

ПРИКЛАДНА ГЕОМЕТРІЯ, ІНЖЕНЕРНА ГРАФІКА

УДК 514.177.2

**РОЗВ'ЯЗАННЯ ІЗОПЕРИМЕТРИЧНОЇ ЗАДАЧІ
ДЛЯ ЗАМКНЕНОЇ ЛОМАНОЇ
ЗА ДОПОМОГОЮ ТЕОРЕМИ ПРО ТРИ СИЛИ**

Величко І. Г., к.ф.-м.н.,

Іщенко О. А., інж.

Таврійський державний агротехнологічний університет

Тел. (0619) 42-68-74

Анотація – Розглядається замкнена ламана з рухомими ланками на площині. Шукається така її форма, при якій вона має максимальну площу. Відомий результат про те, що ламана має бути вписана в коло, доводиться новим чином – з використанням теореми про три сили.

Ключові слова: замкнена ламана, рухома ланка, теорема про три сили, описане коло, умови рівноваги, ізопериметрична задача.

Актуальність теми. Ізопериметрична задача в вузькому сенсі формулюється наступним чином: який вигляд повинна мати проста замкнена крива фіксованої довжини на площині, щоб вона обмежувала максимальну можливу площу. Якщо розглядати криву, задану параметричним рівнянням $\bar{r} = (x(t), y(t))$, яка в кожній точці має дотичну, то сформульована задача записується наступним чином[1]: знайти максимум функціоналу

$$\int_{t_0}^{t_1} x(t)y'(t)dt$$

при умовах $\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = l, x(t_0) = x(t_1), y(t_0) = y(t_1).$

В широкому сенсі ізопериметричними називаються задачі пошуку екстремуму функціонала при наявності інтегральних обмежень. Подібні задачі відносяться до варіаційного числення [1].

Якщо сформулювати класичну ізопериметричну задачу для замкненої ломаної з рухомими ланками, то варіаційний підхід не можна застосовувати. Відомо, що задана замкнена ламана буде обмежувати

максимальну площу тоді та тільки тоді, коли вона вписана в коло [2]. Цікавим є з'ясування того факту, в чому полягає механічний сенс цього явища.

Постановка проблеми. Є замкнена ламана зі рухомими ланками фіксованої довжини. Потрібно знайти таке її положення, при якому площа, обмежена цією ламаною, приймає максимальне значення.

Метод розв'язання. Розглянемо фізичне тіло, яке складається з системи прямокутних пластинок, причому сусідні пластинки шарнірно зчеплені між собою таким чином, щоб утворювати рухому бокову поверхню прямої призми. Ця призма розташована вертикально на гладкій поверхні. Перетин, перпендикулярний вісі цієї призми, буде представляти собою замкнену ламану з рухомими ланками. Всередину цієї призми заллємо рідину або помістимо резинову ємність з повітрям і почнемо нагнітати тиск. Під тиском рідини призма набуде форми, коли її об'єм максимальним. Оскільки при фіксованій висоті об'єм призми пропорційний площі його перетину, то перетин буде мати максимальну площу. Форма цього перетину і є розв'язком ізопериметричної задачі для замкненої ламаної. Ця конструкція описана в [2].

Доведемо, що ламана, яка є розглянутим вище перетином, вписана в коло.

Розглянемо перетин призми. На всі пластини з однаковою силою тисне повітря, причому результуюча сила пропорційна площі пластини, а, отже, і довжині відповідної ланки ламаної. Напрямок сили перпендикулярний площині пластини і направлений зовні. Розглянемо ламану, яка є перетином призми, і сили, які діють на її ланки (Рис.1.). Розглянемо одну з ланок, звільнимо її від зв'язків і замінимо їх реакціями. (Рис.2).

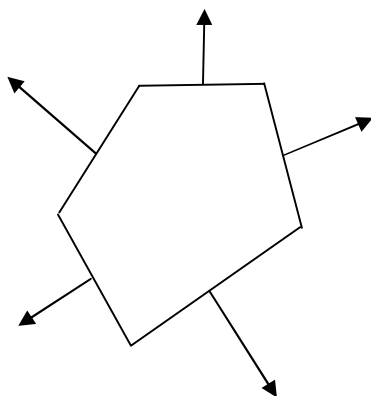


Рис. 1.

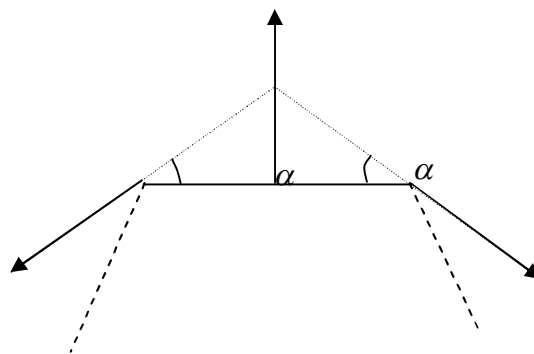


Рис. 2.

На ланку, яка знаходиться в рівновазі, діють три сили, які, згідно з теоремою про три сили, перетинаються в одній точці – точці O .

Оскільки одна з сил направлена вздовж серединної нормалі, то дві інші лінії утворюють з ланкою рівнобедрений трикутник. В силу третього закону Ньютона [3] на сусідні ланки діють сили, протилежні по напрямку та рівні по модулю відповідним силам.

Спочатку розглянемо випадок, коли ламана складається з чотирьох ланок. Зобразимо лінії, на яких лежать сили взаємодії ланок ламаної, та позначимо кути (рис.3).

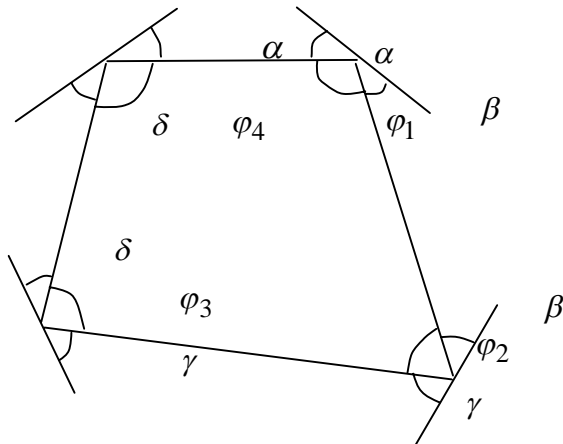


Рис. 3.

Мають місце наступні рівності

$$\alpha + \beta + \varphi_1 = \pi,$$

$$\beta + \gamma + \varphi_2 = \pi,$$

$$\gamma + \delta + \varphi_3 = \pi,$$

$$\delta + \alpha + \varphi_4 = \pi.$$

Додамо перше та третє рівняння та віднімемо друге та четверте. Отримаємо рівність

$$\varphi_1 + \varphi_3 - \varphi_2 - \varphi_4 = 0$$

наслідком якої є той факт, що чотириохкутник вписаний в коло [5].

Таким чином ми довели, що якщо замкнена ламана з чотирма ланками обмежує максимальну площу при умові, то вона вписана в коло.

Повернемося до загального випадку. Нехай ламана має більш ніж чотири ланки. В описану вище конструкцію, яка реалізує максимальний перетин, додаємо ще одну пластину, що сполучає два ребра призми, між якими знаходяться рівно два ребра. Наявність додаткової зв'язки не порушить рівноваги. Отже, до отриманого чотирикутника можна застосувати наведені вище міркування. Отримаємо, що чотири сусідні вершини ламаної лежать на одному колі. Оскільки це має місце для любых чотирьох сусідніх вершин, то звідси випливає, що всі вершини ламаної лежать на одному колі, в яке вона вписана.

Висновки. В статті, з використанням апарату теоретичної механіки, наведено нове доведення твердження, що зі всіх замкнених ламаних с фіксованими довжинами ланок найбільшу площу обмежує та, яка вписана в коло.

Література

1. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л.Э. Эльсгольц // М.: Наука, 1969, 425с.

2. *Протасов В.Ю.* Максимумы и минимумы в геометрии [Текст] / В.Ю. Протасов // - М.: НЦНМО, 2005.- 56 с.
3. *Голубев Ю.Ф.* Основы теоретической механики / Ю.Ф.Голубев // - М.: МГУ, 2000. —720 с
4. *Яворский Б.М.* Справочник по физике / Б.М. Яворский, А.А. Детлаф // М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1985. — 512 с.
5. *Выгодский М.Я.* Справочник по элементарной математике /М. Я. Выгодский // М. Наука, 1965, 336с.

РЕШЕНИЕ ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЗАМКНУТОЙ ЛОМАННОЙ С ПОМОЩЬЮ ТЕОРЕМЫ О ТРЕХ СИЛАХ

И. Г. Величко, О. А. Ищенко

Аннотация - рассматривается замкнутая ломаная с подвижными звеньями на плоскости. Ищется такая ее форма, при которой она имеет максимальную площадь. Известный результат о том, что она должна быть вписана в окружность, доказана новым способом – с применением теоремы о трех силах.

DECISION ISOPERIMETRIC PROBLEM FOR CLOSED POLYGONAL USING THEOREM ABOUT THREE FORCES

I. Velichko, O. Ischenko

Summary

Considered closed polygon with mobile units on the plane. It sought such form in which it has the maximum area. Known result that it should be inscribed in a circle, proved in a new way - using theorem three forces.