

Методика решения сложных вариационных задач методом коллокации

Д-р техн. наук В. П. КОВБАСА (Национальный университет биоресурсов и природопользования, г. Киев),
канд. техн. наук А. М. АЮБОВ, инж. Е. И. ИГНАТЬЕВ (Таврический ГАТУ, tdatu-mvz@yandex.ru)

Аннотация. Приведена методика решения сложных вариационных задач методом коллокации в случае, когда уравнение Эйлера приводится к дифференциальным уравнениям с краевыми условиями. Решена задача по поиску кривых с экстремальными характеристиками.

Ключевые слова: уравнение кривой, закон движения частички, вариационная задача, метод коллокации, кинематический режим, скорость витания.

Во многих процессах механизации сельского хозяйства возникает необходимость обеспечения заданного закона перемещения частички из одного положения в другое при определенных кинематических параметрах ее движения. При этом работа по перемещению или время должны быть минимальными. Сюда можно отнести, например, задачу о нахождении траектории движения удобрений или зерна, при которой будет соблюдено условие максимального рассеяния частичек в горизонтальном направлении.

Решение этой задачи имеет давнюю историю, поскольку она сводится к построению функционала, который даст минимум времени прохождения частички, или минимум энергии транспортирования. К сожалению, до сих пор авторам [1–3 и др.] не удалось найти решение этой задачи в конечном виде, в котором были бы максимально учтены условия движения частички и обеспечивались условия на границах. Поэтому задачей данного исследования было нахождение уравнения траектории движения частички при обеспечении предельных условий.

При проведении исследований приняты некоторые предположения и упрощения: кривая скольжения плоская; частичка удобрений или зерно считается материальной точкой, поэтому она лишь скользит по кривой без качения; аэродинамическое сопротивление подчиняется квадратичной зависимости силы сопротивления от скорости. В общем виде схема постановки задачи представлена на рис. 1.

Работа по криволинейному пути характеризуется функционалом $J = \int_0^A F ds$, где F — сумма всех сил, действующих на частичку в процессе ее движения по криволинейной траектории из положения $O\{0, 0\}$ в положение $A\{x_k, z_k\}$; $ds = \sqrt{dx^2 + dz^2} = \sqrt{1 + z_x^2}$ — длина дуги траектории (с учетом того, что уравнение траектории движения частички имеет явный вид: $z = f(x)$). Запишем уравнение действующих на частичку сил в проекциях на натуральные оси координат (на касательные к поверхности):

$$m d^2 z_x' / dt^2 - G \sin \alpha + F_T + F_v = 0, \quad (1)$$

где $F_T = f(N_G + N_v)$ — сила трения, обусловленная коэффициентом трения f , проекцией силы веса на нормаль к кривой $N_G = mg \cos \alpha$ и центробежной силой $N_v = mr^{-1} dz_x' / dt$ (здесь $r = (1 + z_x'^2)^{3/2} / z_x''$ — радиус кривизны в данной точке); $F_v = k(dz_x' / dt)^2$ — сила сопро-

тивления воздуха (здесь k — коэффициент сопротивления, [кг/м]); $\alpha = \arctg(dz/dx) = \arctg(z_{x,y})$. Причем знак кривизны, от которого зависит увеличение или уменьшение суммарной нормальной реакции кривой, определяется второй производной (т. е. учитывается автоматически).

Согласно достаточным условиям Эйлера с учетом уравнений Эйлера—Пуассона (и для производных высших порядков) и Эйлера—Остроградского (для функционалов от многих переменных) интеграл достигнет минимума в случае, когда указанные уравнения для подынтегрального выражения будут равны нулю. Уравнение Эйлера—Пуассона—Остроградского (подынтегральное выражение функционала, обозначенное A) в развернутом виде громоздко и представляет собой дифференциальное уравнение третьего порядка с частичными производными. В идеальном случае его нужно приравнять к нулю и решить относительно функции $f = f(x, t)$, явный вид которой будет представлять собой уравнение искомой кривой.

К сожалению, вариационные задачи имеют ограниченное число случаев, которые разрешают находить функции в общем виде из применений уравнений Эйлера. Существующие прямые вариационные методы также применяются ограниченно из-за необходимости интегрирования подобранных координатных функций и их производных. Учитывая, что последнее уравнение может трактоваться как уравнение с краевыми условиями, для нахождения вида искомой функции может быть

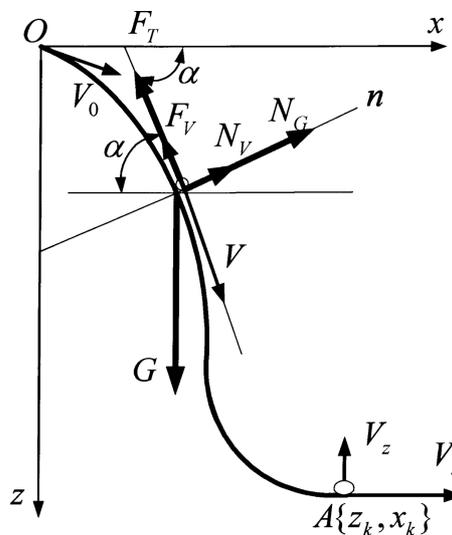


Рис. 1. Схема к анализу движения частички по плоской кривой

применен метод коллокации [2]. Для решения задачи таким способом необходимо составить базисные функции, которые обеспечивают выполнение предельных условий.

Предельные условия для конкретного случая:

— координаты начальной точки $O\{0,0\}$,

$$z_{t,x}^{(0,0)} \Big|_{t=0, x=0} = 0;$$

— производная от траектории по времени в начале движения (т. е. скорость в направлении оси OZ) должна обеспечивать выполнение условия

$$z_{t,x}^{(0,0)} \Big|_{t=\tau, x=x_k} = z_k;$$

— в конечной точке $A\{x_k, z_k\}$ должны обеспечиваться

$$\text{условия } z_{t,x}^{(1,0)} \Big|_{t=0, x=0} = v_{z0};$$

— производная от траектории по времени в конце движения в направлении оси OZ должна равняться нулю:

$$z_{t,x}^{(1,0)} \Big|_{t=\tau, x=x_k} = 0.$$

Для выбора базисной функции не существует определенных правил или алгоритмов, поэтому она подобрана интуитивно:

$$s_z = z_k x/x_k + t(v_{z0} - xv_{z0}/x_k - a_1(x - x_k)^2 t - a_2(x - x_k)^3 t^2 - a_3(x - x_k)^4 t^3), \quad (2)$$

где a_1, a_2, a_3 — произвольные коэффициенты, которые нуждаются в определении. Значение производных от базисной функции подставляем в уравнение Эйлера—Пуассона—Остроградского и составляем уравнение неувязки для точек коллокации, причем числа точек коллокации и уравнений неувязок должны быть равными. Здесь возникают определенные осложнения, поскольку базисная функция является функцией двух независимых переменных. Для равноускоренного движения при $t_0 = 0$ можно записать:

$$z_k = 0,5(v_{z0} - v_z)t,$$

где v_{z0} и v_z — скорость в направлении оси OZ в начале и в конце движения. Так как по условию краевой задачи $v_z = 0$, то общее время движения составит $\tau = t = 2z_k/v_{z0}$. Коэффициенты уравнения (2) могут быть найдены при решении системы уравнений численным способом. Можно взять следующие точки коллокации с числом неизвестных $x = 0,025; 0,05$ и $0,075$, которые не лежат на границах.

Вычисление трех значений функций для конкретных параметров дает три уравнения, которые имеют чрезвычайно громоздкий вид, поэтому приводить их в статье нецелесообразно. Укажем лишь, что большинство преобразований проводилось с применением системы символьной компьютерной математики. Решение системы уравнений несвязок для конкретных параметров и точек коллокации имеет вид: $a_1 \rightarrow 19,4394$, $a_2 \rightarrow -4,32884$, $a_3 \rightarrow 13715,9$. Конечное уравнение траектории минимальной работы с заданными кинематическими параметрами для конкретных параметров и режимов определится при подстановке полученных коэффициентов в базисную функцию (2).

Пользуясь рис. 1, можно записать уравнение движения в проекциях на касательные к кривой:

$$-f(mg \cos \alpha + m \dot{s}^2 / r) + m \ddot{s} + mgs \sin \alpha - k \dot{s}^2 = 0, \quad (3)$$

где \dot{s} и \ddot{s} — ускорение и скорость; r — радиус кривизны кривой; $k = mg/v_b^2$ — коэффициент аэродинамического сопротивления движению; m — масса частички; v_b^2 — скорость витания (критическая скорость) частички; g — ускорение земного тяготения. Так как при построении кривой были приняты фиктивные функции времени $t = \tau x/x_k = z_k x/(x_k v_{z0})$ и с учетом того, что полином не изменяет свои свойства, его можно заменить выражением

$$z_x = x z_k [1 + (1 - x/x_k)]/x_k. \quad (4)$$

Учитывая, что $\ddot{s} = v_s' [t]$, можно проинтегрировать правые и левые части уравнения (3) и получить функцию скорости

$$v_x [t] = (F_c \dot{s}^2 + F_g)t + c_1$$

(здесь $F_g = g(-f \cos \alpha + \sin \alpha)$, $[m/c^2]$; $F_c = (-k/m + f/r)$, $[1/m]$, найдя постоянную интегрирования из начальных условий: при $t = 0$ $v_x [t] = v_{s0}$. Путь, который пройдет частичка при движении по траектории, определится интегрированием выражения (4).

Уравнение ускоренного движения вдоль траектории имеет вид:

$$s_k = t(v_{s0} + 0,5 \ddot{s} t),$$

где $\ddot{s} = (2F_g t + v_{s0}) / \{t[1 - 4F_c t(F_g t + v_{s0})]^{0,5}\} - 0,5\{1 - [1 - 4F_c t(F_g t + v_{s0})]^{0,5}\} / (F_c t)$.

К сожалению, выразить из него функцию времени чрезвычайно сложно, поэтому можно разложить выражение его с учетом ускорения в нормализованный ряд Маклорена второго порядка

$$s_{kn} = t[v_{s0} + 0,5(F_g + f_c v_{s0}^2) t]$$

и найти время движения частички. Параметры α и r характеризуются зависимостями:

$$a = -\arctg[z_k/x_k(x/x_k - 1 - (1 - x/x_k))];$$

$$r = -0,5 x_k^2 [1 + z_k/x_k(-x/x_k + 1 + (1 - x/x_k))]/z_k.$$

С учетом последних выражений зависимость для скорости частички по конкретной траектории чрезвычайно сложна. Ее графическое представление показано на рис. 2. Следует учесть, что для получения экстремального значения скорости (т. е. определить место восхождения частички с направляющей кривой) необходимо исследовать функцию скорости на экстремум. К сожалению, выполнить это аналитически сложно, но с учетом того, что экстремум скорости отслеживается при значениях аргумента $(0,6...0,8)x_k$, с определенной вероятностью можно считать это значение аргумента обеспечивающим экстремум скорости. Причем в точках экстремума отмечается ее наибольшее рассеяние. А поскольку скорость витания для одного вида частичек (например, удобрений) имеет существенное рассеяние от оценки ее математического ожидания, то промежуток следует считать оптимальным для схождения частичек с кривой.

При использовании конечной точки схождения с координатой в горизонтальном направлении $(0,6...0,8)x_k$

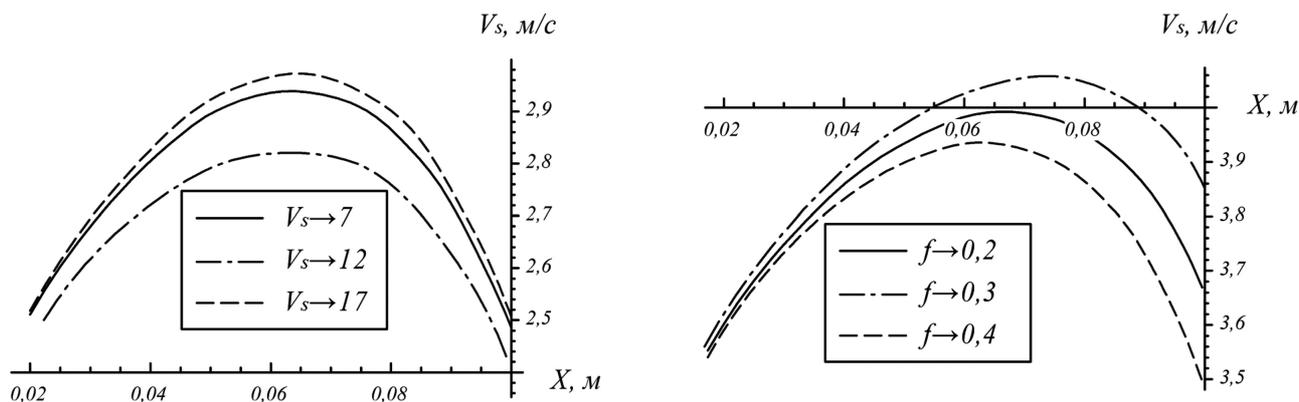


Рис. 2. Зависимость скорости частички от аргумента функции кривой при разных скоростях витания частички и коэффициентах внешнего трения

вертикальная координата точки восхождения будет $z_k|_{x=0,7x_k} = 0,91z_k$. В конце такого движения составные скорости в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси координат будут иметь вид:

$$v_x = v_s \cos \alpha|_{z_k = 0,91z_k, x_k = (0,6...0,8)x};$$

$$v_z = v_s \sin \alpha|_{z_k = 0,91z_k, x_k = (0,6...0,8)x}.$$

Выводы

Разрешимая в конечном виде задача о нахождении уравнения кривой, обеспечивающей заданный закон движения частички, пригодна для определенного класса задач поиска кривых с экстремальными характеристиками.

Применение для решения сложных вариационных задач метода коллокации свидетельствует о возможности использования его для широкого класса задач, когда

уравнение Эйлера приводят к дифференциальным уравнениям с краевыми условиями.

Полученная в результате решения вариационной задачи кривая обеспечивает кинематический режим, при котором можно достичь рассеяния частичек в зависимости от их скорости витания. Это свойство кривой может быть использовано для рассеяния частичек минеральных удобрений или семян, например в подлаповом пространстве при внутрпочвенном внесении удобрений или посева.

Список литературы

1. Василенко П. М. Движение частицы по шероховатой поверхности. — К.: Изд-во УАСХН, 1960.
2. Гюнтер Н. М. Курс вариационного исчисления. — Л.: Гос. изд. тех.-теор. лит., 1941.
3. Цлаф Л. Я. Вариационные исчисления и интегральные уравнения. — М.: Наука, 1970.

УДК 631.3.072.074

Прогнозирование изменения контролируемых эксплуатационных параметров МТА

Д-р техн. наук С. В. КАЛАЧИН (МГУ им. Н. П. Огарёва, kalachin@bmail.ru)

Аннотация. Представлены результаты разработки нового направления развития методов эксплуатационного контроля, основанных на прогнозной информации об изменении контролируемых эксплуатационных параметров МТА.

Ключевые слова: методы эксплуатационного контроля, математическая модель прогнозирования, интенсивность изменения контролируемых эксплуатационных параметров, математическое ожидание, дисперсия.

Сложность современной с.-х. техники, ее высокая стоимость и энергонасыщенность выдвигают на передний план проблему повышения эффективности использования МТА. Для ее решения необходимо в первую очередь оптимально управлять режимами работы МТА, что без эффективных методов и средств эксплуатационного контроля не представляется возможным.

На основе обзора научных исследований [1] развитие методов эксплуатационного контроля, с нашей точки зрения, может быть представлено в следующем виде:

Методы эксплуатационного контроля

Субъективные методы контроля (на слух по работе двигателя, по дымности выхлопа отработавших газов и т. д.)

Допусковый контроль по средним значениям контролируемых эксплуатационных параметров

Допусковый контроль по текущим значениям контролируемых эксплуатационных параметров

Эффективность применения

Уровень загрузки МТА 0,5—0,7. Контроль и управление режимами работы МТА с запаздыванием по времени

Уровень загрузки МТА 0,73—0,89. Контроль и управление режимами работы МТА с запаздыванием по времени

Уровень загрузки МТА 0,85—0,92. Контроль и управление режимами работы МТА с запаздыванием по времени