

**Міністерство освіти і науки України  
Запорізький національний університет**

Заснований  
у 1997 р.

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого  
засобу масової інформації  
Серія КВ № 15436-4008 ПР,  
22.06.2009 р.

**Адреса редакції:**

Україна, 69600,  
м. Запоріжжя, МСП-41,  
вул. Жуковського, 66

**В і с н и к  
Запорізького національного  
університету**

**Телефон**

для довідок:  
(061) 289-12-52

**Факс:**

(061) 764-45-46

- **Фізико-математичні науки**

**№ 1, 2018**

**Запоріжжя 2018**

Вісник Запорізького національного університету: Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. – Запоріжжя: Запорізький національний університет, 2018. – 172 с.

Затверджено як наукове фахове видання України, у якому можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук (Наказ Міністерства освіти і науки України № 528 від 12.05.15 р.)

Вісник індексується під назвою «Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical and Mathematical Sciences» у таких наукометричних базах:

- INDEX COPERNICUS, ICV 2017: **80.00** ( <https://journals.indexcopernicus.com/search/details?id=43958> );
- CiteFactor ( <http://www.citefactor.org/> );
- ResearchBib ( <http://paper.researchbib.com/> );
- Journal Factor ( <http://www.journalfactor.org/> ).

Рекомендовано до друку та поширення через мережу Інтернет (протокол засідання Вченої ради № 3 від «27» листопада 2018 р.)

### РЕДАКЦІЙНА РАДА

- |                          |  |
|--------------------------|--|
| <i>Грищак В. З.</i>      | – доктор технічних наук, професор, головний редактор                 |
| <i>Гребенюк С. М.</i>    | – доктор технічних наук, доцент, заступник головного редактора       |
| <i>Гоменюк С. І.</i>     | – доктор технічних наук, професор, відповідальний редактор           |
| <i>Приварников А. К.</i> | – доктор фізико-математичних наук, професор, відповідальний редактор |
| <i>Клименко М. І.</i>    | – кандидат фізико-математичних наук, доцент, відповідальний редактор |
| <i>Чопоров С. В.</i>     | – кандидат технічних наук, доцент, відповідальний редактор           |

### РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ

- |                            |  |
|----------------------------|--|
| <i>Андріанов І. В.</i>     | – доктор фізико-математичних наук, професор (Рейнсько-Вестфальський технічний університет Аахена, Німеччина) |
| <i>Ванько В. І.</i>        | – доктор технічних наук, професор (Московський державний технічний університет ім. Н.Е. Баумана, Росія)      |
| <i>Гіржон В. В.</i>        | – доктор фізико-математичних наук, професор  |
| <i>Гоман О. Г.</i>         | – доктор фізико-математичних наук, професор  |
| <i>Гудрамович В. С.</i>    | – доктор технічних наук, професор, член-кореспондент НАН України   |
| <i>Козін І. В.</i>         | – доктор фізико-математичних наук, професор  |
| <i>Колаковські З.</i>      | – доктор технічних наук, професор (Лодзинський технічний університет, Польща)                                |
| <i>Кондрат'єва Н. О.</i>   | – кандидат фізико-математичних наук, доцент  |
| <i>Кузьменко В. І.</i>     | – доктор фізико-математичних наук, професор  |
| <i>Маневич Л. І.</i>       | – доктор технічних наук, професор (Московський інститут хімічної фізики ім. Н.Н. Семенова РАН, Росія)        |
| <i>Морачковський О. К.</i> | – доктор технічних наук, професор  |
| <i>Ольшанецький В. Ю.</i>  | – доктор технічних наук, професор  |
| <i>Перепелиця В. О.</i>    | – доктор фізико-математичних наук, професор  |
| <i>Пожусєв В. І.</i>       | – доктор фізико-математичних наук, професор  |
| <i>Толок О. В.</i>         | – доктор технічних наук, професор (Московський державний технологічний університет «Станкин», Росія)         |
| <i>Швидка С. П.</i>        | – кандидат фізико-математичних наук, доцент  |

## ЗМІСТ

4	РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛІНІЙНОЇ ОПТИМІЗАЦІЙНОЇ ЗАДАЧІ НА ПОЛПРОЗМІЩЕННЯХ ПРИ СТАЛОСТІ СУМ КООРДИНАТ У РОЗМІЩЕННЯХ
4	ЕМЕЦЬ О. О., ЕМЕЦЬ ОЛ-РА О., ПОЛЯКОВ І. М.
13	ФУНДАМЕНТАЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ ВИЗНАЧАЛЬНОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ МАТЕМАТИЧНОЇ ТЕОРІЇ ПЛАСТИН
13	КОЗІН І. В., САДІАК В. І., ТЕРЕШКО Я. В.
29	АЛГОРИТМИ НА ФРАГМЕНТАРНИХ СТРУКТУРАХ ДЛЯ ЗАДАЧІ ПРО РОЗБИТТЯ МНОЖИНИ НА ДВІ ЧАСТИНИ
29	КОНСТАНТИНОВ О. В., НОВИЦЬКИЙ В. В., СВЯТОВЕЦЬ І. Ф.
35	КЕРУВАННЯ СИСТЕМОЮ «РЕЗЕРВАР – РІДИНА» ЗІ ЗВОРОТНИМ ЗВ'ЯЗКОМ НА ОСНОВІ ЕТАЛОННОЇ МОДЕЛІ
35	КРІВОХАТА А. Г., КЛІДІН О. В., ДАВИДОВСЬКИЙ М. В., ЛІСНЯК А. О.
48	ЗАСТОСУВАННЯ АНСАМБЛЕВОВОГО НАВЧАННЯ В ЗАДАЧАХ КЛАСИФІКАЦІЇ АКУСТИЧНИХ ДАНИХ
48	КУРАПОВ С. В., СТАДОВ С. А.
60	АЛГЕБРАЙЧЕСКІЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО РИСУНКА НЕПЛАНАРНОГО ГРАФА
60	ЛАТИФОВ Ф. С., ГАНИЕВ Д. С.
71	СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОБЛЕГЧЕННЫХ ПОДПОРНЫХ СТЕН, СОСТАВЛЕННЫХ ИЗ ОРТОРОПНЫХ ПИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК, КОНТАКТИРУЮЩИХ С ТРУБОМ
71	ЛЕВАДА В. С., ЛЕВИЦКАЯ Т. И., ПОЖУЕВА И. С., ХИЖНЯК В. К.
78	ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РАЗРЫВНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ ОБОБЩЕННОЕ ПЛОСКОЕ ЭЛЕКТРОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ ПРОВОДЯЩЕЙ ПЛАСТИНЫ
78	ЛИТВИН О. М., ДРАГУН В. В.
84	МЕТОД ЗНАХОЖДЕНИЯ РОЗПОДІЛУ КОРИСНИХ КОПАЛИН У ШАХТНІЙ СЕЙСМІЧНІЙ ТОМОГРАФІЇ
84	МИЛЬЦЕВ О. М.
89	АНАЛИЗ ФУНКЦИЙ ТРЯХ ЭМИССИИ НА ОСНОВИ ВОКСЕЛЬНЫХ СТРУКТУР ОБРАЗОВ-МОДЕЛЕЙ У СИСТЕМЫ «РАНОК»
89	ПОЖУЕВ В. І., ПОЖУЕВ А. В., ФАСОЛЯК А. В.
97	ЗАСТОСУВАННЯ ВИТОДІАРНОЇ СИСТЕМИ КООРДИНАТ ДО МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ ДВОХ КОАКСІАЛЬНИХ ОБОЛОЧОК У ПРУЖНОМУ СЕРЕДОВИЩІ
97	СИДОРОВ М. В.
108	МЕТОД РОТІ У КОМБІНАЦІЇ З МЕТОДОМ ДІВОНЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ РОЗВ'ЯЗАННЯ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ НАПІВЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ ТЕЛОПРОВІДНОСТІ
108	ТАТИЄВСЬКИЙ Д. Н.
127	К СИНТЕЗУ ЗАКОНОВ УПРАВЛЕННЯ НЕГОЛОНОМНОЇ МОДЕЛІ ТРЕХЗВЕННОГО АВТОПОЕЗДА ПРИ ДВИЖЕННІ ЗАДІМНИМ ХОЛОМ
127	ХАЛАНЧУК Л. В., ЧОПОРОВ С. В.
139	ОГЛЯД МЕТОДІВ ГЕНЕРАЦІЇ ДІСКРЕТНИХ МОДЕЛЕЙ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ
139	ХОМА Г. П., ХОМА-МОГИЛЬСЬКА С. Г., ЧОРНИЙ В. З.
153	ПРО ОДИН СПОСІБ ПОВБУДОВИ Т-ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯНЬ ЛІНІЙНОГО ТИПУ
153	ЧЕРНЯКОВ Ю. А., ЛАБИРОВ Р. Р.
161	ТЕОРІЯ ПІДЛАСТИЧЕСЬКОГО ТЕЧЕННЯ ДЛЯ МАТЕРІАЛІВ С ПЛОЩАДКОЮ ТЕКУЧЕСТІ
161	ВИМОГИ ДО ФОРМУЛЕННЯ СТАТЕЙ У «ВІСНИК ЗАПОРІЗЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ» ЗА ФАХОМ «ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ»
168	ПРОЦЕС РЕЦЕНЗУВАННЯ
170	PROCES OF REVIEW
171	

6. Maciej, M. (2012). Application of the VFO method to set-point control for the N-trailer vehicle with off-axle hitching. Poland, International Journal of Control, Vol. 85, pp. 502-521. Retrieved from <http://etacar.put.poznan.pl/maciej.michalek/PublikacjePliki/MyT3ONT rackingVFORoMoCo.pdf>.
7. Evestedt, N., Ljungqvist, O. & Axehill, D. (2016). Motion planning for a reversing general 2-trailer configuration using Closed-Loop. RRT, IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS), pp. 3690-3697. Retrieved from <https://liu.diva-portal.org/smash/get/diva2:1066727/FULLTEXT01.pdf>.
8. Ardentov, A. A. Controlling of a mobile robot with a trailer and its nilpotent approximation. Russia, Pereslavl-Zalessky, Yaroslavl Region, 152020, Program Systems Institute of RAS. Retrieved from <https://arxiv.org/pdf/1612.01344.pdf>.
9. Martynyuk, A. A. & Nikitina, N. V. (2018). About qualitative analysis of one model of transport vehicles. Applied mechanics, No. 2, pp. 110-115.
10. Ojha, A. V. & Khandelwal, A. Control of non-linear system using backstepping. International Journal of Research in Engineering and Technology. Retrieved from <http://esatjournals.net/ijret/2015v04/i05/IJRET20150405111.pdf>.
11. Bouadi, H. & Mora-Camino, F. Adaptive Backstepping for Trajectory Tracking of Nonlinearly Parameterized Class of Nonlinear Systems. International Symposium on Computational Intelligence and Informatics. Retrieved from <https://hal.inria.fr/file/index/docid/938519/ filename/338.pdf>.
12. Chebykin, D. V. (2015). Backstepping – method of control synthesis for nonlinear objects. International conference of students, graduate students and young scientists “Information technology, telecommunications and management systems”, pp. 248-254. Retrieved from [http://elar.urfu.ru/bitstream/10995/31024/1/ittisu\\_2015\\_41.pdf](http://elar.urfu.ru/bitstream/10995/31024/1/ittisu_2015_41.pdf).
13. Lyapunov, A. M. (1956). Collection of works in 6 volumes. Moscow: Izd-vo AN SSSR. Vol. 2.

УДК 004.942: 519.6

DOI: 10.26661/2413-6549-2018-1-14

## ОГЛЯД МЕТОДІВ ГЕНЕРАЦІЇ ДИСКРЕТНИХ МОДЕЛЕЙ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ

<sup>1</sup>Халанчук Л. В., аспірант, <sup>2</sup>Чопоров С. В., к. т. н., доцент

<sup>1</sup>Таврійський державний агротехнологічний університет,  
просп. Б. Хмельницького, 18, м. Мелітополь, 72300, Україна

<sup>1,2</sup>Запорізький національний університет,  
вул. Жуковського, 66, м. Запоріжжя, 69600, Україна

larysa.khalanchuk@tsatu.edu.ua

У статті проведено огляд актуальних методів побудови структурованих і блочно-структурованих дискретних моделей геометричних об'єктів. Наведено визначення дискретної моделі (сітки) геометричного об'єкта, її типів та різновидів. Описано загальну послідовність кроків, необхідних для генерації структурованих дискретних моделей геометричних об'єктів, рівняння і теорії, на основі яких будуються сітки, спеціальні програмні засоби для генерації сіток.

Наведено визначення та канонічні форми еліптичного, параболічного та гіперболічного типів диференціальних рівнянь у частинних похідних другого порядку. Описано алгебраїчні, еліптичні та гіперболічні методи побудови структурованих сіток, розглянуто чисельні методи на прикладі методу скінченних різниць.

Розглянуто приклади побудови структурованої сітки аеродинамічної форми NASA0012 крила літака, що розроблені за допомогою Національного консультативного комітету з авіонавтики (NASA), для рівняння Пуассона з різними значеннями параметрів. Визначено переваги і недоліки структурованих сіток. Наведено широке коло практичного застосування методів генерації дискретних моделей.

*Ключові слова:* дискретна модель, структурована сітка, блочно-структурована сітка, диференціальні рівняння, еліптичний метод, гіперболічний метод.

## REVIEW OF DISCRETE MODELS OF GEOMETRIC OBJECTS GENERATION METHODS

<sup>1</sup>Khalanchuk L. V., postgraduate, <sup>2</sup>Choporov S. V., PhD in Engineering

<sup>1</sup>Tavria State Agrotechnological University,  
B. Khmelnytskii av., 18, Melitopol, 72300, Ukraine

<sup>1,2</sup>Zaporizhzhya National University,  
Zhukovsky str., 66., Zaporizhzhia, 69600, Ukraine

larysa.khalanchuk@tsatu.edu.ua

Computer simulations have been widely employed in modern engineering. Such simulations allow to emulate a physical system using numerical analysis. Typical engineering problems employ structural analysis, heat transfer, fluid flow, etc. These problems generally require the solution to boundary value problem for partial differential equations. The numerical solution of a boundary value problem involves dividing the domain of the problem into a collection of subdomains (a discrete model). Generally, a discrete model of a geometric object (aka mesh or grid) is a tessellation of a part of the Euclidean space by simple shapes such as, triangles, quadrilaterals, tetrahedra, hexahedra, etc. There are exists two classes of meshes: structured and unstructured. Structured grids (opposite to unstructured) are identified by regular connectivity. Each element in the structured grid can be addressed by an index. Structured grids typically have the higher degree of quality, better convergence, and require less computational memory. Structured data also allows the use of solution algorithms which are not possible to implement on unstructured data.

The objective of this article is to study methods and approaches for an automatic generation of structured discrete models of geometric objects.

The article is a review of the most useful methods for the automatic generation of structured and block-structured discrete models of geometric objects. Initially, possible applications of structured grids have been described. In the next section, applications of elliptic, hyperbolic, and parabolic equations for structured grid generation have been studied. The most efficient numerical methods for mesh generation have been also reviewed. In the final section, some engineering applications of structured grids have been discussed.

*Key words: discrete model, structured grid, block-structured grid, differential equations, elliptic method, hyperbolic method.*

### ВСТУП

На сьогоднішній день в інженерних додатках одне із провідних місць займають дослідження, які виконуються із застосуванням комп'ютерного моделювання різноманітних реальних процесів, оскільки комп'ютерне моделювання за своїми витратами в багато разів економічно вигідніше ніж побудова фізичної моделі. Сучасні проекти мають все більш складний характер, оскільки використовують моделі, які складаються з досить великої кількості компонентів і зв'язків між ними. Математичне моделювання процесів у таких конструкціях має певні труднощі, пов'язані зі складністю геометричної форми відповідних областей.

Дискретною моделлю геометричного об'єкту (сіткою) називають множину точок, що розподілені в досліджуваній області, разом зі зв'язками між цими точками. Дискретна модель геометричного об'єкта замінює вихідну неперервну область скінченною множиною простих фігур [45]. В залежності від розмірності простору дискретні моделі складаються з різних типів елементів:

- одновимірні (відрізки, дуги кривих);
- двовимірні (трикутники, чотирикутники);
- тривимірні (тетраедри, призми, шестигранники).

Розрізняють структуровані та неструктуровані сітки (рис. 1). Неструктуровані сітки визначаються звичайним набором вузлів. Логічний зв'язок між вузлами сітки визначається довільним чином, тобто кожен вузол може мати довільну кількість «сусідів». На відміну від неструктурованої сітки в структурованій всі внутрішні вершини топологічно еквівалентні

між собою. Наприклад, чотирикутні структуровані сітки топологічно еквівалентні стандартним прямокутним сіткам.

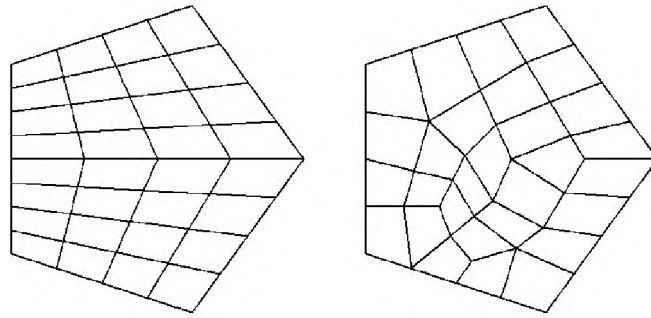


Рисунок 1. Структурована (ліворуч) і неструктурована (праворуч) сітки

Структурована сітка відрізняється від неструктурованої тим, що вона:

- накладає обмеження на форму елементів, структуру їхнього розміщення і на геометричну модель;
- потребує витратити більше часу людини-розробника, але менше часу розрахунку обчислювальної техніки;
- розрахунковий алгоритм не змінюється при подальшому подрібненні сітки, змінюється лише крок сітки.

Огляд актуальних підходів і методів автоматичної генерації неструктурованих сіток (дискретних моделей геометричних об'єктів), зокрема аналіз методів генерації дискретних моделей з використанням трикутних або тетраедричних елементів, а також чотирикутних або шестигранних скінченних елементів, наведено в роботі [7].

Метою даної роботи є аналіз актуального стану проблеми автоматичної побудови структурованих дискретних моделей (сіток) геометричних об'єктів.

Об'єкт дослідження – структуровані та блочно-структуровані сітки для геометричних моделей.

Предмет дослідження – методи генерації структурованих та блочно-структурованих сіток геометричних моделей.

### **ОГЛЯД СУЧАСНОГО СТАНУ ГЕНЕРАЦІЇ СТРУКТУРОВАНИХ СІТОК**

Загальна послідовність кроків, необхідних для генерації структурованих дискретних моделей геометричних об'єктів така:

1. Геометрія області, яка буде дискретизована, повинна бути визначена, тобто границя області повинна бути описана. Подання геометрії може бути виконано різними шляхами: аналітична форма (сфери, циліндри), сплайни, NURBS (неоднорідні раціональні b-сплайни), методи інтерполяції. Геометрія може бути побудована в системі автоматизованого проектування (САПР) або в системі генерації сіток. Багато САПР використовують аналітичні форми і не дуже добре підходять для створення сіток з потоком, що є проблемним для аналітичного запису, тому багато пакетів генерації сіток забезпечують певний рівень підтримки САПР.
2. Аналіз меж геометричного об'єкта з метою встановлення відповідності між геометричними особливостями (наприклад, зламами) та межовими вузлами структурованої сітки. Для розв'язання цієї задачі з урахуванням подання поверхні часто її необхідно переорієнтувати. Далі для генерації сітки потрібно отримати параметрично гладкі поверхні, щоб точки сітки плавно змінювались по поверхні. Для отримання гладкої поверхні найчастіше використовуються САПР, які гарантують лише геометричну гладкість, але часто не є параметрично гладкими. Параметризація

згладжування поверхні зазвичай включає розв'язок еліптичного рівняння на поверхні.

Зауважимо, що при побудові декартової сітки цей крок не потрібен.

3. Генерація сітки об'єму. Ця процедура істотно відрізняється для різних типів сітки.

Для генерації структурованих сіток використовують різні спеціальні програмні засоби: ANSYS [1, 13], OpenFOAM [6], SPGrid [9], HybMesh [30] тощо.

Генерація структурованих сіток розробляється на основі різних рівнянь і теорій, а саме:

- еліптичні рівняння [9, 16, 34];
- параболічні рівняння [2];
- рівняння еластодинаміки [37];
- рівняння Нав'є-Стокса [10, 19, 22];
- триангуляція [5, 14];
- теорія R-функцій [4-5];
- крива, поверхня, об'єм, екстракція Безье [8, 15];
- функції Гріна [42].

Розглянемо квазілінійне (лінійне відносно старших похідних) диференціальне рівняння в частинних похідних другого порядку вигляду

$$a_{11}(x, y)u_{xx} + 2a_{12}(x, y)u_{xy} + a_{22}(x, y)u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y), \quad (1)$$

де  $a_{ij}(x, y)$ ,  $i, j = 1, 2$ , неперервні функції в деякій області  $\mathbf{G}$ .

Розглянемо звичайне диференціальне рівняння

$$a_{11}(dy)^2 - 2a_{12}dx dy + a_{22}(dx)^2 = 0, \quad (2)$$

яке називається характеристичним для рівняння (1), а його інтеграли – характеристиками.

З курсу звичайних диференціальних рівнянь відомо: якщо  $z = \varphi(x, y)$  – деякий розв'язок рівняння (3), тобто

$$a_{11}z_x^2 + 2a_{12}z_x z_y + a_{22}z_y^2 = 0, \quad (3)$$

тоді співвідношення  $C = \varphi(x, y)$  є загальним інтегралом рівняння (2). Має силу і обернене твердження.

Нехай  $a_{11} \neq 0$  ( $a_{22} \neq 0$ ). Тоді із (2) маємо:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{\Delta}}{a_{11}}, \quad \left( \frac{dx}{dy} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{\Delta}}{a_{22}} \right),$$

де  $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ .

Рівняння (1) в області  $\mathbf{D} \subset \mathbf{G}$  називається рівнянням

а) **гіперболічного типу**, якщо дискримінант  $\Delta > 0$  для всіх  $(x, y) \in \mathbf{D}$ , канонічні форми якого можна записати у вигляді

$$U_{\xi\eta} = \frac{F(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta)}{2\alpha_{12}}, \quad \alpha_{12} \neq 0,$$

або

$$\bar{U}_{\alpha\alpha} - \bar{U}_{\beta\beta} = F_1(\alpha, \beta, \bar{U}, \bar{U}_\alpha, \bar{U}_\beta);$$

б) *параболічного типу*, якщо  $\Delta = 0$  при  $(x, y) \in \mathbf{D}$ , канонічні форми якого можна записати у вигляді

$$U_{\eta\eta} = \frac{F(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta)}{\alpha_{22}}, \quad \alpha_{22} \neq 0;$$

в) *еліптичного типу*, якщо  $\Delta < 0$  при  $(x, y) \in \mathbf{D}$ , канонічні форми якого можна записати у вигляді

$$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} = \frac{F(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta)}{\alpha_{11}}, \quad \alpha_{11} \neq 0.$$

У випадку лінійних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами одержуємо наступні канонічні форми:

$$\left. \begin{aligned} V_{\xi\xi} + V_{\eta\eta} + \gamma V &= g(\xi, \eta) - \text{еліптичний тип;} \\ V_{\eta\eta} + b_1 V_\xi &= g(\xi, \eta) - \text{параболічний тип;} \\ \left. \begin{aligned} V_{\xi\eta} + \gamma V &= g(\xi, \eta) \\ V_{\xi\xi} - V_{\eta\eta} + \gamma V &= g(\xi, \eta) \end{aligned} \right\} - \text{гіперболічний тип.} \end{aligned}$$

Наведемо деякі приклади побудови структурованої сітки аеродинамічної форми NACA0012 крила літака, що розроблені за допомогою Національного консультативного комітету з аеронавтики (NACA), а параметри в числовому коді можуть бути введені в рівняння для точної генерації поперечного перерізу профілю і обчислення його властивостей.

Розглянемо просту зв'язану обмежену область  $\mathbf{D}$  в двовимірному просторі з декартовими координатами  $\bar{x} = (x, y)^T$ , що розділена на чотири області [47, с. 130].

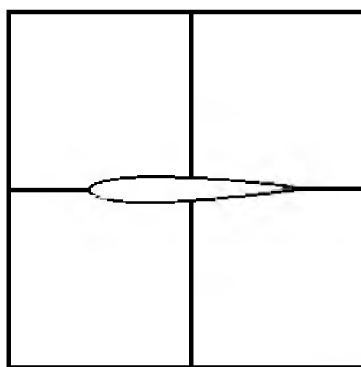


Рисунок 2. Область D поблизу аеродинамічної форми NACA0012

В узагальненому вигляді маємо рівняння Пуассона для генерації структурованої сітки

$$a_{22}\bar{x}_{\xi\xi} - 2a_{12}\bar{x}_{\xi\eta} + a_{11}\bar{x}_{\eta\eta} + (a_{22}P_{11}^1 - 2a_{12}P_{12}^1 + a_{11}P_{22}^1)\bar{x}_\xi + (a_{22}P_{11}^2 - 2a_{12}P_{12}^2 + a_{11}P_{22}^2)\bar{x}_\eta = 0,$$

де 6 коефіцієнтів  $P_{jk}^i$  називаються контрольними функціями.

Найпростіший приклад генерації сітки, що має назву лапласової сітки (рис. 3) [47, с. 131], отримуємо за умови, якщо всі 6 контрольних функцій дорівнюють нулю, тобто



$$P_{jk}^i = 0 .$$

Тоді маємо наступний вигляд рівняння Пуассона

$$a_{22}\bar{x}_{\xi\xi} - 2a_{12}\bar{x}_{\xi\eta} + a_{11}\bar{x}_{\eta\eta} = 0 .$$

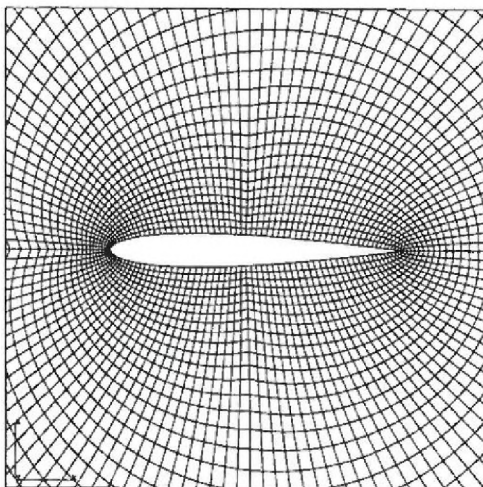


Рисунок 3. Лапласова сітка

Припустимо, що точки граничної сітки задані на чотирьох краях  $E_1, E_2, E_3, E_4$  області  $D$ , тоді сітка всередині цієї області може бути побудована на основі нормованої довжини дуги (рис. 4) [47, с. 133]. Отже, маємо 2 алгебраїчних рівняння для генерації сітки:

$$s = s_{E_3}^a(\xi)(1-t) + s_{E_4}^a(\xi)t,$$

$$t = t_{E_1}^a(\eta)(1-s) + t_{E_2}^a(\eta)s.$$

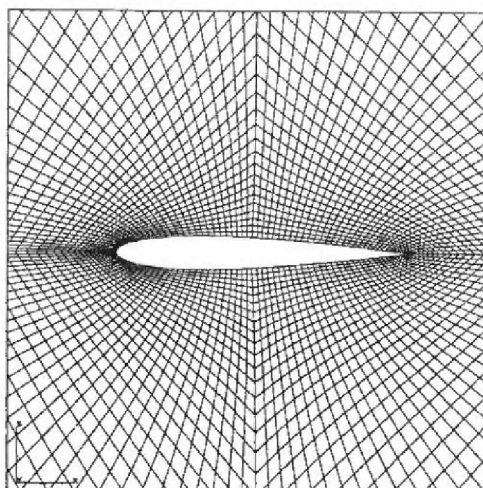


Рисунок 4. Сітка на основі довжини дуги

Якщо накласти граничні умови Дірихле-Неймана, то можна згенерувати сітку всередині області  $D$ , яка буде ортогональна всім чотирьом краям області  $D$ . В цьому випадку для генерації сітки (рис. 5) [47, с. 136] маємо рівняння

$$s = s_{E_3}^0(\xi)H_0(t) + s_{E_4}^0(\xi)H_1(t),$$

$$t = t_{E_1}^0(\eta)H_0(s) + t_{E_2}^0(\eta)H_1(s),$$

де верхній індекс 0 вказує на вимогу ортогональності, а  $H_0$  та  $H_1$  – кубічні функції інтерполяції Ерміта, що визначаються як

$$H_0(s) = (1 + 2s)(1 - s)^2,$$

$$H_1(s) = (3 - 2s)s^2,$$

$$0 \leq s \leq 1.$$

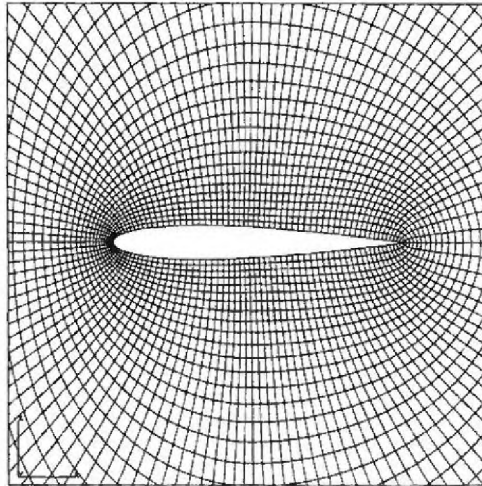


Рисунок 5. Сітка з граничною ортогональністю

Гранична ортогональність робить сітку гладкою по внутрішній межі області.

Різні типи диференціальних рівнянь в частинних похідних другого порядку можуть асоціюватися з різноманітними типами гідромеханічних задач. Наприклад, задачі, що містять залежність від часу, зводяться до параболічних або гіперболічних рівнянь. Параболічними рівняннями визначаються течії, що мають дисипацію, наприклад течії, для яких істотною є в'язкість або теплопровідність, в цьому випадку розв'язок буде гладким, а градієнти із плином часу зменшуватимуться, якщо граничні умови не залежать від часу.

Якщо дисипаційні механізми відсутні, для лінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних розв'язок зберігає сталу амплітуду, а для нелінійних – амплітуда розв'язку може навіть зростати, таким розв'язком характеризуються гіперболічні диференціальні рівняння в частинних похідних. Еліптичні диференціальні рівняння в частинних похідних зазвичай визначають задачі, що описують врівноважений або сталий стан течії. Але деякі сталі процеси також можна описати параболічними (примежовий шар) або гіперболічними рівняннями (нев'язка надзвукова течія) [46].

Найпростіше генерувати ортогональну сітку, оскільки область покривається прямокутною сіткою. Границі області можуть не охоплюватися границями сітки, але адаптивне виправлення може бути використано для покращення поверхні. Отже, необхідне уточнення сітки в двох напрямках для двовимірного випадку, але для тривимірного випадку достатньо встановити сітку в напрямку, перпендикулярному границі. Найчастіше структуровані сітки будують як прямокутні шахові декартові сітки [2, 10-11, 17-18, 23, 25, 28, 32, 36, 41].

В блочно-структурованому методі обчислювальна область розділяється на набір прямокутних блоків, що не перекривають один одного. Далі сітка генерується на кожному блоці окремо. Згладжування на блоках виконується до досягнення певного ступеня неперервності на межі блоків. Розриви у відстані між сітками на межі блоків можуть ускладнити розв'язування.

Найбільш розповсюджені методи генерації сіток відносяться до наступних категорій: алгебраїчні, еліптичні і варіаційні, гіперболічні.

Алгебраїчні методи створюють сітки для внутрішньої області і комбінують алгебраїчне представлення границі. Для трансфінитної інтерполяції використовуються поліноми [8, 26]. Алгебраїчні методи не настільки гнучкі, як інші методи, але генерація цими методами є простою і швидкою.

Еліптичні методи генерації можуть обробляти більш загальні випадки. Вони можуть використовуватися для створення високоякісних сіток, які матимуть бажану гладкість, на доволі складних областях. Розв'язок рівняння Пуассона визначає місцеположення точок сітки. Варіаційний метод також дає еліптичне рівняння, розв'язок якого визначає місцеположення точок сітки. Важливим є вибір функцій управління, які визначають відстань між точками сітки та ортогональність сітки [9, 16, 34].

Гіперболічні методи розв'язують гіперболічну систему рівнянь для генерації сітки від границі області. Зазвичай накладається умова ортогональності ліній сітки. Зазвичай додається згладжування, щоб позбутися передчасного накладання ліній сітки. Зовнішня границя сітки визначається розв'язком рівняння, тому цей метод обмежений для використання в блочно-структурованих сітках, але дуже корисний при покритті сіток.

Під час генерації блочно-структурованої сітки спочатку створюються окремі складові сітки для різних частин геометрії, використовуючи алгебраїчний, еліптичний чи гіперболічний методи. Враховуючи набір складових сіток, визначається, як зробити покриття автоматичним, але може виникнути збій, якщо при покритті не будуть міцними зв'язки між компонентами різних блоків.

Використання методу скінчених різниць для розв'язку диференціальних рівнянь було одним із перших підходів для отримання дискретного представлення тіла. В його основі лежить ідея трансформації сітки, що визначена на одиничному кубі, у потрібну геометрію кубоподібного тіла. Якщо тіло має складну форму, то цю проблему можна розв'язати методами декомпозиції чи блочної декомпозиції, які засновані на ідеї декомпозиції тіла на кубоподібні блоки.

Чисельні методи, що використовуються при генерації структурованих сіток:

- метод скінчених різниць [2, 17, 34, 37];
- метод скінчених елементів [1-3, 14-15, 23, 27, 29, 33];
- метод скінченого об'єму [10-11];
- метод спектральних елементів [26];
- метод FDTD [37].

На практиці застосування генерації структурованих сіток використовується для моделювання широкого кола об'єктів і процесів:

- моделювання об'єктів, матеріалів, деформацій, тріщин [3, 4, 12, 13, 15, 20, 23, 24, 36, 39, 40, 44];
- моделювання аеродинаміки, гідродинаміки, потоків різного походження [2, 10, 11, 18, 19, 21, 22, 24, 25, 30, 38-40, 42, 43];
- моделювання задач теплопровідності [11, 33, 36, 41];
- моделювання хвиль різної природи [14, 17, 27, 37];
- моделювання магнітостатичної задачі, оцінка електромагнітного поля [26, 42];
- оцінка щільності імпульсу електрона (EMD), його моментів і пов'язаної з ним інформаційної ентропії Шеннона для багатоелектронної молекулярної системи [28];
- дослідження зварювання тертям (FSW) [29];

- дослідження в циклонному дизайні падіння тиску [31];
- співставлення базисного представлення змінної поля над областю в контексті чисельного моделювання і зворотних задач, де неперервне скалярне або векторне поле над областю може бути представлено в різних скінчено вимірних базисних наближеннях, таких як неструктурований базис для чисельного розв'язку прямої задачі і регулярна сітка для представлення розв'язку зворотної задачі [35].

## ВИСНОВКИ

В роботі проведено огляд сучасного стану генерації структурованих дискретних моделей, який є продовженням і доповненням попередніх досліджень, що проведені в роботі [45], а саме: описано основні кроки для побудови сітки, які є загальними для багатьох підходів їх автоматичної генерації; розглянуто алгебраїчні, еліптичні і варіаційні, гіперболічні методи генерації структурованих та блочно-структурованих сіток; проаналізовано спеціальні програмні засоби, за допомогою яких відбувається комп'ютерна генерація сіток; описано рівняння і теорії, на основі яких будуються сітки; наведено чисельні методи, що використовуються при генерації сіток; досліджено широке коло об'єктів і процесів, для моделювання якого використовуються структуровані сітки.

Дослідження методів генерації структурованих сіток виявило переваги та недоліки їхнього використання, а саме: переваги – можливість використання більш високого порядку апроксимації і меншої кількості ресурсів обчислювальних машин; недоліки – обмеження на форму елементів, структуру їхнього розміщення і на геометричну модель, адаптація до складних тіл досить трудомістка і є можливість появи вироджених елементів, декомпозицію на блоки можна застосувати для методів, коли блоки та границі можна представити явно, але у випадку надто складної форми тіла декомпозиція майже не застосовується. Популярною є комбінація генерації структурованих та неструктурованих сіток, яка дозволяє використати всі переваги і обмежити недоліки обох видів сіток.

Узагальнюючи результати дослідження, можна зробити висновок, що проведений огляд підтверджує актуальність розробки методів генерації структурованих дискретних моделей геометричних об'єктів для подальшого чисельного аналізу їх властивостей.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Басов К. А. ANSYS: справочник пользователя. Москва: ДМК Пресс, 2005. 640 с.
2. Васильева М. В., Васильев В. И., Красников А. А., Никифоров Д. Я. Численное моделирование течения однофазной жидкости в трещиноватых пористых средах. *Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки*. 2017. Т. 159, Кн. 1. С. 100–115.
3. Левандовский А. Н., Мельников Б. Е., Шамкин А. А. Моделирование пористого материала методом конечных элементов. *Строительство уникальных зданий и сооружений*. 2017. № 2(53). С. 61–77.
4. Литвинова Ю. С., Максименко-Шейко К. В., Шейко Т. И. Аналитическая идентификация трехмерных геометрических объектов по информации о форме их сечений. *Проблемы машиностроения*. 2017. Т. 20, № 1. С. 45–51.
5. Лісняк А. О., Чопоров С. В., Гоменюк С. І. Методика візуалізації геометричних об'єктів, описаних за допомогою R-функцій. *Вісник Запорізького національного університету: зб. наук. статей. Фізико-математичні науки*. 2010. № 1. С. 88–97.
6. Нуриев А. Н., Юнусова А. И., Зайцева О. Н. Моделирование перемещения клиновидного виброробота в вязкой жидкости при различных законах движения внутренней массы в пакете OpenFOAM. *Труды ИСП РАН*. 2017. Т. 29, Вып. 1. С. 101–118.
7. Чопоров С. В., Лісняк А. О., Борисовська Ю. О., Козлова О. С., Снежкова Л. С. Методи побудови дискретних моделей: неструктуровані сітки. *Вісник Запорізького національного університету: зб. наук. статей. Фізико-математичні науки*. 2016. № 2. С. 237–250.

8. Яцук Ю. В. Построение расчетных сеток для решения уравнений математической физики методом «объемов Безье». *Вестник Астраханского государственного технического университета. Серия: Морская техника и технология*. 2009. № 1. С. 116–120.
9. Aanjaneya M., Gao M., Liu H., Batty C., Sifakis E. Power Diagrams and Sparse Paged Grids for High Resolution Adaptive Liquids. *ACM transactions on graphics*. 2017. Vol. 36, No 4. DOI: 10.1145/3072959.3073625.
10. AbdelMigid T. A., Saqr K. M., Kotb M. A., Aboelfarag A. A. Revisiting the lid-driven cavity flow problem: Review and new steady state benchmarking results using GPU accelerated code. *Alexandria engineering journal*. 2017. Vol. 56, No 1. P. 123–135.
11. Badreddine H., Sato Y., Berger M. et al. A Three-Dimensional, Immersed Boundary, Finite Volume Method for the Simulation of Incompressible Heat Transfer Flows around Complex Geometries. *International journal of chemical engineering*. 2017. DOI: 10.1155/2017/1726519
12. Bianchi G., Rane S., Kovacevic A., Cipollone R. Deforming grid generation for numerical simulations of fluid dynamics in sliding vane rotary machines. *Advances in engineering software*. 2017. Vol. 112. P. 180–191.
13. Bianchi G., Rane S., Kovacevic A., Cipollone R., Murgia S., Contaldi G. Grid generation methodology and CFD simulations in sliding vane compressors and expanders. *IOP Conference Series-Materials Science and Engineering*. 2017. Vol. 232. DOI: 10.1088/1757-899X/232/1/012053.
14. Bonazzoli M., Rapetti F., Venturini C. Dispersion analysis of triangle-based Whitney element methods for electromagnetic wave propagation. *Applied mathematics and computation*. 2018. Vol. 319. P. 274–286.
15. Chen L., Lingen E. J., de Borst R. Adaptive hierarchical refinement of NURBS in cohesive fracture analysis. *Numerical Methods in Engineering*. 2017. Vol. 112, No 13. P. 2151–2173.
16. Dolgov S. V., Kazeev V. A., Khoromskij B. N. Direct tensor-product solution of one-dimensional elliptic equations with parameter-dependent coefficients. *Mathematics and computers in simulation*. 2018. Vol. 145. P. 136–155.
17. Dostart N., Liu Y., Popovic M. A. Acoustic Waveguide Eigenmode Solver Based on a Staggered-Grid Finite-Difference Method. *Scientific reports*. 2017. Vol. 7. DOI: 10.1038/s41598-017-17511-x.
18. Falkenstein T., Kang S., Davidovic M., Bode M., Pitsch H., Kamatsuchi T., Nagao J., Arima T. LES of Internal Combustion Engine Flows Using Cartesian Overset Grids. *Oil & Gas Science and Technology – Rev. IFP Energies nouvelles*. 2017. Vol. 72. No 6. DOI: 10.2516/ogst/2017026.
19. Fort J., Furst J., Halama, J. Numerical simulation of flow through cascade in wind tunnel test section and stand-alone configurations. *Applied mathematics and computation*. 2018. Vol. 319. P. 633–646.
20. Gasii G. M. Structural and Design Specifics of Space Grid Systems *Science & technique*. 2017. Vol. 16, No 6. P. 475–484.
21. Huang C., Liu W., Yang G. Numerical studies of static aeroelastic effects on grid fin aerodynamic performances. *Chinese journal of aeronautics*. 2017. Vol. 30, No 4. P. 1300–1314.
22. Koblitz A. R., Lovett S., Nikiforakis N. Direct numerical simulation of particulate flows with an overset grid method. *Journal of computational physics*. 2017. Vol. 343. P. 414–431.
23. Li H., Liu T., Wang M., Zhao D., Qiao A., Wang X., Gu J., Li Z., Zhu B. Design optimization of stent and its dilatation balloon using kriging surrogate model. *Biomedical engineering online*. 2017. Vol. 16. DOI: 10.1186/s12938-016-0307-6.
24. Liu DW, Xu X., Li Q., Peng X., Chen DH. Correction of model deformation effects for a supercritical wing in transonic wind tunnel. *Tehnicki Vjesnik-Technical Gazette*. 2017. Vol. 24, No 6. P. 1647–1655.
25. Liu W., Li N., Zhao J., Su Y. Wake structure and hydrodynamic performance of flapping foils mimicking fish fin kinematics. *Saudi journal of biological sciences*. 2017. Vol. 24, No 6. P. 1344–1354.
26. Mahariq I., Erciyas A. A spectral element method for the solution of magnetostatic fields. *Turkish journal of electrical engineering and computer sciences*. 2017. Vol. 25, No 4. P. 2922–2932.

27. Mahmood M. S., Laghrouche O., Trevelyan J. Implementation and computational aspects of a 3D elastic wave modelling by PUFEM. *Applied mathematical modelling*. 2017. Vol. 49. P. 568–586.
28. Meena D. R., Gadre S. R., Balanarayan P. PAREMD: A parallel program for the evaluation of momentum space properties of atoms and molecules. *Computer physics communications*. 2018. Vol. 224. P. 299–310.
29. Meyghani B., Awang M. B., Emamian S. S., Mohd Nor M. K. B., Pedapati S. R. A Comparison of Different Finite Element Methods in the Thermal Analysis of Friction Stir Welding (FSW). *Metals*. 2017. Vol. 7, No 10. DOI: 10.3390/met7100450.
30. Okhotnikov D. I. Direct Numerical Simulation of Laminar-Turbulent Transition on Grids with Local Refinement. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta-seriya fiziko-matematicheskie nauki*. 2017. Vol. 159, No 2. P. 216–230.
31. Oliveira R. A. F., Justi G. H., Lopes G. C. Grid convergence study of a cyclone separator using different mesh structures. *Chemical industry & chemical engineering quarterly*. 2017. Vol. 23, No 3. P. 311–320.
32. Patel H. V., Das S., Kuipers J. A. M. A coupled Volume of Fluid and Immersed Boundary Method for simulating 3D multiphase flows with contact line dynamics in complex geometries. *Chemical engineering science*. 2017. Vol. 166. P. 28–41.
33. Pi Y., Wang N., Chen J., Miao M., Jin Y., Wang W. Anisotropic equivalent thermal conductivity model for efficient and accurate full-chip-scale numerical simulation of 3D stacked IC. *International journal of heat and mass transfer*. 2018. Vol. 120. P. 361–378.
34. Raeli A., Bergmann M., Iollo A. A finite-difference method for the variable coefficient Poisson equation on hierarchical Cartesian meshes. *Journal of computational physics*. 2018. Vol. 355. P. 59–77.
35. Schweiger M., Arridge S. Basis mapping methods for forward and inverse problems. *International journal for numerical methods in engineering*. 2017. Vol. 109, No 1. P. 3–28.
36. Shumaev V. V., Kuzenov V. V. Development of the numerical model for evaluating the temperature field and thermal stresses in structural elements of aircrafts. *International conference problems of thermal physics and power engineering (PTPPE-2017) Journal of Physics Conference Series*. 2017. Vol. 891. DOI: 10.1088/1742-6596/891/1/012311.
37. Takenaka H., Komatsu M., Toyokuni G., Nakamura T., Okamoto T. Quasi-Cartesian finite-difference computation of seismic wave propagation for a three-dimensional sub-global model. *Earth planets and space*. 2017. Vol. 69. DOI: 10.1186/s40623-017-0651-1.
38. Wang S., Zhang L., Yin G. Numerical Investigation of the FSI Characteristics in a Tubular Pump. *Mathematical problems in engineering*. 2017. DOI: 10.1155/2017/7897614.
39. Wang ZY, Yu JC, Zhang AQ, Wang YX, Zhao WT. Parametric geometric model and hydrodynamic shape optimization of a flying-wing structure underwater glider. *China Ocean Engineering*. 2017. Vol. 31, No 6. P. 709–715.
40. Xiao C. N., Denner F., van Wachem B. G. M. Fully-coupled pressure-based finite-volume framework for the simulation of fluid flows at all speeds in complex geometries. *Journal of computational physics*. 2017. Vol. 346 P. 91–130.
41. Yeo H., Ki H. A unified momentum equation approach for computing thermal residual stresses during melting and solidification. *Computer physics communications*. 2018. Vol. 224. P. 230–244.
42. Zhao P., Chan C. H., Wang G. An Improved Full-Wave Multilevel Green's Function Interpolation Method With RBF-QR Technique for Fast Field Evaluation. *IEEE ACCESS*. 2017. Vol. 5. P. 10241–10249.
43. Zheng J., Zhang W., Jiang J., Guo R. CFD simulation and experimental study of water-oil displacement flow in an inclined pipe. *International journal of heat and technology*. 2017. Vol. 35, No 3. P. 663–667.

44. Zhou L., Bai L., Shi WD, Li W, Wang C, Ye DX. Numerical analysis and performance experiment of electric submersible pump with different diffuser vanes number. *Journal of the brazilian society of mechanical sciences and engineering*. 2018. Vol. 40, No 2. DOI: 10.1007/s40430-018-0986-y.
45. Чопоров С. В., Гоменюк С. І., Алатамнех Х. Х., Оспіщев К. С. Методи побудови дискретних моделей: структуровані та блочно-структуровані сітки. *Вісник Запорізького національного університету: Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки*. 2016. № 1. С. 272–284.
46. Каліон В. А. Обчислювальна гідромеханіка. Модельні задачі: навч. посібник. Київ: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2011. 175 с.
47. Thompson J. F., Soni B. K., Weatherill N. P. *Handbook of Grid Generation*. Boca Raton: CRC Press, 1998. 1096 p.

## REFERENCES

1. Basov, K. A. (2005). *ANSYS: reference book of user*. Moskva: DMK Press.
2. Vasileva, M. V., Vasilev, V. I., Krasnikov, A. A. & Nikiforov, D. Ya. (2017). A numeral design of flow of monophasic liquid in crack-like porous environments. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki*, Vol. 159, No. 1, pp. 100-115.
3. Levandovskiy, A. N., Melnikov, B. E. & Shamkin, A. A. (2017). Design of porous material the method of eventual elements, No 2 (53), pp. 61-77.
4. Litvinova, Yu. S., Maksimenko-Sheyko, K. V. & Sheyko, T. I. (2017). Analytical authentication of three-dimensional geometries on information about the form of their sections. *Problemy mashinostroeniya*, Vol. 20, No 1, pp. 45-51.
5. Lisniak, A. O., Choporov, S. V. & Homeniuk, S. I. (2010). Methodology of visualization of the geometries described by means of R-functions. *Visnyk Zaporizkoho natsionalnoho universytetu: zbirnyk naukovykh statei. Fyzyko-matematychni nauky*, No 1, pp. 88-97.
6. Nuriev, A. N., Yunusova, A. I. & Zaytseva, O. N. (2017). Design of moving of wedge-shaped vibrorobot in a viscid liquid at the different laws of motion of internal mass in the package of OpenFOAM. *Trudy ISP RAN*, Vol. 29, No. 1, pp. 101-118.
7. Choporov, S. V., Lisniak, A. O., Borysovska, Yu. O., Kozlova, O. S. & Sniezhkova, L. S. (2016). Methods of construction of discrete models: the unstructured nets. *Visnyk Zaporizkoho natsionalnoho universytetu: Zbirnyk naukovykh statei. Fyzyko-matematychni nauky*, No 2, pp. 237-250.
8. Yatsuk, Yu. V. (2009). Construction of calculation nets for the decision of equalizations of mathematical physics by the method of “volumes of Besier”. *Vestnik Astrakhanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Morskaya tekhnika i tekhnologiya*, No 1, pp. 116-120.
9. Aanjaneya, M., Gao, M., Liu, H., Batty, C. & Sifakis, E. (2017). Power Diagrams and Sparse Paged Grids for High Resolution Adaptive Liquids. *ACM transactions on graphics*, Vol. 36, No 4. DOI: 10.1145/3072959.3073625.
10. AbdelMigid, T. A., Saqr, K. M., Kotb, M. A. & Aboelfarag, A. A. (2017). Revisiting the lid-driven cavity flow problem: Review and new steady state benchmarking results using GPU accelerated code. *Alexandria engineering journal*, Vol. 56, No 1, pp. 123-135.
11. Badreddine, H., Sato, Y., Berger, M. et al. (2017). A Three-Dimensional, Immersed Boundary, Finite Volume Method for the Simulation of Incompressible Heat Transfer Flows around Complex Geometries. *International journal of chemical engineering*. DOI: 10.1155/2017/1726519.
12. Bianchi, G., Rane, S., Kovacevic, A. & Cipollone, R. (2017). Deforming grid generation for numerical simulations of fluid dynamics in sliding vane rotary machines. *Advances in engineering software*, Vol. 112, pp. 180-191.
13. Bianchi, G., Rane, S., Kovacevic, A., Cipollone, R., Murgia, S. & Contaldi, G. (2017). Grid generation methodology and CFD simulations in sliding vane compressors and expanders. *IOP Conference Series-Materials Science and Engineering*, Vol. 232. DOI: 10.1088/1757-899X/232/1/012053.

14. Bonazzoli, M., Rapetti, F. & Venturini, C. (2018). Dispersion analysis of triangle-based Whitney element methods for electromagnetic wave propagation. *Applied mathematics and computation*, Vol. 319, pp. 274-286.
15. Chen, L., Lingen, E. J. & de Borst, R. (2017). Adaptive hierarchical refinement of NURBS in cohesive fracture analysis. *Numerical Methods in Engineering*, Vol. 112, No 13, pp. 2151-2173.
16. Dolgov, S. V., Kazeev, V. A. & Khoromskij, B. N. (2018). Direct tensor-product solution of one-dimensional elliptic equations with parameter-dependent coefficients. *Mathematics and computers in simulation*, Vol. 145, pp. 136-155.
17. Dostart, N., Liu, Y. & Popovic, M. A. (2017). Acoustic Waveguide Eigenmode Solver Based on a Staggered-Grid Finite-Difference Method. *Scientific reports*, Vol. 7. DOI: 10.1038/s41598-017-17511-x.
18. Falkenstein, T., Kang, S., Davidovic, M., Bode, M., Pitsch, H., Kamatsuchi, T., Nagao, J. & Arima, T. (2017). LES of Internal Combustion Engine Flows Using Cartesian Overset Grids. *Oil & Gas Science and Technology – Rev. IFP Energies nouvelles*, Vol. 72, No 6. DOI: 10.2516/ogst/2017026.
19. Fort, J., Furst, J. & Halama, J. (2018). Numerical simulation of flow through cascade in wind tunnel test section and stand-alone configurations. *Applied mathematics and computation*, Vol. 319, pp. 633-646.
20. Gasii, G. M. (2017). Structural and Design Specifics of Space Grid Systems *Science & technique*, Vol. 16, No 6, pp. 475-484.
21. Huang, C., Liu, W. & Yang, G. (2017). Numerical studies of static aeroelastic effects on grid fin aerodynamic performances. *Chinese journal of aeronautics*, Vol. 30, No 4, pp. 1300-1314.
22. Koblitz, A. R., Lovett, S. & Nikiforakis, N. (2017). Direct numerical simulation of particulate flows with an overset grid method. *Journal of computational physics*, Vol. 343, pp. 414-431.
23. Li, H., Liu, T., Wang, M., Zhao, D., Qiao, A., Wang, X., Gu, J., Li, Z. & Zhu, B. (2017). Design optimization of stent and its dilatation balloon using kriging surrogate model. *Biomedical engineering online*, Vol. 16. DOI: 10.1186/s12938-016-0307-6.
24. Liu, DW, Xu, X., Li, Q., Peng, X. & Chen, DH. (2017). Correction of model deformation effects for a supercritical wing in transonic wind tunnel. *Tehnicki Vjesnik – Technical Gazette*, Vol. 24, No 6, pp. 1647-1655.
25. Liu, W., Li, N., Zhao, J. & Su, Y. (2017). Wake structure and hydrodynamic performance of flapping foils mimicking fish fin kinematics. *Saudi journal of biological sciences*, Vol. 24, No 6, pp. 1344-1354.
26. Mahariq, I. & Erciyas, A. (2017). A spectral element method for the solution of magnetostatic fields. *Turkish journal of electrical engineering and computer sciences*, Vol. 25, No 4, pp. 2922-2932.
27. Mahmood, M. S., Laghrouche, O. & Trevelyan, J. (2017). Implementation and computational aspects of a 3D elastic wave modelling by PUFEM. *Applied mathematical modeling*, Vol. 49, pp. 568-586.
28. Meena, D. R., Gadre, S. R. & Balanarayan, P. (2018). PAREMD: A parallel program for the evaluation of momentum space properties of atoms and molecules. *Computer physics communications*, Vol. 224, pp. 299-310.
29. Meyghani, B., Awang, M. B., Emamian, S. S., Mohd Nor, M. K. B. & Pedapati, S. R. (2017). A Comparison of Different Finite Element Methods in the Thermal Analysis of Friction Stir Welding (FSW). *Metals*, Vol. 7, No 10. DOI: 10.3390/met7100450.
30. Okhotnikov, D. I. (2017). Direct Numerical Simulation of Laminar-Turbulent Transition on Grids with Local Refinement. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta-seriya fiziko-matematicheskie nauki*, Vol. 159, No 2, pp. 216-230.
31. Oliveira, R. A. F., Justi, G. H. & Lopes, G. C. (2017). Grid convergence study of a cyclone separator using different mesh structures. *Chemical industry & chemical engineering quarterly*, Vol. 23, No 3, pp. 311-320.



32. Patel, H. V., Das, S. & Kuipers, J. A. M. (2017). A coupled Volume of Fluid and Immersed Boundary Method for simulating 3D multiphase flows with contact line dynamics in complex geometries. *Chemical engineering science*, Vol. 166, pp. 28-41.
33. Pi, Y., Wang, N., Chen, J., Miao, M., Jin, Y. & Wang, W. (2018). Anisotropic equivalent thermal conductivity model for efficient and accurate full-chip-scale numerical simulation of 3D stacked IC. *International journal of heat and mass transfer*, Vol. 120, pp. 361-378.
34. Raeli, A., Bergmann, M. & Iollo, A. (2018). A finite-difference method for the variable coefficient Poisson equation on hierarchical Cartesian meshes. *Journal of computational physics*, Vol. 355, pp. 59-77.
35. Schweiger, M. & Arridge, S. (2017). Basis mapping methods for forward and inverse problems. *International journal for numerical methods in engineering*, Vol. 109, No 1, pp. 3-28.
36. Shumaev, V. V. & Kuzenov, V. V. (2017). Development of the numerical model for evaluating the temperature field and thermal stresses in structural elements of aircrafts. *International conference problems of thermal physics and power engineering (PTPPE-2017) Journal of Physics Conference Series*, Vol. 891. DOI: 10.1088/1742-6596/891/1/012311.
37. Takenaka, H., Komatsu, M., Toyokuni, G., Nakamura, T. & Okamoto, T. (2017). Quasi-Cartesian finite-difference computation of seismic wave propagation for a three-dimensional sub-global model. *Earth planets and space*, Vol. 69. DOI: 10.1186/s40623-017-0651-1.
38. Wang, S., Zhang, L. & Yin, G. (2017). Numerical Investigation of the FSI Characteristics in a Tubular Pump. *Mathematical problems in engineering*. DOI: 10.1155/2017/7897614.
39. Wang, ZY, Yu, JC, Zhang, AQ, Wang, YX & Zhao, WT. (2017). Parametric geometric model and hydrodynamic shape optimization of a flying-wing structure underwater glider. *China Ocean Engineering*, Vol. 31, No 6, pp. 709-715.
40. Xiao, C. N., Denner, F. & van Wachem, B. G. M. (2017). Fully-coupled pressure-based finite-volume framework for the simulation of fluid flows at all speeds in complex geometries. *Journal of computational physics*, Vol. 346, pp. 91-130.
41. Yeo, H. & Ki, H. (2018). A unified momentum equation approach for computing thermal residual stresses during melting and solidification. *Computer physics communications*, Vol. 224, pp. 230-244.
42. Zhao, P., Chan, C. H. & Wang, G. (2017). An Improved Full-Wave Multilevel Green's Function Interpolation Method With RBF-QR Technique for Fast Field Evaluation. *IEEE ACCESS*, Vol. 5, pp. 10241-10249.
43. Zheng, J., Zhang, W., Jiang, J. & Guo, R. (2017). CFD simulation and experimental study of water-oil displacement flow in an inclined pipe. *International journal of heat and technology*, Vol. 35, No 3, pp. 663-667.
44. Zhou, L., Bai, L., Shi, WD., Li, W., Wang, C. & Ye, DX. (2018). Numerical analysis and performance experiment of electric submersible pump with different diffuser vanes number. *Journal of the brazilian society of mechanical sciences and engineering*, Vol. 40, No 2. DOI: 10.1007/s40430-018-0986-y.
45. Choporov, S. V., Gomenyuk, S. I., Alatomneh, H. K. & Ospishchev, K. S. (2016). Discrete models generation methods: structured and block-structured grids. *Visnyk Zaporizkoho natsionalnoho universytetu: Zbirnyk naukovykh statei. Fyzyko-matematychni nauky*, No 1, pp. 272-284.
46. Kalion, V. A. (2011). *Obchislyvalna hidromekhanika. Modelni zadachi: navch. posibnyk*. Kyiv. Vydavnycho-polihrafichnyi tsentr "Kyivskiy universytet".
47. Thompson, J. F., Soni, B. K. & Weatherill, N. P. (1998). *Handbook of Grid Generation*. Boca Raton: CRC Press.

Збірник наукових праць

***Вісник Запорізького національного університету***  
***Фізико-математичні науки***  
**№ 1, 2018**

Технічний редактор – *Н. В. Непритворна*

Верстка, дизайн-проробка, оригінал-макет і друк виконані  
в редакційно-видавничому відділі  
Запорізького національного університету  
тел. (061) 289-12-98

Підписано до друку 29.01.2019. Формат 60 × 90/8.

Папір Data Copy. Гарнітура «Таймс».

Умовн.-друк. арк. 23,7

Замовлення № 34. Наклад 100 прим.

Запорізький національний університет  
69600, м. Запоріжжя, МСП-41  
вул. Жуковського, 66

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи  
до Державного реєстру видавців, виготівників  
і розповсюджувачів видавничої продукції  
ДК № 5229 від 11.10.2016