

# МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ В ЕКОНОМІЦІ

УДК 519.677

Назарова О.П., к.т.н., доцент,  
Плотніченко С.Р., к.е.н., доцент,  
Сурженко Н.В., к.е.н., доцент  
Таврійський державний агротехнологічний університет

## АНАЛІЗ МЕТОДІВ МОДЕЛЮВАННЯ ТРАНСПОРТНИХ СИСТЕМ

**Анотація.** В статті проаналізовано та обґрунтовано аналіз математичних методів і моделей для транспортних перевезень; дана характеристика методів дослідження; проаналізовані переваги й недоліки методів і моделей та переваги їх використання. Охарактеризовано основні види моделювання транспортного потоку. Доведено, що імітаційне моделювання є найбільш ефективним методом дослідження великих транспортних систем. Це дає можливість отримувати будь-яку кількість оцінок ймовірнісної моделі, крім цього, імітаційне моделювання є менш витратним, ніж проведення експериментів з реальними системами.

**Ключові слова:** транспортна система, оптимізація, імітаційне моделювання, потоки, оптимізація управління.

**Jel code classification:** C53, C59

Nazarova O.P, Ph.D., Associate Professor,  
Plotnichenko S.R, Ph.D., Associate Professor,  
Surgenko N.V, Ph.D., Associate Professor,  
Tavria State Agrotechnological University

## ANALYSIS MODELING METHODS OF TRANSPORT SYSTEMS

**Abstract.** The article analyzes substantiated the analysis of mathematical methods and models for transportation; describes methods of research; analyzes the advantages and disadvantages of methods and models; the advantages of it's use.

**Formulation of the problem.** Transport systems are important in providing infrastructure and city life. According seeks the most efficient use of transport systems, optimal planning of freight, improve movement. To solve these problems using simulation, which makes it possible to determine the parameters and predict the functioning of the transport network, traffic on all network elements; traffic volumes, average speed, delays and loss of time, etc. Depending on the task selected modeling method.

**The purpose of the article.** Describe and characterize the main types used modeling to analyze traffic flow on the use of mathematical methods and models to calculate various stations, network nodes.

**The main material research.** Optimal control involves some of the best circuits flows. Of particular note is a crucial feature - an optimum would be a dynamic process - that is the optimal dynamic circuit flows.

**The choice of model is determined according to the task to set parameters object.** The method can be widely used for the calculation and optimization of any complexity.

**Two-tier system simulation is used to set parameters that can not display one model:** Multivariate (optimization model) internal structure and technology (simulation model).

**Conclusion.**

Can be noted, that imitation modeling - most effective method of the study of large-transport system's, that brings opportunities and benefits: Description of complex systems with probable parameters, using mathematical models; the development of alternative options of system model, the requirements of corresponding source; receive any quantity of estimates of probabilistic model. In addition, simulation is less costly than conducting experiments with real systems.

**Keywords:** transport system, optimization, simulation, flow optimization management.

**Постановка проблеми.** Транспортні системи мають велике значення у забезпеченні інфраструктури та життєдіяльності міст. Проте, як у нових системах, так і традиційних, існує цілий комплекс проблем, які потребують невідкладного рішення. І більшість з них – це економічні проблеми або проблеми, що зводяться до економічних,

Задачу управління транспортною системою населеного пункту можна поділити на три основні класи:

управління основною експлуатаційною діяльністю (перевезенням, перевалкою і збереженням вантажів);

розвиток транспортної системи (транспортних мереж, рухомого складу, вантажно-розвантажувальних устроїв і т.п.);

підтримка працездатності транспортної системи (ремонтні роботи, постачання, енергозабезпечення тощо).

Відповідно до цього перед місцевими органами управління постає задача визначення найбільш оптимального використання транспортних систем, оптимального планування вантажоперевезень з метою покращання руху. Для вирішення таких задач застосовується моделювання, яке дає можливість визначати і прогнозувати параметри функціонування транспортної мережі: інтенсивність руху на всіх елементах мережі; обсяги перевезень, середню швидкість руху, затримки і втрати часу тощо. Залежно від поставленого завдання обирається метод моделювання.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** У роботах сучасних фахівців в галузі транспорту описані різні способи регулювання руху на складних вузлах, а також методи проектування економічних транспортних систем з високою пропускну здатністю. Методи машинної імітації руху транспортних потоків наведені в роботах Р. Картабаева, В. Сильянова, Ф. Хейта. Зокрема їх обґрунтуванню присвячені праці таких вчених-науковців, як: А.Е.Александрова, О.В. Евсеєва, В.Н. Буркова, В.В. Віннікова, Д.В. Зеркалова, В.Г. Коба, О.М. Котлубай, Г.Ю. Кучерук, М.Т. Примачова, І.В. Савельєвої, І.П. Садловської, О.М. Тимошук, Л.А. Заборського, П.А. Новікова, Н.А. Тушина та ін.

Розробка стратегічних планів розвитку вантажоперевезень та їх практична реалізація пов'язана з вибором теоретичних і прикладних завдань, оптимального їх вирішення.

**Мета статті.** Дати опис і охарактеризувати основні види математичних методів, які застосовуються для моделювання транспортного потоку, здійснити аналіз використання математичних методів і моделей для розрахунку різних станцій, вузлів мережі.

**Виклад основного матеріалу дослідження.** Оптимальне управління передбачає знаходження певної найкращої схеми потоків. Слід особливо відзначити винятково важливу особливість оптимального управління – це динамічний процес, оптимальна динамічна схема потоків. Принципами оптимального управління потоками є:

1) прив'язка постачальників до споживачів в динаміці;

2) динамічна схема потоків;

3) можливість розрахунку схеми вантажоперевезень, у випадку наявності частини потоків у дорозі;

4) урахування наявності залишків транспорту у споживачів;

5) урахування можливості виникнення завантажених і порожніх транспортних потоків;

6) можливість узгодження прибуття різних потоків до одного і того ж споживача;

7) урахування багатоструменевих мереж при розрахунку схеми транспортних потоків;

8) урахування обмежень пропускну здатності для кожного струменя і для всього потоку;

9) урахування реального часу руху потоків по ділянках в конкретній обстановці («вікна» для ремонту, забезпеченість транспортом, завантаженість ліній та ін.);

10) управління потоками повинно максимізувати резерви транспортної системи.

Гнучке управління потоками призводить до появи резервів управління, що дозволяє транспортній системі стійко функціонувати в мінливих умовах без наявних резервів.

З позицій моделювання виділяють чотири класи транспортних об'єктів, які відрізняються за своїми властивостями:

- Сортувальна станція – для якої важливі структура, технологія, випадкові процеси, менш важливим є управління;
- Вантажна станція – відрізняється пріоритетом поетапного управління потоками;
- Полігон – структура відображається укрупнено, важливо оптимальне управління

потоками при раціональному поєднанні вхідних і вихідних ритмів;

- Транспортний вузол – особливістю є необхідність відображення підсистем в системі [1] (рис. 1).

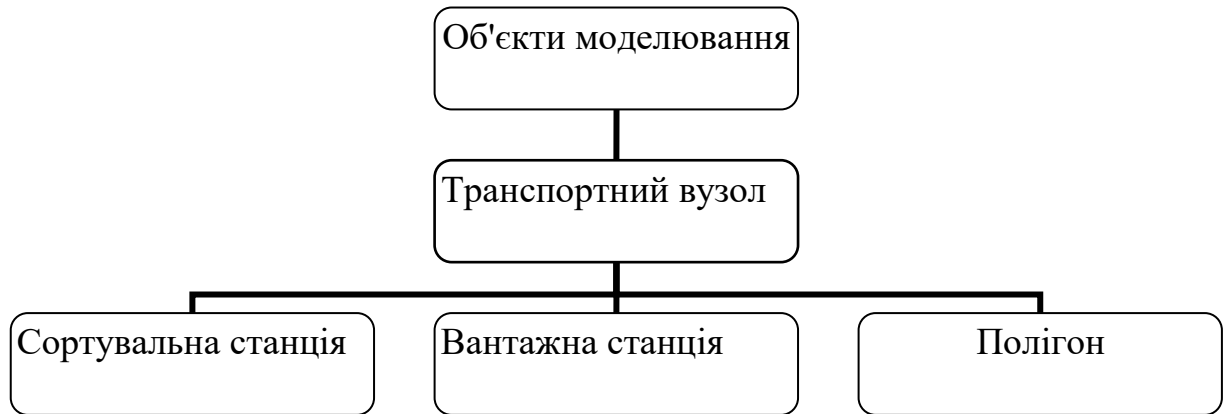


Рис. 1. Види об'єктів моделювання

На практиці для дослідження транспортних систем застосовують такі методи моделювання процесів, як: детермінований аналітичний, теорії масового обслуговування, графічний, імітаційне моделювання.

Ці методи мають такі особливості:

1. Аналітичний детермінований – розрахунок відбувається за аналітичними формулами числа шляхів на станціях, пропускної здатності пристроїв й ін .;
2. Імовірнісний – станції розраховувались як системи масового обслуговування;
3. Графічний – побудова добового плану графіка роботи станції або графіка руху техніки;
4. Імітаційне моделювання відбувається на основі комп'ютерних моделей з використанням стандартних мов програмування або авторських розробок.

Порівняльна характеристика наведених методів показала наступне:

1. Аналітичний метод є відносно простим, однак недостатньо відображає структуру і випадкові процеси, а також дає великі похибки;
2. Імовірнісний метод не повністю відображає структуру й управління процесу;
3. Графічний метод не відображає випадкові процеси;
4. Імітаційне моделювання потребує високої професійної підготовки, оскільки при побудові моделі вимагає автоматизації процесу.

Порівняльний аналіз дає можливість стверджувати, що кращим серед наведених методів моделювання процесів є метод імітаційного моделювання.

Таблиця 1

**Помилки при розрахунку транспортних систем різними методами**

Об'єкт	детермінований аналітичний	теорія масового обслуговування	графічний	імітаційне моделювання
Полігон	30%	24%	14%	5%
Вантажна станція	50%	40%	20%	5%
Сортувальна станція	40%	30%	20%	10%

Недоліком імітаційного моделювання є трудомісткість і недостатня продуктивність при істотній багатоваріантності, що передбачає застосування оптимізаційних моделей у різній постановці.

Вибір моделі для заданих параметрів об'єкта визначається відповідно до поставленої задачі. Метод може широко застосовуватись

для розрахунку моделі та її оптимізації будь-якої складності.

Дворівнева система моделювання використовується для набору параметрів, які не може відобразити одна модель: багатоваріантність (оптимізаційна модель), внутрішня структура і технологія (імітаційна модель) (рис.2).

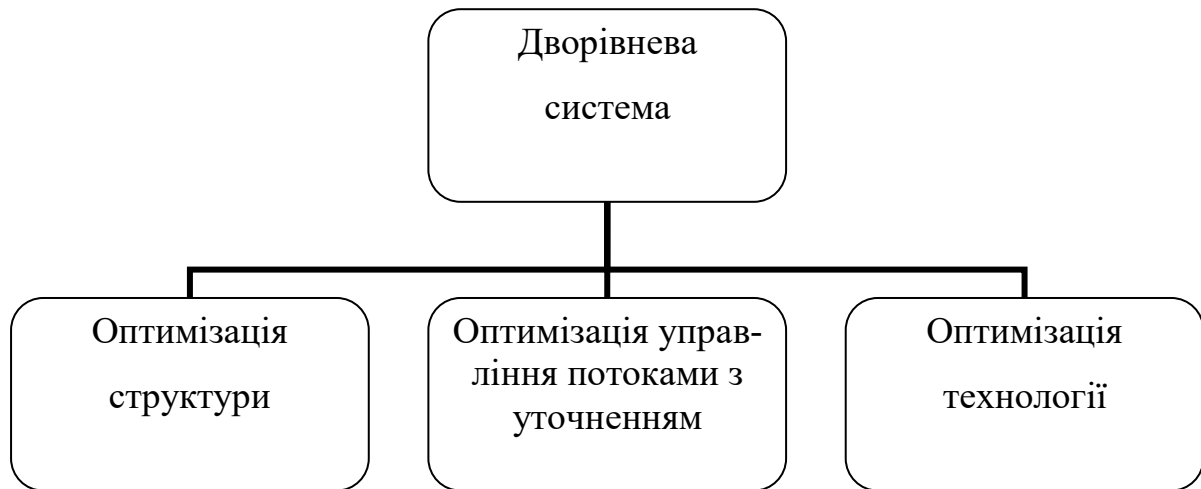


Рис. 2. Области застосування дворівневих систем оптимізації

Імітаційне моделювання – це уявлення динамічної поведінки системи за допомогою просування її від одного стану до іншого відповідно до певних правил.

Оптимізація з використанням імітаційних моделей є ітераційна послідовність експериментів, що дозволяє отримати мінімум (максимум) деякого функціоналу. Особливості оптимізації на імітаційних моделях полягають в наступному:

функціонал і обмеження задані, як правило, в неявному вигляді;

при побудові моделей широко застосовуються алгоритмічно задані функції, властивості яких (наприклад, опуклість) маловідомі;

результат кожного експерименту істотно залежить від розвитку випадкових процесів, які використовуються в моделі. Через це важко визначити, що саме впливає на результат: вибір вихідних параметрів і управління або реалізація випадкового процесу.

Взагалі експерименти з моделлю складної системи є трудомісткими, вони вимагають значних затрат машинного часу, а функціонал задається, зазвичай, у просторі великої розмірності, через це повний перебір варіан-

тів неможливий. Тому необхідно застосовувати методи планування експериментів.

Взаємодія моделей полягає:

у перетворенні параметрів оптимального варіанту у вихідні дані для імітації,

у коригуванні параметрів розрахункової мережі оптимізаційної моделі за результатами розрахунку на імітаційній.

Для узгодження параметрів моделей зазвичай потрібно кілька ітерацій.

Імітаційна модель відображає стохастичний процес зміни дискретних станів системи. При реалізації моделі на комп'ютері проводиться накопичення статистичних даних за показниками моделі, які є предметом досліджень. Після закінчення моделювання накопичена статистика обробляється, і результати моделювання виходять у вигляді вибірових розподілів досліджуваних величин, диференціальних рівнянь.

Розв'язання системи лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами можна вирішувати як аналітично (для обмеженого числа елементів при фіксованому значенні інтенсивностей відмови і відновлення), так і чисельним (наближеним, зокрема методом Рунге-Кутта) рішенням сис-

теми диференціальних рівнянь з використанням пакетів (Maple, MathCAD).

$$\begin{cases} p'_0(t) = -\lambda_c p_0(t) - \sum_{i=1}^n \mu_i \cdot p_i(t) \\ p'_i(t) = \lambda_i p_0(t) - \mu_i \cdot p_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (1)$$

де  $\lambda_i$  - інтенсивність відмови  $i$ -го елемента, відповідні відмовам елементів системи;

$\mu_i$  - інтенсивності відновлення  $i$ -го елемента;

$\lambda_c = \sum_{i=1}^n \lambda_i$  - інтенсивність відмови системи;

$p_0(t) = K_T(t)$  - ймовірність того, що в момент  $t$  система справна;

$p_i(t)$  - ймовірність того, що в момент  $t$  система знаходиться в несправному стані внаслідок відмови  $i$ -го елемента.

Оптимізація управління транспортними потоками з необхідністю передбачає використання динамічних моделей. Через сильний структурний та функціональний взаємозв'язок у транспортних системах важко, не моделюючи процес, передбачити їх майбутній стан. Коригування параметрів оптимізаційної моделі може полягати в зміні:

- структури мережі;
- пропускної здатності дуг;
- часу ходу по дузі;
- вартості затримки потоку в вузлах;
- вартості пропуску потоків;
- ємності вузлів.

Математичною моделлю функціонування системи є система звичайних диференціальних рівнянь:

Оптимізацію управління можна здійснювати за двома класами критеріїв:

мінімуму транспортних витрат та мінімуму виробничо-транспортних витрат. Відповідно, змістовна сутність управління буде відрізнитись.

До першого класу відносяться:

динамічна транспортна задача з затримками (ДТЗЗ),

ДТЗЗ з керованими затримками і ДТЗЗ в багато продуктивій постановці.

Математична постановка з затримками (ДТЗЗ).

Припустимо, що транспортна мережа складається з  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_N\}$  пунктів, з'єднаних спрямованими шляхами,  $(p_i, p_j)$ ,  $i \neq j$ ,  $p_i, p_j \in P$ , де  $[0, T]$  - інтервал оптимізації функціонування транспортної системи. Для кожного моменту часу  $t$  ( $t \in [0, T]$ ) на множині  $P$  пунктів мережі визначена функція виробництва і споживання  $q_i(t)$  (або  $q_i^k(t)$  для  $k$ -го виду вантажу).

Пункті виробництва  $p_i$ :

Джерело (Пункт виробництва)	пункт (пункт споживання)	транзитний
$q_i(t) > 0$	$q_i(t) < 0$	$q_i(t) = 0$

Для кожного шляху  $(p_i, p_j)$  характерні:

$v_{ij}(t)$  - місткість складу пункту  $p_i$ , при  $i = j$ ;

$u_{ij}(t)$ ,  $t \in [0, T]$  - обсяг поставок на шляху  $(p_i, p_j)$ , що виходить в момент  $t$  з пункту  $p_i$  і прибуває в момент  $t + t_{ij}$  в пункт  $p_j$  ( $u_{ij}(t) = 0$  (під час пересування відсутня  $(p_i, p_j)$  або  $t + t_{ij} > T$   $i \neq j$ );

$v_{ij}(t) \geq 0$  - пропускна здатність і транспортне запізнення  $t_{ij} \in [0, T]$ , поставка

$u_{ij}(t)$  означає запас пункту  $p_i$  в момент часу  $t$  ( $t_{ii} = 1$ );

$c_{ij}(t)$  - витрати на перевезення одиниці об'єму поставок з  $p_i$  в  $p_j$ ;

$c_{ii}(t)$  - витрати на зберігання одиниці запасу.

Для кожного пункту споживання  $p_j$  період, протягом якого відсутні поставки, дорівнює  $[0, t_j - 1]$ , де  $t_j = \min(t_{ij})$ ,  $i \neq j$ .

Припускається, що в момент часу  $t = 0$  існує запас  $u_{jj}(0)$ , який забезпечить споживання в період, коли неможливі поставки, тобто справедливо:

$$u_{jj}(0) + \sum_{t=0}^{t_j-1} q_j(t) \geq 0. \quad (2)$$

Завдання оптимізації функціонування транспортної системи ставиться, як завдання

мінімізації сумарних транспортних витрат і витрат на зберігання:

$$J = \sum_{t=0}^T \sum_{p_i, p_j \in P} c_{ij}(t) \cdot u_{ij}(t) \quad (3)$$

при границях:

$$u_{ii}(t+1) = u_{ii}(t) + q_i(t) + \sum_{\substack{p_j \in P \\ i \neq j}} (u_{ji}(t - t_{ji}) - u_{ij}(t)),$$

$$0 \leq u_{ij}(t) \leq v_{ij}(t); \quad p_i, p_j \in P, \quad t = \overline{0, T},$$

$$0 \leq t + t_{ij} \leq T, \quad 0 \leq t - t_{ij} \leq T,$$

$$u_{ii}(0) = u_{ii}^0, \quad u_{ii}(T) = 0, \quad p_i \in P. \quad (4)$$

Для відправника	$u_{ii}(t+1) = u_{ii}(t) + q_i(t) - \sum_{p_j \in P} u_{ij}(t)$
для одержувача	$u_{jj}(t+1) = u_{jj}(t) + q_j(t) + \sum_{p_i \in P} u_{ij}(t - t_{ij})$
для транзитного пункту	$u_{ii}(t+1) = u_{ii}(t) + \sum_{p_j \in P} u_{ji}(t - t_{ji}) - \sum_{p_j \in P} u_{ij}(t)$

Завдання вирішується побудовою статичної моделі методом розмноження в часі.

Принциповою відмінністю модифікації ДТЗЗ з керованими затримками є те, що по одній і тій же лінії для одного і того ж транспорту допускається різний час пересування. Передбачається, що транспорт можна провести по-різному, при цьому або час у дорозі відповідає нормативному, або транспорт заявлено як терміновий і тоді час зменшується, або при великому завантаженні тривалість пересування вантажу може збільшитися (допустимі й інші варіанти).

Додаткові втрати на стику «транспорт-виробництво» виникають, в основному, через розбіжність ритмів прибуття потоків і режимів споживання.

Однопродуктова динамічна задача із затримками зводиться до статичної багатопродуктової транспортної задачі на мережі, для якої є методи вирішення. У свою чергу, статична багатопродуктова транспортна задача на мережі зводиться до матричної форми, для якої також розроблені ефективні алгоритми.

**Висновки.** Транспортні моделі, побудовані на основі сучасних інформаційних тех-

нологій, представляють собою наймогутніші обчислювальні програмні комплекси, розрахунки яких кладуться в основу прогнозів та є необхідною аналітичною базою для прийняття рішень з розвитку транспортної інфраструктури.

Проаналізовано моделі систем транспорту різного використання. Розглянуто транспортні потоки, як однопродуктові так і багатопродуктові. Проаналізовані моделі потоків. Наведені способи оптимізації та існуючі моделі.

Можна відзначити, що імітаційне моделювання є найбільш ефективним методом дослідження великих транспортних систем. Застосування його має значні переваги і можливості, по-перше, розв'язання складних систем з ймовірними параметрами; по-друге, розробка альтернативних варіантів моделей системи, які відповідають вихідним вимогам; по-третє, отримання будь-якої кількості оцінок ймовірнісної моделі, проводячи її прогони; нарешті, застосування імітаційного моделювання є менш витратним ніж проведення експериментів з реальними системами.

**Список літератури:**

1. Александров А.Э. Математическая модель в автоматизированной системе управления согласованной доставкой грузов //Транспорт. Наука, техника, управление, 2006. - №11. – С.37-39.
2. Александров А.Э. Расчет и оптимизация транспортных систем с использованием моделей (теоретические основы, методология). дис. ... докт. тех. наук / Александров Александр Эрнстович. - Екатеринбург , 2008. — 285с.
3. Имитационное моделирование производственных систем/ Под ред. А.А.Вавилова. — М.: Машиностроение; Берлин: Техник, 1983.
4. Кузнецов, Д. Н. Оптимизация затрат в системе управления запасами торгового предприятия в краткосрочной перспективе. дис. ... канд. экон. наук / Кузнецов Дмитрий Николаевич. – Тамбов, 2007. – 193с.
5. Цвиринько, И.А. Методология, методы и модели управления логистическими бизнес-процессами / И.А. Цвиринько– СПб.: СПбГИЭУ, 2003. – 262с.
6. D. Ortuzar, G. Willumsen. Modelling Transport, 3rd Edition, London: 2006.
7. Beckmann M., McGuire C.B., Winsten C.B. Studies in the economics of transportation. RM-1488. Santa Monica: RAND Corporation, 1955
8. Lo H.K., Chen A. Traffic equilibrium problem with rout-specific costs: formulation and algorithms // Transportation Research Part B. 2000. V. 34, № 6. P. 493–513.
9. Marcotte P. Application of Khobotov's algorithm to variational inequalities and network equilibrium problems // INFOR. 1992. V. 29, № 4. P. 258–270. 54. Nagurney A. Network Economics: A Variational Inequality Approach. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999.
10. Tsvirinko, IA Methodology, methods and logistics business process management model / IA Tsvirinko- SPb .: SPbGIEU, 2003. - 262s.

**List of references:**

- 1.Aleksandrov AE A mathematical model of an automated control system of coordinated delivery of goods // Transport. Science, technology, management, 2006. - №11. - p.37-39.
- 2.Aleksandrov AE Calculation and optimization of transport systems with the use of models (the theoretical basis, methodology). Dis. ... Doctor. those. Science / Alexander Alexandrov Ernstovich. - Ekaterinburg, 2008. – 285 p.
- 3.Simulation of production systems / Ed. A.A.Vavilova. - M .: Mechanical Engineering; Berlin: Technician 1983.
- 4.Kuznetsov DN Cost optimization in commercial enterprise inventory management system in the short perspective.dis. ... Cand. ehkon. Science / Dmitri Kuznetsov. - Tula, 2007. – 193 p.
- 5.Beckmann M., McGuire C.B., Winsten C.B. Studies in the economics of transportation. RM-1488. Santa Monica: RAND Corporation, 1955
- 6.Lo H.K., Chen A. Traffic equilibrium problem with rout-specific costs: formulation and algorithms // Transportation Research Part B. 2000. V. 34, № 6. P. 493–513.
- 7.Marcotte P. Application of Khobotov's algorithm to variational inequalities and network equilibrium problems // INFOR. 1992. V. 29, № 4. P. 258–270. 54. Nagurney A. Network Economics: A Variational Inequality Approach. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999.
- 8.Tsvirinko, IA Methodology, methods and logistics business process management model / IA Tsvirinko- SPb .: SPbGIEU, 2003. – 262 p.