

УДК.631.333

Дядя В.М., старший преподаватель

Таврическая государственная агротехническая академия

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ УДОБРЕНИЙ, СЛЕТАЮЩЕЙ С ЦЕНТРОБЕЖНОГО ДИСКА, В ВОЗДУШНОЙ СРЕДЕ

При движении частицы удобрений массой  $m$  в воздушной среде (рис.1) на нее действуют сила сопротивления воздуха  $R_g$  и сила тяжести частицы  $G = mg$ , направленная вертикально вниз.

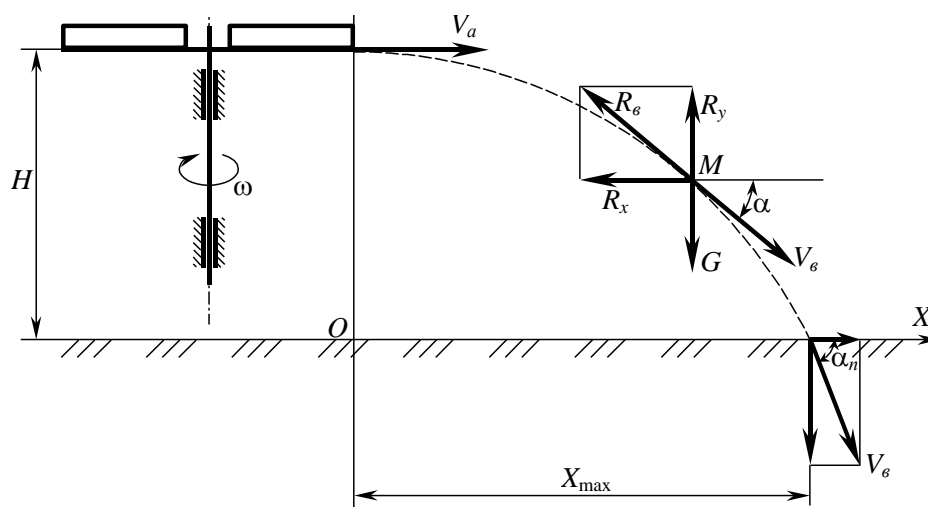


Рис.1 - Схема к определению дальности полета частицы, слетающей с центробежного диска.

Н.Е.Жуковский, основываясь на экспериментах, утверждал, что сила сопротивления среды зависит от квадрата скорости движения тела, если величина скорости перемещения  $V_g$  находится в пределах от 18 до 38 м/с [1]. Частицы удобрений, слетающие с центробежного диска, имеют скорость перемещения в указанных выше пределах. Поэтому можно записать

$$R_g = k\rho S_m V_g^2, \quad (1)$$

где  $k$  – коэффициент сопротивления воздуха;

$\rho$  – плотность воздуха;

$S_m$  – миделево сечение, т.е. площадь проекции частицы на плоскость, перпендикулярную к направлению скорости частицы  $V_g$ .

Так как коэффициент парусности  $k_n = k \frac{\rho}{m} S_m$ , то

$$R_e = k_n m V_e^2. \quad (2)$$

Сила сопротивления воздуха  $R_e$  направлена по касательной к траектории полета частицы в сторону, противоположную вектору ее скорости.

Для определения дальности полета частицы, слетающей с центробежного диска со скоростью  $V_a$ , воспользуемся методом составления приближенных дифференциальных уравнений движения частицы и точного их решения [2]. Дифференциальные уравнения движения частицы в вертикальной плоскости, совпадающей с направлением вектора ее скорости, имеют вид

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= -R_x, \\ m\ddot{y} &= R_y - G, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где  $R_x$  и  $R_y$  – соответственно горизонтальная и вертикальная составляющие силы сопротивления воздуха.

$$\left. \begin{aligned} R_x &= k_n m V_e^2 \cos \alpha, \\ R_y &= k_n m V_e^2 \sin \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где  $\alpha$  – текущее значение угла между вектором скорости частицы и горизонталью.

Подставив выражения (4) в уравнения (3) и сократив на  $m$ , получим

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= -k_n V_e^2 \cos \alpha, \\ \ddot{y} &= k_n V_e^2 \sin \alpha - g. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Для решения уравнений (5) заменим  $\cos \alpha$  на  $k_x \cos^2 \alpha$  и  $\sin \alpha$  на  $k_y \sin^2 \alpha$ , (где  $k_x$  и  $k_y$  – некоторые постоянные коэффициенты [2], которые уменьшают искажения уравнений, вызванные заменой  $\cos \alpha$  на  $\cos^2 \alpha$  и  $\sin \alpha$  на  $\sin^2 \alpha$ , и сближают их значения). После математических преобразований и двукратного интегрирования полученных выражений получим

$$x = \frac{\ln(k_n k_x V_a t + 1)}{k_n k_x}, \quad (6)$$

$$y = H - \frac{\operatorname{lnch}\left(\sqrt{k_n k_y g} \times t\right)}{k_n k_y}, \quad (7)$$

где  $H$  – высота установки диска над поверхностью поля.

Из уравнения (7) можно определить время  $t$  движения частицы в воздушной среде, приравняв  $y = 0$

$$t = \frac{\operatorname{Arch} e^{k_n k_y H}}{\sqrt{k_n k_y g}}. \quad (8)$$

Подставив значение  $t$  в формулу (6), получим дальность полета частицы  $x$

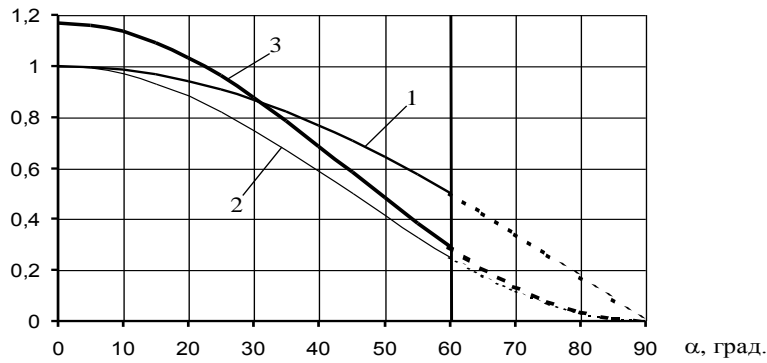
$$x = \frac{\ln\left(V_a k_x \sqrt{\frac{k_n}{k_y g}} \times \operatorname{Arch} e^{k_n k_y H} + 1\right)}{k_n k_x}. \quad (9)$$

Из уравнения (9) следует, что дальность полета частицы, слетающей с плоскости центробежного диска, зависит от начальной абсолютной скорости схода частицы с диска  $V_a$ , высоты установки диска над поверхностью поля  $H$  и коэффициента парусности частицы  $k_n$ .

Коэффициенты  $k_x$  и  $k_y$ , входящие в уравнение (9), нельзя определить по формулам, полученным В.А.Волковым [2], т.к. они приемлемы для конусного диска. Определим коэффициенты  $k_x$  и  $k_y$  для плоского диска, когда угол схода частицы с диска  $\alpha_0 = 0$ . В процессе движения частицы в воздушной среде угол  $\alpha$  между вектором ее скорости и горизонталью изменяется и при падении частицы на почву он равен  $\alpha_n$ .

Максимальное значение угла падения частицы на почву  $\alpha_{n\max} = \frac{\pi}{2}$ .

На рис.2 представлены графики  $Y_1 = \cos\alpha$ ;  $Y_2 = \cos^2\alpha$ ;  $Y_3 = k_x \cos^2\alpha$ . Если угол падения частицы на почву равен  $\alpha_n$ , то коэффициент  $k_x$  определяется из условия равенства площадей, ограниченных кривыми  $Y_1 = \cos\alpha$  и  $Y_3 = k_x \cos^2\alpha$ .



**Рис.2 - Графики к определению коэффициента  $k_x$  при  $\alpha_n=60^\circ$ :**

$$1 - y = \cos \alpha; \quad 2 - y = \cos^2 \alpha; \quad 3 - y = k_x \cos^2 \alpha$$

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \int_0^{\alpha_n} \cos \alpha \cdot d\alpha = \sin \alpha_n, \\ F_2 &= \int_0^{\alpha_n} \cos^2 \alpha \cdot d\alpha = \frac{\alpha_n}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\alpha_n, \\ F_3 &= \int_0^{\alpha_n} k_x \cos^2 \alpha \cdot d\alpha = k_x \left( \frac{\alpha_n}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\alpha_n \right). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Из условия  $F_1 = F_3$  определяется коэффициент  $k_x$

$$k_x = \frac{2 \sin \alpha_n}{\alpha_n + \frac{1}{2} \sin 2\alpha_n}. \quad (11)$$

Аналогично определяется коэффициент  $k_y$

$$k_y = \frac{2(1 - \cos \alpha_n)}{\alpha_n - \frac{1}{2} \sin 2\alpha_n}. \quad (12)$$

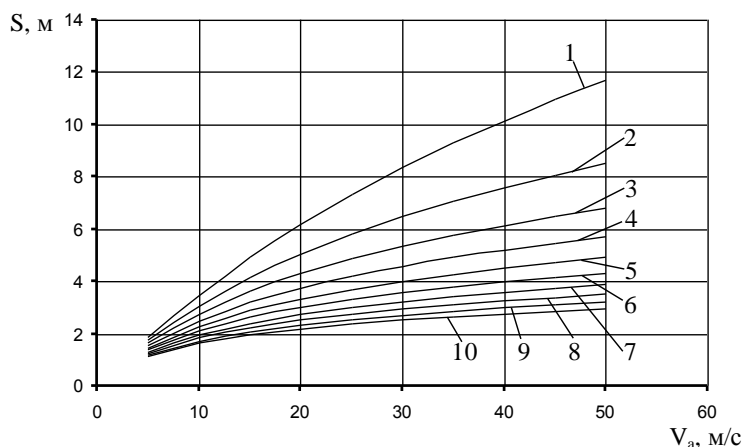
Таким образом, для определения дальности полета частицы, слетающей с центробежного диска, необходимо принять произвольный угол падения частицы на почву  $\alpha_n$ , например  $\alpha_n = \frac{\pi}{4}$ . Затем вычисляются коэффициенты  $k_x$  и  $k_y$ . После этого определяется время движения частицы в воздушной среде  $t$ . Учитывая, что угол падения частицы на почву  $\alpha_n$  был принят произвольным, необходимо уточнить его величину. Из рисунка 1 видно, что

$$\alpha_n = \arctg \frac{\dot{y}}{\dot{x}}. \quad (13)$$

После этого уточняются коэффициенты  $k_x$ ,  $k_y$  и определяется

дальность полета частицы  $x$ .

Для решения этой задачи составлена программа и определена дальность полета частиц удобрений по предлагаемой методике. При этом учитывались такие факторы как абсолютная скорость схода частицы с диска  $V_a$  и коэффициент парусности частицы  $k_n$ . Результаты расчетов представлены на рисунке 3.



**Рис. 3 – График зависимости дальности полета частицы от абсолютной скорости схода частицы с диска  $V_a$  при различных значениях коэффициента парусности  $k_n$  :**

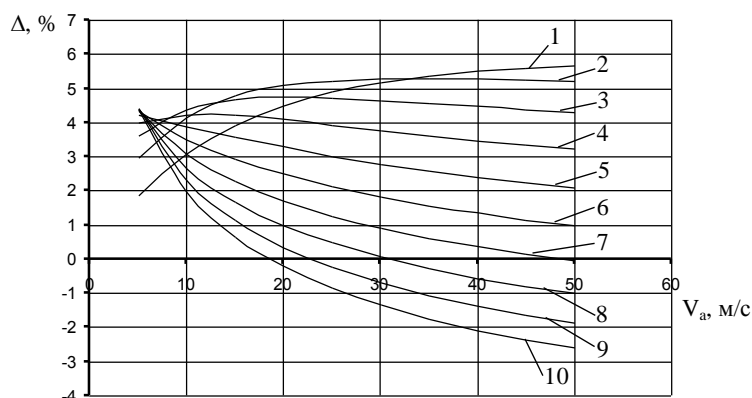
1 –  $k_n = 0,1 \text{ м}^{-1}$  ; 2 –  $k_n = 0,2 \text{ м}^{-1}$  ; 3 –  $k_n = 0,3 \text{ м}^{-1}$  ; 4 –  $k_n = 0,4 \text{ м}^{-1}$  ;  
 5 –  $k_n = 0,5 \text{ м}^{-1}$  ; 6 –  $k_n = 0,6 \text{ м}^{-1}$  ; 7 –  $k_n = 0,7 \text{ м}^{-1}$  ; 8 –  $k_n = 0,8 \text{ м}^{-1}$  ;  
 9 –  $k_n = 0,9 \text{ м}^{-1}$  ; 10 –  $k_n = 1 \text{ м}^{-1}$  .

Из рис.3 видно, что дальность полета частиц с меньшим коэффициентом парусности в большей степени зависит от абсолютной скорости схода их с диска чем частиц с большим коэффициентом парусности. Так например, при увеличении абсолютной скорости схода частицы с диска с 20 м/с до 40 м/с дальность полета частиц с коэффициентом парусности  $k_n = 0,1 \text{ м}^{-1}$  увеличивается с 6,2 м до 10,2 м, а при  $k_n = 0,8 \text{ м}^{-1}$  увеличивается с 2,5 м до 3,4 м.

Кроме того определена дальность полета частиц удобрений по упрощенной формуле [3]

$$x = \frac{\ln \left( V_a k_n \sqrt{\frac{2H}{g}} + 1 \right)}{k_n} \quad (14)$$

Разность определения дальности полета частиц удобрений двумя методиками представлена на рисунке 4.



**Рис. 4 – График зависимости погрешности дальности полета частицы с учетом сопротивления воздуха при перемещении ее вниз и без его учета от абсолютной скорости схода частицы с диска  $V_a$  при различных значениях коэффициента парусности  $k_n$ :**  
 1 –  $k_n = 0,1 \text{ м}^{-1}$ ; 2 –  $k_n = 0,2 \text{ м}^{-1}$ ; 3 –  $k_n = 0,3 \text{ м}^{-1}$ ; 4 –  $k_n = 0,4 \text{ м}^{-1}$ ;  
 5 –  $k_n = 0,5 \text{ м}^{-1}$ ; 6 –  $k_n = 0,6 \text{ м}^{-1}$ ; 7 –  $k_n = 0,7 \text{ м}^{-1}$ ; 8 –  $k_n = 0,8 \text{ м}^{-1}$ ;  
 9 –  $k_n = 0,9 \text{ м}^{-1}$ ; 10 –  $k_n = 1 \text{ м}^{-1}$ .

Из рис.4 видно, что погрешность определения дальности полета частиц, вычисляемая по различным методикам, зависит от их коэффициента парусности  $k_n$  и составляет не более 6%. Причем для частиц с меньшим коэффициентом парусности погрешность большая, чем для частиц с большим коэффициентом парусности. Такая закономерность наблюдается при абсолютной скорости схода частицы с диска  $V_a > 20$  м/с. При меньшей скорости  $V_a$  погрешность можно принимать в пределах 2-4 % независимо от коэффициента парусности частицы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кукибный А.А. Метательные машины. – М.: Машиностроение, 1964. – 196с.
2. Волков В.А. Приближенный расчет движения тел в сопротивляющейся среде / ВИСХОМ. – М.: ЦБТИ, 1959. – Вып. 24. – 17с.
3. Сельскохозяйственные машины: Теория и технологический расчет / Б.Г.Турбин, А.Б.Лурье, С.М.Григорьев и др.; Под ред. Б.Г.Турбина. – 2-е изд., перераб. и доп. – Л.: Машиностроение, 1967. – 584с.