

УДК 631.363.636.085

МОДЕЛЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОТНОСТИ ЗЕРНОВЫХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ ОДНОСЛОЙНОЙ ПОДАЧЕ

Шацкий В.В., д.т.н.,

Демьяненко Д.В., аспирант,*

Чумак В.А., аспирант**

Коломиец С.М., к.т.н.

Таврический государственный агротехнологический университет,

Тел.: +38(0619) 42-05-70

Аннотация - представлена математическая модель динамичности структуры и распределения плотности зерновых материалов при однослойной подаче.

Ключевые слова – зерновой материал, частицы, слой, структура, дозирование, плотность, неравномерность распределения.

Постановка проблемы. Качество комбикормов зависит от качества подготовки их к скармливанию, где одним из важных целого ряда технологических процессов является дозированная подача компонентов на обработку, на качественный показатель которого влияет фракционный состав кормового материала.

Создание математических моделей, описывающих влияния фракционного состава кормов на качество их обработки, даст возможность разработки математических моделей многих технологических процессов обработки кормов, с определением их влияния на продуктивность животных, и технологий производства животноводческой продукции в целом, что и является целью настоящей работы.

Анализ последних исследований. Влияние фракционного состава зерна на качество однослойной подачи проявляется двояко – различным количеством зернин на единице площади ввиду различного их расположения на плоскости и различным сочетанием частиц разного размера на этой площади. В обоих случаях это влияет на массу материала на единице площади. Если первое подробно описано в работе [1], то влияние фракционного состава на качество

© д.т.н. В.В. Шацкий, аспирант Д.В. Демьяненко, аспирант В.А. Чумак, к.т.н. С.М. Коломиец

* Научный руководитель - д.т.н. В.В. Шацкий

** Научный руководитель - д.т.н. В.О. Мунтян

распределения зернин различным сочетанием осталось в тени, что и служит основанием для рассмотрения этого вопроса.

Принимаем допущение, что зерно располагается на плоскости в одном из трех положений, занимая площадь F_u ($F_u^{\max} = la$, $F_u^{\min} = ab$, $F_u^{cp} = lb$, (l, a, b - длина, ширина и толщина зернины) с вероятностью P_{ui} .

Площадь, занимаемая зернами одной фракции, определяется через вероятность P_{ui} их расположения. Тогда математическое ожидание величины площади, которую займут зерна контрольной порции N_{Π} , определяется как сумма площадей, занимаемой зернами i -х фракций в u -х положениях, при условии равновероятного распределения зерен всех фракций по площади F [1],

$$F = N_{\Pi} \left\{ \sum_{i=1}^n \left[P_i^u \left(\sum_{u=1}^3 P_{ui} F_{ui} \right) \right] \right\}, \quad (1)$$

где N_{Π} - количество зерен контрольной порции;

P_i^u - вероятность появления зерна i -ой фракции в порции;

P_{ui} - вероятность u -го расположения зерна i -й фракции на плоскости;

F_{ui} - площадь занятая зерном в u -ом положении.

Тогда математическое ожидание количества зерен \bar{N}_m , расположенных на определенной для исследования площади F_N , определяется из (1) [1]

$$\bar{N}_m = \frac{F_N}{\sum_{i=1}^n \left[P_i^n \left(\sum_{u=1}^3 (P_{ui} F_{iu}) \right) \right]}. \quad (2)$$

Отклонение количества \bar{N}_m зерен через разное положение их на плоскости определяется как среднее квадратичное отклонение [1]

$$\sigma_N = \left\{ \sum_{i=1}^n \left[\sum_{u=1}^3 \left(N_m P_i^n P_{ui} - P_{ui} \right)^2 \right] \right\}^{0,5}. \quad (3)$$

Выражая количество зерен через их массу m_i , получаем отклонение массы контрольной порции через разное их расположение на плоскости [1]

$$\sigma_{mN} = \left\{ \sum_{i=1}^n m_i^2 \left[\sum_{n=1}^3 N_m P_i^n p_{ui} \left(- p_{ui} \right) \right] \right\}^{0,5} \quad (4)$$

Таким образом определяется влияние расположение частиц на плоскости на качество подачи материала.

Постановка цели работы. Целью работы является разработка математической модели динамичности структуры и распределения плотности зерновых материалов при однослойной подаче.

Метод исследований обусловлен рассмотрением поведения дискретной внутренней структуры материала в среде стохастического перемещения и взаимодействия отдельных частиц различного размера и массы. В связи с этим для построения модели однослойной подачи зернового материала целесообразно использовать теорию возвратности марковских цепей, метод дискретных элементов и комбинаторику.

Основная часть. На качество подачи зернового материала на обработку существенное влияние оказывают технологические схемы и параметры процессов и устройств дозированной подачи и перемещения материала в процессе обработки, а также физико-механические свойства зернового материала, где особое место занимают размерные характеристики, их диапазон изменения и характер распределения. Выбор технологического процесса во многом определяется параметрами фракционного состава, особенно это относится к однослойной подаче зернового материала на термическую обработку.

Представим зерновой материал состоящий из упругих, соприкасающихся между собой частиц сферической формы и пустот между ними. Диаметр частиц эквивалентен диаметру d_3 зерна, определенному по формуле шара: $d_3 = \sqrt[3]{(6V_3 / \pi)} = \sqrt[3]{(6klab / \pi)}$, где V_3 – объем зерна, мм³, $V_3 = klab$, ; k – коэффициент, учитывающий форму зерна (для пшеницы и ячменя -0,52, для ржи и овса -0,42, для гороха 0,56) [2]; l, a, b – длина, ширина и толщина зернины.

Процесс формирования порции зернового материала на плоскости происходит в потоке хаотически движущихся относительно друг-друга частиц, где на каждом переходе из одного состояния в

другое происходит в двух направлениях – вправо-влево с равной вероятностью при одновременном перемещении вперед. Вероятность того, что отправляясь из состояния i , частица возвратится в это состояние через n переходов, при полиномиальном распределении, определяется выражением [3]

$$P_{00}^{2n} = \sum_{i,j,i+j=n} \frac{(2n)!}{i!i!j!j!} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} C_{2n}^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (5)$$

где n - количество переходов системы;

C_{2n}^n - число сочетаний по n элементов из $2n$ различных элементов, где каждый элемент используется только один раз
 $C_{2n}^n = 2n!/(n!)^2$.

Качество формирования порции зернового материала в один слой определяется отклонением количества частиц и их массы, располагающихся на единичной плоскости $F1$ в различных сочетаниях (комбинациях).

Количество всех сочетаний расположения частиц B в объеме, заполненном частицами A (меньшего размера), определим, воспользовавшись методом дискретных элементов [4] и понятием сочетания n элементов по k элементов [5] или иначе - k_B -элементным подмножеством множества из n элементов.

На наш взгляд интересно рассмотреть вероятности расположения частиц n_B , соприкасаясь друг с другом, на основании статистики Бозе-Эйнштейна [5].

Предположим, что n_B одинаковых частиц распределяются по n ячейкам ($n_B \leq n$). Количество способов их распределения равно

$$C_{n_B+n-1}^{n_B} = \frac{C_{n_B+n-1}^{n_B}}{n_B! C_{n-1}^{n_B}}, \quad (6)$$

Пусть в какую-то определённую ячейку попало ровно k частиц. Количество вариантов, которыми оставшиеся n_B-k частиц могут быть распределены по $n-1$ оставшимся ячейкам

$$C_{n_B-k+n-2}^{n_B-k} = \frac{C_{n_B-k+n-2}^{n_B-k}}{(n_B-k)! C_{n-2}^{n_B-k}}. \quad (7)$$

Тогда вероятность того, что в определённую ячейку попало ровно k частиц, равна

$$P_{k_B} = \frac{C_{n_B-k}^{n_B-k} C_{n_B-k+n-2}^{n_B-k}}{C_{n_B+n-1}^{n_B}} \quad (8)$$

Зная вероятность расположения частиц в ячейке определенной площади F_1 , а следовательно и количество $N(k_B)$ блоков сочетаний (композиций) (рис.1), где частицы A плотно окружают частицы B , находящиеся в различном сочетании k_B ($k=1,2,3$). Принимаем, что частицы блоков сочетаний (композиций) располагаются в соприкосновении друг с другом с плотностью упаковки $K_{ПAB}=0,9069$ [6].

Для моделирования структуры материала состоящего из различного по размерам частиц рассмотрим крайние случаи сочетания частиц – одинакового i -го размера частиц и частицы j -го размера (см. рис.1). В первом случае это сочетание одного элемента в виде шара B с элементами A (рис.1а).

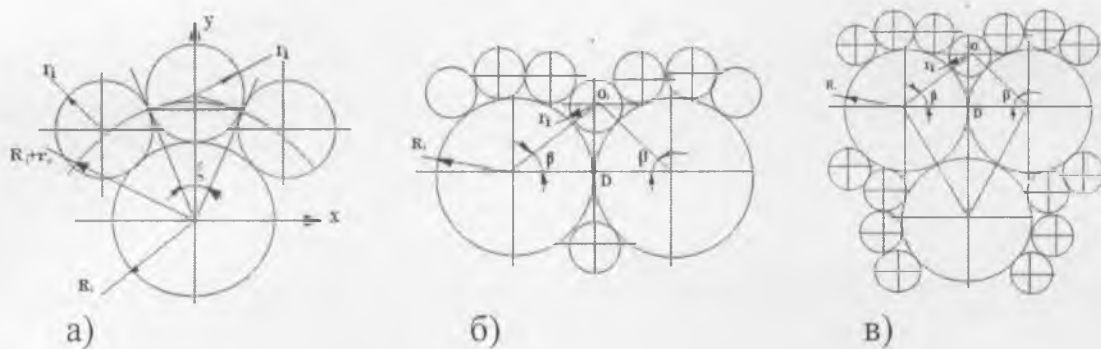


Рис.1. Схемы расположения частиц

Для решения поставленной задачи в первую очередь необходимо определить площадь, занимаемую одной частицей j -го размера и окружающих ее частицами i -го размера. За i -й размер частиц принимаем средний размер $n_{\Sigma}-n_j$ частиц (n_{Σ} , n_j – количество частиц всего фракционного состава и j -й фракции элементарной площадки F_1).

Для расчета количества частиц, располагающихся на площадке определенного неизменного размера принимаем допущение, что равновеликие частицы i -го размера располагаются на этой площадке по схеме случайной упаковки [6].

Рассмотрим вариант расположения частиц на площадке, где вокруг одной частицы B , приравненной к шару, располагаются частицы A i -го размера, соприкасаясь с частицей B и каждый с собой по условной окружности радиусом R_c

при $R_B > r_i$

$$R_c = \left\{ \left[(R_B + r_i) \cos \arcsin \frac{R_B - r_i}{R_B + r_i} \right]^2 - r_i^2 \right\}^{0,5} \quad (9)$$

при $R_B < r_i$

$$R_c = \left\{ \left[(R_B + r_i) \cos \arcsin \frac{r_i - R_B}{R_B + r_i} \right]^2 - r_i^2 \right\}^{0,5} \quad (10)$$

Количество частиц, располагающихся вокруг одной частицы B , определяется выражением

$$n_{r_i} = 2\pi / 2\xi = 180 / \arcsin \frac{r_i}{(R_B + r_i) \cos \tau} \quad (11)$$

где ξ – угол между прямыми, проведенными из центра частицы B через центр и касательно окружности частицы A ,

$$\xi = \arcsin \left\{ r_i / [(R_B + r_i) \cos \tau] \right\};$$

τ – угол между плоскостью расположения частиц и прямой соединяющей центры контактирующих частиц

при $R_B > r_i$

$$\tau_{R_B \geq r_i} = \arcsin \frac{R_B - r_i}{R_B + r_i} \quad (12)$$

при $R_B < r_i$

$$\tau_{R_B < r_i} = \arcsin \frac{r_i - R_B}{R_B + r_i} \quad (13)$$

Тогда площадь поверхности площадки, которую занимает композиция расположения (блок) N_{AB1} частиц (см. рис.1, а) определяется по формуле

$$S_{AB1} = \pi R_B^2 + \frac{n_{r_i}}{K_{ПAB}} \left(r_i^2 - S^{неp} \right) \quad (14)$$

где S^{nep} - площадь взаимного перекрытия частиц A и B , радиусами равными r_i и R_B , определяется как сумма площадей сегментов

$$S^{nep} = r_i^2 \arccos \frac{a_{ra}}{r_i} + R_B^2 \arccos \frac{a_{ra}}{R_B} - a_{ra} R^{11} \sin \left(\arccos \frac{a_{ra}}{r_i} \right), \quad (15)$$

где a_{ra}, a_{RB} - проекции на горизонтальную плоскость расстояний между центрами частиц и радиальной плоскостью условного перекрытия частиц A и B : $a_{ra} = 1/2 R^{11} [(R^{11})^2 - (R_B^2 - r_i^2)]$ и

$$a_{RB} = 1/2 R^{11} [(R^{11})^2 + (R_B^2 - r_i^2)];$$

R^{11} - проекции на горизонтальную плоскость расстояний между центрами частиц: $R^{11} = (R_B + r_i) \cos \tau$.

$K_{ПAB}$ - плотность упаковки частиц A , контактирующих с частицей B .

Для расчета количества частиц, расположенных на определенной площади площадки $F1$ ($F1 = a^2$), принимаем допущение, что равновеликие частицы A_x располагаются на плоскости хаотически с плотностью $K_{ПА}$ упаковки от 0,7854 до 0,9069 [6], что в среднем $K_{ПА}$ составляет 0,85.

Для определения количества частиц A , располагающихся вокруг двух частиц B (рис.2, б), определим зону контакта, в которую не могут попасть частицы A .

Частицы A во впадине контакта двух частиц B располагаются своими центрами на расстоянии DO_1 под углом β с линией соединяющей центры частиц B , равным $\beta = \arccos[(R_B)/(R^{11})]$.

Угол ψ_{2B} сегмента одной частицы B , в плоскость которого не попаряют частицы A , равен

$$\psi_{2B} = 2(\beta - \xi) = 2 \left(\arccos \frac{R_B}{R_B + r_i \cos \tau} - \arcsin \frac{r_i}{R_B + r_i \cos \tau} \right). \quad (16)$$

Тогда количество частиц A , окружающих две контактирующие частицы B определяется, с учетом количества частиц A не поместившихся в зоне контакта двух частиц B

$$n_{AB2} = 2(2\pi / 2\xi - \psi_{2B} / 2\xi) = \frac{2\pi - \psi_{2B}}{\arcsin \frac{r_i}{R_B + r_i \cos \tau}}. \quad (17)$$

Площадь поверхности площадки F1, которую занимает копозиция расположения (блок) N_{AB2} частиц (см. рис.1) определяется по формуле

$$S_{AB2} = 2\pi R_B^2 + \frac{n_{AB2}}{K_{ПAB}} (\pi r_i^2 - S^{nep}) \quad (18)$$

При кучном расположении трех частиц B (рис 2в) количество частиц A контактирующих с тремя частицами B определяется исключением количества частиц A из зоны невозможного расположения частиц A, то есть из зоны контакта трех частиц B.

Угол сегмента одной частицы B, в которую не попаряют частицы A, равен

$$\psi_{3B} = \frac{\pi}{3} + 2(\beta - \xi) = \frac{\pi}{3} + 2 \left(\arccos \frac{R^{II} - r_i}{R_B + r_i \cos \tau} - \arcsin \frac{r_i}{R_B + r_i \cos \tau} \right) \quad (19)$$

Тогда количество частиц A, окружающих три контактирующие частицы B определяется, с учетом количества частиц A не поместившихся в зоне контакта трех частиц B

$$n_{AB3} = 3(2\pi / 2\xi - \psi_{3B} / 2\xi) = 3 \frac{2\pi - \psi_{3B}}{2 \arcsin \frac{r_i}{R_B + r_i \cos \tau}} \quad (20)$$

Площадь поверхности площадки, которую занимает копозиция расположения (блок) N_{AB1} частиц (см. рис.1, а) определяется по формуле

$$S_{AB3} = \frac{3\pi R_B^2 + n_{AB3} (\pi r_i^2 - S^{nep})}{K_{ПAB}} \quad (21)$$

Неравномерность распределения количества частиц на плоскости от различного сочетания частиц разного размера определяется отклонением массы общего количества частиц, располагающихся на контрольной площади F1 размером a^2 .

Отклонение массы ΔM_{Bk} на площади S_{Bk}^n определяется разницей масс M_{Bk} частиц блоков Bk и частиц, равномерно расположенных на площади S_B^n .

$$\Delta M_{Bk} = M_{S_{Bk}^n} - \frac{M_{F1}}{F1} S_{ABk}^n, \quad (22)$$

где $M_{S_{Bk}^n}$ - масса частиц блоков АВк, $M_{S_{Bk}^n} = M_{ABk} P_k n_B$, ($k=2,3$);
 M_{ABk} - масса частиц одного блока;
 M_{F1} - масса частиц, равномерно расположенных на площади F1,
 $M_{F1} = n_A m_A + n_B m_B$;
 S_{ABk}^n - площадь, занимаемая блоками АВк $S_{ABk}^n = S_{ABk} P_k n_B$.
 P_k - вероятность сочетания частиц В.

Вероятность P_{2B} и P_{3B} образования блоков k_B , определенная согласно (6, 7, 8), находится в зависимости от количества n_B частиц В в порции. Тогда математическое ожидание количества блоков $N(k_B)$ определяется как $N(k_B) = \bar{n}_B P_{kB}$, а среднее квадратическое отклонение $\sigma_{N(k_B)}$ этого количества $N(k_B)$ для случая $k_B=2$ и $k_B=3$ - по известному выражению $\sigma_{N(k_B)} = \sqrt{\bar{n}_B P_{kB} (1 - P_{kB})}$. В этом сочетании количество n_B частиц В составляет $n_{B2,3} = 2\bar{n}_{k2} + 3\bar{n}_{k3}$.

Среднее квадратическое отклонение частиц, расположенных на площади S_{ABk}^n определяется выражением

$$\sigma_{MBk} = \frac{M_{Bk}}{n_B \sqrt{P_k n_B (1 - P_k)}}, (k = 2,3). \quad (23)$$

Для определения отклонения масс частиц, свободных от контакта в блоках, определим площадь, незанимаемую блоками Вк

$$S_{A,B_x} = F1 - n_B \left(\sum_{k=2}^3 P_k S_{ABk}^n \right). \quad (24)$$

Вместе с тем количество частиц А и В на площади S_{ABk}^n не является постоянным из-за образования на ней блоков АВ1, за счет чего на этой площади образуется свободная площадь $\Delta S_{A,B_x}$

$$\Delta S_{A_x B_x} = S_{A_x B_x} - \left[S_{AB1} \frac{n_A - \sum_{k=2}^3 n_{Bk} n_{ABk}}{n_{AB1}} - S_{RB} \frac{n_B - n_B (2P_2 + 3P_3)}{k_{ПА}} \right]. \quad (25)$$

Тогда среднее квадратическое отклонение массы частиц от различного их сочетания равно

$$\sigma_{mNc} = \left[\sum_{k=2}^3 \sigma_{MBk}^2 + \left(\Delta S_{A_x B_x} \frac{\sigma_{mF1}}{F1} \right)^2 \right]^{0,5}. \quad (26)$$

На основании вышеизложенного среднее квадратическое отклонение массы σ_{mNcp} частиц от различного их расположения и сочетания определяется выражением

$$\sigma_{mNcN} = \left[\sum_{k=2}^3 \sigma_{MBk}^2 + \left(\Delta S_{A_x B_x} \frac{\sigma_{mF1}}{F1} \right)^2 + \sigma_{mN}^2 \right]^{0,5}. \quad (27)$$

Масса (M_{ABF1}) частиц на площадке $F1$ определяется как функция известного количестве частиц A и B и их массы, а плотность ρ_{F1} распределения массы частиц на площадке $F1$ – как удельное распределение массы M_{ABF1} на площади $F1$, то есть $\rho_{MF1} = M_{ABF1} / F1$. Распределение плотности на плоскости площадью $F1$ определяется из соотношения отклонения масс и плотности материала $\sigma_{\rho_{F1}} = \rho_{MF1} \sigma_{mNcN} / M_{ABF1}$.

Полученные зависимости предоставляют собой математическую модель распределения плотности зерновых материалов при однослойной его подаче, что дает возможность на основе моделирования определить изменения количественного соотношения частиц A и B в порции при изменении одного из них в пределах допустимой неравномерности подачи зернового материала на обработку, а также - зависимость влияния качества распределения частиц по столу обработки, с учетом качества их подачи и фракционного состава корма, на динамичность структуры и плотности распределения однослойного потока зерновых материалов.

Выводы. Разработанная модель динамичности структуры и плотности однослойного распределения частиц зерновых материалов

дает возможность создать математическую модель механизированного процесса обработки компонентов рациона с определением параметров процесса и технического средства его осуществления.

Литература.

1. *Шацкий В.В.* Моделирование механизированных процессов приготовления кормов/ *В.В. Шацкий* – Запорожье: ПЦ «Х-ПРЕСС», 1998. -140 с.
2. *Данко И.* Физико-химическая и геометрическая характеристика зерна: [Электрон. ресурс]. – Режим доступа: girls4girls.ru/.../2318-fiziko-himicheskaya-i-geometricheskaya-harak.
3. *Карлин С.* Основы теории случайных процессов: [пер. с англ.]/ *С. Карлин*; под редакц. Коваленко И.Н. - М.: Мир, 1971.- 61 с.
4. Хокни Р. Численное моделирование методом частиц: [пер. с англ.]/ *Р. Хокни, Дж. Иствуд* . - М.: Мир, 1987. - 640 с.
5. Комбинаторика. Число сочетаний: [Электрон. ресурс]. – Режим доступа: natalymath.narod.ru/combinatory.html.
6. *Слоэн Н. Дж. А.* Упаковка шаров/ *Scientific American*: издание на русском языке. - 1984. - № 3. - С. 72–82.

МОДЕЛЬ РОЗПОДІЛУ ЩІЛЬНОСТІ ЗЕРНОВИХ МАТЕРІАЛІВ ПРИ ОДНОШАРОВІЙ ПОДАЧІ

Шацький В.В., Дем'яненко Д.В., Чумак В.О., Коломієць С.М.

Анотація

Представлено математичну модель динамічності структури і розподілу щільності зернових матеріалів при одношаровій подачі.

DENSITY DISTRIBUTION MODEL OF GRAIN MATERIALS IN A SINGLE-LAYER FLOW

V. Shatsky, D. Demjanenko, V. Chumak, S.Kolomiec'.

Summary

A mathematical model of the dynamic structure and density of granular materials distribution in a single-layer flow is presented.