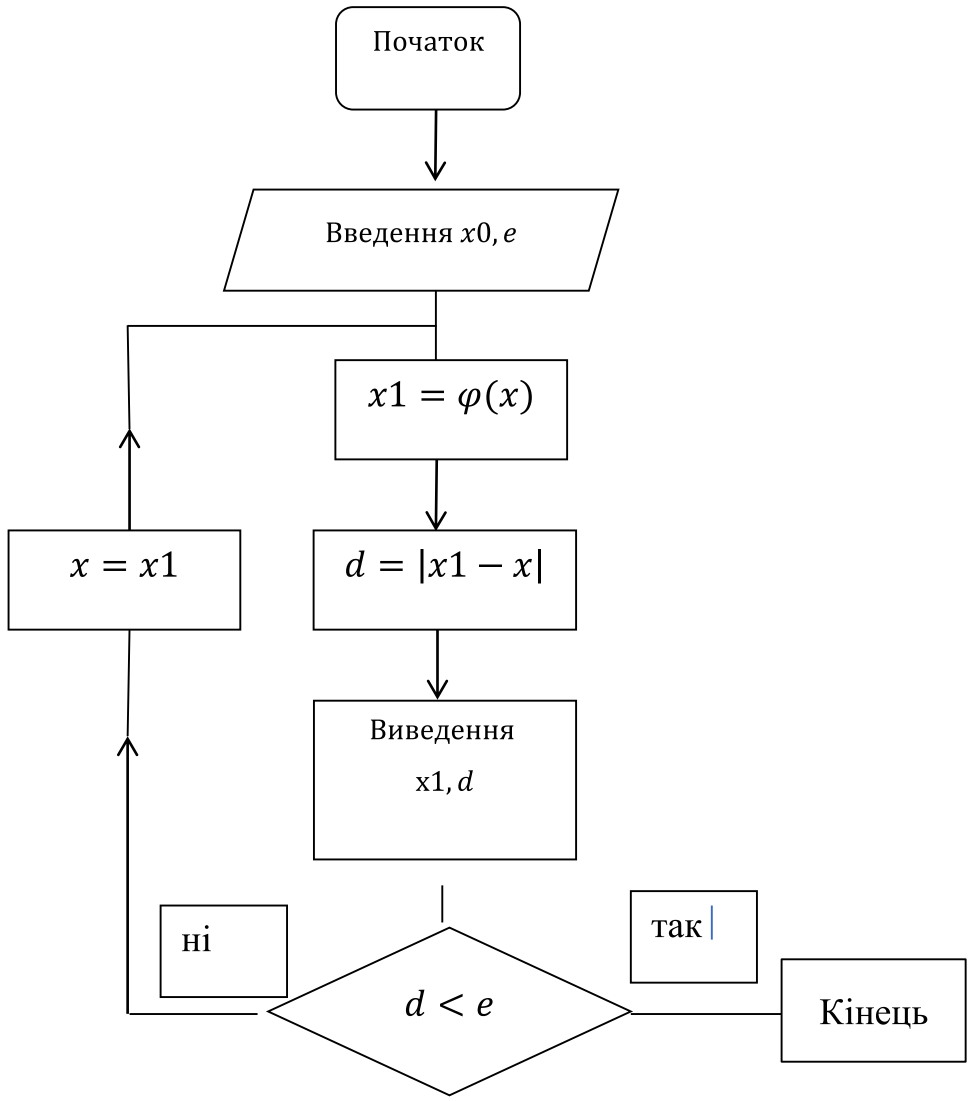
Блок-схема методу хорд



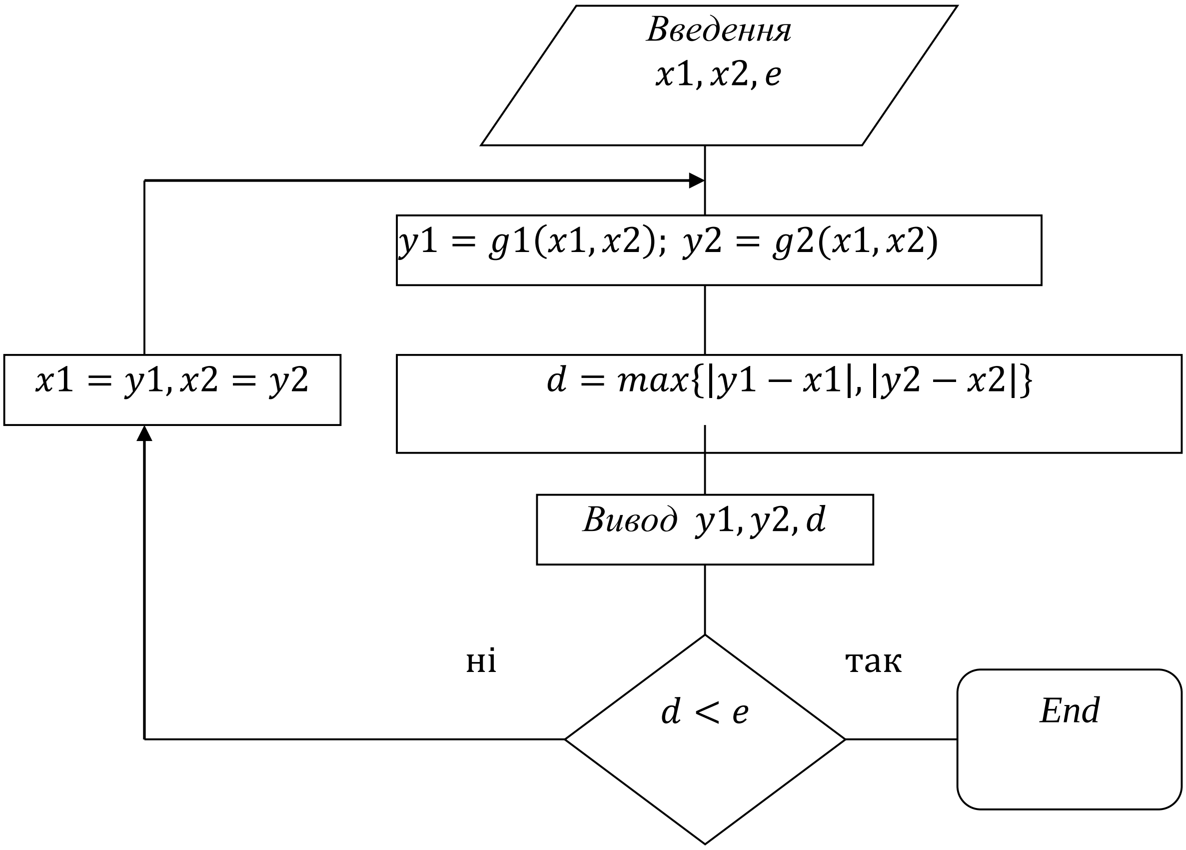
Блок-схема методу Ньютона



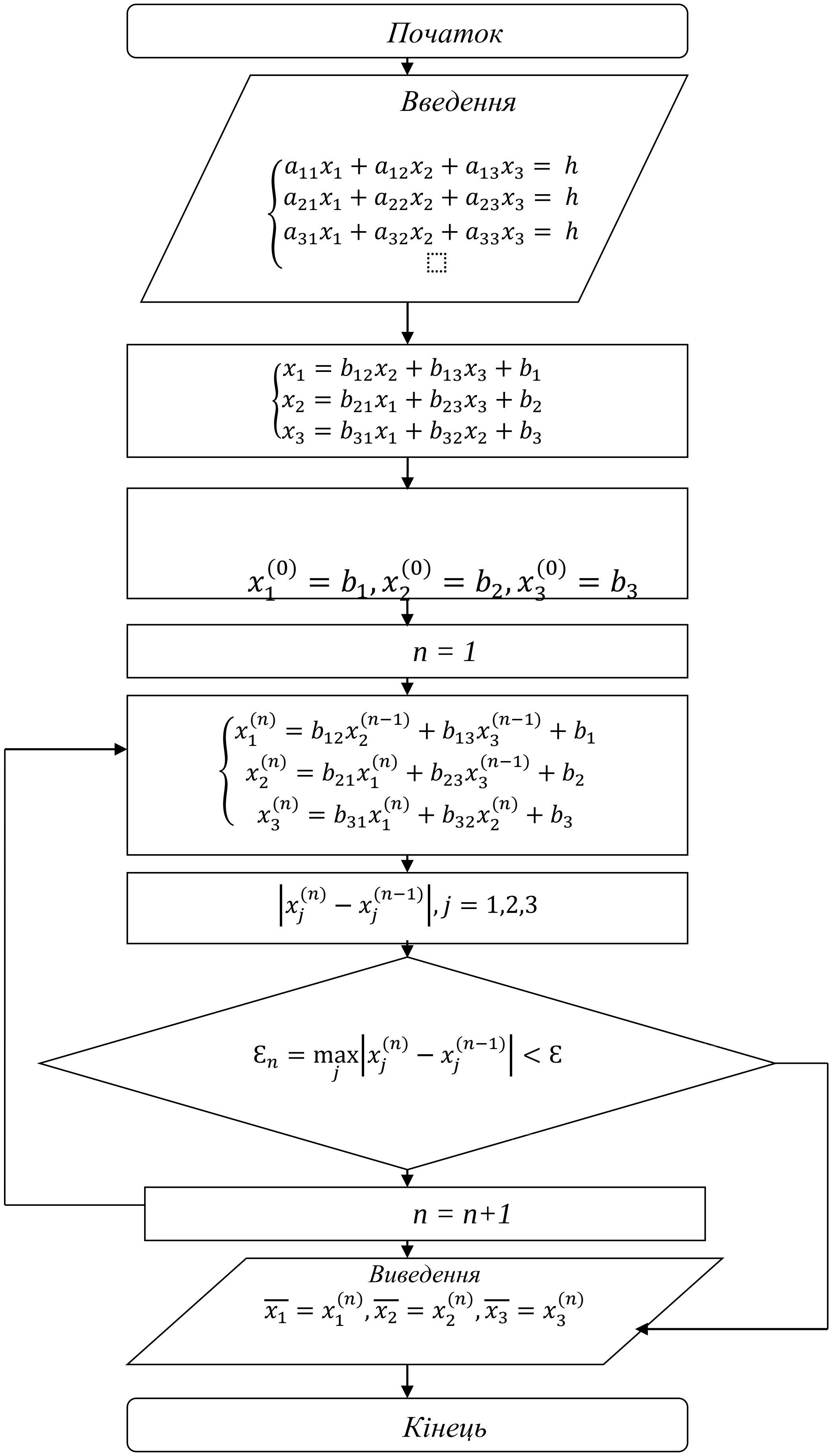
Блок-схема алгоритму методу ітерацій



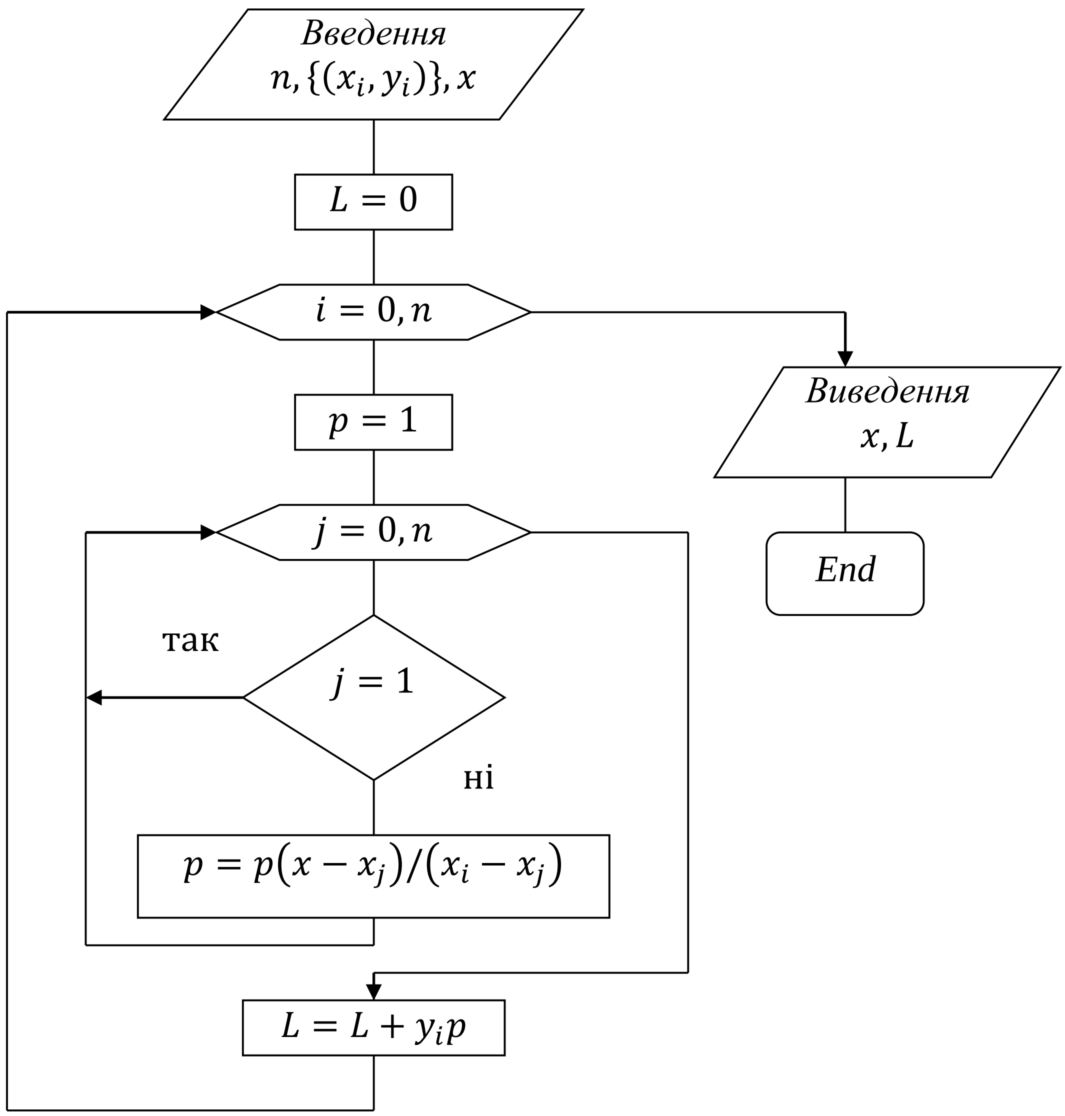
Блок-схема алгоритму розв’язання систем нелінійних рівнянь методом ітерацій



Блок-схема алгоритму розв’язання систем нелінійних рівнянь методом Зейделя

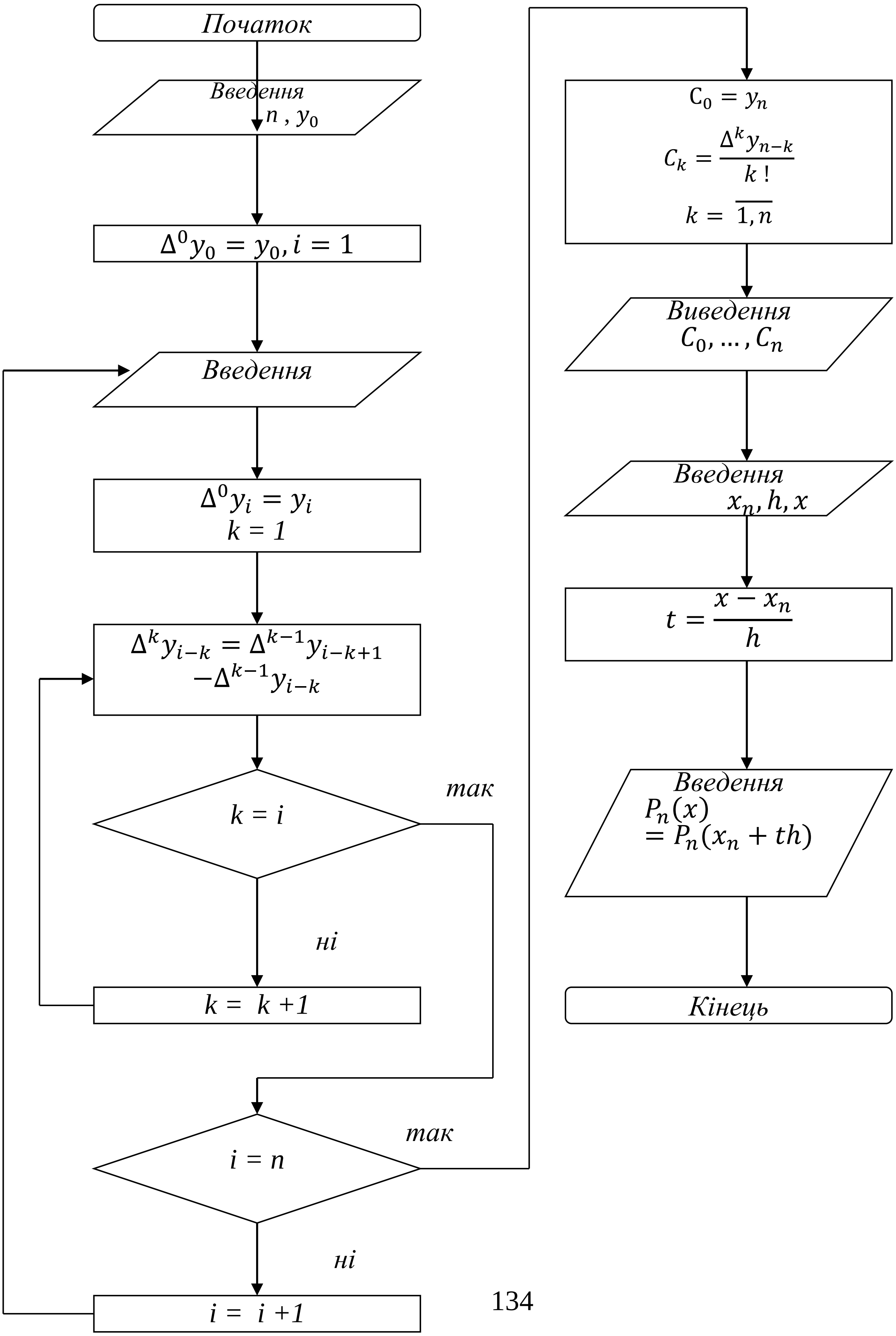


Блок-схема алгоритму побудови інтерполяційного поліному Лагранжа

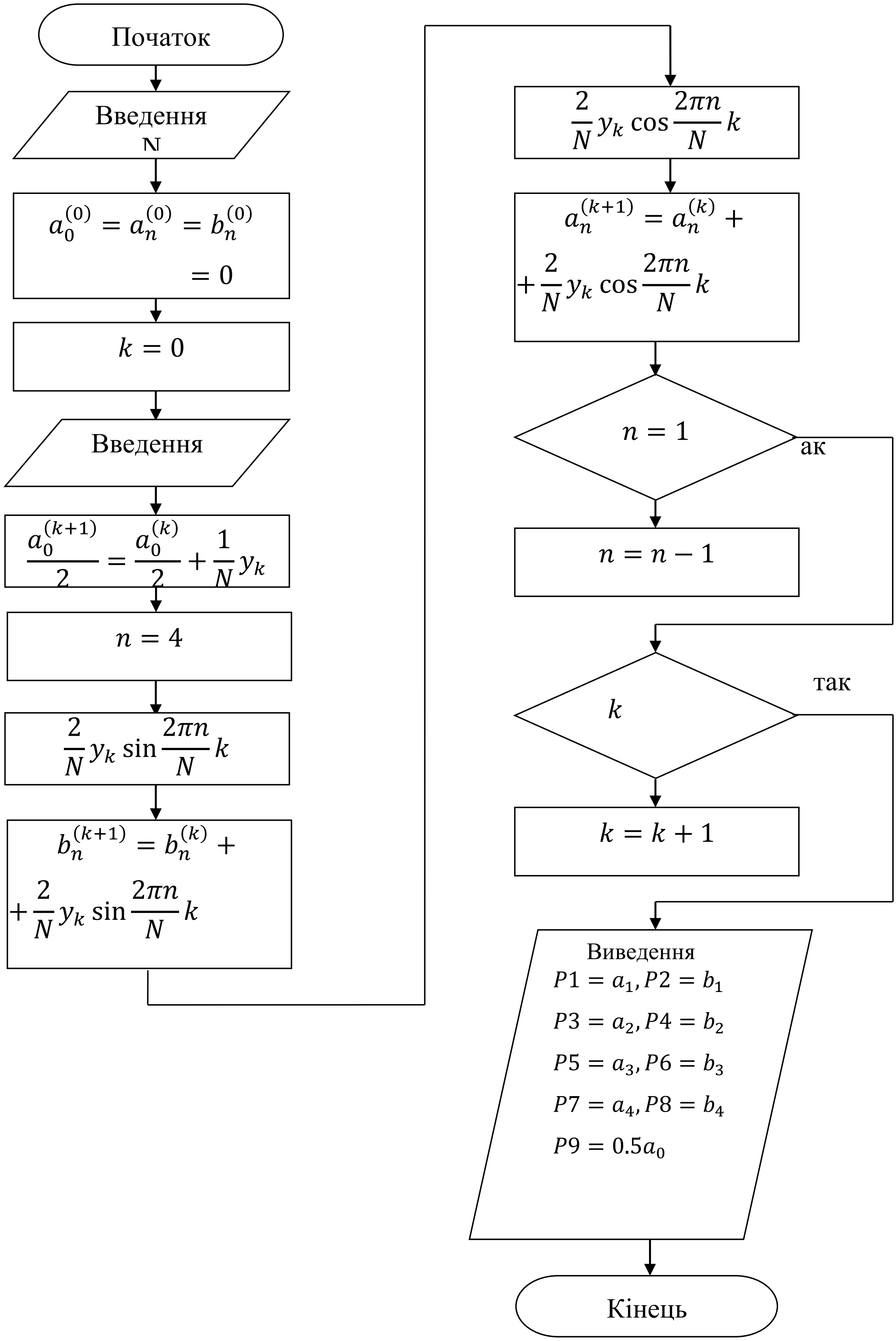


Блок-схема алгоритму побудови інторполяційного пліному

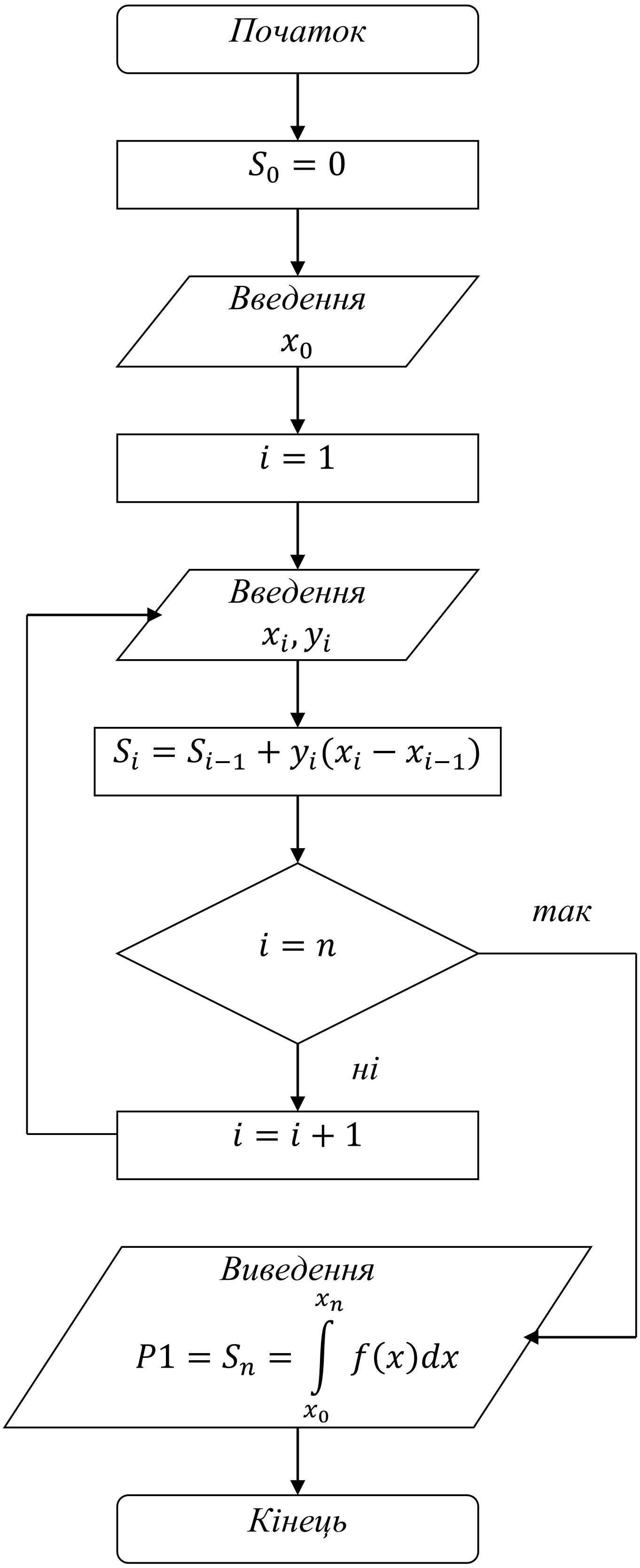
Ньютона



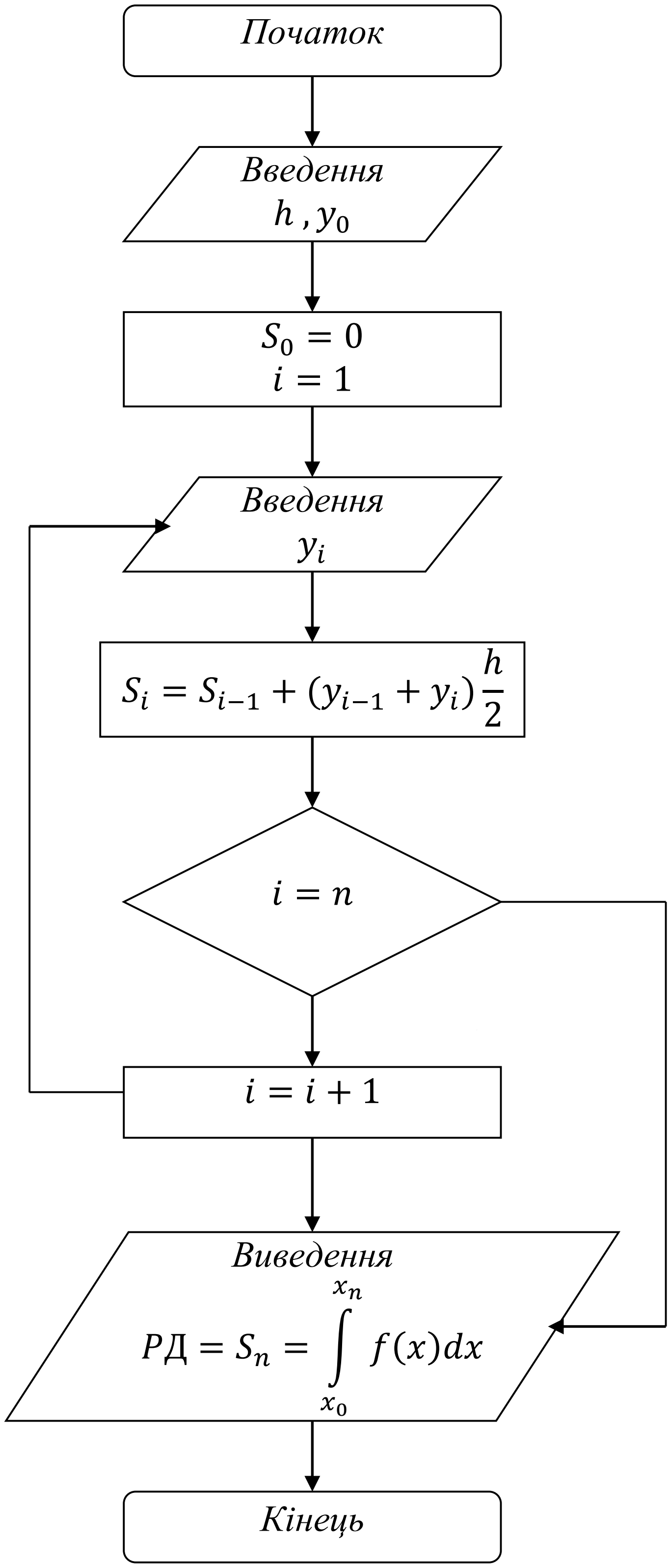
Блок-схема алгоритму Фур’є



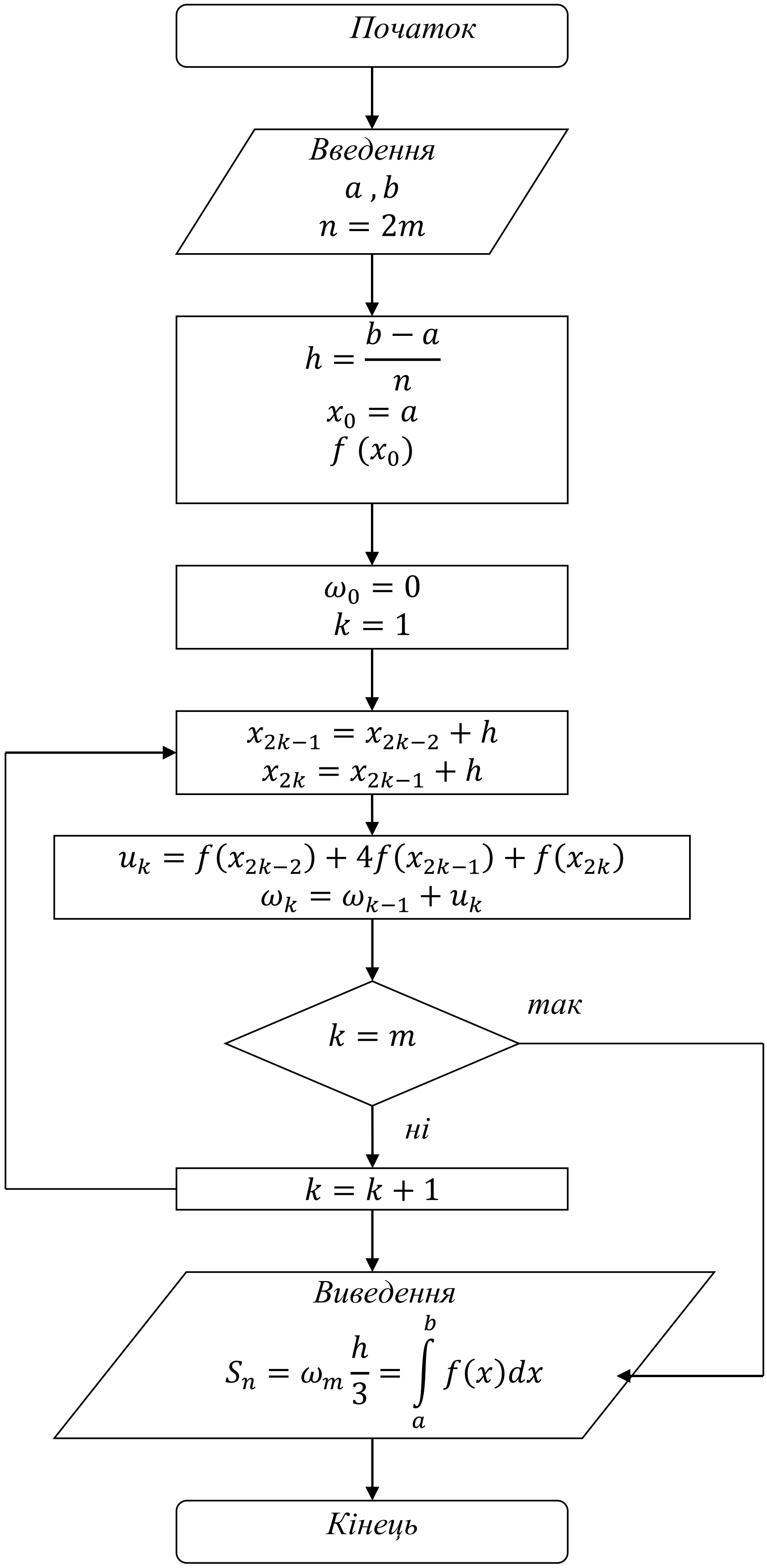
Блок-схема алгоритму метода прямокутників



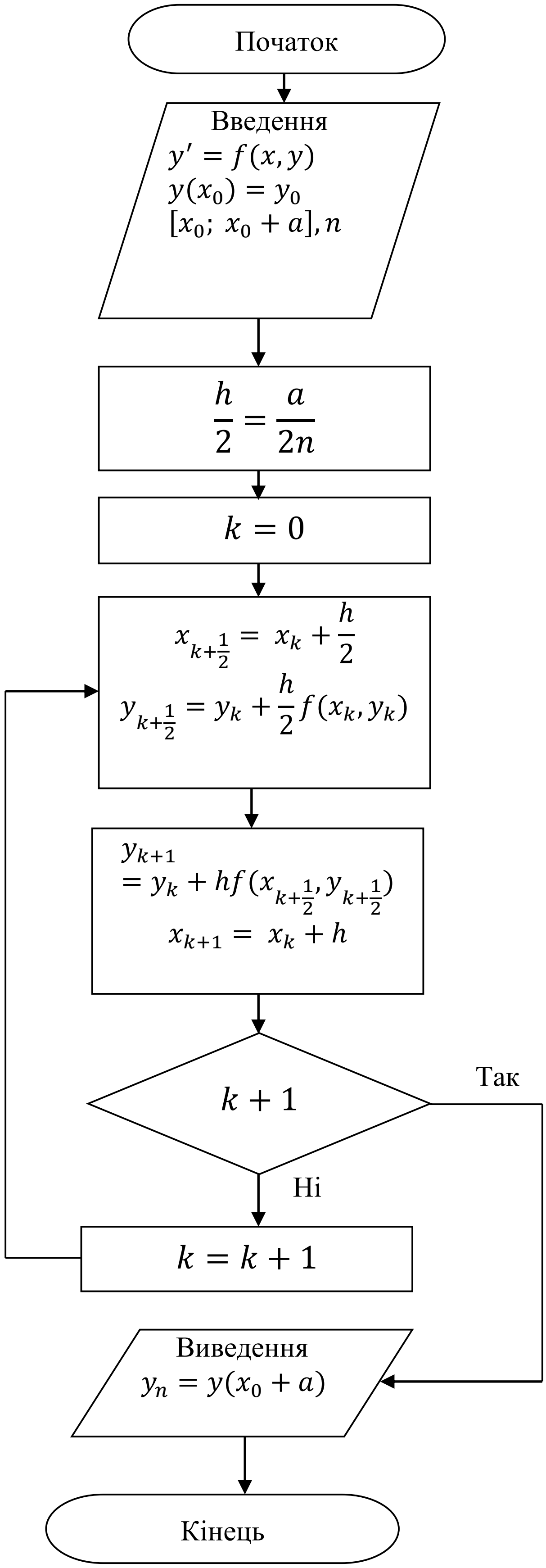
Блок-схема алгоритму метода трапецій



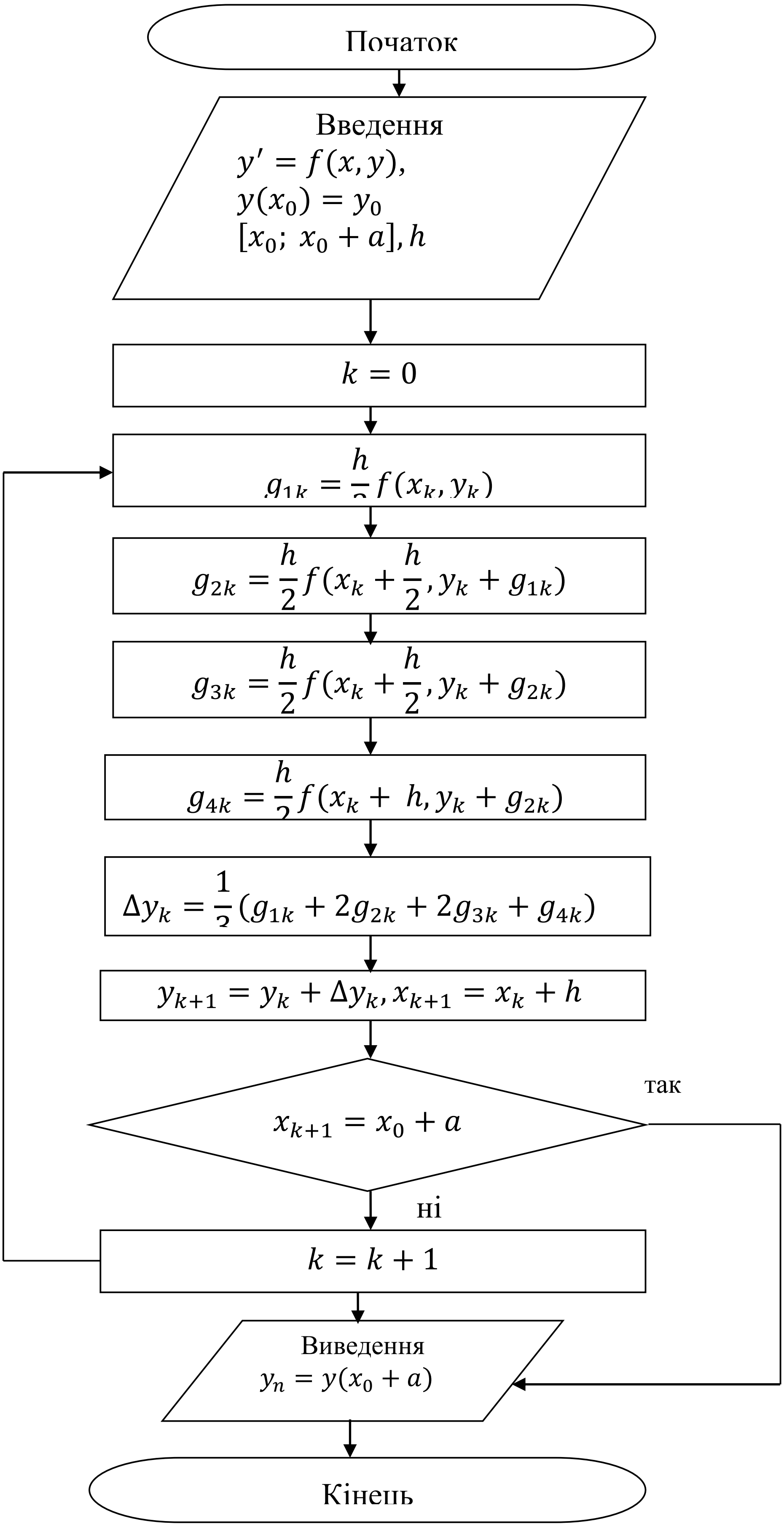
Блок-схема алгоритму метода Симпсона



Блок-схема алгоритму метода Ейлера



Блок-схема алгоритму метода Рунге-Кутта



В. М. Малкіна, О. Г. Зінов’єва

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ В ІНФОРМАТИЦІ

Навчально-методичний посібник

Підписано до друку ___________.
Формат ...
Папар офсетний.
Наклад 100 примірників.
Замовлення № _____

Видавництво та друк:
Типографія «Люкс» (м. Мелітополь)
Адреса видавництва: вул. М. Грушевського, 10,
м. Мелітополь, Запорізька обл.