УДК 664.7:631.3-52

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО ОБЪЕКТА НА ОСНОВЕ ПРОЕКЦИОННО-ГРАДИЕНТНОГО МЕТОДА

Фурман И.А., д.т.н.,
Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства имени Петра Василенко,
Тел. (057) 7123537,
Диордиев В.Т., к.т.н.
Таврический государственный агротехнологический университет
Тел. (0619) 42-57-97.

***Аннотация* – в статье приведена методика расчета параметров оптимального управления динамическими дискретными объектами при значительном числе тактов управления.**

***Ключевые слова* – проекционно-градиентный метод, обобщенная модель, стабилизирующий вектор, матрица коэффициентов.**

Постановка проблемы. В настоящее время для формализации свойств динамических объектов кормопроизводства используется процедура замены в процессе алгоритмических преобразований нулевых элементов на ненулевые, что характерно для известных методов оптимизации и требует значительных объемов вычислений.

Анализ последних исследований. Упрощению процедуры оптимизации управления такими объектами посвящен целый ряд работ как отечественных, так и зарубежных исследователей [1, 4, 5]. Однако практически все они направлены на использование преимущественно положений динамического программирования, упрощающего лишь процедуру собственно расчета и не учитывающего минимизацию интегральный критерий энергоэффективности.

Формулирование цели статьи. Целью настоящей статьи является использование проекционно-градиентного метода для уменьшения количество итераций при формализации параметров динамических объектов, что способствует упрощению алгоритмического и программного обеспечения задач оптимального оперативного управления ими. В качестве существенного достоинства данного алгоритма следует отметить, что для окончательного формирования вектора сдвига используется исходная разреженная матрица коэффициентов.

Основная часть. Для рассматриваемого класса объектов, к которым относятся електротехнические комплексы по производству комбикормов в АПК [2 – 4, 5] обобщенная модель дискретного типа будет иметь вид

$$\vec{x}_k^0 = \left[A^0\right]\vec{x}_{k-1} + \left[B^0\right]\vec{u}_k;\ k = \overrightarrow{1, N_t};\ \dim\vec{x}^0 = \dim\vec{u}^0 = N_p, \qquad (1)$$

где $\left[A^0\right]$ – матрица параметров объекта;

$\left[B^0\right]$ – матрица параметров управления;

$\vec{x}$ – вектор управляемых координат;

$\vec{u}$ – вектор управляющих координат (величин);

$\dim\vec{x}$ – оператор сдвига;

N_t – число тактов управления.

При этом для дальнейшего анализа принято, что размерность вектора управляющих воздействий равна размерности N_p вектора регулируемых величин. На указанные величины накладываются двусторонние ограничения

$$\vec{x}^{\min} \le \vec{x}_k^0 \le \vec{x}^{\max};\ \vec{u}^{\min} \le \vec{u}_k^0 \le \vec{u}^{\max};\ \forall k = \overline{1, N_t}, \qquad (2)$$

где ставится задача нахождения такой последовательности $\left\{\vec{u}_k^{/}, k = \overline{1, N_t}\right\}$ управляющих воздействий, которая доставляет минимум некоторому критерию качества функционирования системы (в рассматриваемом случае это интегральный критерий энергоэффективности)

$$\vec{f}^{\,0} = f^{\,0}(\vec{x}_1^0, \ldots, \vec{x}_{N_t}^0, \vec{u}^0, \ldots, \vec{u}_{N_t}^0) \qquad (3)$$

при заданном векторе начальных условий объекта $\vec{x}^0$. При соответствующих обозначениях [4] данная задача записывается в виде эквивалентной задачи математического программирования:

$$\text{найти} \rightarrow \quad \vec{x} \overset{\Delta}{=} \vec{x}^{opt} : f(\vec{x}) \rightarrow \min \left| [h](\vec{x}) = 0;\ \vec{x}^{\min} \le \vec{x} \le \vec{x}^{\max}, \right. \qquad (4)$$

$$\text{где } [h]^T \overset{\Delta}{=} \left[h_1^T \ldots h_{N_t}\right];\ \dim h = N_t N_p \overset{\Delta}{=} m; \qquad (5)$$

$$h_k \overset{\Delta}{=} \left[A^0\right]\vec{x}_{k-1}^0 + \left[B^0\right]\vec{u}_k^0 - \vec{x}_k^0; \qquad (6)$$

$$\vec{x}^T \overset{\Delta}{=} \left[\vec{x}_0^{0T}, \vec{x}_1^{0T}, \vec{u}_1^{0T}, \ldots, \vec{x}_{N_t}^{0T}, \vec{u}_{N_t}^{0T}\right];\ \dim\vec{x} = (2N_t + 1)N_p \overset{\Delta}{=} n, \qquad (7)$$

т.е. сложность алгоритма расчета параметров оптимального управления объектом (2.3) определяется функциональной сложностью решения задачи математического программирования (4 – 7).

В данном случае искомый вектор определяется с помощью рекуррентной процедуры [6]

$$\vec{x}_k = \vec{x}_{k-1} + \Delta t(\vec{x})\vec{u}_k;\ k = 1, 2, \ldots;\ \vec{x}_0 = \left(\vec{x}^{\min} + \vec{x}^{\max}\right)/2, \qquad (8)$$

где Δt – шаг процедуры; k – номер итерации, а смысл и размерность введенных вектора переменных $\vec{x}$ и вектора сдвига $\vec{u}$ обусловлены формой задачи (4 – 7). Вектор сдвига является общим решением неопределенной системы линеаризованных алгебраических уравнений:

$$\vec{u} : [A]\vec{u} = \vec{b};\ \vec{b} \overset{\Delta}{=} -\vec{h};\ \left\|\vec{u} - \nabla\vec{f}\right\| \rightarrow \min, \qquad (9)$$

$$\left[A^0\right] \stackrel{\Delta}{=} \begin{bmatrix} A^0 \vdots -E \vdots B^0 & & & \\ & A^0 \vdots O \vdots -E \vdots B^0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A^0 \vdots O \vdots -E \vdots B^0 \end{bmatrix}, \qquad (10)$$

где $\left[A^0\right]$ – якобиан ограничений-равенств;

$\nabla\vec{f}(x)$ – вектор градиента оптимизируемой функции,

при этом $\dim E = N_p \times N_p$. Данный вектор принят равным взвешенной сумме двух векторов – стабилизирующего и вектора ортогональной проекции градиента минимизируемой функции

$$\vec{u} = \vec{u}_q + \gamma\vec{u}_p;\ \gamma \prec 0;\ |\gamma| \prec 1, \qquad (11)$$

где параметр γ выбирается так, чтобы обеспечить устойчивое движение к допустимой области при одновременном достижении точки экстремума и эти векторы должны удовлетворять условиям:

$$\vec{u}_q : [A]\vec{u}_q = \vec{b};\ \vec{u}_p : [A]\vec{u}_p = 0;\ \left\|u_p - \nabla f\right\| \to \min; \qquad (12)$$

$$\vec{u}_q = [R]\hat{u}_q;\ \vec{u}_p = [R]\hat{u}_p;\ [R] = diag\alpha_i(\vec{x});\ i = \overline{1,n}. \qquad (13)$$

Векторы $\hat{u}_q, \hat{u}_p$ – соответствующие решения уравнения (9) в неевклидовой метрике, определяемой диагональной матрицей [R], причем величины элементов этой матрицы зависят от положения изображающей точки относительно двусторонних ограничений

$$\alpha_i = 2d_i^{\min} d_i^{\max} / \left(d_i^{\min} + d_i^{\max} + 2d_i^{\min} d_i^{\max}\right);\ d_i^{\min} \stackrel{\Delta}{=} x_i - x_i^{mn};\ d_i^{\max} \stackrel{\Delta}{=} x_i^{\max} - x_i. \qquad (14)$$

Разности векторов сдвига в принятой неевклидовой и евклидовой метриках являются коэффициентами притяжения ограничений-неравенств, равные разности множителей Лагранжа ограничений, соответствующих нижней и верхней границам допустимого изменения переменных [7]:

$$\vec{S}_q \stackrel{\Delta}{=} \hat{u}_q - u_q = \lambda_q^{\min} - \lambda_q^{\max}; \qquad (15)$$

$$\vec{S}_p \stackrel{\Delta}{=} \hat{u}_p - u_p = \lambda_p^{\min} - \lambda_p^{\max}. \qquad (16)$$

Возможность такого простого вычисления указанных величин является принципиальной особенностью рассматриваемого метода, которая позволяет эффективно учитывать активность ограничений неравенств при движении к экстремуму оптимизируемой функции.

Следует отметить некоторые особенности алгоритма расчета вектора сдвига. В данном случае стабилизирующая и проективная составляющие вектора сдвига в неевклидовой метрике задаются в форме

$$\hat{u}_q = [A]^T \hat{\lambda}_q;\ \hat{u}_p = \nabla f - [A]^T \hat{\lambda}_p;\ \dim\hat{\lambda}_q = \dim\hat{\lambda}_p = m, \qquad (17)$$

т.к. функции исходных градиентов ограничений-равенств линейные. Необходимые значения множителей Лагранжа – весовых коэффициентов указанных выше градиентов являются решениями систем уравнений с симметричной матрицей коэффициентов, но с различными правыми частями

$$[G]\hat{\lambda}_q = \vec{b};\ [G]\hat{\lambda}_p = [A][R]\nabla\vec{f};\ [G] = [A][R][A]^T. \tag{18}$$

Решение (2.20) в соответствии с [6] проводится на основе преобразования их в системы уравнений с верхней треугольной матрицей коэффициентов

$$[\tilde{G}]\hat{\lambda}_q = \vec{b};\ [\tilde{G}]\hat{\lambda}_p = \nabla\vec{f}. \tag{19}$$

Элементы матрицы коэффициентов этих уравнений вычисляются с помощью процедуры:

$$j = 1 : \tilde{g}_{11} = g_{11};\ g_{11} \stackrel{\Delta}{=} [a_1]^T [R][a_1]; \tag{20}$$

$$j = \overline{2,m} : \tilde{g}_{j1} = g_{j1};\ g_{j1} = g_{ji} - \sum_{\ell=1}^{i-1} \frac{g_{j\ell}^2}{\tilde{g}_{\ell\ell}} \stackrel{\Delta}{=} [a_j]^T [a_i]; \tag{21}$$

$$\tilde{g}_{jj} = g_{jj} - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{g_{ji}^2}{\tilde{g}_{ii}} \stackrel{\Delta}{=} [a_j]^T [R][a_j], \tag{22}$$

а их правые части вычисляются с помощью процедуры

$$\tilde{g}_{m+1,1} = g_{m+1,1};\ \tilde{g}_{m+1,i} = g_{m+1,} - \sum_{\ell=1}^{m} \frac{\tilde{g}_{m+1,\ell}^2}{\tilde{g}_{\ell\ell}};\ i = \overline{2,m}, \tag{23}$$

где $\vec{g}_{m+1} = \vec{b}$ при определении стабилизирующего вектора, а величина $\vec{g}_{m+1} = [A][R]\nabla\vec{f}$ – вектора проекции градиента. Координатные составляющие искомого вектора решения, обозначенного далее как $\lambda_{m+1,j}$, вычисляются начиная с последней по нумерации составляющей при помощи процедуры:

$$j = m : \hat{\lambda}_{m+1,m} = \frac{\tilde{g}_{m+1,m}}{\tilde{g}_{mm}}; \tag{24}$$

$$j = \overline{m-1,1} : \hat{\lambda}_{m+1,j} = \left(\tilde{g}_{m+1,j} - \sum_{\ell=j+1}^{m} \hat{\lambda}_{m+1,\ell} \frac{g_{\ell j}}{\tilde{g}_{jj}} \right). \tag{25}$$

Отличие процедур (2.22) и (2.26) заключается в формальном отсутствии величин $\frac{\tilde{g}_{j\ell}}{\tilde{g}_{\ell\ell}} \stackrel{\Delta}{=} \hat{\lambda}_{j\ell}$ – коэффициентов ортогонализации Грама-Шмидта, что позволяет уменьшить число вычислительных операций и не вводить новых переменных, хотя количество вычислений несколько увеличивается.

Учет структуры ограничений-равенств осуществляется из уравнений динамики управляемого процесса. В данном случае главная вычислительная часть рассматриваемого алгоритма оптимизации-решения системы уравнений (18), который надо проводить на каждой итерации рекуррентной процедуры (8). Для реализации этого решения необходимо сформулировать матрицу коэффициентов уравнений (18) – матрицу Грамма векторов коэффициентов исходной недоопределенной системы уравнений (9), обусловленной уравнениями объекта (1). Учет структуры ограничений сводится к исключению из алгоритма преобразований, связанных с указанными элементами. Из рассматриваемой матрицы достаточно выделить только ненулевые элементы и в этом случае требуемая матрица коэффициентов представляется в виде функционально и структурно идентичных блоков размерности $2N_p \times N_p$, число которых должно быть равно числу тактов управления N_t, где каждый блок содержит две матрицы

$$\left[S_j\right]^T \overset{\Delta}{=} \left[\left[G_j^{/}\right] \vdots \left[G_{j,j+1}^{/}\right]\right];\ j = \overline{1, N_t}\,, \tag{26}$$

где матрица $\left[G_j^{/}\right]$ – матрица Грамма, т.е. скалярных произведений векторов коэффициентов уравнения объекта, сформированная для одного такта управления. С учетом принятой неевклидовой метрики, а также уравнения

$$\left[G_j^{/}\right] = \left[R_j^x\right] + \left[A\right]\left[R_{j-1}^x\right]\left[A\right]^T = \left[B\right]\left[R_j^u\right]\left[B\right]^T; \tag{27}$$

$$\left[R_j^x\right] - diag\alpha_{ji}^x;\ \left[R_j^u\right] = diag\alpha_{ji}^u;\ i = \overline{1, N_p}. \tag{28}$$

Матрица $\left[G_{j,\,j+1}^{/}\right]$ – матрица скалярных произведений векторов коэффициентов уравнения объекта (2.3), записанного для *j*-го такта, и векторов коэффициентов этого же уравнения, записанного для (*j* + 1)-го такта:

$$\left[G_{j,j+1}^{/}\right] = -\left[A\right]\left[R_j^x\right]. \tag{29}$$

Здесь на каждом блоке преобразуется по алгоритму (20), а правые части уравнений (18) – по алгоритму вида (23), после чего с помощью уравнений (23) вычисляются множители Лагранжа ограничений-равенств, а с помощью выражений (17) и (13) – искомые векторы сдвига для всех переменных.

Вывод. Данный подход позволяет решить задачу расчета оптимального управления динамическими дискретными объектами при значительном числе тактов управления, что является обычно ограничивающим условием с вычислительной точки зрения. Здесь не используется процедура замены в процессе алгоритмических преобразований нулевых элементов на ненулевые, характерная для известных методов оптимизации. При этом значительно уменьшается количество итераций для получения решения по алгоритму проекционно-градиентного метода оптимизации, что способствует упрощению алгоритмического и программного обеспечения задач оптимального оперативного управления динамическими объектами.

Литература

1. *Диордиев В.Т.* Системо- и схемотехническая база реализации многокритериальной системы прямого цифрового регулирования параметров технологических процессов производства комбикормов в условиях хозяйств / *Диордиев В.Т., Труфанов И.Д., Кашкарев А.А.* // Технічна електродинаміка. Проблеми сучасної електротехніки. – К.: 2008. – Ч.5 – С.102–108.

2. *Діордієв В.Т.* Декомпозиция задачи идентификации реального технологического процесса кормоприготовления / *В.Т. Діордієв.* // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету, Вип. 9, Т.3. – Мелітополь: ТДАТУ, 2009. – С.151–159.

3. *Діордієв В.Т.* АСК технологічними комплексами виробництва комбікормів у контексті наскрізного алгоритму керування виробництвом. / *В.Т. Діордієв, А.О. Кашкарьов* // Вісник ХНТУСГ ім. Петра Василенка. «Проблеми енергозабезпечення та енергозбереження в АПК України». – Харків: ХНТУСГ, 2011. – Вип. 117. – С.125–128.

4. *Дорф Р.* Современные системы управления (пер. с англ. Б.И. Копылова.) / *Р. Дорф, Р. Бишоп.* – М.: ЮНИАМЕДИАСТАЙЛ, 2002. – 832 с.

5. *Филипс И.* Системы управления с обратной связью / *И. Филипс, Р. Харббер.* – М.: ЮНИМЕДИАСТАЙЛ, 2001. – 616 с.

6. *Черницкий В.И.* Математическое моделирование стохастических систем / *В.И. Черницкий.* – Петрозаводск: Издательство Петрозаводского ун-та, 1994. – 200 с.

ТЕОРЕТИЧНІ АСПЕКТИ МАТЕМАТИЧНОГО ОПИСУ АВТОМАТИЗОВАНОГО ОБ'ЄКТА НА ОСНОВІ ПРОЕКЦІЙНО-ГРАДІЄНТНОГО МЕТОДУ

Фурман І.О., Діордієв В.Т.

Анотація

В статті приведена методика розрахунку параметрів оптимального регулювання динамічними дискретними об'єктами при значній кількості тактів управління.

THE THEORETICAL ASPECTS OF MATHEMATICAL DESCRIPTION OF AUTOMATED OBJECT BASED ON PROJECTION GRADIENT METHOD

I. Furman, V. Diordiev

Summary

The article describes methods of calculating the parameters of the optimal control of dynamic discrete objects in a large number of cycles control.