

УДК 631.22.014

## РОЗРОБКА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ОДНОШАРОВОГО ПЕРЕМІЩЕННЯ ЗЕРНОВОГО МАТЕРІАЛУ ПО ПОХИЛІЙ КРУГОВІЙ ВІБРОПОВЕРХНІ

Шацький В.В., д.т.н.,

Дем'яненко Д.В., аспірант\*.

*Таврійський державний агротехнологічний університет*

Тел.: (0619) 42-05-70

**Анотація** – на основі методу дискретних елементів досліджується рух частинок зернового матеріалу по похилій круговій поверхні, що здійснює кругові горизонтальні коливання з визначеним якісним показником розподілу частинок по поверхні.

**Ключові слова** – зерно, частинки, шар, структура матеріалу, переміщення, взаємодія, нерівномірність розподілу, мікронізація.

*Постановка проблеми.* Проблема створення технічних засобів для мікронізації зернового матеріалу, що ефективно вписується в технологічні лінії виробництва комбікормів, полягає у відносно високій енергоємності процесу і відсутності якісного одношарового розподілу зернового матеріалу по поверхні термічної обробки. Тому дослідження, спрямовані на зниження енергоємності процесу за рахунок підвищення якості одношарового розподілу зернового матеріалу з одночасним перевертанням зернин, є актуальним.

*Аналіз останніх досліджень.* На сьогоднішній день створено цілий ряд мікронізаторів, де процес переміщення здійснюється при вібротранспортуванні або з використанням механічних пристроїв для переміщення і перевертання зернового матеріалу [1] та вимагає технологічного вдосконалення. Проведені раніше теоретичні дослідження спрямовані, в основному, на визначення допустимих відхилень енергетичного потоку для обробки [2] зернового матеріалу [3] і параметрів дозуючих пристроїв [3]. При цьому, питання якісного розподілу при переміщенні оброблюваного матеріалу по поверхні обробки не розглядалися в сукупності з проблемами енергоємності та якості здійснення процесу мікронізації.

*Формулювання цілей статті (постановка завдання).* Створення математичних моделей процесів формування та одношарового пере-

---

© Шацький В.В., Дем'яненко Д.В.

\* Науковий керівник – д.т.н., проф. Шацький В.В.

міщення зернового матеріалу по похилій круговій поверхні під дією власної ваги є досить перспективним дослідженням для підвищення якості здійснення процесу мікронізації і актуальним – для зниження його енергоємності.

Тому метою цієї роботи є розробка моделі одношарового переміщення зернового матеріалу по похилій круговій поверхні.

*Методи досліджень.* Для моделювання поведінки твердих тіл, що складають зерновий сипучий матеріал, доцільно використовувати метод дискретних елементів (МДЕ) [4], заснований на додатку законів Ньютона і контактної механіки, висока ефективність якого обумовлена його універсальністю і практично необмеженими можливостями діагностики модельованих явищ [5].

При моделюванні процесу переміщення часток корму по похилій круговій поверхні приймаємо наступні допущення:

- зерновий матеріал являє собою сукупність з  $N$  відособлених пружних частинок сферичної форми радіуса  $R_i$ ;

- переміщення всієї маси частинок здійснюється при стохастичному взаємному переміщенні частинок зі збільшенням їх кількості в наступних елементарних шарах на шість одиниць кормового матеріалу середнього розміру;

- одна частинка переміщується по поверхні при одночасному переміщенні щодо чотирьох розташованих в зіткненні часток;

- за елементарний шар приймаємо шар матеріалу шириною рівною середньому розміру частинок сипучого матеріалу;

- тиск маси матеріалу, розташованого вище елементарного шару, здійснюється між частинками, що містяться в зоні взаємного перетину частинок сусідніх елементарних шарів.

*Основна частина.* Якість розподілу часток на поверхні залежить як від форми цієї поверхні, її кінематичних параметрів, так і фізико-механічних властивостей зернового матеріалу, що оброблюється.

Форма кругової похилої поверхні описується системою рівнянь, де, послідовно, починаючи з  $\alpha_0$  кут нахилу поверхні, зменшується на  $\Delta\alpha_{hi}$  з кроком  $h_i$

$$\begin{cases} x_{h_i} = 0,5d + \sum_{i=1}^h \left\{ d_{h_i} \cos \left[ \alpha_0 - \sum_{i=1}^{h_i} \Delta\alpha (h_i - 1) \right] \right\} \\ y_{h_i} = \sqrt{R_{h_i}^2 - x_{h_i}^2} \\ z_{h_i} = 0,5d + \sum_{i=1}^h \left\{ d_{h_i} \sin \left[ \alpha_0 - \sum_{i=1}^{h_i} \Delta\alpha (h_i - 1) \right] \right\} \end{cases} \quad (1)$$

Форма поверхні визначиться виходячи із залежності швидкості переміщення зернового матеріалу по похилій поверхні від кута нахилу цієї поверхні на кожному кроці  $h_i$ .

Рух столу описується рівняннями гармонійних коливань ( $y=A\sin(\omega t + \phi_0)$ ), де амплітуда  $A$  по осі  $x$  становить  $R_{hi}(1-\cos\phi)$ , а по осі  $y$  –  $R_{hi}\sin\phi$ , тоді рух столу описується системою рівнянь

$$\begin{cases} x_n(t) = R_{hi}(1 - \cos\phi) \cos(\omega t + \phi_0) \\ y_n(t) = R_{hi} \sin\phi \sin(\omega t + \phi_0) \end{cases}, \quad (2)$$

де  $\omega$  – кругова частота коливань,  $\omega=2\pi/T$  ( $T$  – період коливань);  
 $\omega t + \phi_0$  – фаза коливань;  
 $\phi_0$  – початкова фаза в момент часу  $t = 0$ .

Задаючись необхідним прискоренням площини столу, можна знайти амплітуду і частоту коливань кругової похилої поверхні, диференціюючи  $y_n(t)$

$$v_n(t) = y'_n(t) = -A\omega \sin(\omega t + \phi_0). \quad (3)$$

На частку зернового матеріалу, що знаходиться на круговій поверхні, та що здійснює кругові горизонтальні коливання, крім квазіпружних сил і сил тертя між частинками, діє сила  $F_t$  тертя частинок зернового матеріалу по поверхні столу, яка є зовнішньою силою, що змушує частинки переміщуватися з перекочуванням і змінюється згідно виразу

$$F_t = F_o \cos \omega t. \quad (4)$$

де  $F_o$  – сила тертя при куті відхилення  $\phi_0$  та швидкості переміщення поверхні, що дорівнює  $v_{n\phi_0}(t) = -A\omega_t \sin \phi_0$ ;

$\omega_t$  – кругова частота коливань.

Разом з тим відомо, що при невеликих амплітудах і частотах коливань сила тертя обернено пропорційна швидкості руху  $F_t = m_q k_v v/t$ , де  $k_v$  – коефіцієнт тертя, що залежить від швидкості переміщення частинки по поверхні столу.

Рух кожної  $i$ -ї частинки повністю визначається координатами її центру ваги  $x_i$  (видалення від центру кругової поверхні),  $z_i$  (положення по вертикалі щодо центру кругової поверхні) і кутом  $\psi$  відхилення від радіальної прямої (умовно визначеним на круговій поверхні), (Рис . 1).

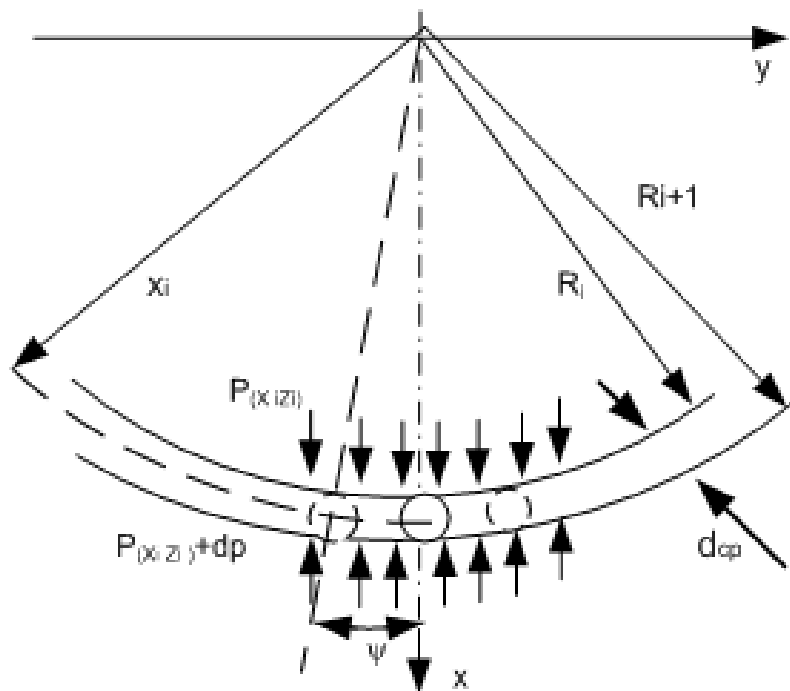


Рис. 1. Схема розташування матеріалу на похилій круговій поверхні.

Останнє залежить від моменту сил, прикладених до кожної частинки та забезпечує їх обертання на кут  $\Theta$  навколо її центру тяжіння.

Система рівнянь руху для кожного елемента в прямокутній декартовій системі координат має такий вигляд:

$$\begin{cases} m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = F_{x_i} \\ m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = F_{y_i} \\ m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = F_{z_i} \\ J_i \frac{d^2 \theta_i}{dt^2} = M_i \end{cases}, \quad (5)$$

де  $t$  – час здійснення процесу, на певному кроці;

$m_i$  – маса  $i$ -ї частинки;

$J_i$  – момент інерції  $i$ -ї частинки;

$F_i$  – сума сил, що діють на контактах частинок (включаючи силу тертя по похилій круговій поверхні);

$M_i$  – момент сил  $F_{ij\Sigma}$  відносно центра  $i$ -ї частинки.

Сума сил  $\Sigma p_{ihi}$ , діючих на контактах елементарних шарів частинок, що знаходяться на похилій круговій поверхні (Рис. 1), визначається виразом

$$\sum p_{ih_i} = \sum_{i=1}^{n_{hi}} m_q \cos \alpha_i \cos \left( \frac{\alpha_i + \alpha_{i+1}}{2} - \alpha_i \right) + \sum_{i=n_q/6}^{h_{i-1}} \left\{ \sum_{i=1}^{n_{h-1}} \left[ p_{ih_i} \cos \left( \frac{\alpha_{i-} - \alpha_{i+1}}{2} \right) - mg \sin \alpha_i f_t - p_{ih_{i-1}} \sin \left( \frac{\alpha_i + \alpha_{i+1}}{2} - \alpha_i \right) f_t \right] \right\}, \quad (6)$$

де  $\sum_{i=1}^n p_{ih_i}$  – тиск маси матеріалу, розташованого над  $h_i$  шаром;

$p_i$  – питомий тиск на одну частинку;

$n_{hi}$  – кількість частинок  $h_i$  шару.

Для визначення сил, діючих на  $i$ -ю частинку в шарі від частинок, розташованих вище елементарного шару, необхідно визначити зону контакту суміжних шарів (Рис. 2).

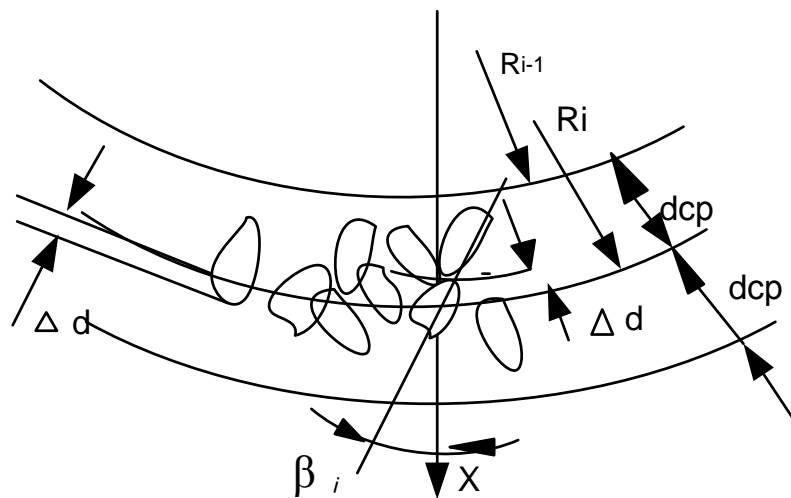


Рис.2 Схема взаємного перетину частинок контактуючих шарів

Для цього розглянемо ймовірність перетину частинками площини, що умовно розділяє суміжні шари шириною  $d_{cp}$ .

На підставі завдання Бюффона [3] виявимо ймовірність перетину площиною, перпендикулярної осі  $X$ , частинками шару шириною  $d_{cp}$ , часток, розмір яких менше ширини  $d_{cp}$ .

$$P_{d_i \leq d_{cp}} = \frac{4}{\pi d_{cp}} \int_0^{0,5\pi} d\beta \int_0^{0,5d_i \cos \phi} dx, \quad (7)$$

де  $\beta$  – кут між віссю  $x$  і напрямом вектора переміщення матеріалу.

Для випадку, коли довжина частинок перевищує висоту елемен-

тарного шару, ймовірність перетину умовною площиною поділу елементарних шарів частинок суміжних шарів визначається виразом [6,7]

$$P_{d_i \geq d_{cp}} = \frac{4}{\pi d_{cp}} \int_0^{0,5d_{cp}} dx \int_0^{\arccos \frac{2z_i}{d_i}} d\beta. \quad (8)$$

Математичне сподівання кількості  $n_{ci}$  частинок  $h_i$  шару, що перетинаються площиною, що розділяють суміжні шари сипучого матеріалу, визначається за виразом

$$n_i^c = P_{d_i} n_{h_i}, \quad (9)$$

де  $P_{d_i}$  – ймовірність перетину частинок площиною.

Кількість часток в елементарних шарах  $h_i$ , розташованих на різному видаленні від осі  $Z$ , не є постійною через збільшення кількості частинок в шарі з віддаленням від вертикальної осі  $Z$  і залежить від розміру частинок кормового матеріалу і радіусу умовних кіл кругової поверхні, що обмежують цей  $h_i$  шар.

Компактне розташування частинок першого шару навколо однієї частинки, розташованої в центрі кола, визначає радіус кола, по якому відбувається зіткнення частинок

$$x_{h_i} = (r_0 + r_1) \cos \xi_{h_i}, \quad (10)$$

де  $r_0, r_1$  – радіуси, відповідно, центральної частинки і частинок першого шару;

$\xi$  – центральний кут обхвату частинки першого  $h_1$  шару.

Беручи до уваги, що частинки наступних шарів розташовуються з перетином умовних кіл, що визначають їх  $h_i$  шар, то радіус їх розташування визначається за виразом

$$x_{h_i} = x_{h_1} + d_{h_i} h_i \cos \xi_{h_i} k_{nv}, \quad (11)$$

де  $d$  – діаметр частинок  $h_i$  шару;

$\xi_{hi}$  – центральний кут обхвату частинки  $h_i$  шару;

$k_{nv}$  – коефіцієнт збільшення обсягу розташування частинок ( $k_{nv} = 1, 10 \dots 1, 12$ ).

Кут обхвату частинки  $h_i$  шару зменшується з видаленням шару від центру і визначається виразом

$$\xi_{h_i} = 2 \arctg \frac{0,5d_{h_i}}{x_{h_i}}. \quad (12)$$

Тоді кількість частинок  $h_i$  шару

$$n_{dh_i} = \frac{2\pi}{\xi_{h_i}} = \frac{2\pi}{2 \arctg \frac{0,5d}{x_{h_i} + d_{h_i} h_i \cos \xi_{h_i} k_{nv}}}. \quad (13)$$

При рівних діаметрах частинок кількість їх в  $h_i$  шарі можна визначати за формулою

$$n_{dh_i} = \frac{2\pi \cdot 0,5d}{2 \arctg \frac{0,5d}{0,866d_{h_i} [1 + (h_i - 1)k_{nv}]}}. \quad (14)$$

Аналіз формули (14) показує, що кількість частинок в шарах, починаючи з 8 ряду до 77, змінюється зі збільшенням від 5,9909 до 5,9986 і далі, до тисячного знака, зберігає це значення. Отже, можна з незначним допущенням прийняти, що кількість частинок в  $h_i$  шарі визначається добутком  $n_{dh_i} = bh_i$ .

З умови рівності подач по всім шарам ( $q_{i-1} = q_i = q_{i+1}$ ), і, як наслідок, справедливості вираження  $n_{dhi-1} v_{dhi-1} = n_{dhi} v_{dhi} = n_{dhi+1} v_{dhi+1}$ , визначається швидкість переміщення частинок у кожному шарі

$$v_{h_i} = \frac{n_{dh_{i+1}}}{n_{dh_i}} v_{dh_{i+1}}. \quad (15)$$

Проекція  $\Delta d$  перетину частини частки, впровадженої в сусідній елементарний шар (Рис. 3) залежить від розміру частинки і кута розташування між віссю частинки і віссю  $x$ .

Математичне сподівання впровадженої частини часток визначається з умови, що величина  $x$  змінюється в межах  $[0; 0,5d_{cp}]$ , а кут  $\beta$  – з деяким допущенням, в межах  $[0; 0,5\pi]$ . Тоді величина впровадження  $\Delta d_{cp}$  визначається за виразом

$$\Delta d_{cp} = \frac{4}{\pi d_{cp}} \int_0^{0,5d_{cp}} \int_0^{0,5\pi} d_{cp} \cos \beta dx d\beta. \quad (16)$$

Виходячи з отриманого, можливо визначити відносне розташування контактуючих частинок в радіальному напрямку і напрямку зусиль, як наслідок цієї взаємодії.

Композиція розташування частинок різних фракцій (Рис. 3) визначається з умови (допущення) рівномірного розташування частинок в зоні взаємного перетину сусідніх елементарних шарів, а кількість частинок в кожній фракції визначається за виразом (13).

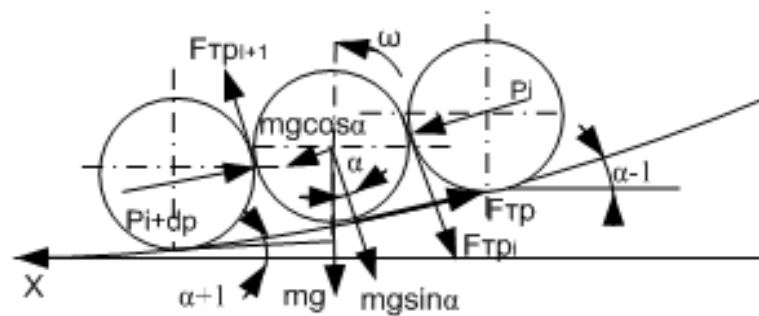


Рис.3. Схема сил, що діють на частинку і-го шару в радіальному напрямку

Тиск на кожну частку поширюється пропорційно площі, що займає і-а частинка в зоні тиску. Площа, яку займає частинка в зоні перетину частинок, визначається як  $0,25 \pi d_{cp}^2$ .

Умова руху частинок в радіальному напрямку визначається нерівністю, яке відображає перевищення складових сил тяжіння над силами тертя між частинками та по площині похилої кругової поверхні

$$mg \cos \alpha \sin \alpha (1 - f_t) + p_i \cos \left( \pi - \frac{\alpha_{i-1} + \alpha_i}{2} \right) \geq (p_i + dp) \times \cos \left( \pi - \frac{\alpha_i + \alpha_{i+1}}{2} \right) f_t^{en} + F_{om} \sin \psi, \quad (17)$$

де  $p_i$  – питомий тиск на одну частинку;

$m$  – маса частинки;

$\alpha_i, \alpha_{i-1}$  – кути нахилу поверхні на  $x_i$  і  $x_{i-1}$  окружності до горизонту;

$F_{om}$  – сила відштовхування, що виникає при зіткненні частинок;

$\psi$  – кут між напрямком сили тертя при взаємодії частинок і віссю  $y$ .

Для визначення умов переміщення часток по колах похилій поверхні розглянемо схему дії зусиль на частинку сипучого матеріалу при кругових горизонтальних коливаннях похилої поверхні в одну сторону.

Основною рушійною силою в цьому випадку виступає сила тертя частинки об похилу поверхню, яка повинна перевищувати зусилля від взаємодії контактуючих частинок (Рис. 4)

$$mg f_t \geq (2p_i + dp_i) f_t^{en} + F_{om} \cos \psi. \quad (18)$$

Момент  $M_i$  сил відносно центра і-ї частинки визначається як сума моментів для всіх сил

$$M_{x_i} = [mg \sin \alpha_i f_t - p_i f_t^{en} - (p_i + dp) f_t^{en}] r R_i \quad (19)$$



$$M_{y_i} = [mgf_t - p_i f_t^{6H} \sin \psi - (p_i + dp) f_t^{6H} \sin \psi] R_i \quad (20)$$

Сила відштовхування  $F_{от}$  виникає між сусідніми частинками за умови виникнення пружної деформації при зіткненні ( $\delta_{ij} > 0$ ) і спрямована по нормалі, що сполучає центри частинок. Для її визначення використовуємо пружну модель співудару [8].

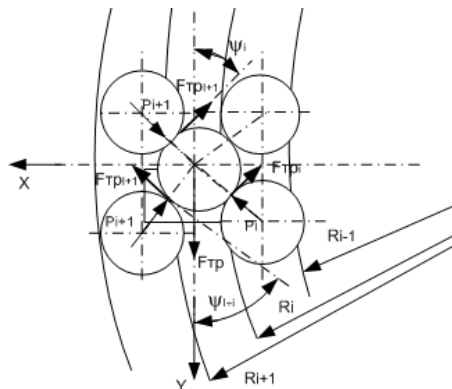


Рис. 4. Схеми сил, що діють на частинку при круговому русі похилій поверхні в одну сторону.

Згідно Дж. Герцу [9] пружна сила відштовхування  $F_{от}$  дорівнює

$$F_{от} = \frac{4}{3} \frac{E_i E_j}{(1 - \nu_i^2) E_j + (1 - \nu_j^2) E_i} \sqrt{\frac{R_i R_j}{R_i + R_j}} \delta_{ij}^{\frac{3}{2}} \quad (21)$$

де  $\nu_i$  – коефіцієнт Пуассона;

$E_i$  – модуль пружності частинки.

Чисельне рішення системи диференціальних рівнянь для кожної частки за час  $t$ , яке визначається для кожного кроку переходу часток з одного умовного кола однорядного розташування частинок в інший, дає можливість визначити задані технологією обробки параметри переміщення зернового матеріалу і параметри похилої кругової поверхні.

**Висновки.** Отримана модель одношарового переміщення зернового матеріалу по похилій круговій поверхні дозволяє визначити рух з перевертанням і зіткненням сукупності пружних частинок, що моделюють дискретне середовище і параметри мікронізатора з похилою круговою поверхнею.

Література:

1. Звіт про НДР/ІМТ УААН– УкрНТЕІ (заключний) №ДР 0101U007019, інв. №0206 U002844 / Створити технології і обладнання для переробки сої та виробництва на її основі кормових добавок і кормосумішей / Семіряк В.П., Воронін Л.С., Канищева Л.О./ Запоріжжя, 2006.

2. Худоногов А.М. Технология обработки дикорастущего и сельскохозяйственного сырья высококонцентрированным инфракрасным

нагревом. – Дисс. докт. техн. наук: 05.20.01.– Иркутск, 1988. – С. 392.

3. *Шацкий В.В.* Моделирование механизированных процессов приготовления кормов / В.В. Шацкий – Запорожье.: ПЦ „Х–ПРЕСС”, 1998. – 140с.

4. *Хокни Р.*, Иствуд Дж. Численное моделирование методом частиц: Пер. с англ. – М.: Мир, 1987. – С. 640.

5. *Клишин С.В.* Применение метода дискретных элементов при анализе гравитационного движения гранулированного материала в сходящемся канале// Горный информационно–аналитический бюллетень.(научно–технический журнал), 2009, №12, С.273– 277

6. Гмурман В.Е. Теория вероятности / В.Е. Гмурман – 9– е изд., стер.– М.: Высшая школа, 2003. – С. 479.

7. *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей / Е.С. Вентцель – 4– е изд., стереотип. – М.: Наука, Физматгиз, 1969. – С. 576.

8. Kruggel– Emden H. et al. Review and extension of normal force models of the Discrete Element Method // Powder Technology. – 2007. – №171.

9. *Тимошенко С.П., Гудьер Дж.* Теория упругости: Пер. с англ. – М.: Наука, 1975. – С. 576.

## **РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ОДНОСЛОЙНОГО ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ЗЕРНОВОГО МАТЕРИАЛА ПО НАКЛОННОЙ КРУГОВОЙ ВИБРОПОВЕРХНОСТИ**

Шацкий В.В., Демьяненко Д.В.

*Аннотация* – на основе метода дискретных элементов исследуется движение частиц зернового материала по наклонной круговой поверхности, совершающей круговые горизонтальные колебания с определением качественных показателей распределения частиц по поверхности.

## **MODELING OF A SINGLE-LAYER GRAIN MOVING ON INCLINED CIRCUMFERENTIAL SURFACE**

V. Shatsky, D. Demjanenko

### *Summary*

**Based on the discrete element method, the motion of grain material particles on the inclined circular surface with definition of quality indicators of particles distribution on the surface are studied.**