

УДК 514.18

**ЗАДАЧА ФОРМУВАННЯ
ЛОКАЛЬНИХ ГЕОМЕТРИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК
У ВУЗЛАХ ДИСКРЕТНО ПРЕДСТАВЛЕНОЇ ПОВЕРХНІ**

Гавриленко Є.А., к.т.н.,

Дідур В.А., д.т.н.

Таврійський державний агротехнологічний університет

Тел. (0619) 42-68-62

Анотація – розглядається можливість визначення положення дотичних площин у вузлах дискретно представленої поверхні та розташованих у них індикатрис Дюпена. Характеристики поверхні визначаються виходячи з умови закономірної зміни значень кривини уздовж кривих, розташованих на поверхні.

Ключові слова – дискретно представлена поверхня (ДПП), дискретно представлена крива (ДПК), дотична площина, нормальний перетин, індикатриса Дюпена.

Постановка проблеми. Геометричне моделювання ДПП може здійснюватися на основі каркаса, що складається із ДПК. На одновимірні обводи, що утворюють каркас поверхні, можуть накладатися різні додаткові умови. У випадку моделювання динамічної поверхні важливою вимогою є монотонний характер зміни значень кривини уздовж ліній каркаса. При моделюванні складних поверхонь (корпус автомобіля, корабля, літака) задача ускладнюється необхідністю формування сітчастого каркаса з погодженим контролем характеристик обводів у різних напрямках.

Аналіз останніх досліджень. У роботі [1] визначається область можливого розташування центрів кривини, що відповідають вихідним вузлам монотонної ДПК. Зазначена область залежить від конфігурації вихідного точкового ряду та напрямку зростання значень кривини уздовж кривої. Запропонований в роботі [1] алгоритм дозволяє одержати точковий ряд, на основі якого може бути сформована еволюта плоскої ДПК.

У роботі [2] розв'язується задача моделювання монотонної ДПК методом згущень по попередньо сформованій еволюті. Алгоритм

передбачає послідовне визначення нормалей і центрів кривини ДПК, що відповідають точкам згущення, а потім і самих точок згущення.

Формулювання цілей статті. Запропонувати спосіб визначення у вихідних вузлах ДПП дотичних площин і формування відповідних їм індикатрис Дюпена.

Основна частина. Розглянемо ДПП задану точковим каркасом, який упорядковано на прямокутній у плані, рівномірній у двох напрямках сітці. Таке подання дозволяє виділити на поверхні пучок плоских ДПК, що перетинаються у вихідному вузлі ДПП ($M_{i,j}$). Для формування локальних характеристик у вихідних вузлах ДПП ми будемо використовувати, насамперед, два сімейства ДПК, розташованих у площинах рівня, що проектують на горизонтальну площину в лінії прямокутної сітки. Для вузла $M_{i,j}$ це криві, представлені точковим рядом $\dots M_{i-1;j}, M_{i,j}, M_{i+1;j} \dots$ та $\dots M_{i;j-1}, M_{i,j}, M_{i;j+1} \dots$. Позначимо їх ДПК $_i$ і ДПК $_j$, відповідно (рис. 1).

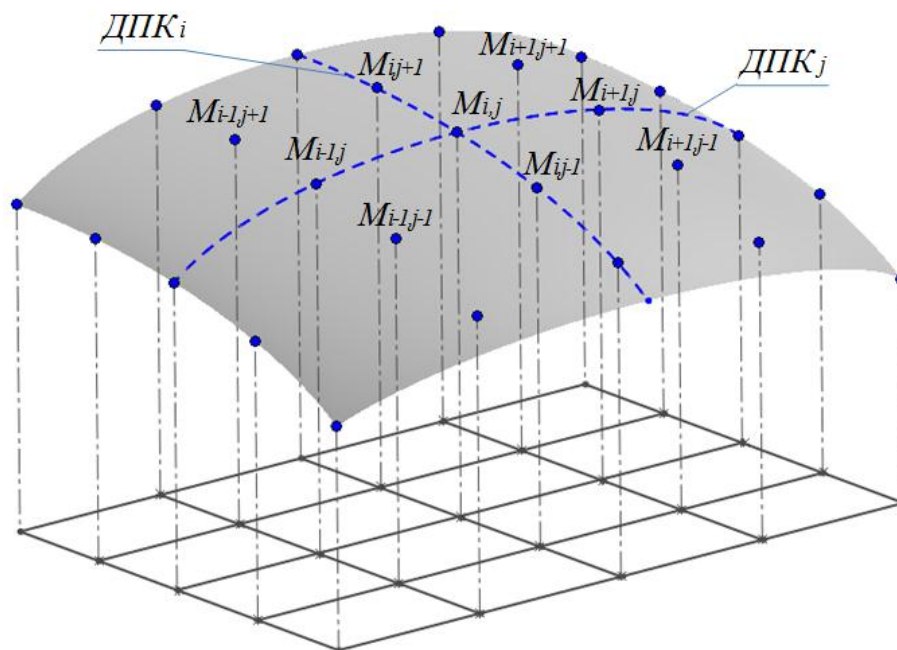


Рис. 1.

При необхідності можна використовувати інші плоскі ДПК. Наприклад криві, представлені точковим рядом $\dots M_{i-1;j-1}, M_{i,j}, M_{i+1;j+1} \dots$ або $\dots M_{i-2;j-2}, M_{i,j}, M_{i+2;j+2} \dots$

Локальні характеристики ДПП будемо визначати виходячи з умови закономірної зміни значень кривини уздовж ДПК, що перетинаються у вихідному вузлі. Під закономірною зміною кривини будемо розуміти монотонне зростання або убуття її значень на

ділянках ДПК, де вихідний точковий ряд дозволяє це забезпечити. Призначимо положення центрів кривини у вузлах ДПК $_i$ і ДПК $_j$ (C_i, C_j), яке дозволяє формувати ці криві як обводи з монотонною зміною кривини [1]. Цим ми задаємо значення радіусів кривини (R_i, R_j) і положення дотичних (t_i, t_j) до цих кривих у вихідних вузлах. Прямі t_i і t_j визначають положення дотичних площин ($P_{i,j}$) ДПП у вихідних вузлах (рис. 2).

Призначення $P_{i,j}$ задає положення дотичних прямих до ДПК інших сімейств, розташованих на поверхні. Тепер ці ДПК можуть формуватися як обводи першого порядку фіксації.

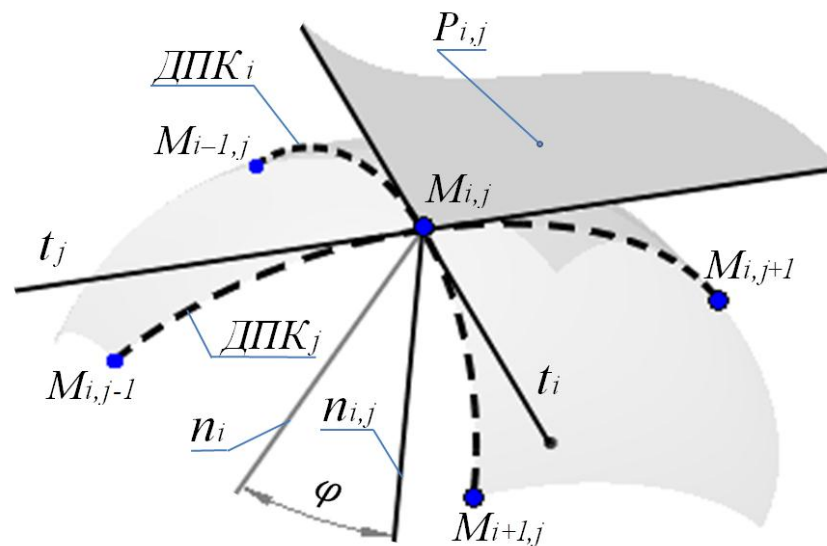


Рис. 2.

Значення радіусів кривини ліній, що належать поверхні, в одній і тій же точці різні. При моделюванні ДПП ці значення можна погодити, сформувавши у вузлах індикатриси Дюпена. Індикатриса Дюпена характеризує викривленість поверхні в даній точці і являє собою центральну криву другого порядку. Точки індикатриси одержують відкладаючи в дотичній площині від точки, що розглядається, в напрямку дотичних, відрізки, рівні квадратним корінням зі значень радіусів кривини відповідних нормальних перетинів поверхні [3].

Розглянемо задачу формування індикатриси Дюпена у вихідному вузлі ДПП $M_{i,j}$, вважаючи, що ця точка є еліптичною, тобто індикатриса являє собою еліпс (рис. 3).

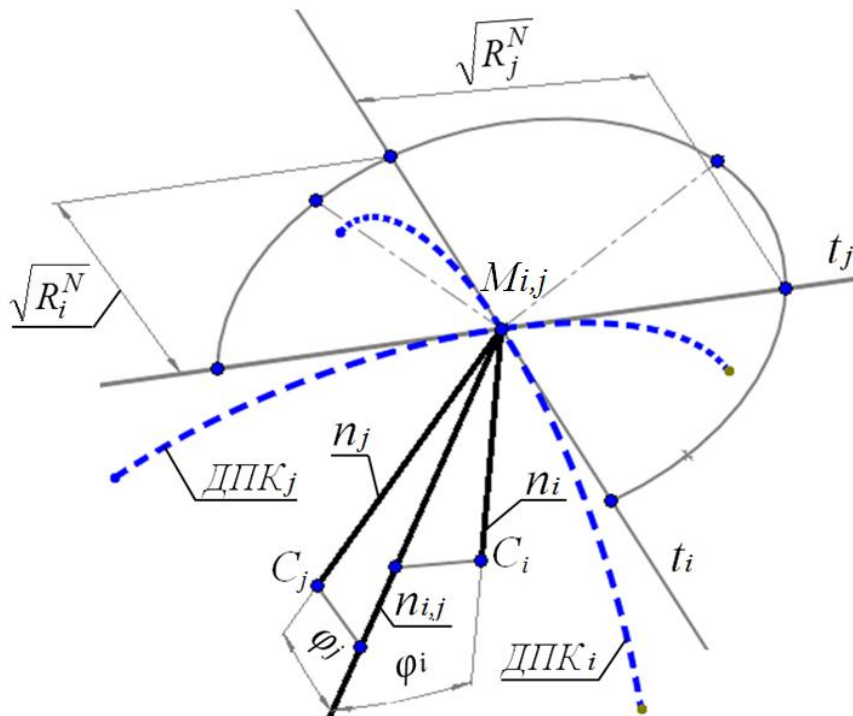


Рис. 3.

Еліпс на площині може бути визначено положенням центра та трьох приналежних йому точок. Щоб задати три точки, що належать індикатрисі, досить визначити у вузлі $M_{i,j}$ значення радіусів кривини двох нормальних перетинів поверхні. Нормаль поверхні $n_{i,j}$ однозначно визначається положенням дотичної площини $P_{i,j}$. Для визначення точок, що належать індикатрисі, можна використовувати нормальні площини поверхні, які задаються нормаллю $n_{i,j}$ та дотичними t_i і t_j . Позначимо ці нормальні площини N_i і N_j , а радіуси кривини у вузлі $M_{i,j}$, розташованих в них нормальних перетинів, R_i^N і R_j^N , відповідно.

Після визначення положення нормального перетину значення його радіуса кривини у вузлі $M_{i,j}$ однозначно визначається значенням радіуса кривини будь-якої кривої, яка розташована на поверхні, та має в цьому вузлі дотичну, що належить площини нормального перетину. Наприклад, для площини N_i :

$$R_i^N = \frac{R_i}{\cos \varphi}, \quad (1)$$

де φ – кут між нормаллю поверхні $n_{i,j}$ і нормаллю ДПКі n_i ; R_i – радіус кривини ДПКі у вузлі $M_{i,j}$. Радіус кривини перетину N_j – R_j^N

визначається аналогічно за значенням радіуса кривини ДПК_j у вузлі $M_{i;j} - R_j$. Відклавши в дотичній площині від точки $M_{i;j}$ у напрямку прямих t_i і t_j відрізки, рівні значенням $\sqrt{R_i^N}$ і $\sqrt{R_j^N}$ одержуємо точки, що визначають індикатрису.

Отримані індикатриси Дюпена задають у вихідних вузлах ДПП головні напрямки на поверхні та значення головних кривин. Ці параметри дозволяють визначити значення нормальної кривини ліній різних напрямків, що належать ДПП [3]:

$$k' = k_1 \cos^2 \gamma + k_2 \sin^2 \gamma, \quad (2)$$

де k' – кривина довільного нормального перетину; k_1, k_2 – головні кривини; γ – кут між напрямком нормального перетину та головним нормальним напрямком.

Значення кривини нормального перетину дозволяє визначити кривину різних кривих ліній, що належать поверхні, які мають у даному вузлі загальну дотичну з лінією нормального перетину. Тепер з'являється можливість формувати різні ДПК, що належать поверхні, як обводи другого порядку фіксації [2].

Висновки. У роботі запропоновано спосіб, який дозволяє визначити у вихідному вузлі локальні характеристики ДПП: положення дотичної площини, розташування індикатриси Дюпена та параметри, що задаються нею, – головні напрямки, головні кривини, нормальні кривини різних напрямків. Положення дотичної площини та відповідної індикатриси Дюпена повністю визначаються центрами кривини у даному вузлі двох плоских ДПК, що належать поверхні. Використовуючи положення центрів кривини ДПК, як параметри керування характеристиками ДПП, одержуємо можливість забезпечити необхідну закономірність зміни положення дотичних і значень кривини уздовж різних ДПК, що належать поверхні.

Література

1. Гавриленко Є.А. Визначення положення центрів кривини дискретно представленої кривої./ Є.А. Гавриленко // Системні технології / Регіональний міжвузівський збірник наукових праць – Вип. 5 (76) - Дніпропетровськ, 2011. – С. 145-151.

2. *Гавриленко Є.А.* Визначення положення точки згущення при моделюванні монотонної дискретно представленної кривої./ *Є.А. Гавриленко // Прикл. геом. та інж. графіка / Праці ТДАТУ – Вип.4, Т.53. – Мелітополь, 2012. – С. 29-33.*
3. *Рашиевский П.К.* Курс дифференциальной геометрии./ *П.К.Рашиевский – М.: ГИТТЛ, 1956. – 420с.*

ЗАДАЧА ФОРМИРОВАНИЯ ЛОКАЛЬНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК В УЗЛАХ ДИСКРЕТНО ПРЕДСТАВЛЕННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Е.А. Гавриленко, В.А. Дидур

Аннотация – рассматривается возможность определения положения касательных плоскостей в узлах дискретно представленной поверхности и расположенных в них индикатрис Дюпена. Характеристики поверхности определяются исходя из условия закономерного изменения значений кривизны вдоль кривых, расположенных на поверхности.

THE PROBLEM OF FORMATION OF LOCAL GEOMETRICAL CHARACTERISTICS IN THE POINTS OF DISCRETELY REPRESENTED SURFACE

E. Gavrilenko, V. Didur

Summary

Possibility of determining of position of the tangent planes at the points of the discretely represented surface and the Dupin indicatrices which are located in them is considered in this article. Surface characteristics are determined from the condition the regular changes of curvature values along the curves, which are located on the surface.