

УДК 641.437.075.8

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ЗАМОРОЖУВАННЯ ПЛОДОВООВОЧЕВОЇ СИРОВИНИ ЗА РІЗНИХ УМОВ ТЕПЛООБМІНУ

Ялпачик В.Ф. к.т.н.

*Таврійський державний агротехнологічний університет*

Тел.(0619) 42-13-06

**Анотація** – робота присвячена методиці математичного моделювання процесів заморожування об'єктів з плодовоовочевої сировини в промислових умовах.

**Ключові слова** – теплофізичні властивості, математичне моделювання, коефіцієнт тепловіддачі, теплопровідність, тепловий потік, крайова задача, плодовоовочева сировина.

*Постановка проблеми.* Процесу заморожування, і наступного зберігання в замороженому стані, сьогодні немає альтернативи в плані можливостей зберегти на кінець періоду зберігання достатньо велику частку компоненту, що представляють харчову цінність плодів та овочів. Розробка математичної моделі процесів заморожування плодовоовочевої сировини та її апробація по змінних в часі температурних полів, тривалості процесів та тепловим потокам надають змогу контролювати процеси в промислових умовах при зміні характеристик сировини, вирішувати задачі енерго- та ресурсозбереження на підприємствах агропромислового комплексу.

*Аналіз останніх досліджень.* Теплофізичні властивості різних видів плодовоовочевої сировини в діапазоні від мінус 40 °С до 40 °С, суттєво залежать від температури. Тому крайова задача теплопровідності для одержання температурних полів об'єктів заморожування має бути нелінійною, враховувати теплові ефекти, зумовлені протіканням фазових перетворень вода – лід, тобто базуватись на температурних залежностях для всього комплексу теплофізичних характеристик.

Це свідчить, що при аналізі процесів тільки охолодження сировини достатньо було б провести необхідне моделювання в рамках лінійних крайових задач теплопровідності, використати весь багатий літературний арсенал їх аналітичних розв'язків в термінах рядів Фур'є тощо [2, 3]. В області від'ємних температур, де протікають фазові

перетворення вода – лід, лінійні постановки не можуть використовуватись навіть для приблизних оцінок. Тому для вирішення задач необхідно провести моделювання в рамках нелінійних крайових задач теплопровідності, що дозволить описувати, як стадію охолодження, так і стадію заморожування в рамках однієї моделі, одного розрахункового алгоритму.

Не виявляється елементарною відповідь на питання “в якій системі координат записувати диференційне рівняння теплопровідності?”, не суть важливо, чи то в лінійній, чи в нелінійній постановці. Об’єкти заморожування в даній роботі не є нескінченною пластиною, нескінченним циліндром чи кулею, є тілами неправильної геометричної форми. Відповідні цим трьом правильним геометричним формам ортогональні системи координат (прямокутна, циліндрична та сферична) не можуть бути використані. Наведене є суттєвим аспектом, якщо звернути увагу, що навіть у лінійній постановці, а також за експериментальними даними, тривалості процесів охолодження кулі і нескінченної пластини відрізняються втричі при однакових граничних умовах теплообміну [1, 2, 9, 10]. Тут необхідно звернути увагу, що в перелічених літературних джерелах також відображено багаторазові спроби урахування суттєвого впливу геометричної форми об’єктів заморожування шляхом різних модифікацій формули Планка [19] для тривалості процесу заморожування. При цьому така тривалість визначається як час досягнення температури мінус 10 °С у псевдоцентрі об’єкту заморожування. Не загострюючи увагу на можливість досягнення температури мінус 10 °С у псевдоцентрі об’єкту заморожування нескінченним числом різних режимів (сполучення значень температури та швидкості руху охолоджуючого середовища) заморожування, відмітимо, що для проектування технології заморожування конкретної сировини та вибору відповідних технічних засобів знань тільки тривалості процесу не достатньо. Тим більше, що різноманітні модифікації формули Планка не забезпечують [10, 12, 17, 18] розрахунку тривалості процесу заморожування навіть з похибкою біля 50 %.

Ще один аспект математичного моделювання процесів формування температурних полів в тілах неправильної геометричної форми полягає в тому, що самого рівняння теплопровідності, в тій чи іншій системі координат далеко не достатньо для досягнення цілей моделювання. Специфіку процесу тут визначає інтенсивність джерел чи стоків теплоти в об’єкті холодильної обробки та динаміка теплообміну на поверхні цього об’єкту, тобто граничні умови теплообміну у відповідній крайовій задачі.

*Постановка завдання.* Як відомо, локальні значення коефіцієнтів тепловіддачі за визначенням залежать від усіх трьох

просторових координат поверхні теплообміну, їх значення відсутні у літературі за рідким виключенням. Як правило, в граничних умовах теплообміну при математичному моделюванні і в розрахунках використовуються коефіцієнти тепловіддачі, які усереднені по поверхні теплообміну, тобто по кутових координатах поверхні об'єкту. Відносно таких значень коефіцієнтів теплообміну, зокрема, в процесах зовнішнього обтікання тіл охолоджуючою чи нагріваючою рідиною або газом, в літературних джерелах накопичено багато експериментальних даних та їх розрахункових узагальнень [1, 9]. В цьому плані, при побудові крайової задачі, як необхідної математичної моделі, виписувати диференційне рівняння теплопровідності з кутовими координатами, а в її граничних умовах теплообміну використовувати значення коефіцієнту тепловіддачі, що не залежить від кутових координат, є дещо некоректним. Було б більш коректно в крайовій задачі записати диференційне рівняння теплопровідності як одномірне (радіальна координата) та нестационарне з граничними умовами третього роду, що містять усереднені по поверхні теплообміну значення коефіцієнтів тепловіддачі.

Ця ідея чи обґрунтування концепції моделювання не є новою. Ідея веде початок з класичної роботи Ленгмюра О. [14], застосовувалась в ряді теоретичних робіт [3], а в задачах холодильної технології харчових продуктів отримала застосування та розвиток в роботах проф. В. П. Оніщенко [4, 5, 10, 17].

Конкретно ідея Ленгмюра полягає у введенні для аналізу процесів з тілами неправильної геометричної форми так званого коефіцієнту їх геометричної форми. Такий коефіцієнт фігурує сьогодні в багатьох розрахункових співвідношеннях, але для розв'язку задач представляє інтерес його введення в радіальний член оператора дивергенції диференційного рівняння теплопровідності. При цьому в операторі дивергенції поля градієнтів відкидаються члени, що залежать від кутових координат. Такий оператор відносно радіальної координати  $x$  записується як

$$\frac{1}{x^\Gamma} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda(T) x^\Gamma \frac{\partial T(x)}{\partial x} \right]. \quad (1)$$

При цьому показник  $\Gamma$  приймає значення 0, 1, 2 відповідно для таких тіл правильної геометричної форми як нескінченна пластина, нескінченний циліндр, куля. Величина  $\Gamma$  дійсно може бути названа коефіцієнтом форми, бо вона безпосередньо зв'язана з характерним розміром  $R$ , поверхнею  $S$  та об'ємом  $V$  таких геометричних об'єктів співвідношеннями

$$\Gamma = \frac{1}{\Phi} - 1, \quad \Phi = \frac{V}{RS}. \quad (2)$$

Необхідно відмітити, що природа не демонструє тіл, більш упакованих, ніж куля, або менш упакованих, ніж нескінченна пластина. Тому всі тіла неправильної геометричної форми характеризуються коефіцієнтом  $\Gamma$ , що приймає значення дійсних чисел в діапазоні від 0 до 2. Відповідна крайова задача теплопровідності з вищенаведеним оператором дивергенції та значеннями  $\Gamma \in [0, 2]$  буде мати інтерполяційний характер по параметру  $\Gamma$ , буде одномірною, нестационарною, інтерполяційною крайовою задачею теплопровідності.

Задачі Стефана моделюють процеси тільки з однокомпонентними рідинами. Для водних розчинів, а тим більше для плодів та овочів при їх заморожуванні не існує наведеної границі розділу фаз, вода вимерзає в дуже широкому діапазоні температур, що описується температурною залежністю частки вимороженої води. Більш того, специфіка фазових перетворень вода – лід визначає суттєву нелінійність процесу заморожування харчової сировини, ефект локалізації теплоти, що виражається, перш за все, у зміні кривизни профілів температури [5]. Саме цей ефект визначає „непрацездатність“ лінійних задач теплопровідності при моделюванні процесів заморожування харчової сировини, навіть якщо останню розбивають на зони, в границях яких теплофізичні властивості слабо залежать від температури. Причина „непрацездатності“ в тому, що лінійні крайові задачі теплопровідності мають завжди, як розв’язок, температурні профілі з постійним знаком кривизни.

Важливий аспект необхідної математичної моделі витікає і з її призначення – не тільки розрахунковим шляхом проектувати доцільні режими заморожування конкретної харчової сировини, оцінювати енерго- та ресурсозберігаючі можливості в умовах промислового виробництва, проектувати технічні засоби для здійснення вибраних технологічних режимів заморожування, але і здійснювати автоматичний або автоматизований (комп’ютеризований) контроль процесів заморожування з метою мінімізації втрат маси сировини, значень показників харчової цінності, витрат енергії. В цьому плані необхідно звернути увагу на довільний, заздалегідь не заданий характер зміни у часі  $\tau$  температури  $T_c(\tau)$  та швидкості  $v_c(\tau)$  охолоджуючого середовища, коли холодильна обробка проводиться у промислових умовах. Тому очевидно, що математична модель повинна бути сформульована в термінах  $T_c(\tau)$  та  $v_c(\tau)$ , що мають характер довільних безперервних функцій, а сама математична модель розв’язуватись чисельними методами.

Також важливо підкреслити, що об'єкти заморожування, тобто плодоовочева сировина, представляють собою тверді тіла, в тому плані, що зміни їх температурних профілів здійснюються в основному за рахунок молекулярної теплопровідності (кондуктивний теплоперенос). Це тверді тіла з теплофізичними характеристиками. За геометрією ці тіла (як і їх нарізані кружками шматки) є суцільними, для них, як тіл неправильної геометричної форми, можливо визначити „псевдоцентр“ з координатою  $x = 0$  та розмір  $x = R$ , як характерну відстань від псевдоцентру до поверхні. Відповідно, якщо температурне поле нестационарне та одномірне, моделюється функцією  $T(x, \tau)$ , то для псевдоцентру  $x=0$  має бути записана умова симетрії температурного поля

$$\frac{\partial T(0, \tau)}{\partial x} = 0. \quad (3)$$

Але такі геометричні уявлення і співвідношення не можуть бути записані для солодкого перцю, плоди якого мають зовнішню поверхню теплообміну (з охолоджуючим середовищем) та внутрішню поверхню (порожнину) теплообміну (на рівні природної конвекції з повітрям порожнини). В цьому разі необхідно ввести розмір  $R_2$  зовнішньої поверхні перцю та розмір  $R_1$  його внутрішньої поверхні як координати двох поверхонь теплообміну, між якими знаходиться суцільний об'єкт заморожування.

Підсумок наведених вище вимог до математичної моделі процесів охолодження та заморожування об'єктів з плодоовочевої сировини дозволяє записати її в такому вигляді (з використанням загальноприйнятих позначень)

$$C_e(T)\rho(T)\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{x^r} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda(T)x^r \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial x} \right]; \quad x \in [R_1, R_2], \quad \tau > 0, \quad (4)$$

$$T(x, 0) = f(x), \quad (5)$$

$$\lambda[T(R_1, \tau)] \frac{\partial T(R_1, \tau)}{\partial x} + \alpha_1(\tau)[T_{c1}(\tau) - T(R_1, \tau)] \frac{F_1}{F_2} = 0, \quad (6)$$

$$-\lambda[T(R_2, \tau)] \frac{\partial T(R_2, \tau)}{\partial x} + \alpha_2(\tau)[T_{c2}(\tau) - T(R_2, \tau)] = 0. \quad (7)$$

Тут моделюючою функцією виступає температурне нестационарне і одномірне поле  $T(x, \tau)$ ,  $C_e(T)$  - ефективна питома теплоємність продукту,  $\rho(T)$  - густина продукту,  $\lambda(T)$  - ефективна теплопровідність (перколяція теплоти) продукту,  $R_1, R_2$  - координати, характерні розміри відповідно до внутрішньої та зовнішньої поверхні теплообміну з величинами поверхонь  $F_1, F_2$ ,  $\alpha_1(\tau), \alpha_2(\tau)$  - змінні в часі коефіцієнти тепловіддачі відповідно з внутрішньої та зовнішньої поверхні теплообміну,  $T_{c1}(\tau), T_{c2}(\tau)$  - температури охолоджуючого середовища, що омиває відповідно внутрішню та зовнішню поверхні.

Крайова задача теплопровідності для суцільних, без внутрішньої порожнини тіл є частковим випадком задачі (4 - 7), а саме, при аналізі суцільних, без внутрішньої порожнини, тіл  $\alpha_I=0$  та  $R_I=0$ . Точка  $x=R_I=0$  виступає в ролі точки симетрії температурного поля (3), що виникає за рахунок усереднення всіх величин, починаючи з  $\alpha$ ,  $T_c$  по зовнішній поверхні (кутових координатах) теплообміну.

Очевидно, що аналітичне вирішення задачі (4 - 7) при довільних змінах в часі характеристик охолоджуючого середовища неможливе. Тому альтернативою є чисельне вирішення задачі, наприклад, скінченно-різницеве. При цьому схема побудови скінченно-різницевих співвідношень, що апроксимують похідні в (4, 5, 7), вимагає побудови алгоритму обчислення середніх значень теплофізичних характеристик сировини у вузлах.

Але для обчислення теплофізичних характеристик необхідно знати значення температур у вузлах - круг замкнувся, і саме це є характерною рисою нелінійних задач. Розв'язок тут знаходиться шляхом використання відомого алгоритму „прогноз – корекція“, деталі якого викладено на прикладі задачі (4 - 7) нижче з використанням термінів та підходів, викладених в [4, 6, 7, 10, 17].

Область інтегрування одновірної та нестационарної задачі (4 - 7) представляє собою прямокутник (при кінцевих значеннях тривалості процесу) і тому чисельна апроксимація цієї задачі може бути проведена на сітці вузлів

$$x_{i+1} = x_i + h, \quad i = \overline{0, N-1},$$

$$h = (R_2 - R_1)/N, \quad \tau_{j+1} = \tau_j + t, \quad j = \overline{0, 1, 2},$$

де кроки  $h, t$  в загальному випадку можуть бути змінними, тобто  $h=h(i), t=t(j)$ .

Підобласть “efgh” для  $i, j$ -того вузла інтегрування зображена на рис. 1.

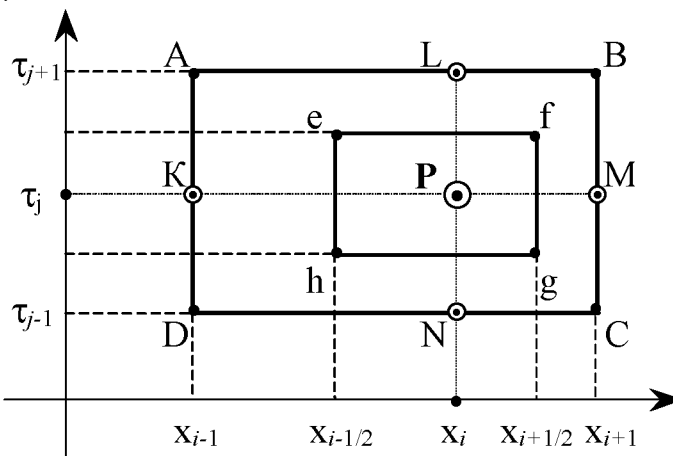


Рис.1. Підобласть “efgh”  $i, j$ -того вузла інтегрування.

Деталі задекларованого вище алгоритму „прогноз-корекція“ або необхідне усереднення значень теплофізичних властивостей визначимо локально, в підобласті кожного окремого вузла інтегрування, в рамках виконання рівняння (4) у вигляді співвідношення

$$\iint_{efgh} x^\Gamma C(T) \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} dx d\tau \cong \iint_{efgh} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda(T) x^\Gamma \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial x} \right] dx d\tau. \quad (8)$$

По-перше, проведемо оцінку інтегралу зліва в (8) шляхом перетворення його як подвійного в двократний (за відповідних відомих умов математичного аналізу)

$$1) \iint_{efgh} x^\Gamma C(T) \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} dx d\tau = \int_{he}^{gf} x^\Gamma dx \cdot \int_{hg}^{tf} C(T) \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} d\tau.$$

Тут доречно використати теорему про середнє для обчислення внутрішнього інтегралу, при цьому застосуємо таку скінченно-різницеву апроксимацію

$$\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} \cong \frac{T_P - T_N}{t},$$

а  $C(T)$  замінимо його середнім значенням  $C_{ij}$  на контурі  $KPMSND$ . Тоді

$$\begin{aligned} \iint_{efgh} x^\Gamma C(T) \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} dx d\tau &\cong C_{ij} (T_P - T_N) \int x^\Gamma dx = \\ &= C_{ij} (T_{ij} - T_{i,j-1}) \left[ \frac{(x_i + h/2)^{\Gamma+1} - (x_i - h/2)^{\Gamma+1}}{\Gamma + 1} \right]. \end{aligned}$$

Розглянемо тепер інтеграл справа в співвідношенні (8)

$$2) \iint_{efgh} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda(T) x^\Gamma \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial x} \right] dx d\tau = \int_{hg}^{ef} d\tau \left[ \lambda(T) x^\Gamma \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial x} \right] \Big|_{he}^{gf}.$$

Аналогічно попередньому випадку використаємо тут теорему про середнє з скінченно-різницевими апроксимаціями

$$\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{he} \cong \frac{T_P - T_K}{h}, \quad \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{gf} \cong \frac{T_M - T_P}{h},$$

а для  $\lambda(T)$  запишемо його середні значення  $\lambda_{ij}^1$  (на  $he$  - лінії контуру  $PNDKAL$ ) та  $\lambda_{ij}^2$  (на  $gf$  - лінії контуру  $PLBMCSN$ ). Тоді

$$\iint_{efgh} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda(T) x^\Gamma \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial x} \right] dx d\tau \cong \lambda_{ij}^2 \frac{(x_i + h/2)^\Gamma}{h} \int_{hg}^{ef} T_M d\tau -$$

$$\begin{aligned}
& - \left[ \frac{\lambda_{ij}^2}{h} \left( x_i + \frac{h}{2} \right)^{\Gamma} + \left( x_i - \frac{h}{2} \right)^{\Gamma} \right] \cdot \int_{hg}^{ef} T_P d\tau + \frac{\lambda_{ij}^1}{h} \left( x_i - \frac{h}{2} \right)^{\Gamma} \int_{hg}^{ef} T_K d\tau \cong \\
& \cong \lambda_{ij}^2 \frac{t}{2h} \left( x_i + \frac{h}{2} \right)^{\Gamma} (T_M + T_C) - \left[ \frac{\lambda_{ij}^2 t}{2h} \left( x_i + \frac{h}{2} \right)^{\Gamma} + \frac{\lambda_{ij}^1 t}{2h} \left( x_i - \frac{h}{2} \right)^{\Gamma} \right] (T_P + T_N) + \\
& + \frac{\lambda_{ij}^1 t}{2h} \left( x_i - \frac{h}{2} \right)^{\Gamma} (T_K + T_D).
\end{aligned}$$

Одержані тотожності (для довільного  $j$ -го моменту часу і конкретного  $i$ -го вузла інтегрування) дозволяють записати усереднені значення теплофізичних характеристик, як таких, що розраховуються за такими співвідношеннями

$$\begin{aligned}
C_{ij} &= (1/6)(C_K + C_P + C_M + C_C + C_N + C_D), \\
\lambda_{ij}^1 &= (1/6)(\lambda_P + \lambda_N + \lambda_D + \lambda_K + \lambda_A + \lambda_L), \\
\lambda_{ij}^r &= (1/6)(\lambda_P + \lambda_L + \lambda_B + \lambda_M + \lambda_C + \lambda_N).
\end{aligned} \tag{9}$$

Підстановка одержаних виразів в (8) веде до апроксимації рівняння (4) наступною системою лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned}
& i = \overline{1, N-1}, \quad \not\equiv \overline{1, M}, \\
a_{ij} &= \frac{C_{ij}}{\Gamma+1} \left[ \left( x_i + \frac{h}{2} \right)^{\Gamma+1} - \left( x_i - \frac{h}{2} \right)^{\Gamma+1} \right] + \frac{t}{2h} \lambda_{ij}^2 \left( x_i + \frac{h}{2} \right)^{\Gamma} + \frac{t}{2h} \lambda_{ij}^1 \left( x_i - \frac{h}{2} \right)^{\Gamma}, \\
b_{ij} &= -\frac{t}{2h} \lambda_{ij}^1 \left( x_i - \frac{h}{2} \right)^{\Gamma}, \quad \epsilon_{ij} = -\frac{t}{2h} \lambda_{ij}^2 \left( x_i + \frac{h}{2} \right)^{\Gamma}, \\
d_{ij} &= \left[ \frac{C_{ij}}{\Gamma+1} \left\{ \left( x_i + \frac{h}{2} \right)^{\Gamma+1} - \left( x_i - \frac{h}{2} \right)^{\Gamma+1} \right\} - \frac{t}{2h} \lambda_{ij}^2 \left( x_i + \frac{h}{2} \right)^{\Gamma+1} - \frac{t}{2h} \lambda_{ij}^1 \left( x_i - \frac{h}{2} \right)^{\Gamma+1} \right] T_{i,j-1} + \\
& \frac{t}{2h} \lambda_{ij}^2 \left( x_i + \frac{h}{2} \right)^{\Gamma} T_{i+1,j-1} + \frac{t}{2h} \lambda_{ij}^1 \left( x_i - \frac{h}{2} \right)^{\Gamma} T_{i-1,j-1}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Використовуючи аналогічні підходи також одержимо, що одностороння скінченно-різницева апроксимація граничних умов (6, 7) доповнює систему (10) ще двома рівняннями:

$$\begin{aligned}
3T_{0j} - 4T_{1j} + T_{2j} &= \frac{2h\alpha_1(\tau_j)}{\lambda(T_{0j})} [T_{a1}(\tau_j) - T_{0j}], \\
3T_{Nj} - 4T_{N-1,j} + T_{N-2,j} &= \frac{2h\alpha_2(\tau_j)}{\lambda(T_{Nj})} [T_{a2}(\tau_j) - T_{Nj}].
\end{aligned} \tag{11}$$

Рішення системи (10), (11) може бути одержане методом прогонки, починаючи із заданого температурного поля  $T_{i,0}$ ,  $i = \overline{0, N}$  (відповідно (5)) в початковий момент часу  $\tau = 0$ .



Метод прогонки полягає в тому, що температурні поля в наступні моменти часу обчислюються за емпіричним лінійним співвідношенням

$$T_{ij} = M_{i-1,j}T_{i-1,j} + K_{i-1,j}, \quad (12)$$

де коефіцієнти  $M_{ij}$ ,  $K_{ij}$  називають прогоночними.

Вирази для їх розрахунку одержують шляхом прямої підстановки (12) у (10, 11) та трактуванням одержаних співвідношень як тотожностей. При цьому, можливо реалізувати ситуацію, коли прогоночні коефіцієнти обчислюються „прямою прогоною – від меншого номера вузла до наступного“, а температури у вузлах – „зворотною прогоною“. Можливо побудувати формули для альтернативного алгоритму – зворотна прогонка для прогоночних коефіцієнтів, пряма прогонка для температурного поля. Чисельна реалізація обох варіантів показує ідентичність чисельних результатів.

Ще раз доречно звернути увагу на структуру одержаної апроксимуючої системи рівнянь (10, 11), де присутні локально усереднені значення теплофізичних властивостей. Їх розрахунок по (9) вимагає знання температурних полів на трьох сусідніх проміжках часу  $j-1$ ,  $j$ ,  $j+1$ . За цієї причини розрахунки в цілому потрібно проводити в режимі „прогноз-корекція“:

а) опираючись на відоме температурне поле в  $(j-1)$ -ий момент часу проведемо прогнозування температурних полів в наступні  $j$ -ий та  $(j+1)$ -ий моменти часу. При цьому використовуються відомі [6, 7] літературні рекомендації по особливостям прогнозування, що забезпечують в розрахунках усталену збіжність наступних розрахунків (ітерацій);

б) за співвідношеннями (12) проводиться перше обчислення (перша корекція) температурного поля  $T_{ij}$  в  $j$ -ий момент часу. Якщо тут здійснити прогноз температурного поля  $T_{i,j+2}$  в  $(j+2)$ -ий момент часу, то можливо аналогічно одержати перше обчислення (першу корекцію) поля  $T_{i,j+1}$ , а вже на цій основі провести другу (наступну) корекцію температурного поля  $T_{ij}$  в  $j$ -ий момент часу;

в) повторення ітерацій попереднього пункту по корекції температурного поля  $T_{ij}$  продовжуватимуться, доки абсолютне значення максимальної різниці температур в сусідніх ітераціях (для усіх вузлів інтегрування) не стане величиною, меншою за задану (допустиму) величину, наприклад  $10^{-3}$  К.

г) одержане температурне поле  $T_{ij} \equiv T(x_i, \tau_j)$  для  $j$ -го моменту часу використовується для розрахунку основних характеристик процесу охолодження чи заморожування, а саме – середньомасової температури, тривалості процесу за розрахунковим значенням середньомасової температури, питомих значень теплового потоку (через  $\alpha_2$  та різницю температур поверхні об'єкту і  $T_{c2}$ ), товщини промороженого прошарку

для  $j$ -го моменту часу. При цьому робиться висновок щодо необхідності продовження розрахунків характеристик процесу для наступних моментів часу.

Значення досягнутої на  $j$ -ий момент часу середньомасової температури розраховується в три етапи :

- спочатку для температурного профілю  $T_{ij} \equiv T(x_i, \tau_j)$  розраховується відповідне поле ентальпій  $E(x_i, \tau_j)$ ;

- потім розраховуються інтегруванням середньооб'ємні значення ентальпії об'єкту охолодження чи заморожування  $E(\tau_j)$  в  $j$ -ий момент часу за формулою (ця формула відповідає вибраній криволінійній системі координат з коефіцієнтом геометричної форми  $\Gamma$ )

$$E(\tau_j) = \frac{\Gamma + 1}{R_2^{\Gamma+1} - R_1^{\Gamma+1}} \int_{R_1}^{R_2} x^\Gamma E(x, \tau_j) dx . \quad (13)$$

- використовуючи відомі алгоритми пошуку кореня (нуля) безперервної функції (заданої у нашому випадку таблично), обчислюємо середньоентальпійну температуру  $T_e(\tau_j)$  об'єкту охолодження або заморожування як корінь рівняння

$$E(T_e) = E(\tau_j) . \quad (14)$$

Також можливо (що не завжди потрібно) розрахувати і товщину „у“ промороженого прошарку об'єкту заморожування (від поверхні) або розморожування (від центру) як корінь рівняння

$$T(R_2 - y, \tau_j) = T_{CR} \quad (15)$$

Виписаний вище алгоритм для цілей розрахунку характеристик процесів охолодження і заморожування об'єктів з плодоовочевої сировини був апробований [4, 8, 10, 12, 17] на прикладі об'єктів з сировини тваринного походження: в холодильній технології м'яса (яловичина, свинина у напівтушах), тушок курей, окремих риб. Він продемонстрував усталену збіжність ітерацій та прийнятні значення похибок при розрахунках температурних полів, теплових потоків конкретних об'єктів заморожування чи розморожування. При цьому число кроків  $N$  по координаті дорівнювало 50-100, а крок  $t$  в часі від 3 до 10 с.

З позицій розв'язку задач даної роботи представляє інтерес моделювання, в рамках крайової задачі (4 - 7), процесів заморожування об'єктів різної геометричної форми (пластини, циліндра, кулі, піраміди, диску, форма яйця) з модельної речовини тилози (цей гель моделює харчову сировину, може на відміну від харчової сировини відтворюватись для наступного експерименту за складом і теплофізичними характеристиками, виготовляється з оксиетилметилцелюлози + вода + метакрезол + NaCl), яке проведене також в роботах [4, 8, 10, 12, 17].

Базою для такої апробації задачі (4 - 7), як математичної моделі, стали серія експериментальних даних [11, 13, 15, 16, 18], проведених на об'єктах, виготовлених з тилози. В цих експериментальних дослідженнях не вимірювались температурні профілі чи теплові потоки, тільки початкова температура  $T_{поч}$ , температура „псевдоцентру“ в кінці процесу заморожування  $T_{Ц}$ , а також наведені чисельні значення коефіцієнтів тепловіддачі  $\alpha$  з поверхні суцільних об'єктів з тилози. Час досягнення „псевдоцентром“ температури мінус 10 °С вимірювався і трактувався як тривалість процесу заморожування. Теплофізичні властивості тилози у вигляді таблично заданих функцій були запозичені для розрахунків [4, 10] в рамках математичної моделі (4 - 7) з публікації [11]. Автори [11, 13, 15, 16] оцінюють похибку своїх експериментальних даних величиною, що не перевищує  $\pm 7\%$ .

Одержані в [4, 10] розрахункові результати свідчать, що в процесах заморожування значення теплових потоків суттєво змінюються в часі, на один - два порядки.

Ці значення менші в кінці процесу по відношенню до їх значень на початку процесу. Тому усереднення цих значень при визначенні теплового навантаження на охолоджуючі прилади – процедура не тривіальна. Також від об'єктів відводиться суттєво різна кількість теплоти (за розрахунком середньомасової температури), хоч всі вони охолоджені до стану, коли температура „псевдоцентра“ становить мінус 10°С. Це означає також, що якщо такі об'єкти в подальшому направляються в камери збереження або транспортуються до споживача, в них формуються рівномірні температурні поля з доморожуванням чи, навпаки, розморожуванням об'єктів.

*Висновки.* Розраховані значення тривалості процесів в рамках крайової інтерполяційної задачі теплопровідності для тіл різної геометричної форми за значенням температури псевдоцентра відхилялись від відповідних експериментальних значень з похибкою не більше експериментальної в 7 %. В цьому плані є усі підстави для застосування вище розписаного алгоритму для розрахунків процесів заморожування плодоовочевої сировини. Але для числової реалізації алгоритму необхідно проаналізувати специфіку теплообміну при зовнішньому обтіканні об'єктів плодоовочевої сировини охолоджуючим середовищем.

#### Література:

1. Бражников А.М. Теория теплофизической обработки мясопродуктов / А.М. Бражников. – М.: Агропромиздат, 1987. – 271 с.
2. Лыков А.В. Теория теплопроводности / А.В. Лыков. – М.: Высшая школа, 1967. – 592 с.
3. Михайлов М.Д. Нестационарный тепло- и массоперенос в

одномерных телах / М.Д. Михайлов. – Минск: Изд-во ИТМО, 1969. – 247 с.

4. *Онищенко В.П.* Проектирование процессов холодильной технологии пищевых продуктов для производственных холодильников / В.П. Онищенко // Холодильная техника и технология. – 1998. – Вып.59., № 2. – С. 51–56.

5. *Онищенко В.П.* Эффект локализации теплоты в процессах замораживания мяса / В. П. Онищенко, В. П. Вязовский, С. Е. Головский // Тезисы докладов Всесоюзной научно-технической конференции "Пути развития науки и техники в мясной и молочной промышленности", 17-19 сентября 1988, Углич, ч. III. - М.: АгроНИИТЭИММП, 1988. - С. 20-21.

6. *Самарский А.А.* Вычислительная теплопередача / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. – М. : Едиториал УРСС, 2003.- 784 с.

7. *Самарский А.А.* Численные методы: учебное пособие для вузов / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат.лит., 1989. – 432 с.

8. Создание систем технологического контроля процессов холодильной обработки и хранения мяса: Обзорная информация / И. Г. Чумак, В. П. Онищенко, Ю. А. Желиба, С. Е. Головский. - М.: АгроНИИТЭИММП, 1992. - 24 с.-(Холодильная промышленность).

9. Холодильная техника и технология : [учебник] / под ред. А. В. Руцкого. – М. : ИНФРА – М, 2000. – 286 с.

10. Холодильные установки. Проектирование : учебное пособие / [И.Г. Чумак, А.Ю. Лагутин, В.П. Чепурненко, С.Ю. Ларьяновский, Н.И. Чумак, В.П. Кочетов, В.П. Онищенко] ; под ред. докт. тех. н., проф. И.Г. Чумака. – [3-е изд.], перераб. и доп.- Одесса: Друк, 2007.- 480 с.

11. Experimental data for freezing and thawing of multi-dimensional objects / D. J. Cleland, A. C. Cleland, R. L. Earle, S. J. Byrne // Intern. J. of Refrigeration.-1987/01. – Vol. 10. – P. 22-31.

12. *Chumak J. G.* Mathematical modelling of cooling and freezing of various foodstuffs / J. G.Chumak, V. P. Onisthenco, J. A. Chraizi // Науч. трудове / Висш. ин-т по хранителна и вкусова промышленность. – Пловдив, 1998. – Т. 43, свитък 3. – С. 279–287. Англ. – Библиограф.: С. 286 – 287.

13. *De Michelis A.* Freezing time Predictions for Brick and Cylindrical - Shaped Foods / A. De Michelis, A. Calvelo // J. of Food Science. - 1983. - Vol. 48. - P. 909 - 913, 934.

14. *Kumar P.* Thermal Conductivity Minimum : A New Water Anomaly / P. Kumar, H. E. Stanley // arXiv : 0708.4154v1 [cond-mat.soft] 30 Fug 2007.

15. *Langmuir I.* Flow of Heat thru furnace walls: The shape factor / I. Langmuir, E.Q. Adams, G.S. Meikle // Trans. Amer. Electrochem. Soc. – 1913. – Vol. 24, No. 53. – P. 53–77.

16. *Le Blanc D.I.* Freezing of a parallelepiped food product. Part 1. Experimental determination / D. I. Le Blanc, R. Kok, G. E. Timbers // Intern. J. of Refrig. – 1990. – Vol. 13, No. 11. – P. 371–378.

17. *O'Callagan M.G.* Instability of the planar freeze front during solidification of an aqueous binary solution / M. G. O'Callagan, E. G. Cravalho, C. E. Huggins // J. Heat. Trans. – 1980. – Vol. 102. – P. 673–674.

18. *Phan P.A.* Effects de divers traitements de congelation sur L'evaluation des parametres de texture et d'exsudation des fruits. Relation de la qualite / P. A. Phan, T. Mimault, J. Mimault // Jnt. j., Refrig. – 1980. – Vol. 3, № 5. – P. 225–260.

19. *Zisiewska Z.* Effect of storage period and temperature on the chemical composition and organoleptic quality of frozen tomato cubes / Z. Zisiewska, W. Kmiesik // Food Chem. – 2000. – Vol. 70, № 2. – P. 167–173.

## **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ЗАМОРАЖИВАНИЯ ПЛОДООВОЩНОГО СЫРЬЯ ЗА РАЗНЫМИ УСЛОВИЯМИ ТЕПЛООБМЕНА**

Ялпачик В.Ф.

**Аннотация - работа посвящена методике математического моделирования процессов замораживания объектов из плодоовощного сырья в промышленных условиях.**

## **MATHEMATICAL DESIGN OF PROCESSES OF FREEZING OF FRUIT AND VEGETABLE RAW MATERIAL AFTER DIFFERENT TERMS OF HEAT EXCHANGE**

V. Yalpachik

### ***Summary***

**This work is devoted to methodologies of mathematical design of processes of freezing of objects from fruit and vegetable raw material pilot-scale.**