УДК 514.182.7

# ОСОБЛИВОСТІ ВИРІШЕННЯ ЗАДАЧ АПРОКСИМАЦІЇ НЕПЕРЕВНИХ ФУНКЦЙ

**Пихтєєва І.В., к.т.н.**
**Івженко О.В., к.т.н.**
*Таврійський державний агротехнологічний університет,*
*Тел.: (0619)42-68-62*
**Залевський С.В., к.т.н.**
*Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»*
*Тел.: (044) 204-94-46*

***Анотація*** **– в роботі розглядаються особливості застосування алгоритмів вирішення задач апроксимації дискретно представлених неперервних функцій.**

***Ключові слова*** **– дискретно представлена функція, рекурентне співвідношення, глобальне співвідношення, розділені різниці.**

*Постановка проблеми*. Досвід автоматизації складних процесів все більше демонструє нездатність класичних методів теорії автоматичного керування ефективно розв'язувати задачі автоматизації виробництв та управління соціально-економічними проектами. Координація, координаційне управління, як головний принцип функціонування в загальній системі керування, відіграє роль підсистеми стабілізації процесу відносно до предписанної стратегії, що відображається траєкторією у просторі станів. Визначаючи роль координації у процесі управління, слід зазначити, що для будь якої інтелектуальної, виробничої, соціально – побутової діяльності людини обов'язково характерна процедура прийняття рішення. Останнє подається у вигляді однієї з форм: значень параметрів, функції керуючих впливів, формування продуктивних правил, лінгвістичних термів із заданої множини. Для формування теоретичних засад теорії координації складних систем необхідний подальший розвиток формальних методів, механізмів, інструментів координації, що забезпечують узгодженість функцій складових частин системи та синхронізацію цілей як єдине ціле.

---

Припустимо, що в результаті інженерного або наукового експерименту отримана система точок $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots (x_n, y_n)\}$. Необхідно знайти аналітичну залежність $Q(x)$, таку, яка найкращим чином описує задану систему точок. Поняття «найкращим чином» означає розв'язання задачі по заданому критерію. Найбільш відомим критерієм для задач апроксимації є критерій ***середньоквадратичних відхилень (СКВ)***, який являє собою мінімізацію суми квадратів відхилень експериментальних даних від аналітичної функції $Q(x)$ і визначається на заданій множині точок як

$$\sum_{i=0}^{n}(Q(x_i) - y_i)^2 \Rightarrow min$$

Однак, при такій постановці, задача апроксимації експериментальних даних має багато розв'язків. Тому виникає необхідність у застосуванні дискретного подання неперервних функцій.

*Аналіз останніх досліджень.*

Вперше питання про дискретне подання відомих неперервних функцій було поставлено і досліджено стосовно завдань інтерполяції і, частково, апроксимації, в роботах академика Найдиша В.М. [1]. Йдеться про те, щоб деякі дискретні елементи графіка функції (точки, значення різниць і т.п.) на деякій сітці прийняти як базисні і, з їх допомогою, розрахувати відсутні точки або значення різниць в вузлах тієї ж сітки, грунтуючись на деяких властивостях функції.

*Формування цілей статті.* Метою роботи є аналіз методів вирішення задач апроксимації неперервних функцій за умови їх дискретного представлення.

*Основна частина.*

Розглянемо випадок. Зокрема, для точок прямої лінії на довільній сітції можимо записати:

$$y_{i+1} = \delta^1 \cdot h_{i+1} + y_i, \quad h_{i+1} = x_{i+1} - x_i, \quad i = \overline{1, n-1}. \tag{1}$$

Тут в якості базисних елементів виступають одне зі значень $y_i$, наприклад, $y_1$, і значення *1-ої* розділеної різниці $\delta^1$, що є, по суті, кутовим коефіцієнтом прямої лінії. Решта точок розраховуються на основі цих базисних елементів і співвідношення (1). Аналогічне співвідношення можна записати для випадку, коли базисними елементами дискретного представлення прямоїлінії є дві точки $y_i$ та $y_{i+1}$.

$$y_{i+2} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} \cdot h_{i+2} + y_{i+1}, \qquad i = \overline{1, n-2}. \tag{2}$$

На рівномірної сітці, коли $h_{i+1} = h_{i+2} = h = const$,

$$y_{i+2} = 2y_{i+1} - y_i. \tag{3}$$

Як бачимо, дискретне представлення на рівномірній сітці виявляється значно простішим і не залежить від кроку $h$. На жаль вихідні дані не завжди задані на рівномірній сітці і тому дискретні подання необхідно розглядати в загальному вигляді. Як показано в роботах Найдиша В.М. [1], щоб отримати дискретне уявлення для будь-якої $K$-параметричної безперервної функції необхідно скласти систему з $(K+1)$ рівнянь, що виражають інцидентність графіка функції деяким $(K+1)$ точкам, і виключити їх із цих рівнянь $K$ - параметрів. Отримане при цьому рівняння, що зв’язує ординати $K+1$ точок графіка, є дискретним представленням функції і відображає інцидентність будь-якої з $(K+1)$ точок графіку функції, яка визначається іншими $K$ точками. Так, рівняння (2) або (3) відображає залежність ординати $(i+2)$*-ої* точки від ординат $i$*-ої* і $(i+1)$*- ої* точок, що визначають пряму лінію.

Відомо, що процес виключення параметрів є найбільш простим, якщо залежність функції від них є лінійною, тобто параметри повинні входити в рівняння адитивно.

У практиці геометричного моделювання можливі два варіанти дискретного представлення функції:

- у вигляді рекурентного співвідношення;
- у вигляді глобального співвідношення.

Наприклад, у разі рекурентного співвідношення дискретного представлення функції для алгебраїчного $3$-полінома на рівномірній сітці маємо:

$$y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i + 4y_{i+1} + y_{i+2} = 0, \quad i = \overline{3, n-2}. \tag{4}$$

У разі глобального співвідношення дискретного представлення функції, яке виражає ординату поточної $i$-*ої* точки через ординати базисних точок, що визначають заданий поліном (наприклад, точок $y_1$, $y_2$, $y_3$, $y_4$) маємо:

$$\begin{vmatrix} y_1 & 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ y_2 & 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ y_3 & 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ y_4 & 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \\ y_i & 1 & x_i & x_i^2 & x_i^3 \end{vmatrix} = 0, \quad i = \overline{5, n}, \tag{5}$$

Співвідношення (5) частіше зустрічається і є кращим при встановленні області рішення, визначенні значень керуючих параметрів і т.п.

Аналогічні (5) різницеві співвідношення мають місце для інших функцій, які лінійно залежать від своїх коефіцієнтів. Наприклад, для показової функції

$$y = a_0 + a_1 q_1^x + a_2 q_2^x + a_3 q_3^x + \cdots + a_n q_n^x, \tag{6}$$

де $q_1$, $q_2$, … , $q_n$ – дійсні різні числа, при $n=3$, маємо:

$$\begin{vmatrix} y_1 & 1 & q_1 & q_1^2 & q_1^3 \\ y_2 & 1 & q_2 & q_2^2 & q_2^3 \\ y_3 & 1 & q_3 & q_3^2 & q_3^3 \\ y_4 & 1 & q_4 & q_4^2 & q_4^3 \\ y_i & 1 & q_i & q_i^2 & q_i^3 \end{vmatrix} = 0, \qquad i = \overline{5,n}, \tag{7}$$

Якщо у (6) і (7) прийняти $q_1 = e$ , $q_1 = e^2$, $q_n = e^n$, то отримуємо експоненціальний поліном.

У якості параметрів можуть виступати не тільки ординати точок, але й розділені різниці (РР) відповідних порядків.

Наприклад, для прямолінійного точкового ряду, можна скористуватися рекурентним співвідношенням (1) або глобальним співвідношенням:

$$y_k = \delta^1 \sum_{i-2}^{k} (h_i + y_1), \quad k = \overline{2,n}, \tag{8}$$

що виражає ординату *К-ої* точки ряда через значення *1-ої* розділеної різниці $\delta^1$ і параметра $y_1$ (ординати першої точки).

Відомо, що для 2 - параболи, $\delta_i^2 = \delta^2 = const$.

З рівняння

$$\delta^2 = \frac{\dfrac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \dfrac{y_i - y_{i-1}}{h_i}}{h_i + h_{i+1}}, \tag{9}$$

маємо рекурентне співвідношення:

$$y_{i+1} = \delta^2 (h_i + h_{i+1}) h_{i+1} + \delta_i^1 + y_i, \quad i = \overline{2,n-1}, \tag{10}$$

де перша різниця $\delta_i^1$ на відміну від (10) не є постійною, або

$$y_{i+1}=\delta^2(h_i+h_{i+1})h_{i+1}+y_i\cdot\frac{h_i+h_{i+1}}{h_i}-y_{i-1}\cdot\frac{h_{i+1}}{h_i},\quad i=\overline{2,n-1}. \tag{11}$$

У першому випадку використовуються отримані на попередньому кроці розділені різниці $\delta_i^1$ і ордината $y_i$, у другому випадку – ординати $y_i$ та $y_{i-1}$.

Для (11) можна записати глобальне співвідношення з орієнтацією на (10).

$$y_k=\delta^2\sum_{i=2}^{k-2}(h_i+h_{1+1})h_{i+1}+\sum_{i=2}^{k-1}\delta_i^1 h_{i+1}+y_2,\quad k=\overline{3,n}, \tag{12}$$

або з орієнтацією на (11) на рівномірній сітці *h=const*.

$$y_k=(k-1)(k-2)h^2\delta+(k-1)y_2-(k-2)y_1,\quad k=\overline{3,n} \tag{13}$$

Аналогічно можна записати для 3-параболи, де $\delta_i^2=\delta^2=const$

$$\delta^2=\frac{\dfrac{\dfrac{y_{i+2}-y_{i+1}}{h_{i+2}}-\dfrac{y_i-y_{i-1}}{h_{i+1}}}{h_{i+1}+h_{i+2}}-\dfrac{\dfrac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}-\dfrac{y_i-y_{i-1}}{h_i}}{h_i+h_{i+1}}}{h_i+h_{i+1}+h_{i+2}}; \tag{14}$$

Враховуючи (9), а також те що:

$$\delta_{i+1}^1=\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}},\quad i=\overline{2,n-1}, \tag{15}$$

маємо рекурентне співвідношення:

$$y_{i+1} = \delta^2 (h_i + h_{i+1} + h_{i+2})(h_{i+1} + h_{i+2}) h_{i+2} +$$
$$+ \delta_i^1 (h_{i+1} + h_{i+2}) h_{i+2} + \delta_{i+1}^1 h_{i+2} + y_i , \qquad (16)$$

Тепер в чкості параметрів виступають перша $\delta_i^1 \neq const$ та друга $\delta_i^2 \neq const$ розділені різниці, а, також ордината $y_1$ .

У цьому випадку глобальне співвідношення має вигляд:

$$y_k = \delta^2 \sum_{i=1}^{k-2} (h_i + h_{1+1} + h_{i+2})(h_{i+1} + h_{i+2}) h_{i+2} +$$
$$+ \delta_i^2 (\hbar_{i+1} + h_{i+2}) h_{i+2} + \delta_{i+1}^1 h_{i+2} + y_2 , \qquad k = \overline{4,n} , \qquad (17)$$

*Висновок.*

Подальше підвищення порядку різниць пов'язане зі значними труднощами, в їх визначенні або попередньому завданні, а також з виникаючими при цьому похибками обчислень і тому недоцільно.

Звернемо увагу на те, що в роботі розглядаються вихідні ДПК довільної конфігурації на довільній сітці. В цьому випадку пропоновані алгоритми повинні мати достатню універсальність, а базисні функції апроксимації повинні складати систему Чебишева [2]. Найбільшою мірою цьому відповідають поліноміальні функції, серед яких найбільшою простотою і допустимою точністю відрізняються алгебраїчні поліноми.

*Література*

1. *Найдыш В.М.* Дискретное представление непрерывных функций. В кн.: Прикладная геометрия и инженерная графіка / В.М.Найдыш К.: Будівельник, 1990, вип.49, с.15-18.
2. *Гончаров. В.Л.* Теория интерполирования и приближения функций /В.Л.Гончаров.. - М., ГИТТЛ, 1954.- 328 с.
3. *Пихтєєва І.В.* Метод подання апроксимуючої функції /І.В. Пихтєєва, О.Є.Мацулевич, В.М.Щербина / Науковий вісник ТДАТУ / Таврійський державний агротехнологічний університет. – Мелітополь, 2016. – Вип. 6, Т. 2. – С. 88-94.

# ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ АППРОКСИМАЦИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

И.В.Пыхтеева, А.В.Ивженко, С.В.Залевский

***Аннотация***

**В работе рассматриваются особенности применения алгоритмов решения задач аппроксимации дискретно представленых непрерывных функций.**

# FEATURES OF THE DECISION OF PROBLEMS OF APPROXIMATION OF CONTINUOUS FUNCTIONS

I. Pyhteeva, A. Ivzhenko, S. Zalevskyi

***Summary***

**Experience of automation of complex processes shows inability of application of methods of the theory of automatic control effectively more and more to solve than a problem of automation of manufactures and management of social and economic projects. For anyone intellectual, industrial, socially - household activity of the person procedure of decision-making is necessarily characteristic. For formation of theoretical bases of the theory of coordination of complex systems the further development of formal methods, mechanisms, tools of the coordination, providing a coordination of functions of components of system and synchronization of the purposes as a unit is necessary.**

**Problem of approximation of the received experimental dependences is definition of the analytical dependence describing set system of points by set criterion. The most known criterion for problems of approximation is the criterion среднеквадратических deviation which represents minimization of the sum of squares of deviations of experimental data from some analytical function. However, at such statement, the problem of approximation of experimental data has set of decisions. Therefore there is a necessity in discrete representations of continuous functions.**

**In work features of application of algorithms of the decision of problems of approximation discretely представленых continuous functions are considered.**