

УДК 514.18

## ФОРМУВАННЯ ДІЛЯНКИ КУБІЧНОГО В-СПЛАЙНУ ПО ЗАДАНИМ УМОВАМ

Дубініна О.В., аспірант\*

*Мелітопольська школа прикладної геометрії,  
Мелітопольський державний педагогічний університет  
імені Богдана Хмельницького (Україна)*

Гавриленко Є.А., к.т.н.,

Караєв О.Г., к.т.н.

*Таврійський державний агротехнологічний університет  
(м. Мелітополь, Україна)*

*У роботі розглядається задача контролю закономірності зміни кривини уздовж кубічного В-сплайну через параметри багатокутника, що його задає.*

*Ключові слова: кубічний В-сплайн, багатокутник, що задає криву, дотична, радіус кривини, базисний трикутник (БТ).*

**Постановка проблеми.** Одним із важливих завдань геометричного моделювання є формування складних поверхонь, заданих дискретним лінійчатим каркасом. Елементами каркаса, на основі якого формується поверхня, можуть бути плоскі та просторові одновимірні обводи, що задані точковим рядом. Прикладом можуть слугувати динамічні поверхні, призначення яких – взаємодія із середовищем. Вимоги до лінійних елементів динамічної поверхні – монотонність зміни кривини вздовж кривої та забезпечення другого порядку гладкості обводу[1].

У більшості сучасних пакетів геометричного моделювання лінійні елементи моделі поверхні формуються інтерполяцією вихідного точкового ряду кубічним В-сплайном. Кубічний В-сплайн автоматично забезпечує другий порядок гладкості обводу і за допомогою багатокутника, який його задає, дозволяє контролювати виникнення осциляції вздовж кривої. Коригування закономірності зміни кривини уздовж В-сплайну можливо в ручному режимі і може бути ефективним при інтерполяції невеликої кількості вузлів. При призначенні у вузлових точках фіксованих положень дотичних та значень кривини контроль за зміною кривини різко ускладнюється. На даний момент нам невідомі способи, які дозволяють в

---

\* Науковий керівник – к.т.н., доцент Гавриленко Є.А.

автоматизованому режимі забезпечити монотонну зміну кривини уздовж кубічного В-сплайну.

Розробка інструмента, який дозволить контролювати закономірність зміни кривини уздовж кубічного В-сплайну надасть можливість ефективно моделювати поверхні із заданими функціональними властивостями.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Способи формування та властивості кубічного В-сплайну розглянуто в [1]. Точки, що задають В-сплайн називають контрольними, а відрізки, які з'єднують контрольні точки – контрольний багатокутник. В-сплайни генеруються шляхом апроксимації контрольних точок. Змінюючи параметри контрольного багатокутника можливо впливати на наявність випуклості-увігнутості В-сплайну, але контролювати закономірність зміни кривини вздовж кривої складно або неможливо.

Завдання В-сплайну через контрольні точки носить дискретний характер та забезпечує гнучкість управління його формою. Підхід до управління В-сплайном через контрольні точки близький до формування дискретно представленої кривої на основі вихідного точкового ряду [2]. Задача формування геометричних образів, які задані впорядкованою множиною точок може бути розв'язана варіативним дискретним геометричним моделюванням (ВДГМ). Основні принципи та напрямки ВДГМ сформульовані в [2].

Спосіб управління формою сплайну через точки, що його задають, запропоновано в [3]. Обвід формується на основі сплайну Безье другого порядку, ділянка якого задається трьома контрольними точками. Монотонна зміна кривини вздовж кривої та другий порядок гладкості обводу забезпечується параметрами базисного трикутника (БТ), вершинами якого є контрольні точки, що задають ділянку кривої Безье.

**Формулювання цілей статті.** Метою статті є дослідження можливості забезпечення монотонної зміни кривини вздовж кубічного В-сплайну управлінням параметрами контрольного багатокутника.

**Основна частина.** Розглянемо задачу формування ділянки плоского кубічного В-сплайну, уздовж якого радіуси кривини монотонно зростають. Одна ділянка кубічного В-сплайну визначається чотирма контрольними точками  $P_0, P_1, P_2$  та  $P_3$  (рис. 1).

Дотичні до В-сплайну, які проходять через точки  $P_0$  та  $P_3$  і хорда  $P_0P_3$  визначають БТ. Монотонність зміни кривини вздовж В-сплайну можливо забезпечити, якщо форма БТ відповідає умові [3]:

$$a_1 > b_1; a_2 > b_2 \quad (1)$$

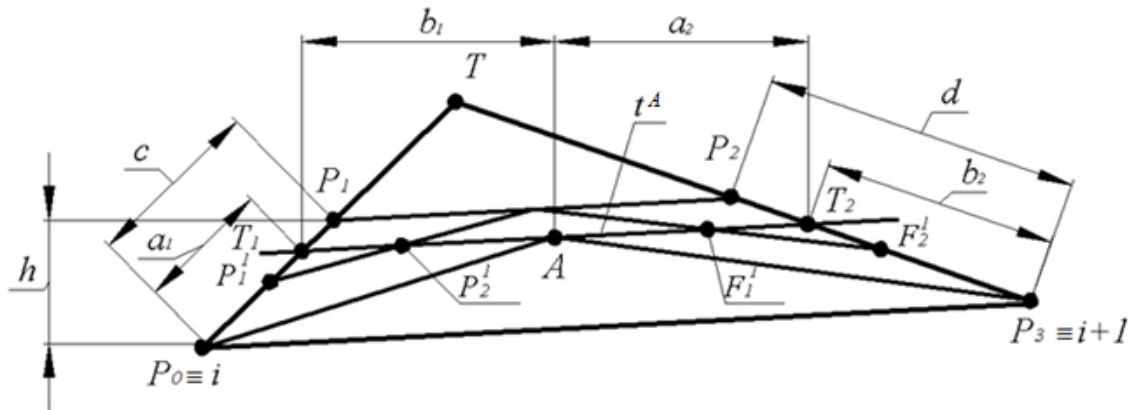


Рис. 1

Якщо назначити точку  $A$  на В-сплайні та визначити положення дотичної  $t^A$ , що проходить через неї, отримуємо БТ  $P_0T_1A$  та  $P_3T_2A$ , кожен з яких задає відповідну ділянку вихідного В-сплайну. Отримані БТ будемо називати БТ згущення. Монотонність зміни кривини вздовж ділянки В-сплайну забезпечує відповідність форми БТ згущення (1). Виконання аналогічної умови (1) необхідно забезпечити для БТ згущення, що визначають скільки завгодно малу ділянку В-сплайну. Положення точки  $A$  на В-сплайні назначаємо таким чином, щоб значення параметра  $u = \frac{1}{2}$ , а дотична  $t^A$  була паралельна хорді  $P_0P_3$ . В цьому випадку ланка  $P_1P_2$  контрольного багатокутника буде однозначно визначена та паралельна хорді БТ  $P_0P_3$  [1], а дотична  $t^A$  знаходиться на відстані  $\frac{3}{4}h$  від хорди  $P_0P_3$ , де  $h$  – відстань від хорди  $P_0P_3$  до ланки  $P_1P_2$  багатокутника  $P_0P_1P_2P_3$ . При призначенні точки  $A$ , яка відповідає параметру  $u = \frac{1}{2}$  отримуємо контрольні багатокутники  $P_0P_1^1P_2^1A$  та  $AF_1^1F_2^1P_3$ , кожен з яких визначає форму відповідної ділянки В-сплайну [1]. Ланки  $P_2^1A$  та  $AF_1^1$  новоутворених контрольних багатокутників належать дотичній  $t^A$ , ланки  $P_1^1P_2^1$  та  $F_1^1F_2^1$  паралельні основам БТ згущення  $P_0T_1A$  та  $P_3T_2A$  відповідно.

Контролювати положення дотичної  $t^A$  можливо за рахунок переміщення ланки  $P_1P_2$  багатокутника  $P_0P_1P_2P_3$  та зміни відстані  $h$ . Діапазон положення ланки обмежується виконанням умови (1), коли при її граничному положенні один із БТ згущення стає рівнобедреним. Граничні положення ланки  $P_1P_2$  відповідають граничним положенням дотичної  $t^A$ , при якому задача забезпечення монотонної зміни кривини має розв'язок [3]. На даному етапі розробки

способу коригування положення дотичної передбачається в інтерактивному режимі.

Визначимо, як положення дотичної  $t^A$  визначає радіуси кривини у точках  $P_0$  та  $P_3$ , що обмежують ділянку сплайну.

Для кривої, що задана параметричними рівняннями, радіус кривини визначається за формулою

$$R_i = \frac{|r'(u)|^3}{|r'(u) \times r''(u)|},$$

де  $r(u)$  – вектор-функція кривої.

Виразивши першу та другу похідну сплайну через радіус-вектори контрольних точок [1] отримуємо формули визначення радіусів кривини у крайніх точках ділянки  $P_0$  та  $P_3$  ( $R_i$  та  $R_{i+1}$  відповідно):

$$R_i = \frac{3|r_1 - r_0|^3}{2|(r_1 - r_0) \times (r_2 - r_1)|};$$

$$R_{i+1} = \frac{3|r_3 - r_2|^3}{2|(r_2 - r_1) \times (r_3 - r_2)|}.$$

Виразивши радіус-вектори через параметри контрольного багатокутника отримуємо

$$R_i = \frac{3c^3}{4S_1}, \quad R_{i+1} = \frac{3d^3}{4S_2},$$

де  $c, d$  – довжини сторін контрольного багатокутника (рис.1);  $S_1$  та  $S_2$  – площі трикутників  $P_0P_1P_2$  та  $P_1P_2P_3$  відповідно.

**Висновки.** У роботі запропоновано спосіб контролю закономірності зміни кривини вздовж плоского кубічного В-сплайну через параметри багатокутника, що його задає. Розроблена схема дозволяє визначити параметри контрольного багатокутника, при яких задача формування ділянки В-сплайну з монотонною зміною кривини має розв'язок. Можливі за умовами задачі параметри контрольного багатокутника визначають діапазон радіусів кривини в точках, що обмежують ділянку кубічного В-сплайну. Визначення зазначених діапазонів надає можливість узгодити значення радіусів кривини в точках стиковки ділянок В-сплайну та сформуванню обвід другого порядку гладкості.

Завданням майбутніх досліджень є забезпечення контролю диференційно-геометричних характеристик уздовж кубічних В-сплайнів, що складаються з довільного числа ділянок. Розробка способу формування кубічного В-сплайну з можливістю контролю закономірності зміни кривини надасть ефективний інструмент для побудови моделей складних поверхонь із заданими функціональними якостями.

**Література**

1. Ли Кунву. Основы САПР CAD/CAM/CAE / Кунву Ли. – СПб.: Питер, 2004. – 560 с.
2. Найдиш В.М. Дискретна інтерполяція [навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів III–IV рівнів акредитації] / В.М.Найдиш. – Мелітополь: Люкс, 2008. – 250 с.
3. Холодняк Ю.В. Вариативное дискретное геометрическое моделирование обводов на основе базисных треугольников по заданному изменению кривизны: дис. ... канд. техн. наук: 05.01.01 / Холодняк Юлія Володимирівна. – Мелітополь, 2016. – 178 с.

### **ФОРМИРОВАНИЕ УЧАСТКА КУБИЧЕСКОГО В-СПЛАЙНА ПО ЗАДАНЫМ УСЛОВИЯМ**

Дубинина Е.В., Гавриленко Е.А., Караев А.И.

*В работе рассматривается задача контроля закономерности изменения кривизны вдоль плоского кубического В-сплайна через параметры задающего многоугольника.*

*Ключевые слова: кубический В-сплайн, задающий многоугольник, касательная, радиус кривизны, базисный треугольник.*

### **FORMATION OF THE PART CUBIC B-SPLINE TO GIVEN CONDITIONS**

O. Dubinina, E. Gavrilenko, A. Karaev

*This article describes the control's problem of laws of change of curvature along the flat cubic B-spline. The control of form is carried out through the polygon settings.*

*Keywords: cubic B-spline, polygon, control polygon, tangent, radius of curvature, basic triangle.*